Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi numărul real m ştiind că mulţimile $A=\{2\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+mx+4=0\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=5$ şi $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(\pi))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$.

2. Pe mulţimea $G=(0,1)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

5p **b)** Arătaţi că orice element din mulţimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie „$\circ$”.

5p **c)** Demonstraţi că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

5p **b)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(\sqrt{x})$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ şi $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculaţi J_1.

5p **b)** Calculaţi I_1.

5p **c)** Demonstraţi că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.