Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z + \overline{z} + z\overline{z} = 9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1 - \log_2 x)(2 - \log_2 x) = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x - \left(1 + \mathrm{ctg}^2 x\right)\sin^2 x = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9)) = 0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1 - x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1 - x + x\ln x}{x(1 - x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right)dx = e - 1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu $n^2 - n + 1$.