1. Raza R a cercului circumscris triunghiului ABC, în care $\hat{A} = 30°$ şi $BC = 5$ este: **(5 pct.)**

   a) 6; b) 2; c) 7; d) 1; e) 3; f) 5.

   Soluţie. Din teorema sinusului, avem $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Leftrightarrow \frac{5}{1/2} = 2R \Leftrightarrow R = 5$.

   Altfel. Datele problemei revin la a spune ca vârful A se află pe arcul capabil de $30°$ care subântinde o coardă de lungime 5. Se observă că unghiul $\hat{B}$ satisface (singurele) constrângeri $\hat{B} > 0$ şi $\hat{B} < 180° - 30° = 150°$, nefiind fixat de ipotezele problemei, deci R nu depinde de alegerea acestui unghi. Alegând $\hat{B} = 90° \in (0°; 150°)$, triunghiul devine dreptunghic, iar ipotenuza sa AC satisface simultan egalităţile $AC = 2R$ şi $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$. Înlocuind AC din prima în a doua egalitate, rezultă $\frac{1}{2} = \frac{5}{2R}$, deci $R = 5$.

2. Aria triunghiului cu vârfurile $A(0,1)$, $B(1,0)$ şi $C(0,0)$ este: **(5 pct.)**

   a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{5}$; e) 5; f) $\frac{5}{2}$.

   Soluţie. Obţinem aria folosind formula determinantului, $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2}$. *Altfel.* Reprezentând cel trei vârfuri ale triunghiului în sistemul de coordonate carteziene xOy, se observă că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, cu cateta de lungime $c = 1$, deci aria sa este $\mathcal{A} = \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}$.

3. În triunghiul ABC se dau $\hat{A} = 45°$, $AB = 3$ şi $AC = 4$. Atunci aria triunghiului ABC este: **(5 pct.)**

   a) $2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}$; c) 4; d) $3\sqrt{2}$; e) $5\sqrt{2}$; f) 3.

   Soluţie. Obţinem aria folosind formula $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

4. Distanţa dintre punctele $A(1,3)$ şi $B(4,7)$ este: **(5 pct.)**

   a) 5; b) 2; c) 7; d) 4; e) 1; f) 3.

   Soluţie. Distanţa cerută este $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

5. Fie dreapta $d:\ y = x + 2$. Ecuaţia dreptei care trece prin $O(0,0)$ şi este perpendiculară pe d, este: **(5 pct.)**

   a) $y = 3x$; b) $y = -3x$; c) $y = 2x$; d) $y = -2x$; e) $y = -x$; f) $y = 4x$.

   Soluţie. Dreapta dată are ecuaţia de forma $d:\ y = mx + n$ cu $m = n = 1$, deci are panta $m = 1$. Orice dreaptă ortogonală pe d - deci şi dreapta cerută d' - are panta $m' = -\frac{1}{m} = -1$. Folosim faptul că d' trece prin punctul $(x_*, y_*) = (0,0)$, deci d' are ecuaţia $y - y_* = m'(x - x_*) \Leftrightarrow y - 0 = -(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$.

   Altfel. Dreapta d' trece prin origine, deci are ecuaţia de forma $y = m'x$. Dar d' este ortogonală pe d - a cărei pantă este $m = 1$. Deci panta m' a dreptei d' satisface relaţia $mm' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -1$. Rezultă $d':\ y = -x$.

6. În triunghiul ABC se cunosc: $AB = 4$, $AC = 4$ şi $BC = 5$. Atunci $\cos \hat{A}$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{32}$; c) 2; d) $\frac{3}{4}$; e) 3; f) 1.

   Soluţie. Aplicăm teorema cosinusului: $\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7}{32}$.

   Altfel. Avem $AB = AC = 4$, deci triunghiul ABC este isoscel. Notând cu $M \in BC$ piciorul înălţimii duse din A pe baza BC, AM este înălţime şi mediană, deci $BM = MB = \frac{5}{2}$. Atunci $\sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{5/2}{4} = \frac{5}{8}$, $\cos \hat{A} = 1 - 2\sin^2 \frac{\hat{A}}{2} = 1 - 2 \cdot \frac{25}{64} = \frac{7}{32}$.

   Altfel. Avem $AB = AC = 4$, deci triunghiul ABC este isoscel. Notând cu $M \in BC$ piciorul înălţimii duse din A pe baza BC, AM este înălţime şi mediană, deci $BM = MB = \frac{5}{2}$. Aplicând teorema Pitagora în triunghiul dreptunghic ABM, rezultă $AM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{4^2 - (\frac{5}{2})^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$. Notând cu $N \in AC$ piciorul înălţimii duse din B pe latura AC, BN este înălţime, deci scriind aria triunghiului ABC în două moduri diferite, $\mathcal{A} = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{BN \cdot AC}{2}$, rezultă $\frac{\frac{\sqrt{39}}{2} \cdot 5}{2} = \frac{AN \cdot 4}{2}$, deci $AN = \frac{5\sqrt{39}}{8}$. Aplicând teorema

Pitagora în triunghiul dreptunghic ABN, rezultă $AN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{16 - \frac{25\cdot 39}{64}} = \frac{7}{8}$. Atunci $\cos\hat{A} = \frac{AN}{AB} = \frac{7/8}{4} = \frac{7}{32}$.

Altfel. Folosim formula Heron pentru calculul ariei $\mathcal{A}$ a triunghiului ABC. Avem $a = BC = 5$, $b = AC = 4$, $c = AB = 4$ şi notând cu $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13}{2}$ semiperimetrul triunghiului, obţinem $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{13}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{5\sqrt{39}}{4}$. Dar

$$\mathcal{A} = \frac{bc\sin\hat{A}}{2} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{39}}{4} = \frac{4^2\sin\hat{A}}{2} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{5\sqrt{39}}{32}.$$

Din formula trigonometrică fundamentală $\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$, rezultă

$$\cos^2\hat{A} = 1 - \left(\frac{5\sqrt{39}}{32}\right)^2 = \left(\frac{7}{32}\right)^2,$$

deci $\cos\hat{A} \in \{\pm\frac{7}{32}\}$. Dar $5 = BC < \sqrt{AB^2 + AC^2} = 4\sqrt{2}$, deci $\hat{A} < 90° \Rightarrow \cos\hat{A} > 0 \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{7}{32}$.

7. Fie vectorii $\bar{u} = a\bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt perpendiculari, atunci: **(5 pct.)**

   a) $a = -2$; b) $a = 2$; c) $a = 3$; d) $a = 1$; e) $a = 0$; f) $a = -1$.

   Soluţie. Ortogonalitatea vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ revine la anularea produsului scalar $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle = a\cdot 1 + 1\cdot(-1) = a-1$, deci $a = 1$.

8. Într-un triunghi ABC se cunosc: $\hat{A} = 90°$, $AB = 3$ şi $AC = 4$. Atunci lungimea înălţimii duse din A este: **(5 pct.)**

   a) 5; b) 7; c) 1; d) 4; e) 12; f) $\frac{12}{5}$.

   Soluţie. Se observă că triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci aplicând teorema Pitagora, rezultă ipotenuza sa, $BC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Notând cu h lungimea înălţimii duse din A şi exprimând aria triunghiului în două moduri diferite, obţinem $\mathcal{A} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{BC\cdot h}{2}$, deci $\frac{3\cdot 4}{2} = \frac{5\cdot h}{2}$, de unde rezultă $h = \frac{12}{5}$.

9. Se dau dreptele $d_1 :\ 2x - y + 1 = 0$ şi $d_2 :\ (m+1)x + y + 2 = 0$. Valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele sunt paralele, este: **(5 pct.)**

   a) -1; b) 1; c) -2; d) 0; e) 3; f) -3.

   Soluţie. Dreptele sunt paralele dacă pantele acestora coincid, $2 = -(m+1) \Leftrightarrow m = -3$. *Altfel.* Dreptele sunt paralele dacă au coeficienţii celor două variabile x respectiv y proporţionali, $\frac{2}{m+1} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow m = -3$.

10. Unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ale triunghiului ABC satisfac condiţia $\operatorname{ctg}\hat{A} + \operatorname{ctg}\hat{B} = 2\operatorname{ctg}\hat{C}$. Atunci laturile a, b, c ale triunghiului ABC satisfac relaţia: **(5 pct.)**

    a) $2b^2 = a^2 + c^2$; b) $2c^2 = a^2 + b^2$; c) $2a^2 = b^2 + c^2$; d) $c^2 = a^2 + b^2$; e) $b^2 = a^2 + c^2$; f) $ab = 2c^2$.

    Soluţie. Relaţia din enunţ se rescrie

$$\operatorname{ctg}\hat{A} + \operatorname{ctg}\hat{B} = 2\operatorname{ctg}\hat{C} \Leftrightarrow \frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}} + \frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}} = 2\frac{\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}}.$$

Aplicând teoremele sinusului şi cosinusului pentru toate cele trei unghiuri şi notând cu R raza cercului circumscris triunghiului, obţinem

$$\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} + \frac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\frac{b}{2R}} = 2\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{2R}} \Leftrightarrow 2c^2 = a^2 + b^2.$$

Altfel. Ţinând cont că

$$\cos\hat{A}\sin\hat{B} + \cos\hat{B}\sin\hat{A} = \sin(\hat{A}+\hat{B}) = \sin(180° - \hat{C}) = \sin\hat{C}$$

şi aplicând teoremele cosinusului pentru $\hat{C}$ şi teorema sinusului pentru toate unghiurile, relaţia din enunţ se rescrie

$$\operatorname{ctg}\hat{A} + \operatorname{ctg}\hat{B} = 2\operatorname{ctg}\hat{C} \Leftrightarrow \frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}} + \frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}} = 2\frac{\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}} = 2\frac{\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}} \Leftrightarrow \frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}} = 2\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{2R}} \Leftrightarrow 2c^2 = a^2+b^2.$$

Observaţie. Un exemplu particular de triunghi care satisface condiţiile problemei, este triunghiul echilateral, în care $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ şi $a = b = c$.

11. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $M(1,2)$ şi $N(2,5)$ este: **(5 pct.)**

a) $3x - y - 1 = 0$; b) $y - 2x + 1 = 0$; c) $x + y + 1 = 0$; d) $y - x = 2$; e) $y = -x$; f) $y = x$.

Soluţie. Ecuaţia cerută este $\frac{x-x_M}{x_N-x_M} = \frac{y-y_M}{y_N-y_M} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$.

12. Se dau vectorii $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$. Atunci $3\bar{u} - 2\bar{v}$ este egal cu: **(5 pct.)**

a) $3\bar{i} + 4\bar{j}$; b) $4\bar{i} + 7\bar{j}$; c) $\bar{i} - \bar{j}$; d) $\bar{i} - 7\bar{j}$; e) $7\bar{i} - \bar{j}$; f) $3\bar{i} - 4\bar{j}$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $3\bar{u} - 2\bar{v} = 3(2\bar{i} + 3\bar{j}) - 2(\bar{i} + \bar{j}) = 4\bar{i} + 7\bar{j}$.

13. Dacă $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci: **(5 pct.)**

a) $\cos x = \frac{2}{5}$; b) $\cos x = -\frac{1}{5}$; c) $\cos x = \frac{1}{5}$; d) $\cos x = \frac{3}{5}$; e) $\cos x = -\frac{2}{5}$; f) $\cos x = \frac{4}{5}$.

Soluţie. Condiţia $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ implică $\cos x \geq 0$. Ţinănd cont de acest lucru, din formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, rezultă $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$.

14. Mulţimea soluţiilor din $[0, 2\pi]$ ale ecuaţiei $2\cos x = 1$ este: **(5 pct.)**

a) $\{0, \frac{\pi}{4}\}$; b) $\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$; c) $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$; d) $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$; e) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$; f) $\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\}$.

Soluţie. Ecuaţia trigonometrică fundamentală dată $\cos x = \frac{1}{2}$ are soluţia generală

$$x \in \left\{ 2k\pi + (-1)^k \arccos\frac{1}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 2k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

iar singurele valori din intervalul $[0, 2\pi]$ sunt $\left\{\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

15. Lungimea vectorului sumă $\bar{u} + \bar{v}$ a vectorilor $\bar{u} = 3\bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$ este: **(5 pct.)**

a) 6; b) 1; c) 4; d) 3; e) 5; f) 2.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $\bar{u} + \bar{v} = (3\bar{i} + \bar{j}) + (\bar{i} + 2\bar{j}) = 4\bar{i} + 3\bar{j}$, deci $||\bar{u} + \bar{v}|| = ||4\bar{i} + 3\bar{j}|| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

16. Fie $A(-1,0)$, $B(0,3)$ şi $C(1,0)$. Centrul de greutate al triunghiului ABC are coordonatele: **(5 pct.)**

a) $(2,0)$; b) $(1,1)$; c) $(-1,1)$; d) $(2,2)$; e) $(0,1)$; f) $(0,2)$.

Soluţie. Centrul de greutate are drept coordonate mediile aritmetice ale celor trei coordonate ale triunghiului, mai exact $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}) = (\frac{-1+0+1}{3}, \frac{0+3+0}{3}) = (0,1)$.

17. Fie punctele $A(0,0)$, $B(4,0)$ şi $C(4,2)$. Fie D al patrulea vârf al dreptunghiului $ABCD$. Atunci punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului are coordonatele: **(5 pct.)**

a) $(0,2)$; b) $(2,0)$; c) $(2,1)$; d) $(1,2)$; e) $(-2,1)$; f) $(-3,0)$.

Soluţie. Dreptunghiul $ABCD$ este unic determinat: D este simetricul varfului B faţă de mijlocul M al diagonalei AC. Se observă că nu este necesară aflarea în prealabil a punctului D. Într-adevăr, punctul căutat M se află la mijlocul diagonalei AC. Deci M înjumătăţeşte coordonatele capetelor A şi C ale segmentului AC, $(x_M, y_M) = (\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}) = (\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}) = (2,1)$.

18. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată: **(5 pct.)**

a) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; b) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin 75^\circ = 1$; d) $\sin 75^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\sin 75^\circ = -1$; f) $\sin 75^\circ = 0$.

Soluţie. Avem $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Altfel. Aplicăm formula $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ pentru $x = 15^\circ$ şi obţinem

$$\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ.$$

Dar $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ conduce pentru $x \in [0^\circ, 90^\circ]$ la $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. Pentru $x = 30^\circ$, obţinem

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Aplicând formula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ unde } c = \sqrt{a^2 - b}, \tag{1}$$

pentru cazul nostru, unde $a = 2, b = 3, c = \sqrt{2^2 - 3} = 1$, rezultă

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Prin urmare,

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Altfel. Din formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ rezultă $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Pentru $x = 75^\circ$, obţinem $\cos 2x = \cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare $\sin^2 75^\circ = \frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Dar dintre toate variantele de răspuns, doar $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ are pătratul egal cu această valoare. Deci răspunsul corect este $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Altfel. Ca în rezolvarea anterioară, se obţine $\sin^2 75^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Deci $\sin 75^\circ \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right\}$. Dar din (1) rezultă, ca mai sus, egalitatea $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, deci $\sin 75^\circ \in \{\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\}$. Dar $75^\circ \in (0^\circ, 90^\circ)$ implică $\sin 75^\circ > 0$, deci $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.