

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = \log_3(\sqrt{7} - 2) + \log_3(\sqrt{7} + 2)$ este natural.
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 6x + 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 2)^3 = (2 - x)^3$.
- 5p 4. Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- 5p 5. Punctele M , N și P verifică relația $2\overline{MN} + 3\overline{NP} = \vec{0}$. Calculați lungimea segmentului MP , știind că $MN = 3$.
- 5p 6. Arătați că $\sin x + \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi - x) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2, 3)) = 12$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(n^2, n)) \geq 0$, pentru orice număr natural n .
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B = A(x, 0) \cdot A(x, 0)$ este matricea $A(x, 0)$.
2. Se consideră polinomul $f = nX^n + X^2 - nX - 1$, unde n este număr natural, $n \geq 3$.
- 5p a) Arătați că $f(1) = 0$, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$.
- 5p b) Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n \geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu $X^2 - 1$.
- 5p c) Arătați că, pentru orice număr natural n , $n \geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctctg} x + x$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{e-1}{e}$.
- 5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(0, +\infty)$.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n = \log_3 \left((\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2) \right) = \log_3 (7 - 4) =$ $= \log_3 3 = 1 \in \mathbb{N}$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 + 6x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ Coordonatele sunt $x = -2$ și $y = f(-2) = -5$	2p 3p
3.	$(x + 2)^3 = (2 - x)^3 \Leftrightarrow x + 2 = 2 - x$ $x = 0$	3p 2p
4.	Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 4 = 16$ numere	2p 3p
5.	$NP = 2$ Punctul P aparține segmentului MN , deci $MP = MN - NP = 1$	2p 3p
6.	$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ $\sin x + \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi - x) = \sin x + \sin x + (-\sin x) + (-\sin x) = 0$, pentru orice număr real x	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,3)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 12 + 1 + 18 - 4 - 6 - 9 = 12$	2p 3p
b)	$\det(A(n^2, n)) = \begin{vmatrix} n^2 & n & 1 \\ 1 & n^2 & n \\ n^2 & 1 & n \end{vmatrix} = (n^2 + n + 1) \begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 1 & n^2 & n \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix} = (n^2 + n + 1) \begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 0 & n^2 - n & n - 1 \\ 0 & 1 - n & n - 1 \end{vmatrix} =$ $= (n^2 + n + 1)(n - 1)^2(n + 1) \geq 0$, pentru orice număr natural n	3p 2p
c)	$B = \begin{pmatrix} x^2 + x & 1 & x \\ 2x & x^2 & 1 \\ x^2 + 1 & x & x \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A(x,0) = A(x,0) \cdot B = \begin{pmatrix} x^3 + 2x^2 + 1 & 2x & x^2 + x \\ 3x^2 + x & x^3 + 1 & 2x \\ x^3 + x^2 + 2x & x^2 + x & x^2 + 1 \end{pmatrix}$ Inversa matricei B este matricea $A(x,0) \Leftrightarrow B \cdot A(x,0) = A(x,0) \cdot B = I_3$, deci $x = 0$	3p 2p
2.a)	$f(1) = n \cdot 1^n + 1^2 - n \cdot 1 - 1 =$ $= n + 1 - n - 1 = 0$, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$	3p 2p

b)	Pentru n număr natural impar, $n \geq 3$, $f(-1) = n \cdot (-1)^n + (-1)^2 - n \cdot (-1) - 1 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu $X + 1$	2p
	$f(1) = 0 \Rightarrow f$ este divizibil cu $X - 1$, deci polinomul f este divizibil cu $X^2 - 1$	3p
c)	Dacă $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului f care are coeficienții întregi, atunci $\alpha = \frac{1}{d}$,	1p
	unde $d \in \mathbb{Z}^* \setminus \{\pm 1\}$ este un divizor al lui n	
	$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{d^n} + \frac{1}{d^2} - \frac{n}{d} - 1 = 0 \Rightarrow d^{n-2}(d^2 + nd - 1) = n \Rightarrow d^{n-2}/n$, deci $ d ^{n-2} \leq n$	2p
Cum $ d ^{n-2} \geq 2^{n-2} > n$ pentru orice număr natural n , $n \geq 5$, obținem o contradicție, deci polinomul f nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$	2p	

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (\arctg x)' - (x)' = \frac{1}{x^2 + 1} - 1 =$	2p
	$= \frac{1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\arctg x}{x} - 1 \right) = -1$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctg x - x + x) = \frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y = -x + \frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$f(x) + g(x) = \arctg x + \arctg x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f(x) + g(x))' = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 1} = 0$, pentru orice număr real x	3p
	Cum $f(0) + g(0) = \frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	2p
2.a)	$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big _0^1 =$	3p
	$= -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$	2p
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$	2p
	$F''(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este concavă pe $(0, +\infty)$	3p
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f(x) dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \geq 0$, deci $I_{n+1} \geq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	1p
	$0 \leq I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-x^2} dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 1 dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	3p
	Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent	1p