1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x^2+5} = x+1$. **(5 pct.)**

   a) $x=-2$; b) $x=4$; c) $x=0$; d) $x=2$; e) $x=3$; f) $x=-1$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului $x^2+5 \geq 0$ este totdeauna satisfăcută, deci nu conduce la limitarea domeniului necunoscutei x. În schimb, se observă că pozitivitatea membrului stâng al ecuaţiei conduce la condiţia $x+1 \geq 0$, deci $x \in [-1, \infty)$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem, după simplificări, $2x = 4$, deci $x = 2 \in [-1,\infty)$, şi deci $x = 2$, deci este unica soluţie a ecuaţiei. *Notă.* Se observă că subiectul fiind de tip grilă, răspunsul corect se putea evidenţia prin simpla înlocuire a variantelor de răspuns în ecuaţie ($x = 2$ fiind singura variantă care satisface ecuaţia).

2. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 13; b) 18; c) 0; d) 11; e) 1; f) 14.

   Soluţie. Calculul se poate face în multe moduri: aplicând regula Sarrus, regula (echivalentă) a triunghiului, dezvoltând după o linie sau după o colană sau efectuând în prealabil operaţii cu determinanţi care duc la simplificarea formei acestuia ("fabricare" de zerouri pe o linie sau pe o coloană). Spre exemplu, dezvoltând după regula Sarrus, obţinem:

$$1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot2+3\cdot3\cdot3-(1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3) = 1+8+27-3\cdot6 = 18.$$

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) $3e$; c) e^2; d) $3+e$; e) $1+e$; f) $2e$.

   Soluţie. Aplicăm regula derivării produsului de funcţii $(g\cdot h)' = g'\cdot h + g\cdot h'$ pentru produsul $f(x) = x\cdot e^x$. Obţinem $f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = (x+1)e^x$. Deci $f'(1) = 2e$.

4. Să se calculeze $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4$. **(5 pct.)**

   a) 6; b) 8; c) 18; d) 16; e) 24; f) 20.

   Soluţie. Aplicăm regula de calcul a combinărilor $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ şi convenţia $0! = 1$. Obţinem

$$C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = \frac{5!}{5!0!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} = 1+10+5 = 16.$$

   Notă. Subiectul se putea rezolva mult mai elegant dacă se cunoaşte binomul lui Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ (folosit pentru $a=b=1, n=5$) şi proprietatea $C_n^k = C_n^{n-k}$ (utilizată pentru valorile $n=5$, $k\in\{0,2,4\}$). Se obţine

$$2^5 = (1+1)^5 = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (C_5^0 + C_5^2 + C_5^4) + (C_5^5 + C_5^3 + C_5^1) = 2(C_5^0 + C_5^2 + C_5^4),$$

   de unde rezultă $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 2^5/2 = 16$.

5. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+3} = 16$. **(5 pct.)**

   a) $x=1$; b) $x=-3$; c) $x=5$; d) $x=-4$; e) $x=11$; f) $x=-1$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+3} = 2^4$ de unde (prin logaritmare în baza 2) rezultă $x+3 = 4$, deci $x = 1$.

6. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \dfrac{3+4i}{6-8i}$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) 4; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) 8; f) 11.

   Soluţie. Amplificăm fracţia cu conjugata numitorului, apoi folosim formula $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$. Obţinem

$$z = \frac{(3+4i)(6+8i)}{6^2+8^2} = \frac{-14+48i}{100} = \frac{-7+24i}{50} = -\frac{7}{50} + i\frac{24}{50}.$$

Rezultă

$$|z| = \sqrt{\frac{49}{2500} + \frac{576}{2500}} = \sqrt{\frac{625}{2500}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Notă. Subiectul se putea rezolva mult mai rapid folosind proprietatea modulului: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Se obţine:

$$|z| = \left|\frac{3+4i}{6-8i}\right| = \frac{|3+4i|}{|6+8i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

7. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $|x+1| = 2$ este: **(5 pct.)**

   a) 12; b) 0; c) -3; d) 1; e) 4; f) -5.

   Soluţie. Folosind proprietatea "$|a| = b \Leftrightarrow (a = b$ sau $a = -b)$", obţinem $x+1 \in \{\pm 2\}$, deci $x \in \{1, -3\}$. Produsul celor două soluţii este deci $1 \cdot (-3) = -3$.

8. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = 1$ să fie soluţie a ecuaţiei $3x + m - 2 = 0$. **(5 pct.)**

   a) $m = 0$; b) $m = 7$; c) $m = -1$; d) $m = 4$; e) $m = 1$; f) $m = -5$.

   Soluţie. Înlocuind soluţia $x = 1$ în ecuaţie, obţinem $3 + m - 2 = 0$, deci $m = -1$.

9. Să se rezolve inecuaţia $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. **(5 pct.)**

   a) $x \in [0, 1]$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in [1, 2]$; d) $x \geq 5$; e) $x \in [-4, 1]$; f) $x \in [2, 5]$.

   Soluţie. Folosind formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ care produce soluţiile ecuaţiei de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, obţinem $x \in \{\frac{3 \pm \sqrt{3^2-8}}{2}\} = \{\frac{3 \pm 1}{2}\} = \{1, 2\}$. Deoarece $a = 1 > 0$, valoarea expresiei polinomiale de gradul doi din enunţ este negativă sau nulă (în cazul rădăcinilor reale distincte) d.n.d. $x \in [x_1, x_2]$, unde s-a presupus $x_1 < x_2$. Rezultă $x \in [1, 2]$.

10. Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $2x^2 - 3x + 1 = 0$, atunci $x_1 + x_2$ este: **(5 pct.)**

    a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

    Soluţie. Din prima relaţie Viéte rezultă direct $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$. *Notă.* Problema se poate rezolva şi determinând efectiv soluţiile ecuaţiei, $\{x_{1,2}\} = \{\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}\} = \{\frac{1}{2}, 1\}$; prin urmare suma acestora este $\frac{3}{2}$.

11. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică astfel încât $a_1 + a_3 = 6$ şi $a_3 - a_1 = 4$. Să se calculeze a_5. **(5 pct.)**

    a) 15; b) 7; c) 10; d) 11; e) -5; f) 9.

    Soluţie. Sumând cele două condiţii rezultă $2a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = 5$; scăzându-le, rezultă $2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$. Dar $a_3 = \frac{a_1+a_5}{2}$, deci $a_5 = 2a_3 - a_1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. *Altă soluţie.* Aplicăm formula $a_k = a_1 + (k-1)r$. Notând $a = a_1$, cele două condiţii formează un sistem liniar în necunoscutele a, r, compatibil determinat, $\begin{cases} 2a + 2r = 6 \\ 2r = 4 \end{cases}$, deci $a = 1, r = 2$. Prin urmare, $a_5 = a + 4r = 1 + 4 \cdot 2 = 9$.

12. Să se rezolve inecuaţia $2x - 3 \leq 4x$. **(5 pct.)**

    a) $x \in (0, \infty)$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in (-1, 2)$; d) $x \in [-\frac{3}{2}, +\infty)$; e) $x \in (\frac{4}{3}, +\infty)$; f) $x \in (0, 1)$.

    Soluţie. Inecuaţia se rescrie succesiv: $2x - 3 \leq 4x \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$.

13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

    Să se calculeze $S = f(-\sqrt{3}) + f(-\ln 2) + f(1) + f(\ln 3)$. **(5 pct.)**

    a) $\frac{9\pi}{4}$; b) $\frac{8\pi}{3}$; c) $\frac{13\pi}{6}$; d) $\frac{7\pi}{3}$; e) $\frac{11\pi}{4}$; f) $\frac{13\pi}{4}$.

    Soluţie. Se poate verifica folosind tabloul de variaţie al funcţiilor corespunzătoare, că expresiile $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ şi $\frac{2x}{1+x^2}$ iau valori în intervalul $[-1, 1]$, deci funcţia f este bine definită pe toată axa reală. Fiind compunere de funcţii continue, f este funcţie continuă. Mai mult, se observă că $f = f_1 + f_2$, unde $f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ şi $f_2(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Se constată că ambele funcţii sunt continue. Derivatele $f'_{1,2}$ ale acestora coincid în domeniul $D = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, deci pe fiecare din cele două intervale ale reuniunii, cele două funcţii diferă printr-o constantă. Mai exact, pe intervalul $(-\infty, -1)$ avem $f_1(-2) = \arccos \frac{-3}{5} = \pi - \arccos \frac{3}{5} = \pi - \arcsin \frac{4}{5} = \pi + \arcsin \frac{-4}{5} = \pi + f_2(-2)$, deci $f_1 = \pi + f_2$ şi $f(x) = 2f_1(x) - \pi$. Pe intervalul $(0, 1)$ avem $f_1(\frac{1}{2}) = \arccos \frac{3}{5} = \arcsin \frac{4}{5} = f_2(x)$, deci $f_1(x) = f_2(x)$ şi $f(x) = 2f_1(x)$.

Pentru $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ avem $f_1'(x) = -f_2'(x) \Rightarrow f'(x) = 0$, deci pe $\mathbb{R}\backslash D = [-1,0] \cup [1,\infty) = (-1,0) \cup (1,\infty)$, funcţia continuă f este constantă pe fiecare interval al reuniunii. Mai exact, pe intervalul $[-1,0]$ funcţia f are valoarea $f(-1) = \arccos(1) + \arcsin(0) = 0$ iar pe intervalul $[1,\infty)$ f are valoarea $f(1) = \arccos(0) + \arcsin(1) = \pi$. Prin urmare,

$$f(x) = \begin{cases} 2\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - \pi, & \text{pentru } x \in (-\infty,-1) \\ 0, & \text{pentru } x \in [-1,0] \\ 2\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, & \text{pentru } x \in (0,1) \\ \pi, & \text{pentru } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Calculăm termenii sumei cerute:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \in (1,2) \Rightarrow -\sqrt{3} \in (-2,-1) \subset (-\infty,-1) & \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \pi \\ & \qquad = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} \\ \ln 1 < \ln 2 < \ln e \Rightarrow -\ln 2 \in (-\ln e, -\ln 1) \subset [-1,0] & \Rightarrow f(-\ln 2) = 0 \\ 1 \in [1,\infty) & \Rightarrow f(1) = \pi \\ \ln e < \ln 3 < \ln e^2 \Rightarrow \ln 3 \in (1,2) \subset [1,\infty) & \Rightarrow f(\ln e) = \pi. \end{cases}$$

deci $S = \frac{\pi}{3} + 0 + \pi + \pi = \frac{7\pi}{3}$.

14. Fie polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 4X$ şi fie T suma pătratelor rădăcinilor sale. Atunci: **(5 pct.)**

a) $T = 15$; b) $T = 17$; c) $T = 14$; d) $T = 0$; e) $T = -11$; f) $T = 11$.

Soluţie. Notăm cu $x_{1,2,3}$ cele trei rădăcini ale polinomului. Folosind egalitatea

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

şi primele două relaţii Viéte

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-5}{1} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4}{1} \end{cases}$$

rezultă

$$T = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 5^2 - 2 \cdot 4 = 17.$$

Notă. Subiectul se putea rezolva şi altfel, aflând efectiv rădăcinile polinomului f. Dând factor comun X şi aflând rădăcinile factorului de grad 2, obţinem succesiv $f = X(X^2 - 5X + 4) = (X-0)(X-1)(X-4)$. Deci cele trei rădăcini ale polinomului f sunt $0, 1, 4$, iar suma pătratelor lor este $T = 0^2 + 1^2 + 4^2 = 17$.

15. Să se calculeze $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg 0,25$. **(5 pct.)**

a) $E = \frac{1}{4}$; b) $E = 7$; c) $E = 13$; d) $E = 2$; e) $E = \frac{1}{5}$; f) $E = 5$.

Soluţie. Notăm $a = \lg 5$, $b = \lg 2$. Observăm că $a + b = \lg 5 + \lg 2 = \lg 10 = 1$. Folosind proprietăţile logaritmilor şi relaţia $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$ pentru $u = a$ şi $v = a + 2b$, obţinem succesiv

$$\begin{aligned} E &= a^3 + (a+2b)^3 + (3b) \cdot (-2b) = [a + (a+2b)] \cdot [a^2 - a(a+2b) + (a+2b)^2] - 6b^2 \\ &= [2(a+b)] \cdot [(a+b)^2 + 3b^2] - 6b^2 = 2(1 + 3b^2) - 6b^2 = 2. \end{aligned}$$

16. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx$. **(5 pct.)**

a) $\ell = 1$; b) $\ell = 1 + \ln 2$; c) $\ell = \frac{1}{4}$; d) $\ell = 3\ln 2$; e) $\ell = \frac{11}{4}$; f) $\ell = \ln\sqrt{2}$.

Soluţie. Se observă că ridicarea la pătrat $\varphi : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $\varphi(x) = x^2$ este bijecţie şi că avem $\varphi(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Putem folosi prin urmare schimbarea de variabilă $u = x^2$. Integrala se rescrie succesiv

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \int_1^t \frac{2x}{x^2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int_1^{t^2} \frac{1}{u(u+1)} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Bigg|_1^{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t^2}{t^2+1} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2t^2}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Atunci

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{2t^2}{t^2+1} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

17. Fie $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; să se calculeze determinantul matricei A^2. **(5 pct.)**

a) 1; b) 0; c) 3; d) 2; e) 4; f) -1.

Soluţie. Obţinem $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Atunci $\det A = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-4) = 1$. *Notă.* Rezolvarea se scurtează, evitând calculul produsului matriceal, dacă se foloseşte proprietatea $\det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$ pentru $A_1 = A_2 = A$. Obţinem $\det(A^2) = (\det A)^2 = (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2))^2 = 1^2 = 1$.

18. Fie S mulţimea soluţiilor reale şi strict pozitive ale ecuaţiei $x + \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $S \subset \mathbb{N}$; b) $S = \varnothing$; c) $S \subset (2,3)$; d) $S \cap (0,1) \neq \varnothing$; e) $S \cap (1,2) \neq \varnothing$; f) $S \cap (2,\infty) \neq \varnothing$.

Soluţie. Soluţiile ecuaţiei date sunt punctele de anulare ale funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt - \left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in (0,\infty).$$

Se verifică relativ uşor că derivata $f'(x) = e^{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2}$ este strict pozitivă pentru $x \in (0,\infty)$ şi că $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Rezultă că ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură soluţie în intervalul $(0,\infty)$. Pentru a afla un subinterval care conţine soluţia, observăm că $t^2 \leq t$, $\forall t \in [0,1]$, deci

$$f(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt - 2 \leq \int_0^1 e^t dt - 2 = (e^1 - e^0) - 2 = e - 3 < 0,$$

deci $f(1) < 0$. Pe de altă parte, folosind monotonia integralei definite în raport cu intervalul de integrare pentru integranzi pozitivi şi proprietatea $t^2 \geq t$, $\forall t \in [1,2]$, avem

$$f(2) = \int_0^2 e^{t^2} dt - 2 - \frac{1}{2} \geq \int_1^2 e^{t^2} dt - 2.5 \geq \int_1^2 e^t dt - 2.5 = e^2 - e - 2.5 > (2.5)^2 - 3 - 2.5 = 0.75 > 0,$$

deci $f(2) > 0$. Prin urmare, funcţia f fiind continuă, soluţia căutată se află în intervalul $(1,2)$. Rezultă $S \cap (1,2) \neq \varnothing$.