Neculai STANCIU

ARTICOLE ŞI NOTE DE MATEMATICÃ GIMNAZIU & LICEU

Buzãu, 2009

Dedic această carte soției mele Roxana Mihaela Stanciu şi copiilor noştriBogdan Andrei şi Maria.

Referenți ştiințifici:
Prof. gr. I Constantin Apostol, Colegiul Național „Alexandru Vlahuțã”, Râmnicu Sãrat
Prof. gr. I Gheorghe Ghițã, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Buzãu
Redactor: Roxana Mihaela Stanciu
Tehnoredactare computerizatã: Roxana Mihaela Stanciu

PREFAȚĂ

Articolele ce urmează au fost publicate în reviste de specialitate(GMB,GMA,RMT,RIM,SÎM, Rec.Mat, SM, etc) sub semnătura prof. Neculai Stanciu.

Buzău, 2009 Autorul

***Motto**:"Aritmetica şi Geometria dispun de resurse bogate de dezvoltare a capacității copilului de a se mira, de a se întreba, de a imagina răspunsuri, de a tatona diferite căi de rezolvare, de a stabili punți de legătură cu înțelegerea naturii, a limbajului, a istoriei şi geografiei.Dar totul trebuie să se bazeze pe dezvoltarea propriei sale curiozități, în aşa fel încât el să accepte ca unică răsplată bucuria, plăcerea de a înțelege, prin paşi mărunți, câte ceva din lumea care îl înconjoară şi de a se înțelege pe sine.La întrebarea pe care o auzim mereu, din partea unor elevi, dar şi din partea unor părinți sau educatori:De ce matematică pentru copii care nu-şi propun să devină matematicieni? le răspundem: Pentru că matematica este un mod de gândire cu valoare universală şi pentru că ea prilejuieşte bucurii spirituale la care orice ființă umană ar trebui să aibă acces.În măsura în care adolescenții vor învăța să se, bucure de frumusețile matematicii, ale ştiinței, ale artei şi literaturii şi vor simți nevoia de a le frecventa, ei nu vor mai suferi de plictiseală iar tentația unor activități derizorii, uneori antisociale, va scădea"*

Savantul Academician, Solomon Marcus

I. ISTORICUL NOŢIUNILOR MATEMATICE STUDIATE ÎN GIMNAZIU ŞI LICEU

- aria triunghiului, paralelogramului şi trapezului; volumul prismei, piramidei şi trunchiului de piramidă; pătrate şi triunghiuri echilaterale înscrise în cerc – papirusurile egiptene şi cărămizile caldeene – 2000 î. e. n.;
- egalitatea şi asemănarea triunghiurilor – Tales – sec. VI î. e. n.;
- teorema catetei şi înălţimii, suma unghiurilor unui triunghi, numere prime, numere perfecte, numere prietene, media aritmetică, geometrică şi armonică – Pitagora – sec. VI î. e. n.;
- teorema cosinusului, teorema lui Pitagora generalizată, raţionamentul deductiv, construcţii cu compasul, lunulele lui Ipocrat – Ipocrat – – sec. IV î. e. n.;
- metoda exhaustivă pentru demonstrarea formulei ariei cercului şi a volumului piramidei – Eudoxiu sec. IV î. e. n.;
- hiperbola şi parabola – Menecmus – sec. IV î. e. n.;
- teorema împărţirii cu rest şi algoritmul lui Euclid pentru aflarea c. m. m. d. c. a două numere întregi, forma numerelor perfecte, există o infinitate de numere prime, $\sqrt{2}$ este iraţional primul text care sa păstrat („Elementele”) – Euclid – sec. III î. e. n.;
- concurenţa înălţimilor şi medianelor unui triunghi, axioma de continuitate, determinarea numărului л cu două zecimale exacte, determinarea ariei elipsei (л a b) prin metode exhaustive, $1 + 3 + \ldots\ldots + \bullet\ (2n - 1) = n^2$; $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$; $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = n \bullet (n + 1) \bullet (2n + 1) / 6$ – Arhimede – sec. III î. e. n.;
- cercul lui Apoloniu – Apoloniu – sec. III î. e. n.;
- probleme izoperimetrice – Zenodor – sec. III î. e. n.;
- ciurul lui Eratostene pentru determinarea numerelor prime – Eratostene – sec. III î. e.n.;
- simplificarea fracţiilor, rădăcina pătrată şi cubică, progresii aritmetice şi geometrice, metoda „fan cen” pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, rezolvarea ecuaţiei de gradul II – „Matematica în nouă cărţi” – de la chinezi – sec. II î. e.n.;
- teorema lui Menelau – Menelau – sec. I;
- formulele $s^2 = p \bullet (p-a) \bullet (p-b) \bullet (p-c)$, $p = (a + b + c) / 2$; $S = p \bullet r$, $a \bullet b \bullet c = 4 \bullet R \bullet S$ – Heron – sec. II; (sec. I).
- teoremele lui Ptolemeu şi formulele: $\sin^2 (\alpha / 2) = 1 - \cos (\alpha / 2)$, $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \bullet \cos \beta - \sin \alpha \bullet \sin \beta$ – Ptolemeu – sec. II;
- teorema medianei, teorema celor trei perpendiculare, teorema bisectoarei exterioare, biraportul, proprietatea comună a conicelor – Papus – sec. III;
- introducerea operaţiilor şi notaţiilor prescurtate pentru necunoscute – Diofant – precursorul algebrei – sec. III;
- numerele negative marchează diferenţa dintre aritmetică şi algebra – considerate pentru prima data de indieni;
- teorema congruenţelor şi determinarea lui π cu şase zecimale exacte – de la chinezi – sec. III;
- algebra şi trigonometria – create de arabi;
- regulile de calcul cu numere negative – de la chinezi;
- regula de trecere a termenilor dintr-o parte în alta, procedeu numit al Djabr, de la care a venit si numele disciplinei algebra – AL Horezmi – sec. IX;
- $C_n^0 + C_n^1 + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n$ – de la indieni;
- $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$ – de la arabi;
- criteriile de divizibilitate cu 2, 3, 5, 9; adunarea fracţiilor prin aducerea la c. m. m. m. c.; legea creşterii organice sau şirul lui Fibonacci – Leonardo da Pisa (Fibonacci 1175-1240) – sec. XIII;

- simbolurile +, –, $\sqrt{\ }$, =, x, >, <,: – sfârşitul – sec. XV;
- forma actuală a cifrelor – sec. XV, XVI;
- cifra zero – sec. XVII;
- rezolvarea ecuaţiilor de gradul III prin radicali – Cardano (1501 – 1576) – 1545;
- rezolvarea ecuaţiei de gradul IV prin radicali – Ferrari (1522 – 1565) – 1545;
- inventarea logaritmilor – Neper (1550 – 1617) – 1614;
- teorema lui Desargues – Desargues (1593 – 1662) – 1636;
- marea teoremă Fermat („Conjectura" lui Fermat):ecuaţia $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$, $n \in N$, nu are soluţie în Z – Pierre Fermat (1601 – 1665) – 1637;
- crearea geometriei analitice – René Descartes (1596 – 1650) şi Pierre Fermat – 1637;
- triunghiul lui Pascal şi teorema lui Pascal pentru hexagon – Blaise Pascal (1623 – 1662) – 1640;
- noţiunea de probabilitate – Blaise Pascal şi Pierre Fermat;
- creatorul probabilităţi – Jacob Bernoulli (1654 – 1705);
- creatorii calculului diferenţial şi integral – Isaac Newton (1642 – 1727) şi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Newton a elaborat metodele sale din 1665 dar nu le-a publicat. Leibniz a publicat descoperirile sale în analiza în 1675.
- demonstrarea teoremei mici a lui Fermat ($p > 0$, prim, $a \in Z$, $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$); notaţiile dx şi $\int$; denumirile de derivat şi diferenţială precum şi formulele pentru $(u/v)'$, $(u^v)'$, $(v \bullet u)^{(n)}$, $\int_a^b udv$; denumirile de abscisă, ordonată şi coordonată – Leibniz;
- teorema lui Ceva – Ceva Giovani (1648 – 1734) – 1678;
- daca $N = a^\alpha \bullet b^\beta \ldots e^\lambda$, atunci numărul divizorilor este $(\alpha + 1) \bullet (\beta + 1) \ldots (\lambda + 1)$ şi suma lor $(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha) \bullet (1 + b + b^2 + \ldots b^\beta) \ldots (1 + e + e^2 + \ldots e^\lambda)$ – Johann Wallis (1616 – 1703);
- simbolul ∞ — John Wallis;
- regula $\lim f(x) / g(x) = \lim f'(x) / g'(x)$ (pentru $x \to a$) a fost dată de Johann Bernoulli, dar publicată de L' Hospital (1661 – 1704) în 1696;
- formula lui Taylor – Taylor (1685 – 1731) – 1712;
- introducerea numărului e – Daniel Bernoulli (1700 – 1782);
- teorema lui Stewart – 1735;
- notaţiile π, e, i, f (x); calculul lui e cu 23 de zecimale exacte şi calculul lui π cu 100 de zecimale exacte; $\lim (1 + x / n)^n = e^x$ (pentru $n \to \infty$) (1743); lista completă a derivatelor cu demonstrarea acestora, şi extinderea regulilor lui L'Hospital la formele nedeterminate ∞ / ∞, $0 \bullet \infty$ şi $\infty - \infty$ (1755); generalizarea teoremei mici a lui Fermat ($n \geq 2$, $n \in N$, $a \in Z$, $(a, n)= 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$)) – 1758; relaţia $v + f = m + 2$ pentru poliedru convex (1750) – Leonhard Euler (1707 – 1783);
- media aritmetică ≤ media geometrică ≤ media armonică – Colin MacLaurin (1698 – 1746) – 1748;
- regula lui Cramer– Gabriel Cramer (1700 – 1782) – 1750;
- notaţia a + b i pentru numere complexe şi teorema fundamentală a algebrei – Jean D'Alembert (1717 – 1783) – sec. XVIII;
- π este iraţional – Heinrich Lambert (1728 – 1777) – 1767;
- notaţiile $f'(x)$, $f^{(n)}(x)$,– Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) – – 1772;
- introducerea simbolului [•], pentru partea întreaga Arien Marie Legendre (1752 – 1833) – 1798;
- introducerea numerelor transcendente – Joseph Liouville (1809 – – 1882);

- denumirea de determinant (1801); denumirea de număr complex şi reprezentarea în plan a numerelor complexe (1832); rezolvarea problemei construirii poligoanelor regulate (1801); $1 + 2 + \ldots + n = n (n + 1) / 2$; notația $\varphi (n)$ pentru indicatorul lui Euler; inelul $Z [i]$; demonstrarea teoremei fundamentale a algebrei – Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855);
- noțiunile de limită, convergență, convergența seriilor şi continuitate aşa cum sunt prezentate astăzi; regula lui L'Hospital pentru 0^0, ∞^0 şi 1^∞ ; denumirile de linii, coloane, ordine, elemente, diagonala principală şi secundară pentru determinanți (1815); creatorul teoriei grupurilor (1815) – Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857);
- notația $\int_a^b f (x)\, dx$ – Joseph Fourier (1768 – 1830) – 1822;
- notația de funcție de astăzi şi notațiile $f (a + 0)$, $f (a - 0)$ – Peter Dirichlet (1805 – 1859) – 1828;
- denumirea de grup – Evariste Galois (1811 – 1832) – 1830;

- noțiunile de margine inferioară şi superioară ale unei funcții, convergență uniformă – Weierstrass (1815 – 1897) – 1841;
- spațiul cu n dimensiuni – Arthur Cayley şi Hermann Grasmann – – 1843;
- studiul algebrelor (1843) şi grupurilor (1854) noțiunea de matrice – – Arthur Cayley (1821 – 1895);
- integrala Riemann $\int_a^b f (x)\, dx$ – Bernhard Riemann (1823 – 1866) – 1854;
- spațiu vectorial, calcul vectorial, clase, operațiile de asociativitate, comutativitate, distributivitate, simetrie, tranzitivitate – William Hamilton (1805 –1865) – 1853;
- notația $|a_{ij}| = \det (a_{ij})$ – Kronecker (1823 – 1891) – 1853;
- noțiunile de inel şi corp algebric – R. Dedekind (1831 – 1836) – – 1871;
- teoria mulțimilor – G. Cantor (1845 – 1918) – 1872;
- introducerea numerelor raționale prin tăieturi – Dedekind – 1872;
- transcendența numărului e – Charles Hermite (1822 – 1901) – 1873;
- denumirea de subgrup – Sophus Lie (1842 – 1899) – 1874;
- teorema Rouche – E. Rouche – 1875;
- transcendenta numărului π – Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) – 1882;
- introducerea axiomatică a numerelor întregi – David Hilbert (1862 – 1943) – 1900;
- rezolvarea problemei paralelismului:
  - geometria hiperbolică – Nikolai Ivanovici Lobacevski (1792 – – 1856) – 1829;
  - geometria hiperbolică – Jánoş Bolyai (1802 – 1860) – 1831;
  - geometria eliptică – Riemann Benhard – (1826 – 1866) – 1854 ;
  - geometria neeuclidică este geometria proiectivă care lasă o cuadrică fixă – Cayley Arthur (1821 – 1895) – 1859;
  - orice grup de transformări generează o geometrie (axiomă) – programul de la Erlangen (1872) – Felix Klein (1849 – 1925);
  - sistemul axiomatic al lui Hilbert – David Hilbert (1862 – 1943) – „Bazele geometriei" – 1899;

Prin profunzimea ideilor şi a modului de exprimare, „Bazele geometriei" lui Hilbert a devenit cartea de temelie a matematicilor moderne şi metoda axiomatizării în sensul Hilbert a fost generalizată pentru toate ramurile noi ale matematicii. Totuşi, pentru uşurarea înțelegerii geometriei afine şi euclidiene, astăzi se adoptă o construcție a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazate pe algebra liniară. Acest fapt este în concordanță cu schimbările determinate de noul curriculum, de noul sistem de evaluare şi de noile manuale.

Bibliografie:

1. N. Mihăileanu – Istoria matematicii, vol. 1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.
2. N. Mihăileanu – Istoria matematicii, vol. 2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
3. N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2007

III.1. Inegalitatea izoperimetricã

Teorema ce urmeazã îşi propune sã dea rãspuns la urmãtoarea întrebare:
"Dintre toate curbele plane regulate, simple şi închise, având aceeaşi lungime L, care mãrgineşte domeniul cu aria maximã?".

R = multimea numerelor reale, $R^2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in R, x_2 \in R\} =$ *spatiu* vectorial /R.

$\langle x, y\rangle$ = *produsul* scalar a doi vectori din R^2.

$E_2 = (R^2, \langle .,. \rangle)$ = *spatiul* vectorial euclidian.

Def 1. Fie $I \subset R$, interval. Se numeste curbã în spatiul E_2, o aplicatie C^∞ - diferentiabilã

$c : I \to E_2, t \to c(t) = (x(t), y(t)) \in E_2, \forall t \in I.$

Def 2. O curbã $C : [a, b] \to E_2$ se numeste curbã regulatã dacã $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a, b]$.

Def 3. O curbã $C:[a\ ,b]\rightarrow E_2$ se numeste curbã simplã dacã $\forall t_1, t_2 \in [a, b)$ cu $t_1 \neq t_2$, avem $c(t_1) \neq c(t_2)$.

Def 4. O curbã $C:[a\ ,b]\rightarrow E_2$ se numeste curbã inchisã dacã $c(a) = c(b)$ si $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)\ \forall i \rhd 0$.

Def 5. O curbã $C: I \rightarrow E_2$ este parametrizatã canonic, dacã $\|c'(s)\| = 1, \forall s \in I$.

Pentru a stabili prima egalitate din (1) vom folosi formula lui Green

$$\int_{Imc} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$ unde P si Q sunt functii diferentiabile definite pe D.

Daca in formula lui Green luom $Q(x, y) = x$ si $P(x, y) = -y$ atunci obtinem :

$$S = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_a^b [x(s)y'(s) - y(s)x'(s)]ds = \int_a^b x(s)y'(s)ds = -\int_a^b x'(s)y(s)ds.$$

Teorema : Consideram o curba plana regulata, simpla si inchisa, avand lungimea L si fie S aria domeniului D marginit de curba C. Atunci $(*)\ 4\pi\pi \leq L^2$.

Semnul egal are loc daca si numai daca curba C este un cerc.

Inegalitatea $(*)$ poarta numele de inegalitatea izoperimetrica.

Demonstrație:

Fie t_1 şi t_2 douã drepte paralele, tangente la curba datã astfel încât toate punctele curbei sã se gãseascã în regiunea cuprinsã între t_1 şi t_2. Fie 2r distanța între cele douã drepte şi C(O,r) un cerc tangent dreptelor t_1 şi t_2.

Alegem sistemul de axe carteziene ortogonale cu originea în O şi axã a absciselor paralela la t_1 dusã prin O.

Curba consideratã este:

$C:[0,L]\rightarrow E_2, c(s)=(x(s),y(s)), \|c'(s)\|=1, \forall s\in[0,L]$.

Pe cercul C(O, r) alegem ca parametru pe s.

Deci cercul C(O, r) este imaginea aplicatiei diferentiabile:

$C_1:[0,L]\rightarrow E_2, c_1(s)=(x(s),y(s))$.

Folosind formula (1) din lema anterioara, obtinem ca aria cercului

este data de:

$$(2)\pi r^2=\int_0^L x(s)y'(s)ds$$

Aria S a domeniului D marginit de imaginea aplicatiei C este:

$$(3)S=-\int_0^L x'(s)y(s)ds,$$

$$\text{Din (2) si (3)}\Rightarrow \pi r^2+S=\int_0^L[x(s)y'(s)-y(s)x'(s)]ds\le$$

$$\le\int_0^L\sqrt{[x(s)y'(s)-y(s)x'(s)]^2}ds=$$

$$=\int_0^L\sqrt{[x^2(s)+y^2(s)][y'^2(s)+x'^2(s)]-[x(s)x'(s)+y(s)y'(s)]^2}ds=$$

$$=\int_0^L\sqrt{r^2-[x(s)x'(s)+y(s)y'(s)]^2}ds\le\int_0^L\sqrt{r^2}ds=rL,$$

Inmultind (6) si (8) obtinem:

$$(\pi r^2+S)\sqrt{\pi r^2 S}\le(\frac{\pi r^2+S}{2})rL\Rightarrow \pi r^2 S\le\frac{r^2L^2}{4}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (*)4\pi S\le L^2$ (adica tocmai inegalitatea care trebuia stabilita).

Singurul lucru pe care îl mai avem de arãtat este acela cã în (*) avem egalitate dacã şi numai dacã curba C este un cerc.

Necesitatea:

Presupunem cã curba C este un cerc de razã r, atunci avem:

$4\pi S=4\pi\cdot\pi r^2=(2\pi r)^2=L^2$.

Suficiența:

Reciproc sã presupunem cã avem egalitatea:

$4\pi S=L^2$

şi sã demonstrãm cã curba C este un cerc

(9) $r^2 4\pi S = L^2 r^2$, $(9)' 2\sqrt{\pi r^2 S} = rL$

Din (8) si (6) $\Rightarrow$ $(10)\, 2\sqrt{\pi r^2 S} \le \pi r^2 + S \le rL \Rightarrow (11)\, \pi r^2 + S = rL$

Tinand seama de drumul parcurs pentru stabilirea inegalitat ii (6), egalitatea (11) ne arata ca trebuie sa avem :

$(12) x(s)x'(s) + y(s)y'(s) = 0, \forall s \in [0, L]$

$(13) x(s)y'(s) - y(s)x'(s) \rhd 0, \forall s \in [0, L]$

Deoarece curba C este regulata (12) poate fi scrisa sub forma $(12)' \dfrac{x(s)}{y'(s)} = -\dfrac{y(s)}{x'(s)} = \lambda(s), unde$

$\lambda : [0, L] \to R$ este o functie diferentiabila

Din $(12)' \Rightarrow \lambda^2(s) = \dfrac{x^2(s)}{y'^2(s)} = \dfrac{y^2(s)}{x'^2(s)} = \dfrac{x^2(s) + y^2(s)}{y'^2(s) + x'^2(s)} = r^2 \Rightarrow (14) \lambda(s) = \varepsilon r$, unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$

Din $(12)'$ si $(14) \Rightarrow (15) \begin{cases} x(s) = \varepsilon r y'(s) \\ y(s) = -\varepsilon r x'(s) \end{cases}$ Tinand seama de (15) conditia

(13) $(\varepsilon r y'^2(s) + \varepsilon r x'^2(s) \rhd 0)$ implica $\varepsilon = 1$

Deci avem $y(s) = -r x'(s) \Rightarrow x'(s) = -\dfrac{y(s)}{r}$ si din $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$,

avem $\dfrac{y^2(s)}{r^2} + y'^2(s) = 1 \Rightarrow \dfrac{y'(s)}{\sqrt{r^2 - y^2(s)}} = \pm\dfrac{1}{r}$ care prin integrare

duce la (16) $y(s) = r\sin(\pm\dfrac{s}{r} + s_0), s_0 = cons\tan ta$ .din (16) si

$y(s) = -r x'(s) \Rightarrow x'(s) = -\sin(\pm\dfrac{s}{r} + s_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (17) x(s) = \pm r\cos(\pm\dfrac{s}{r} + s_0) + a, a = cons\tan ta.$

Din (16) si (17) $\Rightarrow (18) [x(s) - a]^2 + y^2(s) = r^2$

Din $4\pi S = L^2$ si (11) $\Rightarrow (19) L = 2\pi r$

Din (18) si (19) $\Rightarrow$ curba cautata este cercul cu centrul in punctul (a,0) si raza r, reprezentat de curba

$$C : [0, L] \to E_2, c(s) = (\pm r\cos(\pm\frac{s}{r} + s_0) + a, r\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0)).$$

Observaţie: Este evident cã aria domeniului plan mãrginit de o curbã închisã şi convexã având lungimea L, este mai mare decât aria domeniului plan mãrginit de o curbã închisã neconvexã având lungimea L. Din aceastã cauzã în demonstraţia teoremei curba C am considerat-o convexã.

III.2. Câteva observații ale „ inegalității izoperimetrice”

$\boxed{\text{O1}}$. În 1827, Jacob Steiner (1796–1863) a demonstrat pentru prima oară teorema următoare:

„Dintre toate figurile plane, convexe, izoperimetrice (adică care au aceeaşi lungime) aria maximă este realizată de cerc”.

$\boxed{\text{O2}}$. În 1916, Blaschke Wilhelm (1885-1961) demonstrează următoarea teoremă:

„Pentru orice curbă plană, închisă, de lungime L şi arie A avem $4\pi A \leq L^2$. $4\pi A = L^2 \Leftrightarrow$ curba este un cerc”.

$\boxed{\text{O3}}$. În 1921, Carleman Torsten (1892-1949) a demonstrat inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafețe minimale.

$\boxed{\text{O4}}$. În 1933, E.F.Beckenbach şi F.Radó demonstrează inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafețe de curbură gaussiană negativă.

III.3. Consecințe ale inegalității izoperimetrice:

$\boxed{\text{C1}}$. **Dintre toate triunghiurile izoperimetrice (care au acelaşi perimetru) aria maximă o are triunghiul echilateral** (Zenodor, sec.2 î.Hr.).

Demonstrație: Se va ține cont de următoarea propoziție:

Ⓟ „ Dacă factorii unui produs au suma constantă, atunci produsul lor este maxim dacă factorii sunt egali”. Avem S = $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, aria triunghiului şi a+b+c = const.(din ipoteză), p = $\frac{(a+b+c)}{2}$ = const; a, b, c- variabile.

S este maximă $\Leftrightarrow S^2$ este maximă $\Leftrightarrow$produsul $(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$ cu suma factorilor constantă este maxim $\Rightarrow$p-a = p-b = p-c $\Rightarrow$a = b = c (q.e.d.).

C2. Dintre toate patrulaterele inscriptibile, izoperimetrice, aria maximă o are pătratul **(Zenodor).**

Demonstrație: Considerăm patrulaterul inscriptibil de laturi a, b, c, d. Din ipoteză, a+b+c+d = const. Aria patrulaterului inscriptibil, este dată de formula: S = $\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, unde p = $\frac{(a+b+c+d)}{2}$= const. Avem suma: (p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d) constantă, şi din propoziția Ⓟ $\Rightarrow$p-a = p-b = p-c = p-d $\Rightarrow$a=b=c=d (q.e.d.).

$\boxed{\text{C3}}$. **Un poligon de laturi date, are aria maximă, dacă este inscriptibil.** (enunțată de Christian Huygens (1629-1695) în 1675 şi demonstrată de Gabriel Cramer (1704-1752) în 1752).

Demonstrație: Fie două poligoane P şi P' formate cu aceleaşi laturi, cu P înscris într-un cerc şi P' neinscriptibil. Pe laturile poligonului P' purtăm exterior segmente de cerc, corespunzătoare laturilor poligonului P. Obținem astfel o linie curbă (C') izoperimetrică cu (C). Din inegalitatea izoperimetrică avem Aria (C) > Aria (C') .

Aria (C) = Aria (P) + Aria (segm. de cerc) >Aria (P') + Aria (segm. de cerc)= Aria (C')

Deci Aria (P) > Aria (P') (q.e.d.).

$\boxed{\text{C4}}$. **Dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are aria maximă.** (Zenodor)

Demonstrație: Din consecința 3 avem că poligonul de arie maximă este inscriptibil. Pe de altă parte, acest poligon trebuie să aibă laturile egale. În caz contrar, presupunem $AB \neq BC$ şi construim triunghiul isoscel AB'C cu acelaşi perimetru cu ΔABC. Dar Aria (AB'C) > Aria (ABC) şi obținem un poligon izoperimetric de arie mai mare, ceea ce este contrar ipotezei. Poligonul care extremează aria, are deci toate laturile egale, şi fiind inscriptibil, este regulat.

$\boxed{\text{C5}}$. **Dintre toate poligoanele echivalente (cu aceeaşi arie), de acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are perimetrul minim.**

Demonstrație: Fie **P** un poligon oarecare, de arie **a** şi perimetru ℓ, şi **P', P"** două poligoane regulate de acelaşi număr de laturi cu **P**, astfel încât **P'** este echivalent cu **P** **(a'=a)** şi **P"** izoperimetric cu **P** **(ℓ"=ℓ).**

Deoarece **P"** este izoperimetric cu **P** şi **P"** este regulat, rezultă din $\boxed{\text{C4}}$ **a">a.**

$\begin{cases} a''>a \\ a=a' \end{cases} \Rightarrow$ **a">a'** $\Rightarrow \ell''>\ell'$. Din $\ell''=\ell$ şi $\ell''>\ell' \Rightarrow \ell>\ell' \Rightarrow$ **P'** are perimetrul minim (q.e.d.).

<u>**Notă:**</u> Am optat pentru aceste consecințe deoarece, pot fi înțelese uşor de elevii din liceu şi de cei din clasele terminale din gimnaziu.

Bibliografie:

1. N. Mihăileanu - „Istoria matematicii”, vol.1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.
2. N. Mihăileanu - „Istoria matematicii”, vol. 2, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
3. L. Nicolescu - „Geometrie”, Editura Universității Bucureşti, 1993.
4. N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ’’Rafet’’, Rm. Sărat, 2007

IV. Elemente de geometria triunghiului în coordonate baricentrice (egalităţi şi inegalităţi în triunghi).

Articolul vine uşor în completarea programei şcolare din liceu şi are scopul de a pune în evidenţă noi metode de rezolvare a problemelor de geometrie şi de a lãrgi orizontul matematic al elevilor.În cele ce urmează, voi enunţa şase teoreme importante şi voi demonstra numeroase aplicaţii ale acestor teoreme referitoare la unele egalităţi şi inegalităţi în triunghi.

Teorema 1.Se considerã un triunghi fix ABC şi notãm BC=a,CA=b,AB=c,S=Aria(ABC).

Atunci pentru orice M $\in$ E_2 (unde, E_2 este planul euclidian)existã şi este unic tripletul ordonat (x,y,z) $\in R^3$,x+y+z=1 astfel încât

$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

şi reciproc,pentru orice triplet ordonat (x,y,z) $\in R^3$,x+y+z=1 existã şi este unic un punct M $\in E_2$ astfel încât

$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

şi în acest caz vom spune cã punctul M are coordonatele baricentrice (x,y,z) în raport cu triunghiul ABC şi vom nota M(x,y,z).Pentru orice X $\in E_2$ avem

$x\overrightarrow{XA}+y\overrightarrow{XB}+z\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XM}$

(demonstraţie în [1]pag.66).

Exemple de coordonate baricentrice pentru câteva puncte remarcabile într-un triunghi:

1.1.A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1);

$1.2.G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-$ *centrul de greutate*;

$1.3.I\left(\frac{a}{2p},\frac{b}{2p},\frac{c}{2p}\right)-$ *centrul cercului inscris* $C(I,r)$;

$1.4.I_a\left(\frac{a}{2(p-a)},\frac{b}{2(p-a)},\frac{c}{2(p-a)}\right)-$

centrul cercului exinscris $C(I_a,r_a)$;

$1.5.N\left(\frac{p-a}{p},\frac{p-b}{p},\frac{p-c}{p}\right)-$ *punctul lui Nagel*;

$1.6.\Gamma\left(\frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)},\frac{(p-c)(p-a)}{r(4R+r)},\frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)}\right)-$

punctul lui Gergone;

$1.7.H(ctgBctgc,ctgCctgA,ctgActgB)-$ *ortocentrul*;

$1.8.O(\frac{R^2\sin 2A}{2S},\frac{R^2\sin 2B}{2S},\frac{R^2\sin 2C}{2S})-$

centrul cercului circumscris $C(O,R)$;

$1.9.L(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2})-$

punctul lui Lemoine.

Teorema 2. Puterea punctuluiM(x,y,z) $\in E_2$ faţã de cercul C(O,R),circumscris triunghiului ABC este dat de relaţia:

$p_c(M)=-(yza^2+zxb^2+xyc^2);OM^2=R^2-p_c(M).$

(demonstrație în [1] pag.68).

Aplicații ale teoremei 2:

$$2.1. p_c(G) = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9}, OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} si,$$

$$a^2+b^2+c^2 \le 9R^2;$$

demonstrație:se aplicã teorema2 şi 1.2.

$$2.2. p_c(I) = -2Rr, OI^2 = R^2 - 2Rr, si, R \ge 2r;$$

demonstrație:rezultã imediat din teorema2 şi 1.3.

$$2.3. p_c(I_a) = -2Rr_a, OI_a^{\ 2} = R^2 + 2Rr_a;$$

demonstrație:folosim teorema2 şi 1.4.

$$2.4. p_c(N) = -4r(R-r), ON = R - 2r;$$

demonstrație:utilizãm teorema 2 şi 1.5.

$$2.5. p_c(H) = -8R^2 \cos A \cos B \cos C, OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C),$$

$$si, \cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}, iar$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2), deoarece, \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

demonstrație:se aplicã teorema 2 şi 1.7.

$$2.6. p_c(\Gamma) = -r(R+r)\left(\frac{2p}{4R+r}\right);$$

demonstrație:se foloseşte teorema 2 şi 1.6.

$$2.7. p_c(L) = -3\left(\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2, OL^2 = R^2 - 3\left(\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2, si,$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{3};$$

demonstrație:rezultã imediat din teorema 2 şi 1.9.

Teorema 3.a)Pentru M(x,y,z) $\in E_2$ existã relația:

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = -p_c(M)$$

b)Pentru orice $X \in E_2$ existã relația:

$$xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 = XM^2 - p_c(M), si$$

$$xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 \ge yza^2 + zxb^2 + xyc^2.$$

(demonstrație în [1] pag.69)

Aplicații ale teoremei 3 :

$$3.1. M \equiv G \Rightarrow XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \forall X \in E_2;$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3};$$

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \forall X \in E_2,$$

cu egalitate pentru $X \equiv G$.

$3.2. M \equiv I \Rightarrow aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = 2pXI^2 + abc, \forall X \in E_2;$

$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc;$

$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \geq abc, \forall X \in E_2,$

cu egalitate pentru $X \equiv I.$

$3.3. M \equiv I_a \Rightarrow bXB^2 + cXC^2 + abc = aXA^2 + 2(p-a)XI_a{}^2, \forall X \in E_2;$

$X \equiv I_a \Rightarrow bI_aB^2 + cI_aC^2 + abc = aI_aA^2; bXB^2 + cXC^2 + abc \geq aXA^2$

cu egalitate pentru $X \equiv I_a.$

3.4. *Daca* $M(x, y, z) \in E_2$, *atunci* $\forall X \in E_2$ *avem*:

$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \leq xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 \leq XM^2 + R^2,$

cu egalitate in stanga, pentru $X \equiv M$

si egalitate in dreapta, pentru $M \equiv O.$

De exemplu, pentru $M \equiv I \Rightarrow$

$abc \leq aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \leq 2p(XI^2 + R^2).$

3.5. *Daca*, $X \equiv M \Rightarrow xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 =$

$= yza^2 + zxb^2 + xyc^2 = R^2 - OM^2$, *si*,

$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \leq R^2$, *cu egalitate pentru* $M \equiv O;$

3.6. *Daca*, $X \equiv A \Rightarrow MA^2 = p_c(M) + zb^2 + yc^2$, *de unde, rezulta*:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3p_c(M) + (y+z)a^2 + (z+x)b^2 + (x+y)c^2.$

Teorema 4.Dacã $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}$,atunci distanța între punctele M_1, M_2 este datã de relația:

$$M_1M_2{}^2 = -\begin{bmatrix} (y_1 - y_2)(z_1 - z_2)a^2 + (z_1 - z_2)(x_1 - x_2)b^2 + \\ + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)c^2 \end{bmatrix}.$$

(demonstrație în [1] pag.70).

Aplicații ale teoremei 4:

Utilizând coordonatele baricentrice (vezi exemplele date)şi teorema 4 obținem urmãtoarele relații:

$4.1. OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}; 4.2. OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C) =$

$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$, *de unde rezulta*,

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ *este, dreptunghic*

$4.3. OI^2 = R^2 - 2Rr; HN = 2OI;$

$4.4. NI^2 = 9GI^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr \Rightarrow$

$p^2 + 5r^2 \geq 16Rr; 4.5. HI^2 = 4R(R+r) + 3r^2 - p^2 \leq 4R(R+r) + 3r^2;$

$$4.6. \Gamma I^2 = r^2\left[1 - \left(\frac{p\sqrt{3}}{4R+r}\right)^2\right] \Rightarrow p\sqrt{3} \leq 4R + r;$$

$$4.7. LI^2 = \frac{4S^2R(R+r)}{p^2 - r^2 - 4Rr};$$

$$4.8. G\Gamma^2 = \frac{4}{9(4R+r)^2}\left[p^2(4R^2 + 8Rr - 5r^2) - r(4R+r)^3\right] \Rightarrow$$

$(2R - r)(2R + 5r)p^2 \geq r(4R + r)^3;$

$$4.9. H\Gamma^2 = 4R^2\left[1 - \frac{2p^2(2R-r)}{R(4R+r)^2}\right] \Rightarrow 2p^2(2R - r) \leq R(4R+r)^2.$$

Teorema 5. Dacă $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}$,atunci avem:

$$\overrightarrow{OM_1}\overrightarrow{OM_2} = R^2 - \frac{1}{2}\left[(y_1z_2 + y_2z_1)a^2 + (z_1x_2 + z_2x_1)b^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)c^2\right]$$

(demonstrație în [1] pag.71.).

Aplicații ale teoremei 5:

Folosind această teoremă obținem egalități şi inegalități importante printre care cele ce urmează:

$$5.1. \overrightarrow{OG}\overrightarrow{OM} = R^2 - \frac{1}{6}\left[(y+z)a^2 + (z+x)b^2 + (x+y)c^2\right]$$

$5.1.1. \overrightarrow{OG}\overrightarrow{OA} = R^2 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2); OG \perp OA \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 6R^2, si, b^2 + c^2 \leq 6R^2$

$\Leftrightarrow m(AOG) \leq 90^0$

$5.1.2. \overrightarrow{OG}\overrightarrow{OI} = R^2 - \frac{1}{6}(p^2 + r^2 - 2Rr), si, 2R(3R + r) \geq p^2 + r^2 \Leftrightarrow m(IOG) \leq 90^0, iar,$

$2R(3R + r) = p^2 + r^2 \Leftrightarrow a = b = c, sau, OI \perp OG;$

$5.1.3. \overrightarrow{OG}\overrightarrow{ON} = (R + r)^2 - \frac{p^2}{3}, si, p \leq \sqrt{3}(R + r) \Leftrightarrow m(NOG) \leq 90^0, iar,$

$p = \sqrt{3}(R + r) \Leftrightarrow a = b = c, sau, ON \perp OG;$

$$5.2. \overrightarrow{OI}\overrightarrow{OM} = R(R + r) - \frac{1}{2}(xbc + yca + zab);$$

$$5.2.1. \overrightarrow{OI}\overrightarrow{ON} = R^2 + 5Rr - \frac{1}{2}(p^2 + r^2), si, 2R(R + 5r) \geq p^2 + r^2$$

$\Leftrightarrow m(ION) \leq 90^0, iar,$

$2R(R + 5r) = p^2 + r^2 \Leftrightarrow a = b = c, sau, OI \perp ON;$

$$5.2.2. \overrightarrow{OI}\overrightarrow{OA} = R^2 + Rr - \frac{1}{2}bc, si, aR \geq (b + c)r \Leftrightarrow m(AOI) \leq 90^0, iar,$$

$aR = (b + c)r \Leftrightarrow a = b = c, sau, OA \perp OI.$

Teorema6. Dacã $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}, avem:$

$$a)\overrightarrow{IM_1}\overrightarrow{IM_2} = -4Rr + \frac{1}{2}[(z_1+z_2)ab + (x_1+x_2)bc + (y_1+y_2)ca] -$$

$$-\frac{1}{2}[(y_1z_2+y_2z_1)a^2 + (z_1x_2+z_2x_1)b^2 + (x_1y_2+x_2y_1)c^2],$$

(demonstrație în [1],pag.73)

$$b)\overrightarrow{GM_1}\overrightarrow{GM_2} = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{6}[(x_1+x_2)a^2 + (y_1+y_2)b^2 + (z_1+z_2)c^2] -$$

$$-\frac{1}{2}[(y_1z_2+y_2z_1)a^2 + (z_1x_2+z_2x_1)b^2 + (x_1y_2+x_2y_1)c^2],$$

(demonstrație în [1],pag.74)

$$c)\overrightarrow{MM_1}\overrightarrow{MM_2} = p_c(M) + \frac{1}{2}\{[y(z_1+z_2) + z(y_1+y_2) - (y_1z_2+y_2z_1)]a^2 + ...\}.$$

(demonstrație în [1],pag.75)

Observație. Cu ajutorul acestor relații remarcabile se pot determina ,în particular,produse scalare,distanțe,egalităţi şi inegalităţi utilizând puncte din mulțimea: $\{A, B, C, O, G, H, I, I_a, I_b, I_c, N, \Gamma, L\}$
asociatã unui triunghi ABC.**(Exercițiu!).**

Mai fac observația cã particularizãri şi unele extinderi ale coordonatelor baricentrice sunt abordate în lucrãrile [2] , [3] şi articolele [4] , [5] .Un fapt care motivează studiul coordonatelor baricentrice este legãtura acestora cu calculul vectorial recent (relativ) introdus în programele şcolare IX-XII .

Notã:Problemele rezolvate aici s-au vrut cât mai elegante;ele au fost alese dintre cele date la diferite concursuri sau publicate în diverse alte cãrți sau reviste.

Bibliografie

[1] .V.Nicula,Geometrie planã,Ed.Gil,2002.
[2].N.Teodorescu,ş.a.,Culegere de probleme pentru concursurile de matematicã,vol.5,S.S.M.R,Bucureşti,1977.
[3].M.Craioveanu,I.D.Albu,Geometrie afinã şi euclidianã,Ed.Facla,Timişoara,1982.
[4] .T. Bârsan, Recreații matematice, nr. 1 / 2002;
[5] .C. Coandã, Gazeta matematicã, nr. 8 / 2005;
[6].N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2007

V. Teoremele fundamentale ale algebrei liniare, geometriei afine şi euclidiene

1. **Introducere**.

Punctul de plecare al acestui articol îl constituie un principiu emis de Felix Klein în memoriul „Consideraţii comparative asupra noilor cercetări geometrice", la Erlangen, în 1872, cunoscut sub numele de Programul de la Erlangen. Cu ajutorul acestui principiu sunt definite: algebra liniară, geometria afină şi geometria euclidiană cu ajutorul invarianţilor unui grup de transformări. Prin emiterea grupului, am identificat sistemul axiomatic ca o teorie a invarianţilor fundamentali (puncte, drepte, relaţia de incidenţă, de ordine, de egalitate, de paralelism, de continuitate) ai unui grup de transformări. În acest sens, ca să studiem o disciplină matematică este esenţial să determinăm grupul în raport cu care noţiunile ei sunt invariante.

În elaborarea acestui articol, am ţinut cont că acum la liceu, se adoptă o construcţie a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazată pe algebra liniară, care permite îmbinarea metodelor sintetică şi analitică în studiul geometriei şi uşurează înţelegerea geometriei afine şi a geometriei euclidiene.

2. **Algebra liniară**

Noţiunile de spaţiu vectorial, aplicaţie liniară precum şi proprietăţile acestora sunt tratate în [1] şi [2]

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste corpul K cu
$\dim_K V = n$ şi
$\dim_K W = m$.

2.1. **Teoremă** (fundamentală a algebrei liniare).
$f: V \to W$, este aplicatie liniara daca si numai daca ecuatia ei matriciala este de forma

$$Y = AX\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}\right), ([3], p.32)$$

2.2. **Teoremă**. Operaţia de compunere determină pe mulţimea transformărilor liniare bijective ale unui spaţiu vectorial V peste corpul K o structură de grup.

Demonstratie : Fie $f: V \to V$, o transformare liniara bijectiva de ecuatie
$Y = AX$ si $g: V \to V$
o alta transformare liniara bijectiva de ecuatie $Z = BY$. Avem $Z = (BA)X$,
deci (a) $g \circ f: V \to V$ este o transformare liniara,
conform teoremei 2.1. Daca $f: V \to V$ este data de ecuatia $Y = AX$,
atunci $X = A^{-1}Y$ si conform teoremei 2.1, avem (b) $f^{-1}: V \to V$
este o transformare liniara.

Din (a) şi (b) rezultă c.c.t.d.

2.3. **Definiţie**. Grupul din teorema 2.2 se numeşte grupul liniar (vectorial) general al spaţiului vectorial V şi se notează GL(V).

2.4. **Definiţie**. Vom numi **algebra liniară** a spaţiului vectorial V peste corpul K, studiul proprietăţile sistemelor din V care sunt păstrate de transformările grupului GL(V).

3. **Geometria afină**

Fie V un spatiu vectorial peste corpul comutativ K, A o multime nevida si $f : \mathcal{A}x\mathcal{A} \to V$

o aplicatie care asociaza fiecarei perechi de elemente $A, B \in \mathcal{A}$

vectorul f(A, B) notat $\overrightarrow{AB}$,

astfel incat: 1)$\forall A.B, C \in \mathcal{A}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;2)$\exists O \in \mathcal{A}$, astfel incat aplicatia $f_0 : \mathcal{A} \to V$

$f_0(A) = \overrightarrow{OA}$ este bijectiva.

3.1. **Definiție**. Aplicația f cu proprietățile de mai sus se numeşte **structură afină**.

3.2. **Definiție**. Mulțimea A dotată cu structura afină f se numeşte **spațiu afin** asociat spațiului vectorial V peste corpul K. Prin convenție elementele lui A se numesc **puncte**. Spațiul afin A asociat spațiului vectorial V peste corpul K cu structura afină f se desemnează deseori prin tripletul (A, V / K, f). $\dim_K A \overset{def}{=} \dim_K V$.

Fie A_1 şi A_2 două spații afine asociate spațiilor vectoriale V_1 şi V_2 peste acelaşi corp K.

3.3. Definitie. Se numeste transformare afina a spatiului afin $\mathcal{A}_1$ in spatiul afin $\mathcal{A}_2$ o aplicatie

$\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ cu proprietatea ca $\exists O \in \mathcal{A}_1$ astfel incat aplicatia $T : V_1 \to V_2$ data

de $T(\overrightarrow{OA_1}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A_1)}$,

$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1$ sa fie liniara .Transformarea liniara T se numeste urma transformarii afine τ.

3.4. **Teorema** (fundamentală a geometriei afine) τ: $A_1 \to A_2$ este transformare afină dacă şi numai dacă este dată de ecuația Y = AX +B.($\dim_K A_1 = n$, $\dim_K A_2 = m$)

([3], p. 245, [4], p. 140)

3.5. **Teoremă**. Operația de compunere determină pe mulțimea transformărilor afine bijective ale unui spațiu afin A o structură de grup ([4], p.136).

3.6. **Definiție**. Grupul din teorema 3.5. se numesc grup afin şi se notează GA (A).

3.7. **Definiție**. Se numeşte **geometrie afină** studiul proprietăților invariante ale spațiului afin la acțiunea grupului afin.

4. **Geometrie euclidiană**.

Printre spațiile afine distingem o clasă importantă, spațiile punctuale euclidiene.

4.1. **Definiție**. Un spațiu vectorial real V dotat cu un produs scalar ($<\cdot, \cdot>$) se numeşte **spațiu vectorial euclidian**.

4.2. **Definiție**. Un spațiu afin $\mathcal{E}$ asociat unui spațiu vectorial euclidian E se numeşte **spațiu punctual euclidian**. $\dim_K \mathcal{E} = \dim_K E$.

Fie E_1 şi E_2 două spații vectoriale euclidiene.

4.3. Definitie. Aplicatia $T : E_1 \to E_2$ se numeste ortogonala daca pastreaza produsul scalar$\langle .,. \rangle$.

Fie $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ doua spații punctuale euclidiene asociate spațiilor vectoriale euclidiene E_1 şi E_2 ($\dim_K \mathcal{E}_1 = n$, $\dim_k \mathcal{E}_2 = m$).

4.4. **Definiție**. O transformare afină τ: $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ se numeşte izometrie dacă urma sa T: $E_1 \to E_2$ este ortogonală.

4.5. **Teoremă**. T: $E_1 \to E_2$ este ortogonală dacă şi numai dacă matricea asociată A verifică relația ${}^T A \cdot A = I_n$

$$\left((*)\sum_{i=1}^{m} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}, \forall j,k \in \overline{1,n}\right)$$

([4], p. 90).

4.6. **Teorema** (fundamentală a geometriei euclidiene). Transformarea τ: $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ este izometrie dacă şi numai dacă este dată de ecuația y = AX +B şi matricea A verifică relația ${}^T A \cdot A = I_n$.

Demonstrație: rezultă imediat din definiția 4.4 şi teoremele 3.4 şi 4.5.

4.7. **Observații**.

a) Dacă $\dim_K \mathcal{E}_1 = \dim_K \mathcal{E}_2 = n$ se obține teorema fundamentală a geometriei euclidiene în spațiul punctual euclidian $\mathcal{E}_n$.

b) Teorema fundamentală a geometriei euclidiene plane, respectiv teorema fundamentala a geometriei euclidiene în spațiu se obține din teorema 4.6. pentru m = n= 2, respectiv m = n = 3.

c) O altă demonstrație pentru teorema fundamentala a geometrie euclidiene în spațiu se bazează pe proprietăți elementare ale izometriilor planului ([4], p. 98).

d) O altă demonstrație pentru teorema fundamentala a geometriei euclidiene în spațiu se bazează pe proprietăți elementare ale izometriilor spațiului ([4], p. 98).

4.8. **Teoremă**. Mulțimea izometriilor bijective ale unui spațiu punctual euclidian dotat cu operația de compunere constituie un grup.

Demonstrație. Fie τ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, izometrie cu urma sa T: $E \to E$. Din teorema 3.5.compunerea a două aplicații afine bijective este o aplicație afină şi în plus compunerea a două aplicații ortogonale este o aplicație ortogonală. Deci avem (a) compunerea a doua izometrii bijective este o izometrie. Tot din teorema 3.5. inversa unei aplicați afine bijective este o aplicație afină şi în plus inversa unei transformări ortogonale este o transformare ortogonală. Deci avem (b) inversa unei izometrii bijective este o izometrie.

Din (a) şi (b) rezultă că mulțimea izometriilor bijective ale unui spațiu punctual euclidian dotată cu operația de compunere constituie un grup.

4.9. **Definiție**. Grupul din teorema 4.8. se numeşte **grupul izometriilor** spațiului punctual euclidian $\mathcal{E}$ şi se notează GI($\mathcal{E}$).

4.10. **Definiție**. Se numeşte **geometrie euclidiană** studiul proprietăților invariante ale spațiului punctual euclidian la acțiunea grupului izometriilor (studiul acelor proprietăți care sunt păstrate de transformările grupului GI($\mathcal{E}$), adică de izometrii).

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, C, Niță, Gh. Grigore, D. Bulacu, Matematică, Manual pentru clasa a XII – a, profil M_1, E.D.P. Bucureşti, 2002.

[2] M. Țena, Matematică, manual pentru clasa a XII – a, profil M_1, Ed. Gil, Zalău, 2002.

[3] N. Soare, Curs de geometrie (Partea I), Tipografia Universității Bucureşti, 1996.

[4] A. Turtoi – Geometrie, Tipografia Universității Bucureşti, 1996.

[5] N.Stanciu, *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ''Rafet'', Rm. Sărat, 2007

VI. GENERALIZAREA UNOR PROBLEME DE CALCUL INTEGRAL

Ideea scrierii prezentului capitol mi-a fost sugerată de găsirea unor metode generale pentru soluționarea unor probleme de calcul integral întâlnite destul de des în Gazeta Matematică seria A şi B şi în alte reviste de profil (R.M.T. Timişoara, R.I.M. Braşov, S.Î.M Bacău , Recreații Matematice Iaşi, etc.).

VI.I. Asupra calculului integral pentru funcțiile pare şi impare.

Propoziția 1.

Fie $c \in (0,\infty)$ şi $f:(-c,c) \to R$ o funcție continuă. Atunci :

(1) $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx, \quad \forall a,b \in (-c,c)$; în particular, $\int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx,$ $\forall a \in (-c,c)$;

(2) f este pară dacă şi numai dacă $\int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \quad \forall a \in (0,c)$ (respectiv $a \in (-c,c)$);

(3) f este impară dacă şi numai dacă $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, $\forall a \in (0,c)$ (respectiv $a \in (-c,c)$);

(4) dacă în plus f este pară atunci $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad \forall a \in (-c,c)$;

(5) (i) dacă f este pară atunci $\int_{-a}^a xf(x)dx = 0$, $\forall a \in (-c,c)$;

(ii) dacă f este impară atunci $\int_{-a}^a xf(x)dx = 2\int_0^a xf(x)dx$, $\forall a \in (-c,c)$;

(iii) dacă f este arbitrară atunci $\int_{-a}^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$, $\forall a \in (-c,c)$ şi $\int_{-a}^a xf(x^2)dx = 0$, $\forall a \in (-c,c)$.

Demonstrație .

(1) Fie $a,b \in (-c,c)$, $a < b$ fixați; făcând substituția $x = -t$, obținem c.c.t.d.

(2) Dacă f este pară, $f(x) = f(-x)$, $\forall a \in (-c,c)$ şi deci :

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \ \forall a \in (0,c)$$

Reciproc să presupunem că $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \ \forall a \in (0,c)$

Atunci :

$$\int_0^a (f(x)-f(-x))dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_{-a}^0 f(x)dx = 0,\ \forall a \in (0,c)$$

Rezultă că $f(x)-f(-x)=0$, $\forall x \in (0,a)$. Dacă $x \in (-c,0)$ atunci $-x \in (0,c)$ şi prin urmare $f(-x)-f(-(-x))=0$ deci $f(x)=f(-x)$, $\forall x \in (-c,c)$ adică f este pară.

(3) Dacă f este impară $f(x)+f(-x)=0$, $\forall a \in (-c,c)$ şi deci $\forall a \in (0,c)$ avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x)+f(x))dx = 0,$$

Reciproc fie $a,b \in (-c,c), a<b$ fixați , conform ipotezei avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-b}^b f(x)dx = 0, \text{ dar } \int_a^b f(x)dx = \int_b^{-b} f(x)dx + \int_{-b}^{-a} f(x)dx + \int_{-a}^a f(x)dx$$

dar din (1) $\int_{-b}^{-a} f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$, rezultă că $\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$ deci $\int_a^b (f(-x)-f(x))dx = 0$, de unde $f(-x)+f(x)=0$ $\forall x \in (-c,c)$ prin urmare f este impară.

(4) Dacă f este pară avem $f(x)=f(-x)$, $\forall x \in (-c,c)$ şi deci

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \overset{(1)}{=} 2\int_0^a f(x)dx,$$

(5) (i) Dacă f este pară atunci funcția $x \to xf(x)$ este impară şi deci $\int_{-a}^a xf(x)dx \overset{(3)}{=} 0$, $\forall a \in (-c,c)$

(ii) analog ca în (i)

(iii) rezultă imediat din (i) şi (ii) ținând seama de faptul că funcția $x \to f(x^2)$ (respectiv $x \to xf(x^2)$) este pară (respectiv impară).

Propoziția 2.

O funcție $f:R \to R$ continuă este impară dacă şi numai dacă $\forall x \in R$, $\int_{-x}^x f(t)dt = constant.$

Demonstrație.

f fiind continuă admite primitive .Fie F o primitivă a sa, rezultă că $\int_{-x}^x f(t)dt = C$ dacă şi numai dacă $F(x)-F(-x)=C$, prin derivare dacă şi numai dacă $f(x)+f(-x)=0$ adică f este impară.

Reciproc dacă f este impară $f(-x)=-f(x)$ implică

$$\int_{-x}^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt - \int_0^x f(-t)dt \overset{(1)}{=} \int_{-x}^0 f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt = 0.$$

VI.II. Asupra calculului integral pentru funcțiile pare şi impare generalizate.

Definiție.

Funcția $f:[a-r,a+r]\to R$ se numeşte a-pară dacă $f(a+x)=f(a-x),\forall x\in R$ cu $|x|\le r$, respectiv a-impară dacă $f(a+x)=-f(a-x),\forall x\in R$ cu $|x|\le r$.

Propoziția II.1.

Fie $f:[x_0-r,x_0+r]\to R$ continuă cu proprietatea că $af(x_0+x)+bf(x_0-x)=c$, $\forall x$ cu $|x|\le r, a,b\in R^*$, c$\in R$, atunci:

(i) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a+b},\ a+b\ne 0$;

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$

Demonstrație.

Considerăm $\alpha,\beta:[-r,r]\to[x_0-r,x_0+r],\quad \alpha(t)=x_0+t,\quad \beta(t)=x_0-t$ şi cum $f:[a-r,a+r]\to R$ este continuă putem aplica scimbarea de variabilă

(i) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\int_{\alpha(-r)}^{\alpha(r)} f(x)dx=\int_{-r}^{r} f(\alpha(t))\alpha'(t)dt=\int_{-r}^{r} f(x_0+t)dt=\int_{-r}^{r}(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t))dt=$

$=\frac{2cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(x_0-t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(\beta(t))\beta'(t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(r)} f(x)dx=$

$=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx$ .Rezultă că $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx+\frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a}$ şi deci $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a+b}$.

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$, dar $\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx=\int_{\alpha(-r)}^{\alpha(0)} f(x)dx=\int_{-r}^{0} f(x_0+t)dt=$

$=\int_{-r}^{0}(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t))dt=\frac{cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(x_0-t)dt=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(\beta(t))\beta'(t)dt=$

$=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(0)} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx$, rezultă că

$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$.

Propoziția II.2.

(i) Dacă $f:[a-r,a+r]\to R$ este continuă atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx=\begin{cases}2\cdot\int_{a}^{a+r} f(x)dx, \text{dacă } f \text{ este a - pară}\\ 0, \text{dacă } f \text{ este a - impară}\end{cases}$$

(ii) Produsul (câtul) a două funcţii de a-parităţi diferite este o funcţie a-impară şi produsul (câtul) a două funcţii de aceeaşi a-paritate este o funcţie a-pară.

Demonstraţie.

(i) Dacă f este a-pară, atunci $f(a+x)-f(a-x)=0$; deci în II.1. punând a=1, b=-1, c=0, x_0=a şi conform II.1.(ii) rezultă că :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = \frac{1-(-1)}{1}\cdot\int_{a}^{a+r} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+r} f(x)dx.$$

Dacă f este a-impară, atunci $f(a+x)+f(a-x)=0$ şi punând în II.1.(ii) a=b=1, c=0, rezultă că $\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = 0$

(ii) Fie f,g a-pare adică $f(a+x)=f(a-x)$, $g(a+x)=g(a-x)$ rezultă că $(f\cdot g)(a+x)=f(a+x)\cdot g(a+x)=f(a-x)\cdot g(a-x)$ şi analog $(\frac{f}{g})(a+x)=(\frac{f}{g})(a-x)$ rezultă că $f\cdot g$ şi $\frac{f}{g}$ sunt a-pare, analog arătându-se şi restul.

Propoziţia II.3.

Pentru orice funcţie $f:[a-r,a+r]\to R$, există o funcţie f_1 a-pară şi o funcţie f_2 a-impară astfel încât $f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \forall x\in[a-r,a+r]$.

Demonstraţie.

Fie $f_1(x)=\frac{f(x)+f(2a-x)}{2}$, $f_2(x)=\frac{f(x)-f(2a-x)}{2}$ rezultă că $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Cum $f_1(a+x)=f_1(a-x)$ rezultă că f_1 este a-pară iar, cum

$f_2(a+x)+f_2(a-x)=0$ rezultă că f_2 este a-impară.

Propoziţia II.4.

Dacă $f,g:[a-r,a+r]\to R$ sunt integrabile şi f este a-pară atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{a+r} f(x)\cdot(g(x)+g(2a-x))dx.$$

Demonstraţie.

Din II.3 rezultă că $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$, unde g_1 este a-pară şi g_2 este a-impară deci

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx = \int_{a-r}^{a+r} f(x)(g_1(x)+g_2(x))dx = \int_{a-r}^{a+r} f(x)g_1(x)dx + \int_{a-r}^{a+r} f(x)g_2(x)dx \overset{(II.2)}{=}$$

$$\overset{(II.2)}{=} 2\int_{a}^{a+r} f(x)g_1(x)dx \overset{(II.3)}{=} 2\int_{a}^{a+r} f(x)(g(x)+g(2a-x))dx.$$

Propoziţia II.5.

Fie $f,g:[a-rf,a+r]\to R$ integrabile şi f este a-impară.Atunci :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{a+r} f(x)\cdot(g(x)-g(2a-x))dx.$$

Demonstrație.
Se demonstreză analog cu propoziția II.4 utilizând II.2. şi II.3.

Concluzie. Acest capitol propune propoziții care permit calculul unor integrale definite ce fac obiectul unor probleme publicate în Gazeta Matematică şi alte reviste de specialitate sau în unele manuale alternative de clasa a XII-a.

În continuare propun spre rezolvare următoarele probleme reprezentative : **pb. 14847** Gazeta Matematică, nr. 7 (1975)**, pb. 22377** Gazeta Matematică, nr. 5 (1991), **pb. 22750** Gazeta Matematică, nr. 1 (1993), **pb. 22990** Gazeta Matematică, nr. 4 (1994), **pb. 23834** Gazeta Matematică, nr. 12 (1997), **pb. 24094** Gazeta Matematică, nr. 3 (1999), **pb. 14847** Gazeta Matematică, nr. 7 (1975), pb. Dată în concurs Gazeta Matematică, nr. 1 (2002), **pb. 25054** Gazeta Matematică, nr. 2 (2004) şi două aplicații ale autorului:

Aplicația 1.

Sã se calculeze: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)} dx$

Soluție.

Fie $f, g : [0,2\pi] \to R,\ f(x) = \frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x},\ g(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$.

Se observă că $f(\pi - x) = f(\pi + x)$, adică este $\pi -$pară şi $g(\pi - x) = -g(\pi + x)$ adică este $\pi -$impară.Funcția $h : [0,2\pi] \to R$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ este conform **Propoziția II.2. (ii)** $\pi -$impară şi conform **Propoziția II.2.(i)** avem $\int_0^{2\pi} h(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)} dx = 0$

Aplicația 2.

Sã se calculeze:

$$\int_{-2007}^{2007} \frac{x^{2008}}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x} + 1} dx$$

Soluție. Notăm $f(x)=x^{2008}$, $g(x)=\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x$ şi $h(x)=\dfrac{1}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x}+1}$.

Se observă imediat că f este continuă şi pară, g este continuă şi impară iar $h(x)+h(-x)=1$.Rezultă $I=\int_{-2007}^{2007}\dfrac{x^{2008}}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x}+1}=\int_{-2007}^{2007} f(x)h(x)dx$.Se ştie că o funcție arbitrară (care nu este nici pară nici impară) se poate scrie ca o sumă de două funcții una pară şi alta impară astfel $h(x)=h_1(x)+h_2(x)$, unde $h_1(x)=\dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ = pară şi $h_2(x)=\dfrac{h(x)-h(-x)}{2}$ =impară.În continuare utilizăm faptul că produsul(câtul) a două funcții de aceeaşi paritate este o funcție pară şi respectiv produsul(câtul) a două funcții de parități diferite este o funcție impară şi obținem :

$$I=\int_{-2007}^{2007}\frac{x^{2008}}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x}+1}=\int_{-2007}^{2007} f(x)h(x)dx=\int_{-2007}^{2007} f(x)(h_1(x)+h_2(x))dx$$

$$\overset{(II.2.i)}{=}\int_{-2007}^{2007} f(x)h_1(x)dx\overset{(II.2.i)}{=}$$

$$\overset{(II.2.i)}{=}\int_{0}^{2007} f(x)dx=\frac{2007^{2009}}{2009}.$$

Bibliografie

[1] V. Arsinte, *Probleme Elementare de Calcul Integral,*Ed. Univ. Bucureşti, 1995
[2] D.M. Bătinețu – Giurgiu,ş.a., *Analiză Matematică,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004
[3] Gazeta matematică 1895 - 2007

VII. Calculul integral în cazul funcțiilor periodice

Propoziția 1. Fie $f: R\to R$ o funcție continuă. Atunci avem:

a) f este periodică de perioadă T, dacă şi numai dacă, $\int_{a}^{a+T} f(x)dx$ = c(constant)

$(\forall)$ $a \in R$;

b) Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Orice primitivă a lui f, este periodică de perioadă T;

(ii) f este periodică, de perioadă T;

(iii) $\int_a^{a+T} f(x)dx = 0$, $(\forall)x \in R$

Demonstrație:

a) $(\Rightarrow)$. Din ipoteză, $f(x+T) = f(x), (\forall)x \in R.$ Avem:

(1) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt, (\forall)a \in R;$

Făcând în ultima integrală, schimbarea de variabilă t=y+t, $y \in [0,T]$, obținem:

(2) $\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy, (\forall)a \in R.$

Din (1) şi (2) rezultă: $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(T)dt, (\forall)a \in R;$

$(\Leftarrow)$. Presupunem că $\int_x^{x+T} f(t)dt = c, (\forall)x \in R$ şi fie F o primitivă a lui f.

Atunci , $c = F(x+T) - F(x), (\forall)x \in R$ şi deci prin derivare obținem: $f(x+T) - f(x) = F'(x+T) - F'(x) = 0, (\forall)x \in R,$ de unde rezultă că f este periodică de perioadă T.

b) (i)$\Rightarrow$ (ii) Mai întâi, observăm că , orice primitivă a lui f este periodică de perioadă T, dacă şi numai dacă, există o primitivă a lui f, periodică, de perioadă T, dacă şi numai dacă, funcția $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ x} \in \text{R},$ este periodică de perioadă T.

(ii)$\Rightarrow$(i). Dacă f este periodică, de perioadă T, avem: $(F(x+t) - F(x))' = f(x+t) - f(x) = 0, \forall x \in R,$ şi deci, există un $c \in R$, astfel încât $F(x+t) - F(x) = c, \forall x \in R.$ Atunci $c = F(0+t) - F(0) = \int_0^T f(t)dt = 0$, deci $F(x+t) = F(x)$, $\forall x \in R$ şi deci F este periodică, de perioadă T.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Rezultă din a).

(i)$\Rightarrow$(iii). Dacă (i) este adevărată, atunci F este periodică, de perioadă T, şi avem: $\int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+t) - F(x) = 0, \forall x \in R.$

(iii)$\Rightarrow$ (i). Din $\int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+t) - F(x) = 0, \forall x \in R$

şi deci F este periodică, de perioadă T.

Bibliografie

[1]. V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral,* Editura Universității Bucureşti, 1995.

VIII. Rezolvarea analitică şi sintetică a unor probleme de geometrie în spațiu

CINCI METODE PENTRU DETERMINAREA DISTANȚEI DINTRE DOUĂ DREPTE NECOPLANARE

Capitolul de faţă îşi propune:

- Prezentarea a cinci metode pentru calculul distanţei dintre două drepte necoplanare una sintetică , două drept aplicaţii ale produsului mixt şi celelalte două ca aplicaţii ale produsului scalar.
- Scopul acestui articol este de a îngloba într-o schemă generală rezolvarea acestei probleme(determinarea distanţei dintre două drepte necoplanare) şi abordarea dintr-o altă perspectivă a problemelor de acest gen, atât din punct de vedere metodologic cât şi creativ.

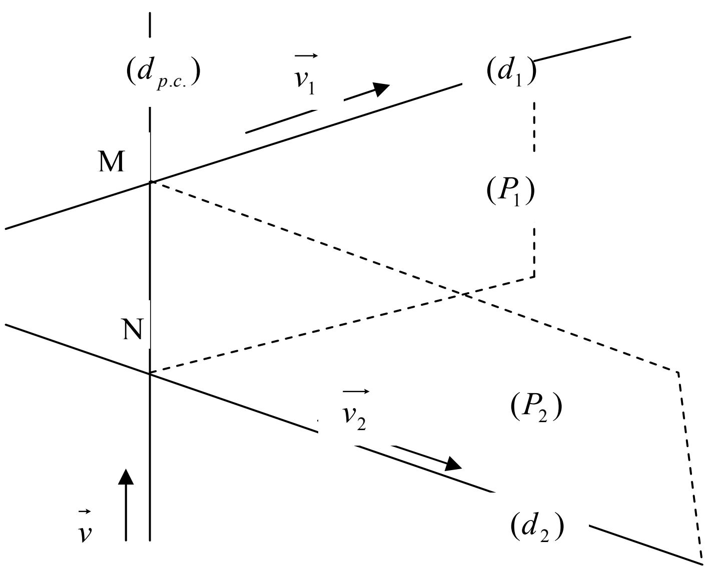
Problema determinării distanţei dintre două drepte necoplanare a mai fost tratată în *G.M. nr. 9 /2004* de către profesorii Valentina şi Ion Cicu (o metodă sintetică) şi în *G.M. nr. 8 /2006* de către regretatul prof. dr.Florin Cîrjan (o metodă analitică – ca aplicaţie a produsului scalar).

Metoda 1.(vezi G.M. nr. 9 / 2004) Distanţa dintre două drepte necoplanare se poate calcula fără determinarea poziţiei segmentului care defineşte distanţa, utilizând o formulă de calcul.

Astfel , pentru calculul distanţei dintre dreptele necoplanare AB şi CD $\overset{(not)}{=}$ d(AB,CD), putem utiliza formula (1) $d(AB,CD)=\dfrac{6\cdot V(ABCD)}{AB\cdot CD\cdot \sin\angle(AB,CD)}$,

unde V(ABCD) este volumul tetraedrului ABCD iar $\angle(AB,CD)$ este măsura unghiului dintre dreptele AB şi CD. Această relaţie este cunoscută sub numele de formula lui Chasles.

Metoda 2. Calculul distanţei cu determinarea poziţiei segmentului care o defineşte, utilizând produsul mixt .Produsul mixt al trei vectori $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$ este numărul $\overrightarrow{v_1}\cdot(\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}) \overset{(not)}{=} (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ care se determină calculând determinantul format cu coordonatele celor trei vectori scrise pe liniile determinantului.



În figura de mai sus, dreptele necoplanare sunt (d_1) şi (d_2) cu vectorii directori

$\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ .Dreapta perpendiculară comună celor două drepte este $(d_{p.c})$ care are ca vector director pe $\vec{v}$ .Din $d_{p.c} \perp d_1$ şi $d_{p.c} \perp d_2$, rezultă $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.

Dacă $M_1 \in (d_1)$ şi $M_2 \in (d_2)$ atunci cele două plane (P_1) şi (P_2) au ecuațiile : $(P_1) : (\vec{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{v_1}, \vec{v}) = 0$, respectiv $(P_2) : (\vec{r} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{v_2}, \vec{v}) = 0$, unde $\overrightarrow{r_1}$ (respectiv $\overrightarrow{r_2}$) este vectorul de poziție al punctului M_1(respectiv M_2).Ecuația dreptei perpendiculare comună este dată ca intersecția celor două plane (P_1) şi (P_2) .Deci avem:

$$(d_{p.c.})\begin{cases}(P_1)\\(P_2)\end{cases} \Rightarrow (d_{p.c.})\begin{cases}(\vec{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{v_1}, \vec{v}) = 0\\(\vec{r} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{v_2}, \vec{v}) = 0\end{cases}$$

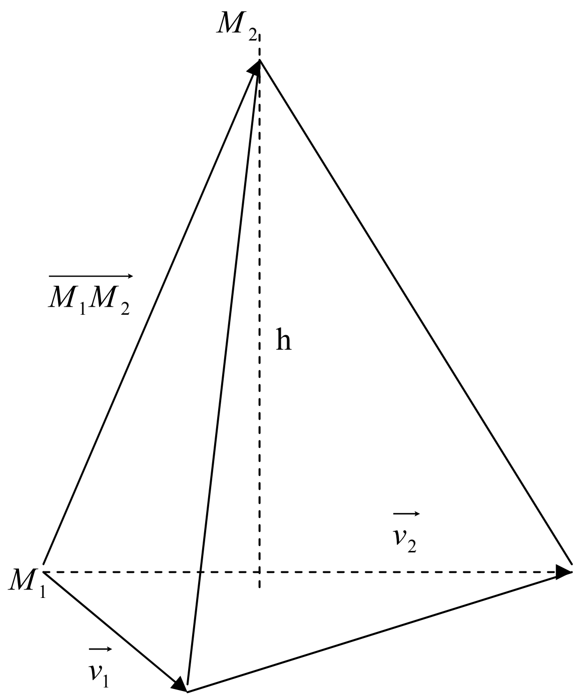
În continuare se determină coordonatele punctului M (respectiv N) ca intersecția a două drepte.

$$\{M\}\begin{cases}(d_1)\\(d_{p.c.})\end{cases} \text{ şi } \{N\}\begin{cases}(d_2)\\(d_{p.c.})\end{cases}$$

În final se determină distanța dintre dreptele necoplanare (d_1) şi (d_2)ca distanță dintre punctele M şi N; $d((d_1),(d_2)) = d(M, N)$.

Metoda 3. Calculul distanței dintre două drepte necoplanare fără determinarea poziției segmentului care o defineşte.Această metodă are la bază tot produsul mixt.

Dacă dreptele necoplanare sunt (d_1) şi (d_2) cu vectorii directori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ se consideră două puncte $M_1 \in (d_1)$ şi $M_2 \in (d_2)$ .Avem figura de mai jos:



Vectorii $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ determină un tetraedru a cărui înălţime este distanţa căutată (vezi demonstrarea sintetică din G.M. nr. 9 / 2004).Se ştie din interpretarea geometrică a produsului mixt că volumul paralelipipedului determinat de trei vectori este valoarea absolută a produsului mixt .
Avem
$d((d_1),(d_2)) =$ înălţimea tetraedrului format de vectorii $\{ \overrightarrow{v_1} , \overrightarrow{v_2} , \overrightarrow{M_1M_2} \} \overset{(not)}{=}$ h.
Scriem volumul tetraedrului în două moduri :

$$(1)\ V_{tetraedru} = \frac{V_{paralelipiped}}{6} = \frac{|\ (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{M_1M_2})\ |}{6}$$

$$(2)\ V_{tetraedru} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\left\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right\|}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

Din (1) şi (2) rezultă formula de calcul pentru distanţa căutată :

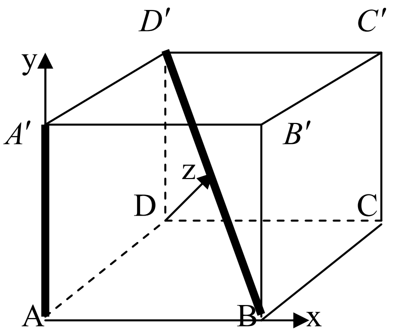
$$(*)\ h = \frac{|\ (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{M_1M_2})\ |}{\left\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right\|}$$

Metoda 4. Fie (d_1) , (d_2) două drepte necoplanare şi fie MN perpendiculara lor comună.

Presupunem că sunt cunoscute două puncte $A \in (d_1)$, $B \in (d_2)$ astfel încât este cunoscut vectorul $\overrightarrow{AB}$.Dacă $\overrightarrow{v_1}$ este vectorul director al dreptei (d_1) şi $\overrightarrow{v_2}$ este vectorul director al dreptei (d_2) atunci vectorul $\overrightarrow{MN}$ se exprimă astfel: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{v_2}$ unde numerele reale α şi β sunt încă nedeterminate.Ele vor fi determinate din condiţiile de ortogonalitate $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases}$
Acestea constituie un sistem de ecuaţii liniare în necunoscutele α şi β.După determinarea lui α şi β aflăm $d((d_1),(d_2)) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\alpha\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{v_2}\right\|$.

Metoda 5. *(vezi G.M. nr. 8 /2006)* Determinarea distanţei dintre dreptele necoplanare (d_1) şi (d_2) cu determinarea poziţiei segmentului MN care defineşte dreapta perpendiculară comună.Considerăm aceeaşi figură ca mai sus.
Din $M \in (d_1) \Rightarrow M(\alpha, f_1(\alpha), f_2(\alpha))$, iar din $N \in (d_2) \Rightarrow N(\beta, g_1(\beta), g_2(\beta))$, unde f_1, f_2, g_1, g_2 sunt funcţii liniare .Necunoscutele α şi β se determină din condiţiile de ortogonalitate $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases}$.Se determină coordonatele punctelor M şi N iar apoi $d((d_1),(d_2)) = d(M, N)$.

Exemplu. Să se calculeze distanţa dintre o diagonală a cubului şi o muchie ce nu o intersectează.



Pentru utilizarea celor cinci metode alegem reperul $Axyz$ cu originea în vârful A, iar $B \in (Ax, A' \in (Az, D \in (Ay, A'(0,0,a), B(a,0,0), C(a,a,0)$ şi $D'(0,a,a)$.

Soluţie(metoda 1.) .

$d(AA', BD') = \dfrac{6 \cdot V(AA'D'B)}{AA' \cdot BD' \cdot \sin\angle(AA', BD')}$.Dacă înlocuim în această relaţie $AA' = a, BD' = a\sqrt{3}, \sin\angle(AA', BD') = \sin\angle(DD', BD') =$
$= \dfrac{BD}{BD'} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$ şi $V(AA'D'B) = \dfrac{a^3}{6}$ obţinem

$d(AA', BD') = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie(metoda 2.) .

$d(AA', BD') = d(M, N);\ \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AA'}(0,0,a), \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BD'}(-a,a,a), \vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (-a^2, -a^2, 0)$

$(P_1): x - y = 0, (P_2): x - y + 2z = 0, (d_{p.c.}): \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

$(d_1) \equiv (AA'): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; (d_2) \equiv (BD'): \begin{cases} x + y = a \\ y - z = 0 \end{cases};$

$\{M\} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = y \\ x - y + 2z - a = 0 \end{cases} ; \{N\} \begin{cases} x + y = a \\ y - z = 0 \\ x = y \\ x - y + 2z - a = 0 \end{cases}$

$M(0,0,\frac{a}{2}), N(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}), d(AA', BD') = d(M, N) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Soluţie(metoda 3.) .

$d(AA',BD')=\dfrac{\left|(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{AB})\right|}{\left\|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right\|}$, unde

$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AA'}(0,0,a), \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{BD'}(-a,a,a), \vec{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(-a^2,-a^2,0)$, $\overrightarrow{AB}(a,0,0)$.Se obține:

$(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{AB})=-a^3$, $\left\|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right\|=a^2\sqrt{2}$ şi $d(AA',BD')=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Soluție(metoda 4.) . $\overrightarrow{MN}=\alpha\cdot\overrightarrow{v_1}+\beta\cdot\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{AB}=(a-\beta a,\beta a,\alpha a+\beta a)$.

Condițiile de ortogonalitate sunt $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{v_1}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{v_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+3\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2},\beta=\dfrac{1}{2}$

Avem $\overrightarrow{MN}(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0)$ şi $d(AA',BD')=\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Soluție(metoda 5.) . $M(0,0,\alpha), N(\beta,a-\beta,a-\beta), \overrightarrow{MN}(\beta,a-\beta,a-\beta-\alpha)$.Condițiile de ortogonalitate sunt

$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{v_1}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{v_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha+3\beta=2a\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\dfrac{a}{2}\Rightarrow M(0,0,\dfrac{a}{2}), N(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})$

$\Rightarrow d(AA',BD')=d(M,N)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

În încheiere, invităm cititorii să încerce utilizarea celor cinci metode pentru rezolvarea unor probleme în condiții mai generale.

Bibliografie

1. *G.M. nr. 9 / 2004*
2. *G.M. nr. 8 /2006*

IX. ASUPRA UNEI PROPOZIȚII ŞI APLICAȚIILE EI

Domnului Profesor D.M. Bătinețu – Giurgiu,
ca semn al stimei mai multor generații

O gamă destul de largă de proprietăți elementare şi aparent nelegate între ele admite o schemă comună de demonstrație.În acest articol dorim să aprofundăm aceste proprietăți, relevând mecanismul comun al demonstrației şi aducând anumite completări.Contextul în care ne plasăm este cel din $[1]$ şi anume:

1). Funcția $f:[a-r,a+r]\to R$ se numeşte a-pară dacă $f(a+x)=f(a-x),\forall x\in R$ cu $|x|\le r$, respectiv a-impară dacă $f(a+x)=-f(a-x),\forall x\in R$ cu $|x|\le r$;

2). Funcția $f:[a-b,a+b]\to R$, continuă, $a,b\in R$, $b>0$, are graficul simetric față de dreapta $x=a$ dacă $f(a-h)=f(a+h)$, $\forall h\in[0,b]$(adică f este a-pară);

3).Funcția $f:[a-b,a+b]\to R$, continuă, $a,b\in R$, $b>0$, aregraficul simetric față de punctul $A(a,0)$dacă $f(a-h)=-f(a+h)$, $\forall h\in[0,b]$(adică f este $a-$impară);

4).Fie $f:R\to R$ continuă.Punctul$C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f dacă $f(a-x)+f(a+x)=2b$, $\forall x\in R$.

Rezultatul principal al acestui articol este:
Propoziția 1.(D.M. Bătinețu – Giurgiu) – publicată în $[1]$ şi $[2]$, fără anul apariției

Fie $f:[x_0-r,x_0+r]\to R$ continuă cu proprietatea că $af(x_0+x)+bf(x_0-x)=c$, $\forall x$ cu $|x|\le r, a,b\in R^*$, $c\in R$, atunci:

(i) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a+b},\ a+b\ne 0$;

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$

Demonstrație.

Considerăm $\alpha,\beta:[-r,r]\to[x_0-r,x_0+r],\quad \alpha(t)=x_0+t,\quad \beta(t)=x_0-t$ şi cum $f:[a-r,a+r]\to R$ este continuă putem aplica scimbarea de variabilă

(i) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\int_{\alpha(-r)}^{\alpha(r)} f(x)dx=\int_{-r}^{r} f(\alpha(t))\alpha'(t)dt=\int_{-r}^{r} f(x_0+t)dt=\int_{-r}^{r}(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t))dt=$

$=\frac{2cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(x_0-t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(\beta(t))\beta'(t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(r)} f(x)dx=$

$=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx$ .Rezultă că $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx+\frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a}$ şi deci $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a+b}$.

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$, dar $\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx=\int_{\alpha(-r)}^{\alpha(0)} f(x)dx=\int_{-r}^{0} f(x_0+t)dt=$

$=\int_{-r}^{0}(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t))dt=\frac{cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(x_0-t)dt=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(\beta(t))\beta'(t)dt=$

$=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(0)} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx$, rezultă că

$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$.

În [3] am găsit *problemele 16024, G.M 8 – 1976 autor Gh.Fătu şi 16383, G.M 1 – 1977 autor Anton Reiderer* care țin de istoricul propoziției de mai sus.

Această teoremă , atribuită lui *D.M. Bătinețu – Giurgiu*, a fost în anii care au trecut redescoperită şi particularizată de mai multe ori având până în prezent mai multe aplicații.O parte din aceste aplicații sunt prezentate în cele ce urmează.

Aplicația 1.

Dacă $f:[a-r,a+r]\to R$ este continuă atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx=\begin{cases} 2\cdot\int_{a}^{a+r} f(x)dx, \text{dacã } f \text{ este a - parã} \\ 0, \text{dacã } f \text{ este a - imparã}\end{cases}$$

Demonstrație.

Dacã f este a-parã, atunci $f(a+x)-f(a-x)=0$; deci în Propoziția1.(ii) punând $a=1$, $b=-1$, $c=0$, $x_0=a$ rezultã cã :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = \frac{1-(-1)}{1}\cdot\int_{a}^{a+r} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+r} f(x)dx.$$

Dacã f este a-imparã, atunci $f(a+x)+f(a-x)=0$ şi punând în 1.(ii) a=b=1, c=0, rezultã cã $\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx=0$.

Această aplicație, caz particular al teoremei *D.M. Bătinețu – Giurgiu*, este foarte cunoscută şi utilizată foarte des în diverse cazuri particulare.

Aplicația 2.

Fie $f:[a-b,a+b]\to R$, continuă, $a,b\in R$, $b>0$.Funcția f are graficul simetric față de dreapta $x=a$, dacă şi numai dacă $\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = 2\int_{a-h}^{a} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+h} f(x)dx$, $\forall h\in[-b,b]$.

Demonstrație.

Dacă f este simetrică față de dreapta $x=a$, atunci $f(a-h)=f(a+h)$, $\forall h\in[0,b]$, deci f este a - pară şi conform Aplicației 1., rezultă că $\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)dx$ şi făcând schimbarea de variabilă $\varphi(x)=x-b$, $\varphi:[a,a+b]\to R$, $\varphi(a)=a-b$, $\varphi(a+b)=a$, obținem $\int_{a}^{a+b} f(x)dx = \int_{a-b}^{a} f(x)dx$.

Reciproc, f fiind continuă , admite ca primitivă pe $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $F:[a-b,a+b]\to R$, cu $F(a)=0$. Relația din enunț, implică :

$F(a+h)-F(a-h)=2\cdot[F(a)-F(a-h)]=2\cdot[F(a+h)-F(a)]$, $\forall h$ cu $|h|\le b$.

Rezultă că $F(a+h)=-F(a-h)$, deci $F'(a+h)=-F'(a-h)\cdot(a-h)'$, adică $f(a+h)=f(a-h)$ şi deci f este simetrică față de dreapta $x=a$, adică f este a-pară.

Aplicația 3.

Fie $f:[a-b,a+b]\to R$, continuă, $a,b\in R$, $b>0$.Graficul funcției f este simetric față de punctul $A(a,0)$, dacă şi numai dacă $\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx=0.$

Demonstrație.

Dacă f are graficul simetric față de punctul $A(a,0)$ avem $f(a-h)=-f(a+h)$, $\forall h\in[0,b]$, adică f este a-impară şi conform Aplicației 1. rezultă că $\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx=0.$

Reciproc, ca în demonstrația Aplicația 2. relația din enunț devine $F(a+h)-F(a-h)=0,$ care prin derivare devine: $f(a+h)+f(a-h)=0,$ adică f

este a - impară , deci are graficul simetric față de punctul $A(a,0)$.

Aplicația 4.(*Problemă menționată la concursul S.S.M – autor Ana Avram, G.M 1 – 1978, dată în concurs)*

Fie $f: R \to R$ continuă şi punctul $C(a,b)$ centrul de simetrie pentru graficul lui f, atunci $\int_0^{2a} f(t)dt = 2ab.$

Demonstrație.(*în G.M 1 – 1978 avem o altă demonstrație*)

Dacă punctul $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f, atunci $f(a-x)+f(a+x)=2b$, $\forall x \in R$.Conform Propoziției 1. pentru $a=b=1$, $c=2b$, $x_0=a$, rezultă că $\int_0^{2a} f(t)dt = \int_{a-a}^{a+a} f(t)dt = \frac{2\cdot 2b}{1+1}\cdot a = 2ab.$

Aplicația 5.

Fie $f: R \to R$ continuă. $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f dacă şi numai dacă $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2bx,\ \forall x \in R$.

Demonstrație.

Dacă $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f atunci $f(a-r)+f(a+r)=2b$, $\forall r \in R$.Observăm că putem aplica Propoziția 1. cu $a=b=1,\ c=2b$, $r=x$ rezultă că $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = \frac{2\cdot 2b}{1+1}\cdot x = 2bx.$

Reciproc, dacă $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2bx$, rezultă $\int_{a-x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{a+x} f(t)dt = 2bx$ dar, cum f este continuă , admite primitive şi fie F o primitivă a sa; atunci avem $2bx = \int_{a-x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{a+x} f(t)dt = F(a)-F(a-x)+F(a+x)-F(a) = F(a+x)-F(a-x)$.

Derivând relația de mai sus rezultă $2b = F'(a+x)-F'(a-x) = f(a+x)-f(a-x)\cdot(-x)' = f(a-x)+f(a+x)$ c.c.t.d.

Un caz particular al acestei aplicații este *problema 17117 din G.M. 3 – 1978, autor Paul Lefter.*

În încheiere, propun cititorilor să consulte $[2]$ şi $[3]$ unde se găsesc mai multe exerciții propuse de diverşi autori , date la concursuri şi olimpiade care se pot rezolva utilizând Propoziția 1., şi proprietățile funcțiilor pare şi impare generalizate.

Indicații:

a) din $[3]$: 14847 G.M. nr. 7 / 1975, 22377 G.M. nr. 5 / 1991, 22750 G. M. nr. 1 / 1993, 22990 G.M. nr. 4 / 1994, 23834 G.M. nr. 12 / 1997, 24094 G.M. nr.

3 / 1999, 14847 G.M. nr. 7 /1975, pb. Dată în concurs G.M. nr. 1 /2002, 25054 G.M. nr.2 /2004, 25775 G.M. nr. 4 / 2007;

b) din [2]: 6.57, 6.58, 6.112, 6.117, 6.118, 6.135.

Bibliografie

[1] V. Arsinte, *Probleme Elementare de Calcul Integral,* Ed. Univ. Bucureşti, 1995
[2] D.M. Bătineţu – Giurgiu,ş.a., *Analiză Matematică,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004
[3] Gazeta matematică 1895 – 2007 (ediția electronică)

X. GENERALIZAREA UNOR INEGALITĂȚI

în cinstea reunirii întregului material din prestigiosul patrimoniu publicat timp de 110 ani în Gazeta Matematică

(**vezi Gazeta Matematică - Ediție Electronică**, un produs de excepție care conține întreaga colecție a Gazetei Matematice seria B din perioada 1895-2005, 60 000 de pagini ce cuprind peste **90 000 de probleme şi articole matematice** (echivalentul a peste 300 de culegeri de matematică)).

În cei 113 ani de apariție neîntreruptă a Gazetei Matematice (1895 – 2008) în paginile acestei reviste cât şi în alte reviste din țara noastră şi din străinătate s-au publicat mai multe inegalități , care permit evidențierea unei clase (de inegalități)care au anumite proprietăți commune.

În acest articol vom exemplifica utilitatea , eleganța şi generalitatea folosirii conceptului matematic de funcție convexă în demonstrarea unor inegalități.

Vom considera $f : D \to R$, o funcție convexă pe mulțimea D .Pentru $\forall \lambda_i \in R^+$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \neq 0$ şi $a_i \in D$, $i = \overline{1,m}$ avem cunoscută inegalitatea lui *Jensen*

$$(1)\quad f\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}\right) \leq \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j)}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$$

care se poate demonstra uşor prin inducție.

Dificultatea stabilirii unor inegalități prin folosire funcțiilor convexe constă în alegerea funcției convexe f şi a numerelor λ_i din inegalitatea (1).

Fie α_i, $\beta_i \in (0,\infty)$; p_i, q_i, $k_i \in R$ şi funcțiile $u_i : (0,\infty) \to R$ date de $u_i(x) = (\alpha_i x_i^{p_i} + \beta_i x_i^{q_i})^{k_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Vom considera funcţia :

(2) $f(x)=\prod_{i=1}^{n}u_i(x)$

Se arată prin inducţie că :

$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)u_i'(x)$, unde $A_i(x)=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}u_j(x)$ şi

$f''(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)u_i''(x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(x)u_i'(x)u_j'(x)$, unde $B_{ij}(x)=\prod_{k=1,k\neq i,j}u_k(x)$.

Pe de altă parte avem :

$u_i'(x)=k_i(\alpha_i x^{p_i}+\beta_i x^{q_i})^{k_i-1}(\alpha_i p_i x^{p_i-1}+\beta_i q_i x^{q_i-1})$, $\forall i=\overline{1,n}$ şi

$u_i''(x)=k_i(k_i-1)(\alpha_i x^{p_i}+\beta_i x^{q_i})^{k_i-2}(\alpha_i p_i x^{p_i-1}+\beta_i q_i x^{q_i-1})^2+$

$+k_i(\alpha_i x^{p_i}+\beta_i x^{q_i})^{k_i-1}(\alpha_i p_i(p_i-1)x^{p_i-2}+\beta_i q_i(q_i-1)x^{q_i-2})$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Fie

$D=\left\{x\in(0,\infty)/(\alpha_i p_i x^{p_i-1}+\beta_i q_i x^{q_i-1})>0,(\alpha_i p_i(p_i-1)x^{p_i-2}+\beta_i q_i(q_i-1)x^{q_i-2}>0,\forall i=\overline{1,n}\right\}$

atunci $\forall x\in D$ rezultă că $f''(x)\geq 0$ şi prin urmare funcţia f este convexă pe D.

Din inegalitatea lui Jensen (1) se obţine:

(3) $\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i a_j^{p_i}+\beta_i a_j^{q_i})^{k_i}\geq m\prod_{i=1}^{n}\left[\alpha_i(\frac{a}{m})^{p_i}+\beta_i(\frac{a}{m})^{q_i}\right]^{k_i}$, unde $\sum_{j=1}^{m}a_j=a$ şi $\lambda_j=1$,

$\forall\ j=\overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=m$.

Dacă în inegalitatea (3) înlocuim $n=1$, atunci $\forall\alpha,\beta\in(0,\infty)$ avem:

(4) $\sum_{j=1}^{m}(\alpha a_j^p+\beta a_j^q)^k\geq m\left[\alpha(\frac{a}{m})^p+\beta(\frac{a}{m})^q\right]^k$

Aplicaţii (ale inegalităţii (4))

În continuare, voi prezenta un set de inegalităţi din Gazeta Matematică care, au fost rezolvate la vremea respectivă prin alte metode.

1. Dacă în inegalitatea (4) înlocuim $\alpha=1$, $\beta=0$, $k=1$ rezultă :

(5) $\frac{\sum_{j=1}^{m}a_j^p}{m}\geq\frac{(\sum_{j=1}^{m}a_j)^p}{m^p}$, inegalitatea *Titu Andreescu*, care generalizează problema 8807 din G.M nr. 3 / 1968 autor *Iosif Bohler* şi problema 8785 din G.M nr. 3 / 1968 autor *N. Pantazi.*

2. Dacă în inegalitatea (5) $p=2$, avem :

$\sum_{j=1}^{n}a_j^2\geq\frac{a^2}{m}$, publicată în *Journal de mathematiques elementaires* în 1964 şi în G.M nr. 10 / 1964 problema 6579 .

3. Dacă în (4) înlocuim $a=1$, $\alpha=\beta=1$ şi $q=-1$ rezultă :

$\sum_{j=1}^{m}(a_j + \frac{1}{a_j})^k \geq \frac{(1+m^2)^k}{m^{k-1}}$, problema 8745 din G.M nr. 2 / 1968, autor *Liviu Pîrşan* (care este în legătură cu problema 7877, C.d *Skiliarski* , 1965, pag. 67)

4. Pentru $\alpha = 0$, $\beta = k = 1$, $q = -\frac{1}{s}$, $s \geq 2$, $s \in N$ obținem:

$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[s]{a_j}} \geq m\sqrt[s]{\frac{m}{a}}$, problema 8796 din G.M. nr. 3 / 1968 autor *Liviu Pîrşan* ,în legătură cu problemele 6641 din G.M. nr. 12 / 1964 autor *Cornel Popovici* , 8358 din G.M. nr. 7 / 1967 autor *Dan Stănescu* şi problema 8688 din G.M. nr. 1 / 1968.

În încheiere, pe baza ideilor prezentate, propunem cititorilor să rezolve următoarele probleme:

a) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q(\alpha a_j^r + \beta) \geq \frac{a^q(\alpha a^r + \beta m^r)}{m^{q+r-1}}$$

(soluția se obține imediat dacă înlocuim în (4) $k = 1$ şi $p = q + r$)

b) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q(a_j^r + 1) \geq \frac{a^q(a^r + m^r)}{m^{q+r-1}}$$

(soluția se obține imediat dacă înlocuim în a) $\alpha = \beta$)

c) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q(a_j^r + 1)(a_1 a_2 ... a_m)^{-1} \geq (\frac{m}{a})^{m-q-r} + (\frac{m}{a})^{m-q}$$

(soluție. În inegalitatea a) înlocuim $\alpha = \beta = (a_1 a_2 ... a_m)^{-1}$ şi ținem seama că produsul a m numere reale strict pozitive, pentru care suma este constantă, este maxim atunci când numerele sunt egale între ele, adică

$a_1 a_2 ... a_m \leq (\frac{a}{m})^m$)

d) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$. Să se arate că :

$\sum_{j=1}^{m} a_j^p (a_j^r + 1)(a_1 a_2 ... a_m)^{-1} \geq m^{m-q-r} + m^{m-q}$ (vezi G.M nr. 10 / 1968 , problema 9234, autor *Liviu Pîrşan*)

(soluție.rezultă imediat dacă înlocuim în d) $a = 1$).

Bibliografie

[1]. Gazeta matematică 1895 – 2007 (ediția electronică)
*** www.gazetamatematica.net

(1175 -1240)

Despre şirul lui Fibonacci

DE NECULAI STANCIU

Abstract

The purpose of the article is to describe the contributions to Mathematics made by the thirteenh century Italian, Fibonacci.Unfortunately, not much is known about

Fibonaccci's personal life.Representative problems solved by Fibonacci are set as challenges to the reader.

After a brief historical account of Leonardo Pisano Fibonacci, some basic results concerning the Fibonacci numbers are developed and proved, and entertaining examples are described.Connections are made between the Fibonacci numbers and the Golden Ratio, biological nature, and other combinatorics examples.

We are considering both the originality and power of his methods, and the importance of his results, we are abundantly justified in ranking Leonardo of Pisa as the greatest genius in the field of number theory who appeared between the time of Diophantus and Fermat.

Key words: History of Mathematics, Fibonacci's Rabbits, Fibonacci numbers and nature,Divine proportion, Golden Section in Art(Architecture, music and human body), The Fibonacci sequence, Fibonacci identities, matrix methods.

M.S.C.: 01-XX, 01AXX, 01A05, 11B39, 11B37, 11B50.

1. Istorie.

1.1. Cine a fost *Fibonacci*?

Fibonacci(1175-1240) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu.S-a născut în Italia, în oraşul Pisa, faimos pentru turnul său înclinat, care parcă stă să cadă.

Tatăl său, *Bonacci Pisano*, a fost ofiţer vamal în oraşul Bougie din Africa de Nord , astfel că *Fibonacci* a crescut în mijlocul civilizaţiei nord-africane.A cunoscut astfel mulţi negustori arabi şi indieni (deoarece a făcut multe călătorii pe coastele Mediteranei) de unde a deprins ştinţa lor aritmetica, precum şi scrierea cifrelor arabe.

1.2. Cărţile lui *Fibonacci.*

În 1202 revine în Italia unde publică un tratat de aritmetică şi algebră intitulat *"Incipit Liber Abacci"*(compositus a *Leonardo filius Bonacci Pisano*).În acest tratat introduce pentru prima dată în Europa sistemul de numeraţie arab, cifre pe care le folosim şi în zilele noastre:0,1, 2, 3,…,9.

În 1220 publică *"Practica Geomitriae",* un compendiu de rezultate din geometrie şi trigonometrie, apoi în 1225 *"Liber Quadratorum"* în care studia calculul radicalilor cubici.Cărţile lui *Fibonacci* au cunoscut o largă răspândire aşa încât timp de peste două secole au fost considerate sursele cele mai competente în domeniul numerelor.

Pentru a înţelege mai bine situaţia din acele vremuri trebuie să aruncăm o privire pe matematica în Europa şi în Orient.

Matematică arabă

Imperiul arab, odată cu apariţia Islamului (sec VII), se extinde foarte repede cuprinzând Orientul Apropiat, o parte din Asia Mică şi Centrală, ajungând până la Valea Indului, nordul Africii şi Peninsula Iberică.Se ridică importante centre culturale ca:Bagdad, Samarkand, Buhara, Horezm, Damasc, Cordoba, Granada, Sevilla, Toledo, după ce în prealabil fusese distruse Ispahanul, Persepolis şi Alexandria.

Matematica arabă este matematica creată sub dominaţia arabă, nu neaparat aparţinând arabilor, deoarece puţini dintre matematicienii arabi erau de origine arabă dar, au asimilat foarte repede cultura Orientului precum şi cea Elenă pe care le transmit în diverse părţi ale imperiului.Primul mare matematician arab a fost *Al-Horezmi* (780 – 850).Din opera sa se detaşează *"Algebra"* structurată pe 4 capitole (Soluţiile ecuaţiilor,Calculul dobânzilor, Geometria, Algebra testamentară).*Al-Horezmi* a fost primul matematician care a stabilit reguli pentru adunare, scădere, multiplicare şi divizare cu noile numere arabe.De la el provine cuvântul *algoritm* (încercaţi să spuneţi numele *Al-Horezmi* repede de câteva ori!).Într-un alt tratat *"Ştiinţa transpunerii şi a reducerii",* specifică procesul manipulării ecuaţiilor algebrice, *"al-jabr",* a ajuns la noi ca algebră.

Abu Kamil (900), născut în Egipt, este continuator a lui *Al-Horezmi*.În "*Cartea rarităţilor din aritmetică"* se ocupă cu rezolvarea în numere întregi a sistemelor liniare nedeterminate.

Abu Wafa (940 – 997) s-a ocupat cu geometria practică.În lucrarea sa "*Cartea perfectă"* expune bazele trigonometriei, inclusive teorema sinusurilor.De asemenea rezolvă probleme de trigonometrie sferică, utilizând cu predilecţie funcţia cotangentă.

Al-Hazem (1000) prin "*Cartea opticii*" este un precursor al acestei ştiinţe.Tot el formulează axioma lui *Pasch* şi încearcă demonstrarea postulatului V al lui *Euclid.*

Omar Al-Khayyam (1048 – 1123), este primul matematician care expune o teorie generală a ecuaţiilor de gradul III.Recent a fost descoperit un memoriu al său asupra operei lui *Euclid. Omar Al-Khayyam*, conducătorul Observatorului astronomic din Ispahan, s-a ocupat şi cu "*patrulaterul Saccheri*" (care, de drept ar trebui numit *patrulaterul lui Omar*), apoi a dat prima formulare a *axiomei lui Arhimede*.Era vestit şi ca poet.

Al-Biruni (973 – 1048), persan de origine, este cel care în 1030 introduce cercul trigonometric.Tot el calculează lungimea meridianului terestru la 41.550 km.

Nassir ed Din al Tusi (1201 – 1274), conducătorul Observatorului astronomic din Maraga, s-a acupat cu teoria paralelelor.În "*Tratatul despre patrulaterul complet*" a făcut o expunere integrală a rezolvării triunghiurilor (plane şi sferice).

Al-Kashi (1400), iranian de origine, în "*Cheia aritmeticii*" se ocupă cu formula binomului şi cu extragerea de rădăcini.S-a ocupat intens şi de calcule aproximative, iar în "*Tratatul despre circumferinţă*" din 1424, dă valoarea numărului π cu 16 zecimale exacte.

De aici, matematica şi în general cultura arabă decade.

Matematica evului mediu.

Cruciadele (campanii pentru recucerirea locurilor sfinte), prilejuiesc stabilirea de legături cu cultura arabă musulmană (mai ales în Spania şi Sicilia) precum şi cu Bizanţul.

După ce Spania este recucerită de mauri, Toledo devine centru cultural de prestigiu.În acest moment încep traducerile din arabă.Printre primii traducători este englezul *Adelard de Bath* (1100) care, deghizat ca student mahomedan la Cardoba traduce din limba arabă *"Elementele"* lui *Euclid* şi "*Algebra"* lui *Al-Horezmi*, iar din limba greacă, opera lui *Ptolemeu.*Din aceeaşi perioadă se remarcă şi alţi traducători ca: *Ioannes din Sevilla* şi *Gerardo din Cremona* (1114 – 1187) care au tradus circa 80 de lucrări clasice din limba arabă .Ambii au lucrat la Toledo.

Secolele XII – XV reprezintă perioada de asimilare a matematicii antice şi a celei orientale.

Leonardo da Pisa, este pe drept considerat **primul mare matematician original al Europei**.În numeroasele sale călătorii (Egipt, Siria, Grecia, Sicilia) ia contact cu cu cultura elenă şi cea arabă .

LIBER ABACI – O CARTE REMARCABILĂ

Povestea numerelor apare în Italia în 1202, o dată cu apariţia cărţii *Liber Abaci,* scrisă de *Leonardo Pisano*, pe atunci în vârstă de 27 de ani.Cartea, are 15 capitole, şi sunt scrise în întregime de mână, tiparul apărând 300 de ani mai târziu.*Leonardo,* a fost inspirit să scrie cartea după o vizită la Burgia, un oraş prosper Algerian, unde tatăl său era consul de Pisa.În acest timp,*Fibonacci* a învăţat secretele sistemului de numere indo-arab, pe care arabii l-au introdus în Vest în timpul cruciadelor.

Cartea a atras numeroşi adepţi în rândul matematicienilor din Italia, precum şi din restul Europei.*Liber Abaci*, a dezvăluit oamenilor o cu totul altă lume, unde numerele au înlocuit literele.*Fibonacci* începe cartea cu noţiuni despre identificarea numerelor, de la unităţi la cifra zecilor, a sutelor, a miilor etc.În ultimile capitole găsim calcule cu numere întregi şi fracţii, regulile proporţiilor, extrageri de rădăcini pătrate şi de ordin superior, apoi se prezintă soluţiile ecuaţiilor liniare şi pătratice

Liber Abaci era plină cu exemple practice:calcule de contabilitate financiară, calculul profitului, schimbul de bani, conversia greutăţilor, calculul împrumutului cu dobândă (interzis în acel timp în diverse locuri ale lumii).

Deşi era cunoscut în anul 1000, şi deşi *Liber Abaci* a explicat avantajele , sistemul de numărare, indo-arab, nu a prins la scară mare până aproape în 1500 e.n.Motivele au fost, în mare parte două.Primul ţine de inerţia umană şi rezistenţa la schimbare a omului, pentru că învăţarea unui sistem radical nou cere timp şi de faptul că biserica catolică din acea perioadă considera cifrele arabe de origine păgână.Al doilea motiv este de natură practică, deoarece era mult mai uşor să se comită fraude.Era tentantă schimbarea lui 0 în 6 sau 9, iar 1 putea fi uşor înlocuit cu 4, 6, 7, sau 9 (de atunci europenii scriu 7 cu codiţă!).

Deşi noile numere au apărut în Italia, Florenţa a emis un edict în 1229 prin care interzicea bancherilor folosirea simbolurilor “infidele”.Ca rezultat, mulţi dintre cei care voiau să înveţe noul sistem se deghizau în musulmani.

Originea sistemului de numere.

Putem aprecia succesul lui *Fibonacci* cu *Liber Abaci* doar dacă privim cum a evoluat societatea, din punctul de vedere al numerelor, până la el.Măsurarea şi numărarea au apărut cu câteva zeci de mii de ani înaintea lui Hristos.Oamenii au înfiinţat primele aşezări pe malurile Tigrului şi Eufratului, Nilului, Gangelui, Indului şi Amazonului.Fluviile erau folosite pentru comerţ şi transport, iar aventurierii au descoperit mările şi oceanele unde se vărsau apele.Călătoriile pe distanţe lungi cereau măsurarea timpului şi calcule precise.Preoţii erau de obicei astronomi, iar din astronomie a venit matematica .

În 450 î.e.n., grecii au inventat un sistem numeric alfabetic, care folosea cele 24 de litere ale alfabetului grecesc şi alte trei litere , care mai târziu au dispărut.Fiecare număr de la 1 la 9 avea propria literă, la fel şi multiplii de 10.Alfa, însemna 1, iar "ro" reprezenta 100.Astfel, 112 se scria "ro-deca-beta".Acest sistem se putea folosi cu greutate pentru calcule.*Abacul*, era cel mai vechi aparat de numărat din istorie.

Un occidental, matematician din Alexandria, *Diofantus,* prin 250 e.n., a sugerat un sistem de numere comparative cu sistemul de litere.Remarcabilele sale invenții au fost ignorate vreme de 1500 de ani.Până la urmă, lucrarea sa a fost recunoscută cum se cuvine şi a jucat un rol important în algebra secolului al XVII-lea.Ecuațiile algebrice , de forma $ax + by = c$, se numesc "*ecuații diofantice*".

Piesa centrală a sistemului indo-arab a fost inventarea lui "*zero*", "*sunya*" la induşi, "*cifr*" în arabă, "*tsfira*" în ruseşte – ceea ce înseamnă "număr".Terminul provine de la "*cipher*", ceea ce înseamnă *"gol"* şi se referă la coloana goală de la *abac.*

1.3. Şirul lui *Fibonacci.*Numele *Fibonacci.*

Fibonacci a rămas în memoria noastră prin şirul : 0, 1, 1, 2, 3, … introdus în anul 1202, atunci matematicianul fiind sub numele de *Leonardo Pisano (Leonard din Pisa).*

Mai târziu, matematicianul însuşi şi-a spus *Leonardus Filius Bonacii Pisanus(Leonard fiul lui Bonaccio Pisanul).*În secolul al XIV-lea şirul prezentat mai sus a fost denumit şirul lui *Fibonacci* prin contracția cuvintelor *filius Bonacii*.Acest şir apare pentru prima dată în cartea menționată mai sus *"Liber Abaci"("Cartea despre abac"),* fiind utilizat în rezolvarea unei probleme de matematică.

1.4.Iscusința lui *Fibonacci.*Problema iepurilor.Originea şirului *Fibonacci.*

Potrivit obiceiului din acea epocă, *Fibonacci* a participat la concursuri matematice(adevărate dispute publice) pentru cea mai bună şi mai rapidă soluție a unor probleme grele(ceva în genul Olimpiadelor Naționale).Iscusința de care dădea dovadă în rezolvarea problemelor cu numere uimise pe toată lumea, astfel că reputația lui *Leonardo* a ajuns până la împăratul Germaniei, *Frederik al II-lea.*La un concurs prezidat de acest împărat una din probleme date spre rezolvare a fost: "să se găsească un pătrat perfect, care să rămână pătrat perfect dacă este mărit sau micşorat cu 5".După un timp scurt de gândire *Fibonacci* a găsit numărul $\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$.Întradevăr: $\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$ şi $\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$ .Nu se ştie raționamentul lui *Fibonacci* dar, toate încercările, chiar şi cele mai ingenioase, de a rezolva această problemă cu ajutorul algebrei, duc în cel mai bun caz la o ecuație cu 2 necunoscute.

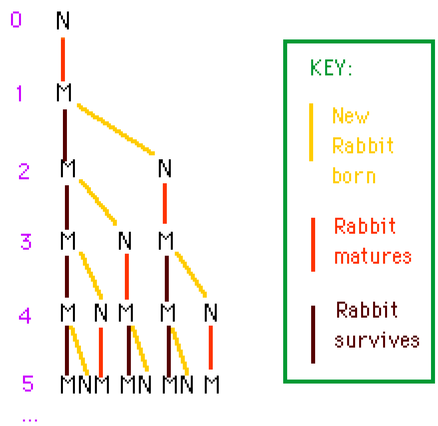
La un alt concurs prezidat de împărat problema propusă concurenților suna astfel:

"Plecând de la o singură pereche de iepuri şi ştiind că fiecare pereche de iepuri produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri, care devine productivă la vârsta de o lună, calculați câte perechi de iepuri vor fi după n luni (se consideră că iepurii nu mor în decursul respectivei perioade de n luni)".

*Soluție.*Din datele problemei rezultă că numărul perechilor de iepuri din fiecare lună este un termen al şirului lui *Fibonacci.*Într-adevăr, să presupunem că la 1 ianuarie exista o singură pereche fertilă de iepuri.Notăm cu 1 perechea respectivă .Ea corespunde numărului f_2 din şirul lui Fibonacci:

$f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1$.

La 1 februarie, mai există o pereche pe care o notăm 1.1.Deci în acest moment sunt două perechi , ceea ce corespunde termenului:
$f_3 = f_1 + f_2$=1+1=2.
La 1 martie sunt 3 perechi, două care existau în februarie şi una nouă care provine de la perechea numărul 1(se ține seama că o pereche devine fertilă după două luni).Notăm cu 1.2 această nouă pereche.Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:
$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3$.
La 1 aprilie există 5 perechi şi anume:trei perechi existente în luna martie , o pereche nouă care provine de la perechea 1 şi o pereche nouă care provine de la perechea 1.1 care la 1 martie a devenit fertilă (pereche pe care o notăm cu 1.1.1).Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:
$f_5 = f_3 + f_4$=2+3=5.
Termenii din această relație se interpretează astfel:
f_4=numărul perechilor existente în luna precedentă ;
f_3=numărul perechilor noi(provin de la perechile existente în luna anteprecedentă).
Procedând în continuare în acest fel, vom deduce că la data de 1 decembrie numărul perechilor este dat termenul:
$f_{13} = f_{11} + f_{12} = 89 + 144 = 233$,
iar la 1 ianuarie anul următor există:
$f_{14} = f_{12} + f_{13} = 144 + 233 = 377$ perechi de iepuri.
Concluzia este următoarea :
Dacă notăm cu f_n numărul de perechi de iepuri după n luni , numărul de perechi de iepuri după $n+1$ luni, notat cu f_{n+1} , va fi f_n(iepurii nu mor niciodată !), la care se adaugă iepurii nou-născuți.Dar iepuraşii se nasc doar din perechi de iepuri care au cel puțin o lună, deci vor fi f_{n-1} perechi de iepuri nou-născuți.
Obținem astfel o relație de recurență:
$f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, care generează termenii şirului lui *Fibonacci.*



Observație. Acest şir exprimă într-un mod naiv creşterea populației de iepuri.Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de două luni.De asemenea, puii nu mor niciodată şi sunt unul de sex masculin şi unul de sex feminin.

2. *Fibonacci,* numărul de aur, natura şi arta.
2.1. *Fibonacci* şi "numărul de aur"

Raportul de aur este un număr irațional(1.618033…), putând fi definit în diferite moduri dar, cel mai important concept mathematic asociat cu regula de aur fiind şirul lui *Fibonacci*.Impărțind orice

număr la predecesorul său, se obține aproximativ numărul de aur.Primii care l-au folosit au fost egiptenii, majoritatea piramidelor fiind construite ținând cont de numărul de aur.Grecii au fost însă cei care l-au denumit astfel, folosindu-l atât în arhitectură cât şi pictură şi sculptură.Dealtfel numărul de aur se notează cu litera grecească "fi"(φ), de la sculptorul grec *Phidias.*El a construit Parthenonul pornind de la acest raport.

Să începem cu o problemă estetică.Să considerăm un segment de dreaptă.Care este cea mai "plăcută" împărțire a unui segment în două părți?Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect(teoreticienii îl numesc "simetrie dinamică").Dacă părții stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u=1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v=0.618...$Despre un segment partiționat astfel spunem că este împărțit în secțiunea , sau proporția sau diviziunea de aur(divină).Ideea este că lungimea u reprezintă aceeaşi parte din tot segmentul $(u+v)$ cât reprezintă lungimea v din partea u .Cu alte cuvinte:

$$\frac{u+v}{u}=\frac{u}{v}.$$

Dacă notăm $\varphi=\frac{u}{v}$, observăm că:

$1+\frac{1}{\varphi}=1+\frac{u}{v}=\frac{u+v}{u}=\frac{u}{v}=\varphi$, şi este rădăcina pozitivă a ecuației $\varphi^2-\varphi-1=0$,

adică $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887...$Dacă presupunem $u=1,$ atunci :

$$v=\frac{u}{\varphi}=\frac{1}{\varphi}=\varphi-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.6180339887...$$

Afirmăm acum că φ este strâns legat de şirul lui Fibonacci.Aceasta este o idée remarcabilă a matematicii .

Mai observăm că :

$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}=...=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}$ este o fracție infinită.

Dacă privim fracțiile parțiale :

$1=\frac{1}{1}$, $\quad 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$, $\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2}$, $\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{5}{3}$, $\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{8}{5}$,

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}$ obsevăm că toate rezultatele sunt rapoarte de numere Fibonacci, fapt ce motivează teorema care spune că :

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\varphi$.În cuvinte putem spune că, pe măsură ce n se apropie de infinit, raportul termenilor al $n+1-lea$ şi al $n-lea$ din şirul lui Fibonacci se apropie de φ.

La fel de simplu cum φ este o fracţie infinită, tot aşa poate fi şi un radical infinit:

$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$ .Altă aplicaţie a numărului φ apare la pentagonal regulat deoarece :

$2\cos(\frac{\pi}{5})=\varphi$ şi $2\sin(\frac{\pi}{5})=\sqrt{3-\varphi}$.

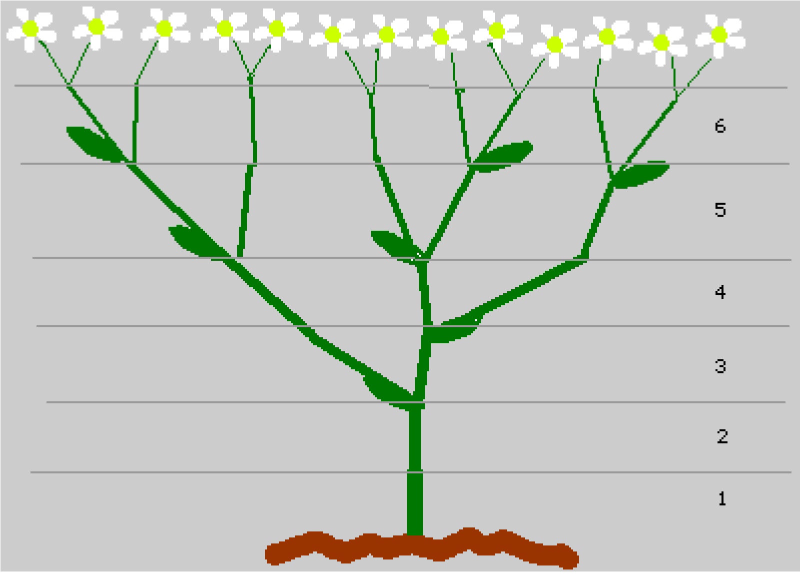
De asemenea există o legătură între dreptunghiurile de aur şi şirul lui *Fibonacci* deoarece lungimea şi lăţimea celui de-al $n-lea$ dreptughi pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienţii sunt

întotdeauna numere *Fibonacci.*Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică .Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des în natură(carcasa unui melc, colţii unui elefant sau conurile de pin).Asemenea spirale sunt echiunghiulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul $(x_0,y_0)=(\frac{1+3\varphi}{5},\frac{3-\varphi}{5})$ taie spirala sub un unghi constant.

2.2. *Fibonacci* şi plantele.

Plantele nu au cum să cunoască numerele lui *Fibonacci,* dar se dezvoltă în cel mai eficient mod.

a. multe plante au aranjamentul frunzelor dispus într-o secvenţă *Fibonacci* în jurul tulpinei;



b.anumite conuri de pin respectă o dispunere dată de numerele lui *Fibonacci* ;
c.floarea soarelui are semințele dispuse după o secvență *Fibonacci*;

d.inelele de pe trunchiurile palmierilor respectă numerele lui *Fibonacci*;
e.numărul petalelor florilor este, de cele mai multe ori, un număr al secvenței *Fibonacci*:
e.1.cala are 1 petală;
e.2.euphorbia are 2 petale;
e.3. irisul şi crinul au 3 petale;
e.4.viorelele, lalelele, trandafirul sălbatic şi majoritatea florilor au 5 petale;
e.5.margaretele pot avea 21 de petale sau 34 de petale şi exemplele sunt nenumărate;

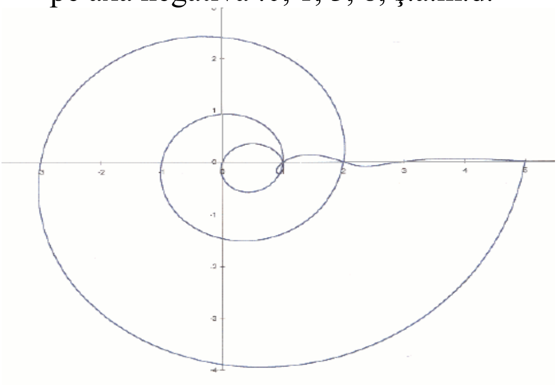
e.6.florile cu un număr de petale care nu sunt în secvența *Fibonacci* sun rare şi considerate speciale.
Concluzia este realizarea unui optim, a unei eficiențe maxime.Dacă se urmează secvența lui *Fibonacci,* frunzele unor plante pot fi dispuse astfel încât să ocupe un cât mai mic spațiu şi să obțină cât mai mult soare.

Ideea dispunerii frunzelor în acest sens pleacă de la considerarea unghiului de aur de 222.5 grade; unghi care împărţit la întregul 360 de grade va da ca rezultat numărul iraţional 0.61803398…, cunoscut ca raţia şirului lui *Fibonacci.*

2.3. Cochilia melcului, furnica şi *Fibonacci*

Designul cochiliei melcului urmează o spirală foarte reuşită, o spirală greu de realizat cu pixul.Studiată în amănunt s-a ajuns la concluzia că această spirală urmăreşte dimensiunile date de secvenţa lui *Fibonacci:*

- pe axa pozitivă :1, 2, 5, 13, ş.a.m.d
- pe axa negativă :0, 1, 3, 8, ş.a.m.d.



Se observă că aceste 2 subşiruri combinate dau numerele lui *Fibonacci.*

Şi în acest caz raţiunea şi motivaţia pentru această dispunere este simplă : în acest fel cochilia îi crează melcului, în interior un maxim de spaţiu şi de siguranţă.

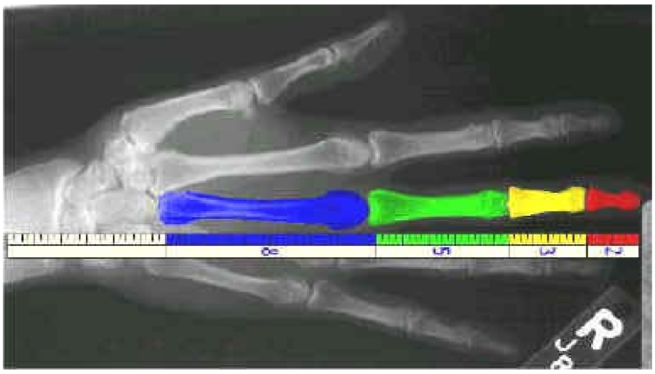
Furnica are corpul împărţit în trei segmente, după diviziunea de aur.

2.4. *Fibonacci* şi corpul uman.

Faţa umană este caracterizată, din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanţa între ochi, dintre gură şi ochi şi distanţa dintre nas şi ochi, dimensiunea gurii.În ştiinţa esteticii se apreciază că faţa este cu atât considerată mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă secvenţa lui *Fibonaci* mai bine.

De exemplu raportul dintre distanţa de la linia surâsului(unde se unesc buzele) până la vârful nasului şi de la vârful nasului până la baza sa este aproximativ raportul de aur

Mâna umană are 5 degete(număr din şirul *Fibonacci*), fiecare deget având 3 falange separate prin 2 încheieturi (numere din şirul *Fibonacci*).Dimensiunile falangelor sunt:2 cm, 3 cm, 5 cm.În continuarea lor este un os al palmei care are 8 cm.



2.5. ***Fibonacci,*** **numărul de aur şi arta.**

Dacă privim lucrările unor mari artişti, fie ei pictori, arhitecți, sculptori sau fotografi, se observă că multe dintre ele au la bază regula de aur.Conform acesteia, "pentru ca un întreg împărțit în părți inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică şi cea mare acelaşi raport ca între partea mare şi întreg" (*Marcus Pollio Vitruvius*, arhitect roman).

Rudolf Arnheim(psiholog,s-a ocupat de psihologia artei) dă o explicație acestui lucru astfel:"Acest raport este considerat ca deosebit de satisfăcător datorită modului în care îmbină unitatea cu varietatea dinamică.Întregul şi părțile sunt perfect proporționate, astfel că întregul predomină fără să fie amenințat de o scindare, iar părțile îşi păstrează în acelaşi timp o anumită autonomie."(în "Arta şi percepția vizuală").

În pictură a fost folosit mai ales în Renaştere, probabil cea mai discutată utilizare a acestuia fiind în tabloul lui *Leonardo da Vinci*, "Mona Lisa".Capul, ca şi restul corpului e compus utilizând raportul divin, cum îi spunea *da Vinci*.În prima jumătate a secolului trecut pictorul *Piet Mondrian* utilizează în picturile sale "dreptunghiul de aur", având raportul laturilor aproximativ 1.618…De fapt, lucrările sale sunt alcătuite numai din asemenea dreptunghiuri.Acest dreptughi este considerat cea mai armonioasă formă geometrică.Cu toate acestea, rareori este folosit pentru cadraje.Dacă se împarte fiecare latură a cadrului fotografic în 8 părți egale(număr din şirul *Fibonacci*) şi se unesc punctele de pe laturile opuse corespunzătoare diviziunilor 3 şi 5 (numere din şirul *Fibonacci*) se obțin aşa numitele linii forte ale cadrului.Punctele aflate la intersecția liniilor se numesc puncte forte.Practic se pot împărți laturile în trei părți egale, rezultatul este aproximativ acelaşi.Se presupune că subiectul amplasat pe aceste linii sau în aceste puncte determină o împărțire armonioasă a imaginii astfel încât ea nu este nici simetrică, nici plictisitoare, nici prea dezechilibrată.De exemplu, două fotografii de *Robert Doisneau*,"L'accordioniste", 1951 şi "The cellist", 1957 şi fotografia "Poplar Trees" a lui *Minor White* în care toate liniile converg spre un punct forte.*Ansel Adams* se împotrivea regulilor, canoanelor.El spunea "aşa zisele reguli de fotocompoziție sunt invalide , irelevante şi imateriale; nu există reguli de compoziție în fotografie, există doar fotografii bune.Cei mai mulți fotografi încalcă regulile fotocompoziției".Cu toate acestea şi în

imaginile lui se observă diviziunea de aur(vezi fotografia "Aspens", 1958).Asta înseamnă că deşi nu era de accord cu regulile le cunoştea foarte bine.Dacă fotografia are valoare cu subiectul în centru, atunci încălcați regula diviziunii de aur!Subiectul trebuie să fie în armonie cu celelalte elemente din cadru.Dacă astfel se verifică şi diviziunea de aur, este perfect!Toate acestea arată importanța acestui număr, astfel că toți marii fotografi au ținut şi țin cont de el în conceperea unei fotografii.

Până şi în muzică apare acest raport, se presupune că *Bach* sau *Beethoven* au ținut cont de el în compozițiile lor.
Atunci când scrieți, duceți instinctiv linia din mijloc a literii E(la fel şi cu A, F, B, R,…) aproximativ la $\frac{2}{3}$ de bază (aproximativ raportul de aur).

Concluzie. Numerele lui *Fibonacci* sunt considerate a fi, de fapt, sistemul de numărare al naturii, un mod de măsurare al Divinității, o legătură între matematică şi artă.

3. Unele rezultate referitoare la şirul lui Fibonacci

Consultând bibliografia enumerată am selectat următoarele rezultate:
Numerele lui *Fibonacci* f_n sunt date de următoarea recurență :
$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_{n-1} + f_n,\ n \geq 1$.

Teorema 1. Dacă $x^2 = x + 1$ **,** atunci avem :
$x^n = f_n x + f_{n-1},\ \forall n \geq 2$.

Demonstrație. Vom demonstra prin inducție după n.
Pentru $n = 2$ relația este trivială .Presupunem că $\forall n > 2$ avem $x^{n-1} = f_{n-1}x + f_{n-2}$.
Atunci
$x^n = x^{n-1} \cdot x = (f_{n-1}x + +f_{n-2})x = f_{n-1}(x+1) + f_{n-2}x = (f_{n-1} + f_{n-2})x + f_{n-1} = f_n x + f_{n-1}$.
□

Teorema 2.(Formula lui *Binet*).Termenul al $n - lea$ din şirul lui *Fibonacci* este dat de:
$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n),\ n \geq 0$.

Demonstrație.Rădăcinile ecuației $x^2 = x + 1$ sunt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Din Teorema 1., avem $\varphi^n = \varphi f_n + f_{n-1}$ şi $(1-\varphi)^n = (1-\varphi) f_n + f_{n-1}$.
În continuare $\varphi^n - (1-\varphi)^n = \sqrt{5} f_n$, de unde rezultă formula lui *Binet.* □

Teorema 3. $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$**.**

Demonstrație. Avem relațiile:
$f_1 = f_3 - f_2, f_2 = f_4 - f_3, f_3 = f_5 - f_4, ..., f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$, care prin adunare dau
$f_1 + f_2 + f_3 + ... f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$.□

Teorema 4. $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$.

Demonstrație. Observăm că:
$f_1 = f_2 - f_0, f_3 = f_4 - f_2, f_5 = f_6 - f_4, ..., f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$.Adunăm relațiile şi obținem identitatea dorită. □

Teorema 5. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Demonstrație. Avem $f_{n-1} f_n = (f_{n+1} - f_n)(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1} f_n - f_n^2 + f_{n+1} f_{n-1} - f_n f_{n-1}$.
Atunci , obținem relațiile $f_{n+1} f_n - f_n f_{n-1} = f_n^2$, care prin adunare pentru $n = 1,2,3,...$, dau relația finală. □

Teorema 6. (Identitatea lui *Cassini*). $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, n \geq 1$.

Demonstrație. Observăm că :

$$f_{n-1}f_n - f_n^{\ 2} = (f_n - f_{n-2})(f_n + f_{n-1}) - f_n^{\ 2} = -f_{n-2}f_n - f_{n-1}(f_{n-2} - f_n) = -(f_{n-2}f_n - f_{n-1}^{\ 2})$$

Dacă notăm $u_n = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^{\ 2}$, obținem $u_n = -u_{n-1}$ şi mai departe $u_n = (-1)^{n-1}u_1$.
Din cele de mai sus avem $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^{\ 2} = (-1)^{n-1}(f_0f_2 - f_1^{\ 2}) = (-1)^n$. □

Teorema 7.(*Cesàro*). $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_k = f_{3n}$.

Demonstrație. Utilizăm formula lui *Binet*, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k}^{n}\binom{n}{k}2^k\varphi^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(1-\varphi)^k\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}((1+2\varphi)^n - (1+2(1-\varphi))^n).$$

Cum $\varphi^2 = \varphi + 1$, obținem $1 + 2\varphi = \varphi^3$ şi similar $1 + 2(1-\varphi) = (1-\varphi)^3$.

Atunci , rezultă $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}((\varphi)^{3n} + (1-\varphi)^{3n}) = \varphi_{3n}$.□

Teorema 8.(Vorobyov) Dacă $s \geq 1, t \geq 0$ sunt întregi atunci:
$f_{s+t} = f_{s-1}f_t + f_s f_{t+1}$.

Demonstrație. Fixăm pe t şi demonstrăm prin inducție după s .Pentru $s = 1$ se obține $f_{t+1} = f_0 f_t + f_1 f_{t+1}$, care este adevărată(trivial).Presupunem că $s > 1$ şi că $f_{s-k+t} = f_{s-k-1}f_t + f_{s-k}f_{t+1}$ pentru orice k care satisfac $1 \leq k \leq s-1$.

Avem
$$\begin{aligned}
f_{s+t} &= f_{s+t-1} + f_{s+t-2} && \text{(din recurența } \textit{Fibonacci}\text{)}\\
&= f_{s-1+t} + f_{s-2+t} && \text{(trivial)}\\
&= f_{s-2}f_t + f_{s-1}f_{t+1} + f_{s-3}f_t + f_{s-2}f_{t+1} && \text{(din presupunerea făcută)}\\
&= f_t(f_{s-2} + f_{s-3}) + f_{t+1}(f_{s-1} + f_{s-2}) && \text{(prin rearanjarea termenilor)}\\
&= f_t f_{s-1} + f_{t+1}f_s && \text{(din recurența } \textit{Fibonacci}\text{). □}
\end{aligned}$$

Observația 1. *J.R. Silvester* indică o metodă elegantă care furnizează identități pentru termenii şirului (f_n). Mai precis, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi se constată că avem $A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}, n = 1,2,...$.Plecând de la această observație şi utilizând egalitățile $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$, $n, m = 1,2,...$ şi $\det(A^n) = [\det(A)]^n$, rezultă relația din țeorema 6. şi de asemenea relația din teorema 8.

Posibilitățile de a obține identități, folosind ideea de mai sus sunt multiple.Astfel, observăm că $A^n = f_n A + f_{n-1}I$ (cu I am notat matricea untate), iar pentru $n = 2$, obținem: $A^2 = A + I$ .De asemenea avem $A^{n+2} = A^{n+1} + A^n$.Enunțate fiind aceste proprietăți ale matricei A, se observă că puterile acesteia verifică recurențe de tip *Fibonacci*.Deoarece $A \cdot I = I \cdot A = A$, putem aplica formula binomului lui *Newton* pentru A şi I, apoi identificând relațiile obținute pe componente se obțin diferite identități.

Prezentăm mai jos, fără demonstrație, câteva identități obținute prin metoda expusă mai sus:

$(1) f_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k$; $(2) f_{2n+l}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_{k+l}$; $(3)\ f_l=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f_{2n-k+l}$;

$(4)\ f_{l+n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f_{2n-2k+l}$; $(5) f_{3n+l}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k f_{k+l}$ **(teorema lui *Cesàro* generalizată**);

$(6) 2^n f_{n+l}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f_{3n-3k+l}$; $(7) f_l=\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}(-1)^k f_{3n-2k+l}$;

$(8) f_{nm}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f_n^{\,m-k} f_{n-1}^{\,k} f_{m-k}$.

Pentru studenţi propun demonstrarea următoarelor identităţi:

$(9)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}=1$; $(10)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}f_{n+2}}=1$; $(11)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{f_{2^n}}=4-\varphi$;

$(12)\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{f_{2n+1}}=\frac{\pi}{4}$; $(13)\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{\varphi^n}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $(14)\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+r}}{f_n}=\varphi^r$.

Observaţia 2. Unii autori, au obţinut identităţi cu termenii şirului lui *Fibonacci* cu ajutorul determinanţilor.Astfel, dacă considerăm şirul lui *Fibonacci* : 1, 2, 3, 5,…se observă că $f_n=D_{n-1}=\begin{vmatrix}2&1&0&0&...&...&0\\1&2&1&0&...&...&0\\1&1&2&1&0&...&0\\...&...&...&...&...&...&...\\1&1&1&...&...&1&2\end{vmatrix}$ este deci dat de un determinant de ordinul $n-1$.

Dacă considerăm determinantul de ordinul n , $D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&0&...&...&0\\1&2&1&0&...&...&0\\1&1&2&1&0&...&0\\...&...&...&...&...&...&...\\1&1&1&...&...&1&2\end{vmatrix}$

pe care îl dezvoltăm după elementele primei linii ne dă :

$D_n=2D_{n-1}-\begin{vmatrix}1&1&0&0&...&...&0\\1&2&1&0&...&...&0\\1&1&2&1&0&...&0\\...&...&...&...&...&...&...\\1&1&1&...&...&1&2\end{vmatrix}$.Dacă dezvoltăm şi ultimul termen obţinem

$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}+\begin{vmatrix}1&1&0&0&...&...&0\\1&2&1&0&...&...&0\\1&1&2&1&0&...&0\\...&...&...&...&...&...&...\\1&1&1&...&...&1&2\end{vmatrix}$.Procedăm ca mai sus şi deducem :

$D_{n-1} = 2D_{n-2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & ... & 1 & 2 \end{vmatrix}$.Dacă adunăm membru cu membru ultimile două egalităţi obţinem : $D_n + D_{n-1} = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 2D_{n-2} \Leftrightarrow D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$,
relaţie de recurenţă analoagă cu cea din şirul lui *Fibonacci* $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$.

Teorema 9. $f_n | f_{nk}$, $\forall n,k \in N^*$.

Demonstraţie. Prin inducţie după $k \in N^*$ şi orice $n \in N^*$.
Pentru $k = 1 \Rightarrow f_n = f_{n\cdot 1} \Rightarrow f_n | f_n$ (adevărată).

Presupunem $f_n | f_{nk}$ şi demonstrăm că $f_n | f_{n(k+1)}$.

Întradevăr, ţinând seama de teorema 8. avem: $f_{n(k+1)} = f_{nk+n} = f_{nk+1} f_n + f_{nk} f_{n-1}$, $\forall n \in N^*$ şi deoarece $f_n | f_n$ şi $f_n | f_{nk}$ rezultă $f_n | f_{n(k+1)}$.□

Teorema 10. $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^{\ k} (\text{mod}\, f_n^{\ 2})$, $\forall k,n \in N^*$.

Demonstraţie. Se arată tot prin inducţie după $k \in N^*$.Pentru $k = 1$ relaţia este evidentă.Pentru $k = 2$ ţinem seama de teoremele precedente şi avem ;

$f_{2n-1} = f_n f_n + f_{n-1} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{\ 2} (\text{mod}\, f_n^{\ 2}), \forall n \in N^*$.Fie $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^{\ k} (\text{mod}\, f_n^{\ 2})$ .Avem deci că : $f_{(k+1)n-1} = f_{kn-1+n} = f_{kn} f_n + f_{kn-1} f_{n-1} \equiv f_{kn-1} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{\ k} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{\ k+1} (\text{mod}\, f_n^{\ 2})$ şi deci conform principiului inducţiei complete relaţia este demonstrată. □

Teorema 11. $f_{kn-1} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k} (\text{mod}\, f_n^{\ 2}), \forall n \in N^*$.

Demonstraţie. Relaţia se demonstrează tot prin inducţie completă .Pentru $k = 1$ obţinem $f_{n-2} \equiv f_{n-2} (\text{mod}\, f_n^{\ 2})$ ceea ce este evident.Presupunem că $f_{kn-2} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k} (\text{mod}\, f_n^{\ 2})$
şi să demonstrăm că $f_{(k+1)n-2} \equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{\ k+1} (\text{mod}\, f_n^{\ 2})$.Întradevăr, avem:

$$f_{(k+1)n-2} = f_{kn-2+n} = f_{kn-1} f_n + f_{kn-2} f_{n-1} \equiv f_{kn-1} f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k} (f_n - f_{n-2}) \equiv$$
$$\equiv f_{kn-1} f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k} f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{\ k+1} \equiv (f_{n-1}^{\ k} + (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k}) f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{\ k+1} \equiv$$
$$\equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{\ k+1} (\text{mod}\, f_n^{\ 2}).$$

Am folosit mai sus că $f_{n-1}^{\ k} + (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k}$ se divide cu $f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$.
Rezultă conform principiului inducţiei complete că teorema este demonstrată. □

Teorema 12. $f_n^{\ 2} | f_{nf_n}, \forall n \in N^*$.

Demonstraţie. Notăm
$f_n = k$ .Avem: $f_{nf_n} = f_{nk} = f_{nk-1} + f_{nk-2} \equiv f_{n-1}^{\ k} + (-1)^{k+1} f_{n-2}^{\ k} (\text{mod}\, k^2)$.
Totodată avem:

$f_{n-1} = f_n - f_{n-2}$ şi deci $f_{n-1}{}^k = (f_n - f_{n-2})^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i f_n{}^{k-i} f_{n-2}{}^i \equiv (-1)^k f_{n-2}{}^k (\bmod k^2)$.

Deci, $f_{n-1}{}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}{}^k \equiv (-1)^k f_{n-2}{}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}{}^k \equiv 0 (\bmod k^2)$, ceea ce demonstrează teorema. □

Teorema 13. $f_n^{m+1} \mid f_{nf_n^m}$, $\forall m \in N$ şi $\forall n \in N^*$.

Demonstrație. Pentru $m=1$ afirmația este echivalentă cu teorema 12.Presupunem afirmația adevărată pentru pentru m şi o demonstrăm pentru $m+1$.Vom arăta că $f_n^{m+1} \mid f_{nf_n^m} \Rightarrow f_n^{m+2} \mid f_{nf_n^{m+1}}$ .Notăm şi atunci avem:

$f_{uf_n} = f_{uf_n-1} + f_{uf_n-2} \equiv f_{u-1}{}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}{}^{f_n} (\bmod u^2) \equiv (f_u - f_{u-2})^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}{}^{f_n} (\bmod u^2) \equiv$
$\equiv (-1)^{f_n} f_{u-2}{}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}{}^{f_n} \equiv 0 (\bmod f_n^{m+1})$ .Am folosit mai sus că din $f_n^m \mid u$ şi $f_n^m \mid u^2 \Rightarrow f_n^{m+1} \mid f_u$. □

Teorema 14. Orice două numere *Fibonacci* consecutive sunt relative prime.

Demonstrație. Fie $d = (f_n, f_{n+1})$. Avem $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ de unde rezultă $d \mid f_{n-1}$ .Atunci $d \mid (f_n - f_{n-1}) = f_{n-2}$ .Repetând procedeul se deduce că $d \mid f_1$, deci $d = 1$.□

Altfel:din teorema 6., $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$.Rezultă $d \mid (-1)^n$, i.e., $d = 1$.□

Teorema 15. $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}$.

Demonstrație. Notăm $a = (m,n), b = (f_m, f_n), c = f_{(m,n)}$ .Vom arăta că $c \mid b$ şi $b \mid c$.

Deoarece $a \mid m$ şi $a \mid n$, conform teoremei 9. avem: $f_a \mid f_m$ şi $f_a \mid f_n$ .Deci $f_a \mid (f_m, f_n)$, i.e., $c \mid b$.

Acum, din Teorema *Bachet-Bezout*, există numerele întregi x, y astfel încât $xm + yn = a$ .Se observă că x şi y nu pot fi ambele negative, deoarece a ar fi negativ.Cum $a \mid n$ şi $a \mid m$, avem $a \le n, a \le m$ .De asemenea, x şi y nu pot fi simultan pozitive , deoarece am avea $a = xm + yn \ge m + n$, contradicție.Atunci , x şi y au semne diferite şi, fără a restrânge generalitatea presupunem că $x \le 0$, $y > 0$.

Observăm că :

$f_{yn} = f_{a-xm} = f_{a-1} f_{-xm} + f_a f_{-xm+1}$ (am utilizat teorema 8.).

Cum $n \mid yn$ şi $m \mid (-xm)$, din teorema 9. rezultă că $f_n \mid f_{yn}$ şi $f_m \mid f_{-xm}$ .Acestea implică că $(f_m, f_n) \mid f_{yn}$ şi $(f_m, f_n) \mid f_{-xm}$ .Din cele de mai sus avem că $(f_m, f_n) \mid f_a f_{-xm+1}$.

Dacă $(f_m, f_n) \mid f_{-xm+1}$, cum $(f_m, f_n) \mid f_{-xm}$ rezultă că (f_m, f_n) ar divide două numere *Fibonacci* consecutive, contradicție(conform teoremei 14) în cazul în care $(f_m, f_n) > 1$.

Cazul $(f_m, f_n) = 1$ este trivial.Rezultă că $(f_m, f_n) \mid f_a$, ceea ce trebuia demonstrat. □

Teorema 16. Dacă $p \neq 5$ este un număr prim impar, atunci $p \mid f_{p-1}$ sau $p \mid f_{p+1}$.

Demonstrație.

Lema 1. $\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \bmod p, 1 \leq n \leq p-1.$

Demonstrație. $(p-1)(p-2)...(p-n) \equiv (-1)(-2)...(-n) \equiv (-1)^n n! \bmod p$, de aici concluzia. □

Lema 2. $\binom{p+1}{n} \equiv 0 \bmod p, 2 \leq n \leq p-1.$

Demonstrație. $(p+1)(p)(p-1)...(p-n-2) \equiv (1)(0)(-1)...(-n) \equiv 0 \bmod p$, ceea ce demonstrează lema. □

Din teorema 2. avem:

$$f_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 5^2\binom{n}{5} + ... + 5^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{n-1}\right).$$

Din lema 1.,

$$2^{p-2} f_{p-1} \equiv p-1-(5+5^2+...+5^{\frac{p-3}{2}}) \equiv -\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{4} \bmod p.$$

Din lema 2.,

$$2^p f_{p+1} \equiv p+1+5^{\frac{p-1}{2}} \equiv (5^{\frac{p-1}{2}}+1) \bmod p.$$

Din cele două relații de mai sus obținem:

$$2^{2p} f_{p-1} f_{p+1} \equiv -(5^{p-1}-1) \bmod p.$$

Din mica teoremă a lui *Fermat,* $5^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, pentru $p \neq 5$ şi teorema este demonstrată. □

Notă. Punctul de plecare al acestui articol l-a constituit răspunsul dat de dl. prof. dr. *Ioan Tomescu* (Membru Corespondent al Academiei), Secretarului General al S.S.M.R din România dl. prof. *Mircea Trifu*, în Gazeta Matematică nr.12 / 2007, la întrebarea :

M.T.:"*Mai sunt dispuşi tinerii de astăzi să învețe matematica?*"

I.T.:"*Dacă vom şti să prezentăm această ştiință ca pe o frumoasă provocare a spiritului mereu născocitor, este posibil ca tinerii să ajungă să înteleagă frumusețea şi profunzimea unui raționament matematic.Şi mai trebuie ca profesorii să fie capabili să prezinte elevilor impactul matematicii asupra întregii dezvoltări ştiințifice contemporane, conexiunile dintre matematică şi informatică şi aplicațiile acestora, de exemplu, în criptografie, în studiul genomului uman, în comerțul electronic*."

Bibliografie

[1] $***$ Gazeta Matematică, 1895 – 2007 .

[2] Fauvel, J., & van Maanen, J., *History in Mathematics Education*, Boston, 2000.
[3]Finch,S.R., *Mathematical Constants*, Cambridge University, 2003.
[4] Knot, R., *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, se poate consulta gratuit pe Internet la adresa http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knot/Fibonacci/fib.html
[5] Mihăileanu, N., *Istoria Matematicii*, vol. 1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.
[6] Mihăileanu, N., *Istoria Matematicii*, vol. 2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
[7] Vorobyov, N.N., *The Fibonacci Numbers*, The University of Chicago, 1966.
[8] Santos, D.A., *Number Theory for Mathematical Contests*, Boston, 2007.
[9] Silvester, J.R., *Fibonacci properties by matrix methods*, The Mathematical Gazette, vol. 63 (1979), nr. 425, pp. 188 – 191.
[10] Weisstein, E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Washington, D.C., 2003.

Grupul Şcolar Tehnic "Sf. Mucenic Sava", Berca, Buzău

DIVIZIUNI ŞI FASCICULE ANARMONICE

DE NECULAI STANCIU

"Geometria proiectivă este toată geometria"
Arthur Cayley

I. DIVIZIUNI ANARMONICE

Aceast articol, este dedicat *geometriei sintetice* (*fundamentelor geometriei* şi *geometriei proiective*), şi se adresează studenților, elevilor, profesorilor de matematică, şi în general, oricui este interesat de geometrie.

În prezent, geometria din liceu este introdusă via *algebra liniară* (adică *vectorial* nu *sintetic*).Articolul, vine să detalieze noțiunea de *diviziune şi fascicul armonic* definită în articolul -"*Aplicații ale teoremei lui La Hire*" - G.M. - 3 / 2008 ; noțiuni care pot fi înțelease de orice elev din clasa a VI-a.

Diviziunea şi fasciculul armonic, sunt tratate în capitole de *fundamentele geometriei*, şi în *geometria proiectivă*, unde metoda utilizată este cea *axiomatică sintetică*.Alte noțiuni legate de acestea sunt:*polaritate, dualitate*, etc.

Considerăm punctele coliniare A, B şi C ca în fig.1 .

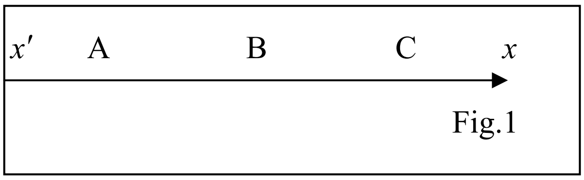


Fig.1

Avem relațiile: (1) $AB = -BA$ şi (2) $AB + BC = AC; AB + BC + CA = 0$ .Fie acum patru puncte coliniare A, B, C şi D ca în fig. 2, astfel încât (3) $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$.

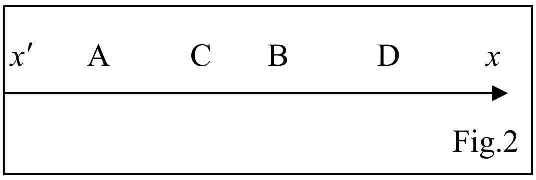


Fig.2

Spunem că perechea (CD) este *armonic conjugată* cu perechea (AB) şi reciproc deoarece:

$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1$ .Se mai spune că A este *conjugatul armonic* al lui B în raport cu C şi D sau, B este conjugatul armonic al lui A în raport cu C şi D sau, C este conjugatul armonic al lui D în raport cu A şi B sau, D este conjugatul armonic al lui C în raport cu A şi B .

În continuare vom numi biraport sau, raport anarmonic sau, diviziune anarmonică raportul (4) $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \overset{not}{=} (ABCD) \overset{not}{=} r$ .Se observă că daca $r = 1$ atunci $(ABCD)$ este diviziune armonică.

Teorema I.1. *Raportarea la o origine de pe axă.*

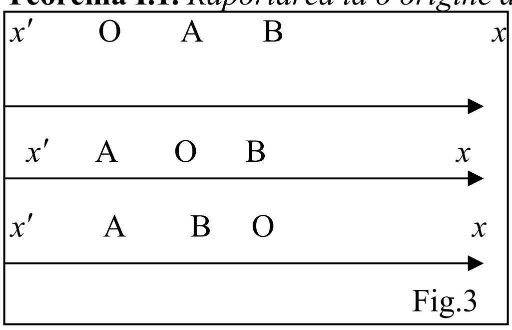


Fig.3

Dacă avem axa $x'x$ cu originea O şi punctele A şi B pe axă atunci (5) $AB = OB - OA$.

Demonstrație. Avem cazurile din fig. 3.

Cazul $O - A - B$. $OA + AB + BO = 0 \Rightarrow$

$$AB = -BO - OA = OB - OA.$$

Cazul $A - O - B$.Din relația (2) avem $AO + OB + BA = 0 \Rightarrow$ AB=$OB + AO = OB - OA$.

Cazul $A - B - O$. $AB + BO + OA = 0 \Rightarrow AB = -BO - OA = OB - OA$.

Cuarte de puncte coliniare.

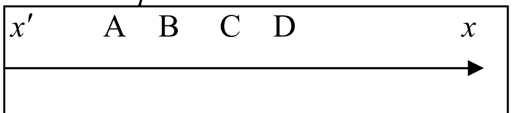


Fig.4

Avem configurația din fig. 4:
AB şi CD sunt *segmente care se separă*;
AD şi BC sunt *segmente care se includ* iar;
AC şi BD sunt *segmente care se încalecă.*

Teorema I.2. *Echipolența lui Euler.*

(6) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

Demonstrație.

$AB \cdot CD + AD \cdot BC - AC \cdot BD = AB(AD - AC) + AD(AC - AB) - AC(AD - AB) =$

$= AB(AD - AC - AD + AC) + AD(AC - AC)$=0.

Teorema I.3.*Punctul care împarte un segment într-un raport dat.*

Fie segmentul AB, $M \in AB$, $O \in AB$ origine aleasă arbitrar şi $k = \dfrac{AM}{AB}$.

Avem (7) $OM = (1-k)OA + kOB$.

Demonstrație. Presupunem ordonarea $O - A - M - B$,cu $AM = k \cdot AB$.Rezultă imediat din *teorema 1*,$OM - OA = k \cdot OB - k \cdot OA$.Celelalte ordonări se tratează analog.

*Consecință.*Dacă M este mijlocul segmentului AB, atunci $k = \dfrac{1}{2}$ şi $OM = \dfrac{OA + OB}{2}$.

Teorema I.4.*Unicitatea punctului care împarte un segment într-un raport dat.*

Fie pe axa $x'x$, segmentul AB şi punctele C, D în interiorul sau în exteriorul segmentului AB dar de aceeaşi parte a lui.Dacă $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$ atunci $D = C$.

Demonstrație. Considerăm ordonarea $A - C - D - B$.

Din ipoteză rezultă $AC \cdot DB = AD \cdot CB$.Din (6) avem $AD \cdot CB = AC \cdot DB + AB \cdot CD$.Rezultă $AB \cdot CD = 0$, de unde, deoarece $AB \neq 0$ obținem $CD = 0$, adică $C = D$.

În cazul în care C şi D sunt ambele exterioare şi situate de aceeaşi parte a segmentului AB, se procedează analog.Cazul în care C şi D sunt separate de segmentul AB, adică ordonarea

$C - A - B - D$ sau $D - A - B - C$ se exclude deoarece $AB \neq 0$.

Teorema I.5.*Diviziuni anarmonice egale, cu trei perechi de puncte comune.*

Dacă $(ABCD) = (ABCD')$, atunci $D = D'$.

Demonstrație. $(ABCD) = (ABCD') \overset{def}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{D'A}{D'B} \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{D'A}{D'B} \overset{T4}{\Rightarrow} D = D'$.

(q.e.d).

Teorema I.6. Valoarea *biraportului* r nu poate fi nici 0 nici 1.

Demonstrație. $r = (ABCD) = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB} \neq 0$ deoarece punctele fiind distincte $CA \neq 0, CB \neq 0, DA \neq 0, DB \neq 0$.

$$r - 1 = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} - 1 = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} - 1 = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} - 1 = \frac{AC \cdot BD - BC \cdot AD}{BC \cdot AD} \overset{T2}{=} \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \neq 1$.

În continuare, vom calcula *valorile biraportului obținute prin permutarea punctelor unei diviviuni anarmonice.*

Teorema I.7.O *transpoziție* a două puncte din aceeaşi pereche inversează raportul anarmonic.

Demonstrație. $\begin{cases} r = (ABCD) = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA} \\ r_1 = (ABDC) = \dfrac{DA}{DB} : \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA \cdot CB}{DB \cdot CA} \end{cases} \Rightarrow r \cdot r_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \dfrac{1}{r}$.

Am demonstrat $(ABDC) = \dfrac{1}{(ABCD)}$. $(BACD) = \dfrac{CB}{CA} : \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{CB \cdot DA}{CA \cdot Db} = \dfrac{1}{(ABCD)}$.(q.e.d).

Teorema I.8.O *transpoziție* a două puncte din perechi diferite ne dă un *raport anarmonic complementar .*

Demonstrație. $r = (ABCD) = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$ şi $r_2 = (ACBD) = \dfrac{BA}{BC} : \dfrac{DA}{DC} =$ $= -\dfrac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$.Sumăm cele două egalități şi aplicând *echipolența lui Euler(teorema 2)* obținem: $r + r_2 = \dfrac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{BC \cdot Ad} = \dfrac{AD \cdot BC}{AD \cdot BC} = 1 \Rightarrow r_2 = 1 - r \Rightarrow (ACBD) = 1 - r$.

Analog se arată că $(DBCA) = 1 - r$.

Transformările precedente ale raportului anarmonic, definite în *teoremele I.7 şi I.8,* compuse succesiv cu ele însele îl reproduc pe r.

Adică :

$r_1 = \dfrac{1}{r} \Rightarrow r' = \dfrac{1}{r_1} = r$, respectiv $r_2 = 1 - r \Rightarrow r'' = 1 - r_2 = r$.

Vom numi *transpoziții complementare* acele transformări care compuse cu ele însele , lasă *raportul anarmonic* neschimbat.

Teorema I.9. Dacă $(ABCD) = (ABDC)$ sau $(ABCD) = (BACD)$ atunci $(ABCD) = -1$.

Demonstrație. Fie $r = (ABCD) \overset{TI.7}{\Rightarrow} (ABDC) = \dfrac{1}{r}$, $(BACD) = \dfrac{1}{r}$.

Dacă $r = \dfrac{1}{r} \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \overset{r \neq 1}{\Rightarrow} r = -1$.(q.e.d).

Deoarece cu 4 obiecte putem face 24 de permutări, pentru fiecare diviziune de 4 puncte avem 24 de valori ale rapoartelor anarmonice corespunzătoare câte unei permutări.

Dintre toate acestea numai 6 valori sunt distincte, iar restul se obțin prin transpoziții complementare .Dintr-o permutare dată putem selecta alte trei de acelaşi raport anarmonic.Obținem:

$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = r$

$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \dfrac{1}{r}$

$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - r$

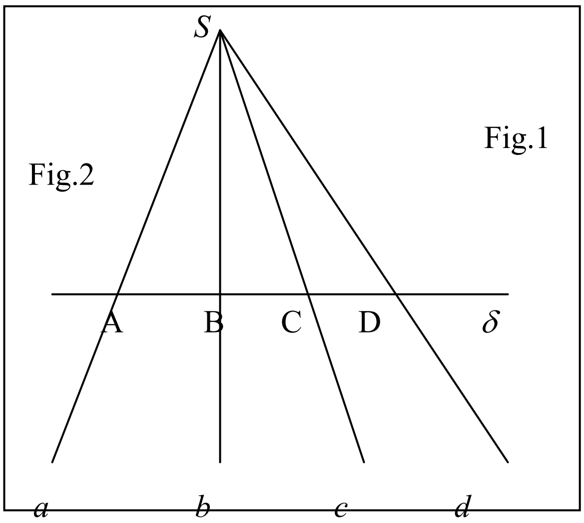
$(ADBC) = (DACB) = (CBDA) = (BCAD) = \dfrac{r-1}{r}$

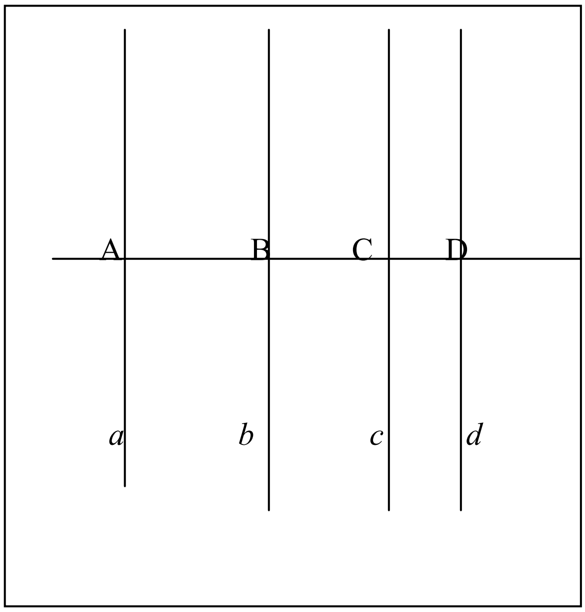
$(ACDB) = (CABD) = (BDCA) = (DBAC) = \dfrac{1}{1-r}$

$$(ADCB)=(DABC)=(BCDA)=(CBAD)=\frac{r}{r-1}.$$

II. FASCICULE ANARMONICE

Considerăm fig.1 unde $S(a,b,c,d)$ sau $S(A,B,C,D)$ reprezintă un *fascicul convergent*, cu punctul S *propriu* de raze a,b,c,d sau SA,SB,SC,SD şi fig.2 în care $S(a,b,c,d)$ este un *fascicul paralel* de raze a,b,c,d sau SA,SB,SC,SD cu punctul S *impropriu*.





Dacă diviziunea $(ABCD)$ este diviziune armonică atunci fasciculul ataşat $S(ABCD)$ se numeşte *fascicul armonic*.

Biraportul ataşat unui fascicul convergent.

Fie fasciculul $S(abcd)$ tăiat de secanta δ (vezi fig.1) în punctele $A=\delta\cap a, B=\delta\cap b, C=\delta\cap c, D=\delta\cap d$ .Dacă $S(XYZ)\overset{not}{=}$ aria triunghiului de vârfuri X,Y şi Z, $\widehat{XY}\overset{not}{=}\widehat{XSY}$, $h=d(S,\delta)$, atunci $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{CA\cdot h}{CB\cdot h}=\dfrac{2\cdot S(CSA)}{2\cdot S(CSB)}=\dfrac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

$$(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}:\frac{S(DSA)}{S(DSB)}=\frac{SC\cdot SA\cdot\sin(\widehat{ca})}{SC\cdot SB\cdot\sin(\widehat{cb})}:\frac{SD\cdot SA\cdot\sin(\widehat{da})}{SD\cdot SB\cdot\sin(\widehat{db})}=$$

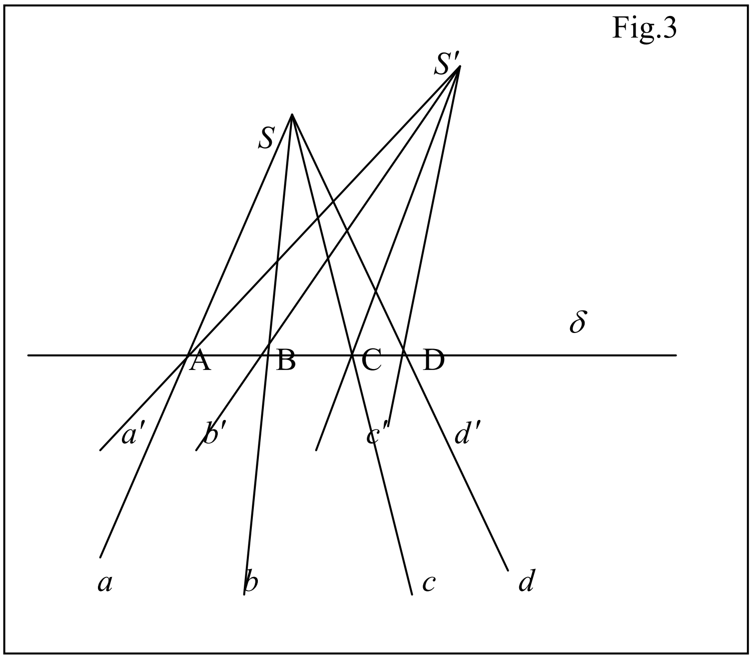
$$=\frac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})}:\frac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}.$$

Dacă $S(abcd) \overset{not}{=} \dfrac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})} : \dfrac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$, atunci rezultă $(ABCD) = S(abcd)$.

Teoreme de invarianță

Teorema II.1. Fiind date pe dreapta δ , punctele fixe A, B, C, D .Pentru orice $S \notin \delta$, notăm $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$ .Biraportul ataşat fasciculului $S(abcd)$ este *invariant.*

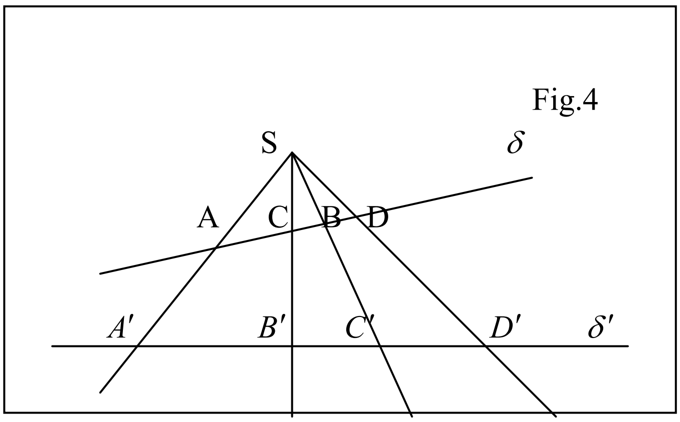
Demonstrație. Fie $S, S' \notin \delta$, ca în fig.3.



Din $S(abcd) = (ABCD)$ şi $S'(a'b'c'd') = (ABCD)$ rezultă $S(abcd) = S'(a'b'c'd')$.(q.e.d).

Teorema II.2. Fiind dat fasciculul fix de vârf S şi raze a, b, c, d .Pentru orice secantă δ care intersectează razele fasciculului în $A = a \cap \delta, B = b \cap \delta, C = c \cap \delta,$ şi $D = d \cap \delta$, *biraportul* ataşat diviziunii $(ABCD)$ este *invariant.*

Demonstrație. Fie δ şi δ' două secante oarecare (fig.4), care intersectează razele fasciculului în punctele A, B, C, D şi A', B', C', D'.



Avem $(ABCD) = S(abcd)$ şi $(A'B'C'D') = S(abcd)$ .Rezultă $(ABCD) = (A'B'C'D')$.(q.e.d.).

Fasciculul tăiat de o secantă paralelă cu una din raze.

Fie fasciculul $S(abcd)$ şi $\delta \parallel a$ (fig.5).

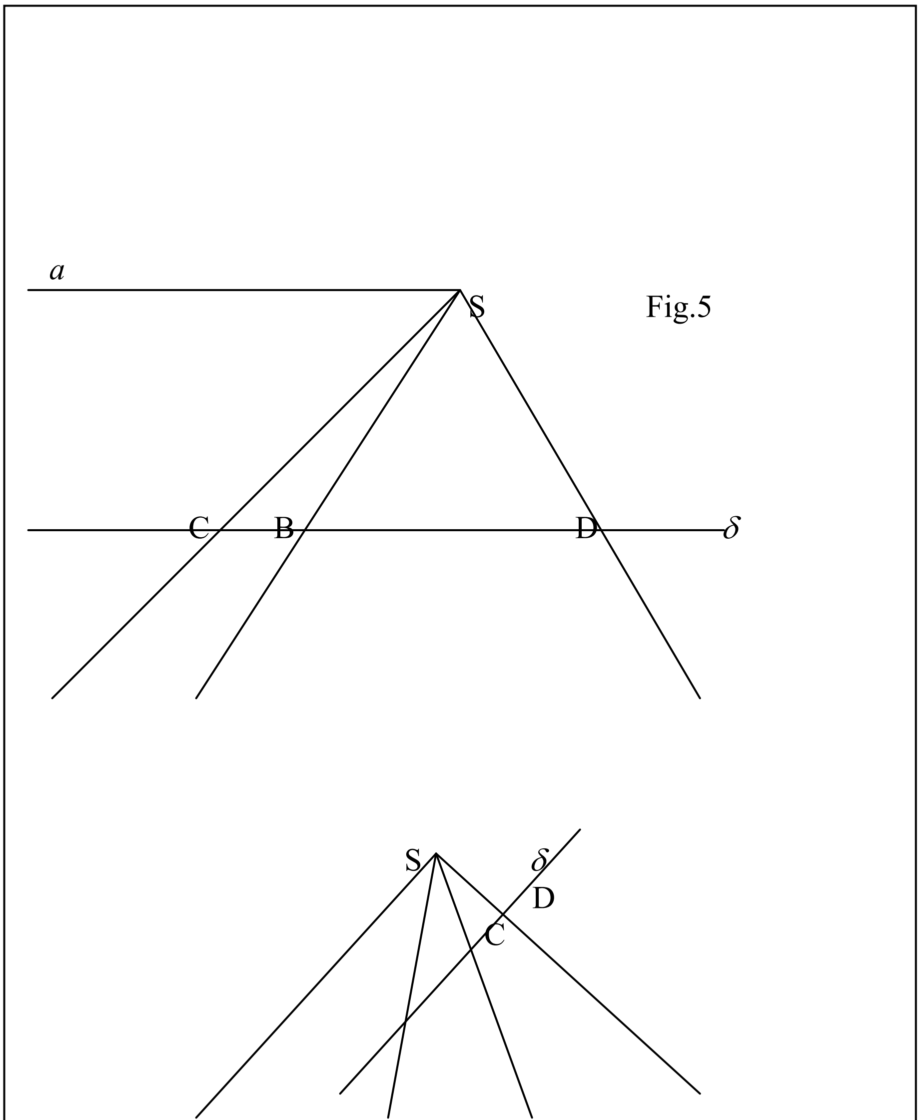
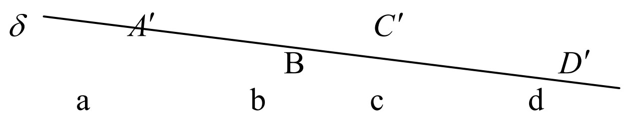


Fig.5



$(1)\, S(abcd) = (A'BC'D') = \dfrac{C'A'}{C'B} : \dfrac{D'A'}{D'B}$,(2) $\Delta C'A'S \approx \Delta C'BC \Rightarrow \dfrac{C'A'}{C'B} = \dfrac{SA'}{CB}$,

$(3)\, \Delta D'A'S \approx \Delta D'BD \Rightarrow \dfrac{D'A'}{D'B} = \dfrac{SA'}{DB}$ .Din (1),(2) şi (3) rezultă :

$S(abcd) = \dfrac{SA'}{CB} : \dfrac{SA'}{DB} = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB} = (A'BC'D')$.

Avem următoarea *regulă mnemotehnică* pentru scrierea valorii biraportului $\dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB}$.

Deoarece $\delta \| a$ scriem $\delta \cap a = A_i$ (*punctul impropriu* pe direcția paralelelor $\delta \| a$),

$S(abcd) = \dfrac{CA_i}{CB} : \dfrac{DA_i}{DB}$ şi luom $CA_i : DA_i = 1$ (trecerea la limită $A' \to A_i$).

$S(abcd) = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB}$.

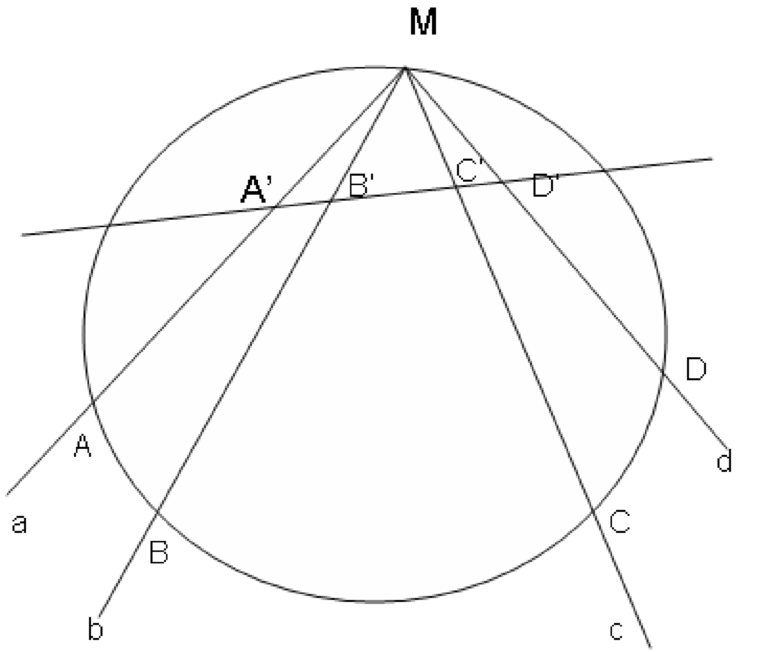
Consecință. Fie B, C, D puncte fixe pe dreapta δ , $a \| \delta, S \in a$, $SB = b, SC = c, SD = d$. Atunci $\forall S \in a, S(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. Fie $A_i = \delta \cap a$. $S(abcd) = (A_iBCD) = \dfrac{CA_i}{CB} : \dfrac{DA_i}{DB} = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB}$ =constant.

Teorema II.3. Fie A, B, C, D puncte fixe pe $C(O;R)$ şi $M \in C(O;R)$ (fig.6).Dacă $MA = a, MB = b, MC = c, MD = d$ atunci , $\forall M \in C(O;R)$ $M(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. $M(abcd) = \dfrac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})} : \dfrac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$ =constant, deoarece A, B, C, D sunt puncte fixe şi $\widehat{ca} = \dfrac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}$ =ct., $\widehat{cb} = \dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2R}$ =ct., $\widehat{da} = \dfrac{\overset{\frown}{DCBA}}{2R}$ =ct., $\widehat{db} = \dfrac{\overset{\frown}{DCB}}{2R}$ =ct.

Fig.6



Observație. Din figura 6 rezultă $M(ABCD) = M(A'B'C'D')$.

Teorema II.4. Fie $A, B, C,$ şi D puncte fixe pe $C(O;R)$ iar $,a,b,c,$ şi d tangentele în cele patru puncte la cercul $C(O;R)$ .Atunci oricarea ar fi tangenta t la cercul $C(O;R)$ în punctul $T \in C(O;R)$, punctele $A_1 = a \cap t, B_1 = b \cap t, C_1 = c \cap t$ şi $D_1 = d \cap t$ formează o diviziune anarmonică $(A_1B_1C_1D_1)$ invariantă.

Demonstrație. Considerăm fig.7.

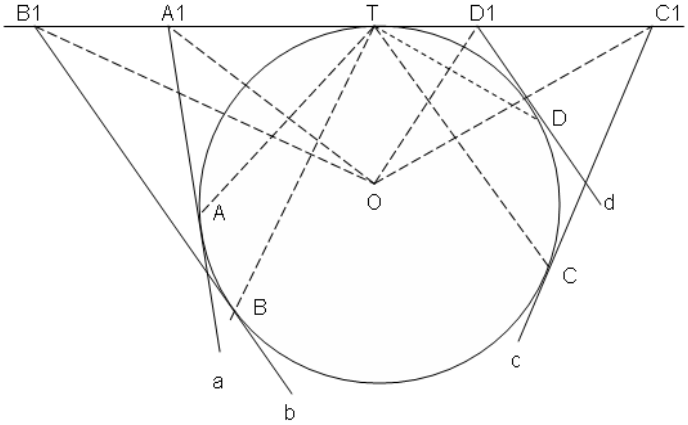


Fig.7

Avem $(A_1B_1C_1D_1) = O(A_1B_1C_1D_1)$.Formăm apoi fasciculul cu vârful în T şi raze $TA \perp OA_1$, $TB \perp OB_1$, $TC \perp OC_1$ şi $TD \perp OD_1$ .Deci $T(ABCD) = O(A_1B_1C_1D_1)$.

Obținem $(A_1B_1C_1D_1) = T(ABCD) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})$ =constant.

Teorema II.5. Pe cercul $C(O;R)$ considerăm punctele distincte A,B,C,D şi tangentele a,b,c,d în aceste puncte la cerc (fig.8).Avem egalitățile:
$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$.

Demonstrație. $A(aBCD) = (\sin\widehat{CAa} : \sin\widehat{CAB}) : (\sin\widehat{DAa} : \sin\widehat{DAB}) =$

$= (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R}) = r =$ constant=
$= B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$ (din egalități de sinusuri).

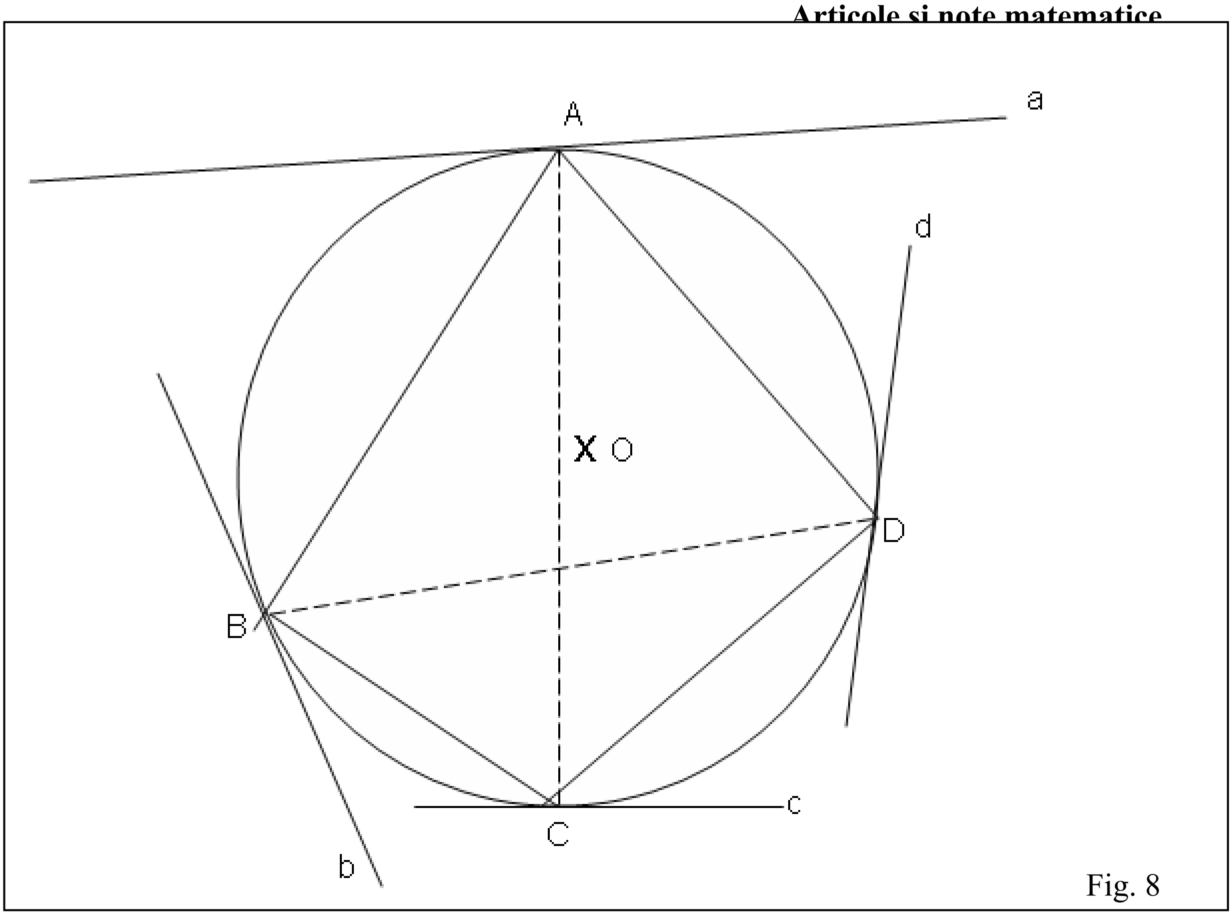


Fig. 8

Observaţie. *Teorema II.5* reprezintă cazul limită a *teoremei II.3* în care punctul M de pe $C(O;R)$ coincide cu unl din punctele A,B,C sau D.

Teorema II.6. Pe cercul $C(O;R)$ se consideră punctele distincte A,B,C,D şi tangentele la cerc în aceste puncte: a,b,c,d (fig.9).

Dacă notăm $E=a\cap b, F=b\cap c, G=c\cap d, H=d\cap a, I=b\cap d$ şi $J=a\cap c,$ atunci avem egalităţile: $(AEJH)=(EBFI)=(JFCG)=(HIGD)$.

Demonstrație. Considerăm fasciculul cu vârful în O şi raze OA, OE, OJ şi OH

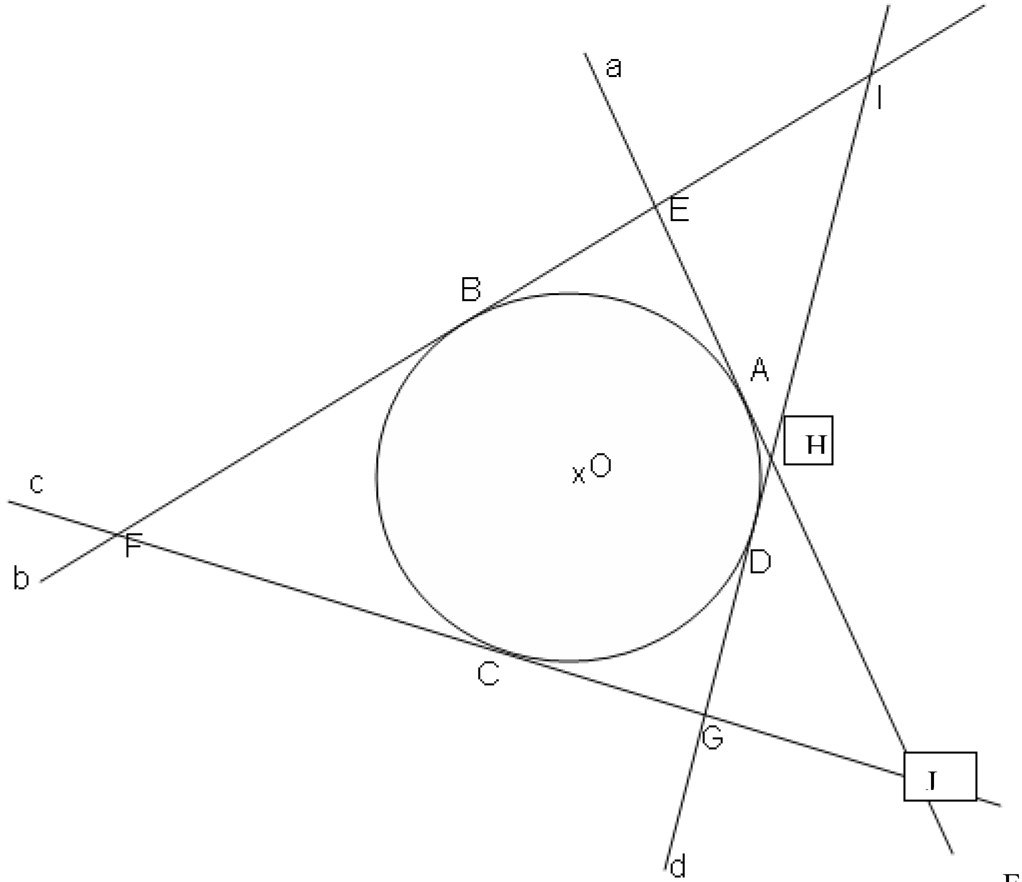


Fig.9

$OAEJH$, apoi fasciculul cu vârful în A şi razele perpendiculare pe razele fasciculului anterior : $a \perp OA, AB \perp OE, AC \perp OJ$ respectiv $AD \perp OH$, $A(aBCD)$ şi avem :

$(AEJH) = O(AEJH) = A(aBCD)$.

Analog se obțin şi relațiile:

$(EBFI) = O(EBFI) = B(AbCD)$;

$(JFCG) = O(JFCG) = C(ABcD)$;

$(HIGD) = O(HIGD) = D(ABCd)$.

Acum aplicăm relații între sinusuri, ca în teorema 5, pe care aici le detaliem astfel:

$C\hat{A}a = C\hat{B}A = c\hat{C}A = \dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$ şi $C\hat{D}A = \dfrac{\overset{\frown}{ABC}}{2R} = \pi - \dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$, rezultă:

$\sin(C\hat{A}a) = \sin(C\hat{B}A) = \sin(c\hat{C}A) = \sin(C\hat{D}A) = \sin(\dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R})$ şi analoagele

$\sin(C\hat{A}B) = \sin(C\hat{B}b) = \sin(c\hat{C}B) = \sin(C\hat{D}B) = \sin(\dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2R})$

$\sin(D\hat{A}a) = \sin(D\hat{B}A) = \sin(D\hat{C}A) = \sin(d\hat{D}A) = \sin(\dfrac{\overset{\frown}{DA}}{2R})$

$\sin(D\hat{A}B) = \sin(D\hat{B}b) = \sin(D\hat{C}B) = \sin(d\hat{D}B) = \sin(\dfrac{\overset{\frown}{DAB}}{2R})$.

Ținând seama de aceste valori putem scrie:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R})$$

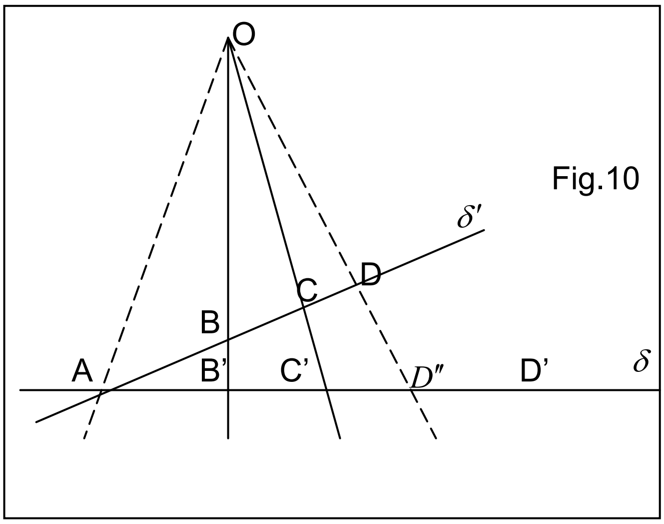
(q.e.d.).

Observație. *Teorema II.6* reprezintă cazul limită al *teoremeiII. 4* în care tangenta t la cercul $C(O;R)$ coincide cu una din tangentele a,b,c,d .

Teoreme de concurență şi coliniaritate.

Teorema II.7. Dacă două diviziuni anarmonice egale $(ABCD) = (AB'C'D')$ au un *punct comun* A, atunci dreptele BB', CC' şi DD' sunt concurente.

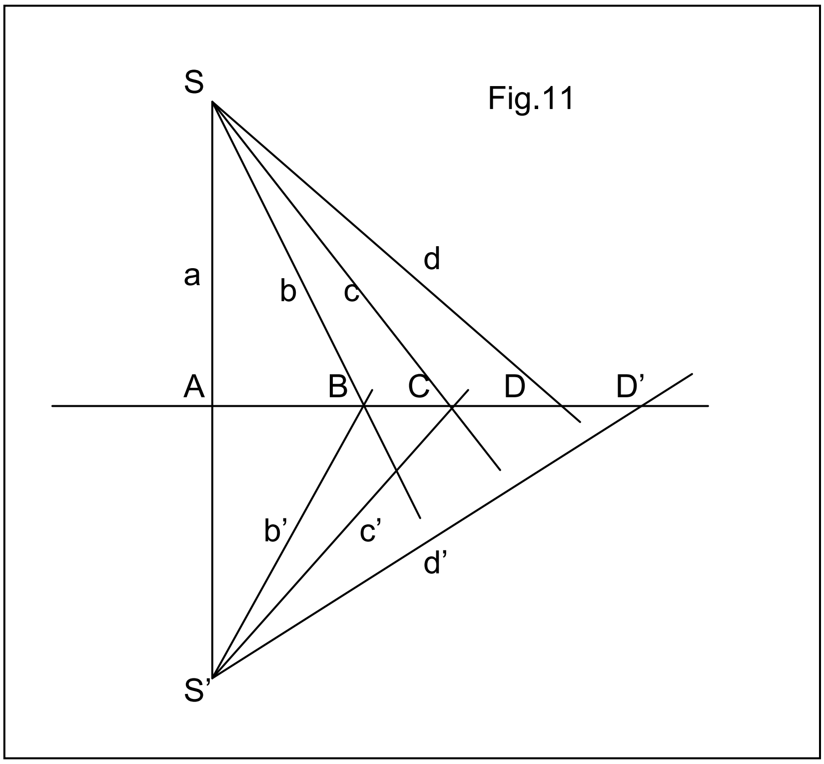
Demonstrație. Avem fig.10.



Fie $O = BB' \cap CC'$ şi $D'' = OD \cap \delta'$ .Din *teorema II.2* rezultă $(ABCD) = (AB'C'D'')$ iar, din ipoteză avem $(ABCD) = (AB'C'D')$ .Deci $(AB'C'D'') = (AB'C'D')$, apoi din *teorema I.5* se obține $D'' = D'$.(q.e.d.).

Teorema II.8. Dacă două fascicule anarmonice egale $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ au o *rază comună* $SS' = a$, atunci punctele de intersecție ale celor trei perechi de raze corespondente: $B = b \cap b', C = c \cap c', D = d \cap d'$ sunt coliniare.

Demonstrație.



Fie $A = BC \cap a, D = BC \cap d$ şi $D' = DC \cap d'$ (fig.11).

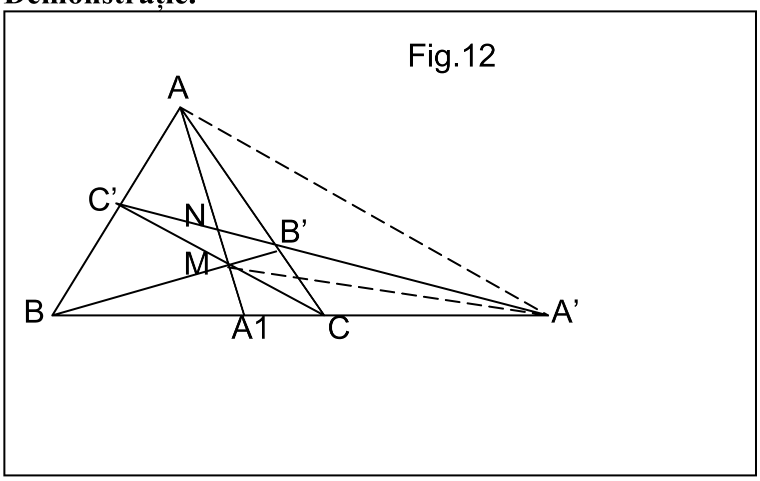
Din ipoteză rezultă $(1)\, S(abcd) = S'(ab'c'd')$.Intersectând fasciculul $S(abcd)$ cu secanta BC rezultă (2) $S(abcd) = (ABCD)$.Inersectând fasciculul $S'(ab'c'd')$ cu secanta BC rezultă (3) $S'(ab'c'd') = (ABCD')$.Din cele trei relații avem $(ABCD) = (ABCD')$, apoi din *teorema I.5.* se obține $D = D'$.(q.e.d.).

Teoreme clasice.

Teorema II.9. Prima teoremă a lui Papus.

În ΔABC fie A', B', C' trei puncte coliniare situate pe laturile BC, CA, AB şi $BB' \cap CC' = M$, $AM \cap BC = A_1$.În aceste condiții A' şi A_1 sunt conjugate armonic în raport cu B şi C, adică $(BCA'A_1) = -1$ (fig.12).

Demonstrație.



Fsciculul de vârf M şi raze MB, MC, MA', MA_1 îl tăiem mai întâi cu secanta BC şi apoi cu secanta $B'C'$ şi aplicăm *teorema II.2.*

$(1)\, M(BCA'A_1) = (BCA'A_1) = (B'C'A'N)$.

Fasciculul de vârf A determinat de diviziunea anarmonică $(B'C'A'N)$ îl tăiem cu secanta BC şi aplicăm *teorema II.2.*
(2) $(B'C'A'N) = A(CBA'A_1) = (CBA'A_1)$.

Din (1) şi (2) avem $(BCA'A_1) = (CBA'A_1)$ apoi din *teorema I.9.* rezultă $(BCA'A_1) = -1$.(q.e.d.).

Teorema II.10. A doua teoremă a lui Papus.

Pe două drepte δ şi δ' luom trei şiruri de puncte arbitrare $A, B, C \in \delta$ respectiv $A', B', C' \in \delta'$.Intersecţiile $U = BC' \cap B'C, V = CA' \cap C'A$ şi $W = AB' \cap A'B$ sunt trei puncte coliniare (fig.13).

Demonstraţie.

a) cazul dreptelor incidente($\delta \cap \delta'$)

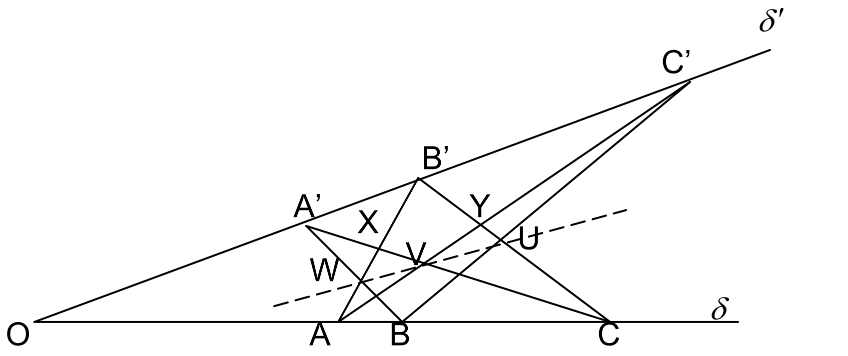


Fig.13

Fie $X = B'A \cap A'C$ şi $Y = B'C = C'A$.

Considerăm fasciculele de vârfuri A' şi C' ale căror raze trec prin punctele diviziunii $(OABC)$.Din *teorema II.1* rezultă (1) $A'(OABC) = C'(OABC)$.Intersectând primul fascicul cu secanta $B'A$, din *teorema II.2.* rezultă (2) $A'(OABC) = (B'AWX)$.Analog, intersectând al doilea fascicul cu secanta $B'C$,din *teorema II.2.* rezultă (3) $C'(OABC) = (B'YUC)$.

Din (1),(2) şi (3) rezultă $(B'AWX) = (B'YUC)$, diviziuni anarmonice egale, cu B' punct comun.Conform *teoremei II.7* şi schemei de mai jos:

Puncte corespondente

B B' punct comun
A Y dreapta AY
W U dreapta WU
X C dreapta XC

Rezultă $AY \cap XC = AC' \cap CA' = V \Rightarrow V \in UW$.(q.e.d).

b) cazul dreptelor paralele ($\delta \| \delta'$) δ

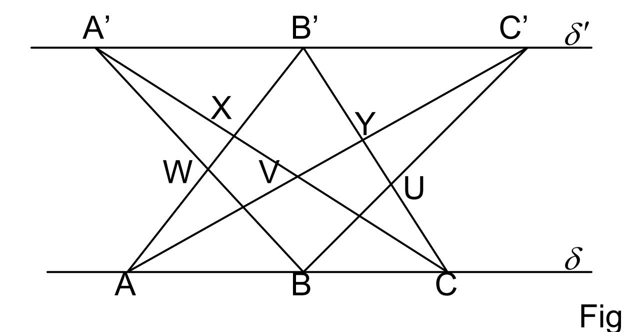


Fig.14

Considerăm fasciculele de vârfuri A' şi C':

(1) $A'(\delta' ABC) = C'(\delta' ABC)$; (2) $A'(\delta' ABC) = (B'AWX)$;(3) $C'(\delta' ABC) = (B'YUC)$. Rezultă $(B'AWX) = (B'YUC)$, cu B' punct comun, analog ca în cazul a) deducem $V \in UW$.(q.e.d.).

Teorema II.11. Teorema plană a lui Desargues, directă şi reciprocă.

Dacă două triunghiuri au vârfurile aşezate pe trei drepte concurente atunci laturile lor corespunzătoare se taie în trei puncte coliniare şi reciproc dacă intersecția perechilor de laturi a două triunghiuri sunt coliniare atunci vârfurile corespunzătoare sunt aşezate pe trei drepte concurente.

Având în vedere că teorema rămâne valabilă şi în cazul în care punctul de concurență al celor trei drepte este impropriu iar unul sau toate cele trei puncte de intersecție pot fi improprii enunțul poate fi reformulate astfel:

Fie trei drepte a,b,c pe care luom : $A, A' \in a$; $B, B' \in b$; $C, C' \in c$.Dreptele a,b,c sunt concurente în O(propriu sau impropriu) dacă şi numai dacă intersecțiile $A_0 = BC \cap B'C'$, $B_0 = CA \cap C'A'$ şi $C_0 = AB \cap A'B'$ sunt situate pe o dreaptă (*proprie sau improprie*).Spunem că ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt *omologice* , O este *centrul omologiei* şi $\delta = B_0C_0$ este *axa omologiei*.

Demonstrație.

*Necesitatea.*Fie $D = b \cap AC$, $D' = b \cap A'C'$.Considerăm fasciculul $O(abcOB_0)$ tăiat de AC respectiv de $A'C'$ (fig.15). Din *teorema II.2.*, avem relațiile:

(1) $(A'D'C'B_0) = (ADCB_0)$; (2) $(ADCB_0) = B(AbCB_0)$; (3) $(A'D'C'B_0) = B'(A'bC'B_0)$.

Din relațiile de mai sus rezultă $B(AbCB_0) = B'(A'bC'B_0)$, cu rază comună.

Din *teorema II.8.* şi schema de mai jos:

Raze corespondente

BA	$B'A'$	$BA \cap B'A' = C_0$
b	b	rază comună
BC	$B'C'$	$BC \cap B'C' = A_0$
BB_0	$B'B_0$	$BB_0 \cap B'B_0 = B_0$

rezultă A_0, B_0, C_0 sunt coliniare.Analog se procedează pentru O punct impropriu. (q.e.d.).

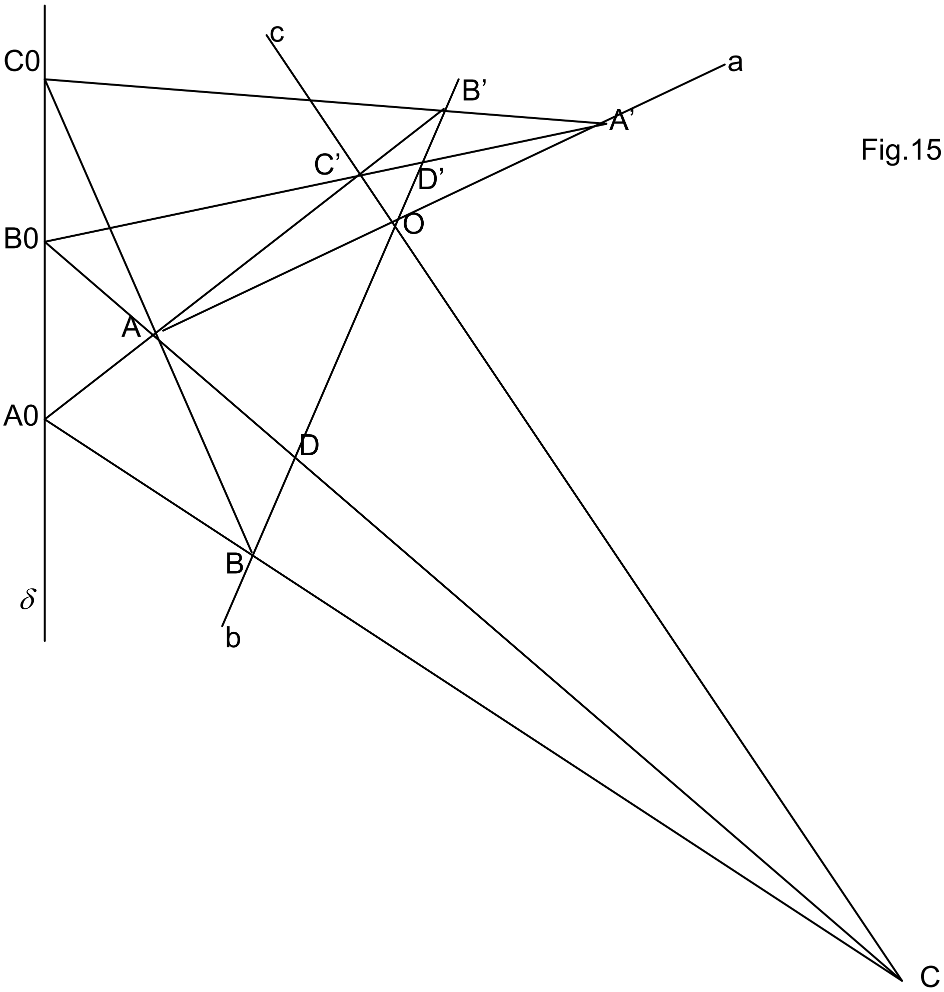


Fig.15

*Suficienţa.*Fie A_0, B_0, C_0 coliniare pe δ.Pe fasciculul de vârf B_0 şi raze δ, B_0C, B_0A' considerăm perechile de puncte : $B_0, C_0 \in \delta; C, A \in B_0C; C'A' \in B_0A'$.Deoarece triunghiurile $\Delta A_0CC'$ şi $\Delta C_0AA'$ sunt omologice, din *teorema Desargues* (directă) rezultă :
$A_0C \cap C_0A = B, CC' \cap AA' = O$ şi $C'A_0 \cap A'C_0 = B'$ sunt coliniare; $O \in BB'$.(q.e.d.).

Teorema II.12. Teorema lui Desargues directă –cazul spaţial.

Fie $Oabc$ fasciculul de vârf O- propriu (fig.16)sau O_i - impropriu(fig.17) şi $A, A' \in a; B, B' \in b; C, C' \in c$.În aceste condiţii, punctele proprii sau improprii $A_0 = BC \cap B'C', B_0 = CA \cap C'A', C_0 = AB \cap A'B'$ sunt coliniare pe dreapta d (proprie) sau d_i (improprie).

Demonstrație.

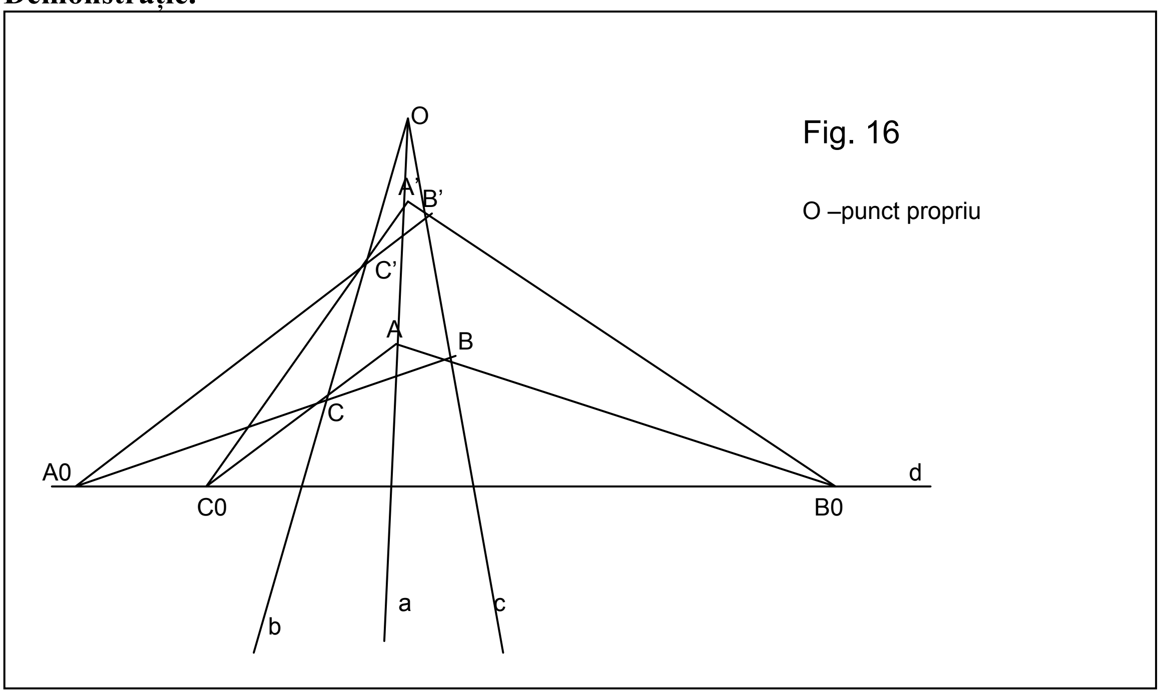


Fig. 16

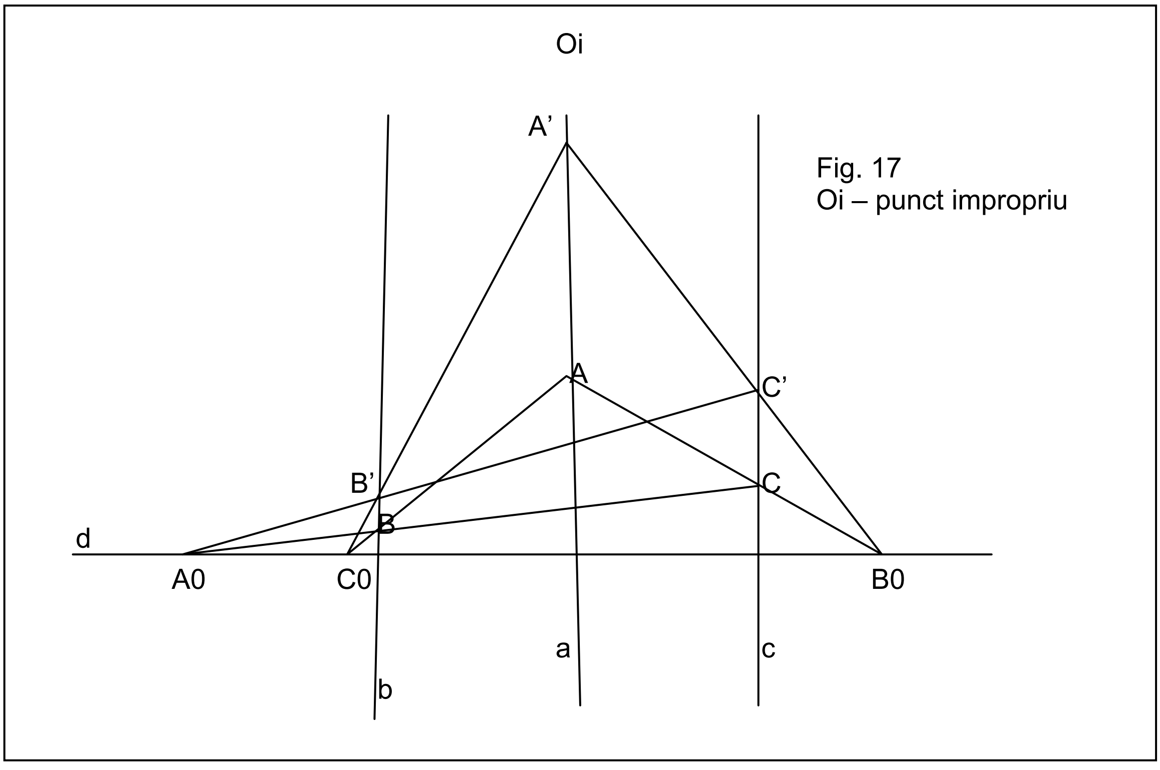


Fig. 17

Distingem următoarele plane determinate de triplete de puncte necoliniare şi perechi de drepte concurente sau paralele: $(ABC), (A'B'C'), (a,b), (b,c)$ şi (c,a).

Avem: $(ABC)\cap(A'B'C')=d,(bc)\cap d=A_0\in d,(ca)\cap d=B_0\in d,(ab)\cap d=C_0\in d$, rezultă A_0,B_0,C_0 coliniare. (q.e.d.).

Dacă axa omologiei este dreapta improprie d_i, rezultă $AB\|A'B',BC\|B'C',CA\|C'A'$, iar dacă vârful O este propriu avem omotetie de centru O şi modul $k=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.

Teorema II.13. Teorema lui Desargues reciprocă –cazul spaţial.
Fie $A_0=BC\cap B'C',B_0=CA\cap C'A',C_0=AB\cap A'B'$ coliniare pe dreapta d (*proprie*) sau d_i (*improprie*).Atunci $AA'\cap BB'\cap CC'=O$.

Demonstraţie. Considerăm fasciculul de vârf B_0 ale cărui raze sunt determinate de tripletele de puncte coliniare $(B_0,C_0,A_0);(B_0,C,A);(B_0,C',A')$ şi triunghiurile omologice $\Delta A_0CC'$, $\Delta C_0AA'$.În continuare se aplică teorema 12 şi rezultă că $B'=A_0C'\cap C_0A';B=A_0C\cap C_0A$ şi $O=CC'\cap AA'$ sunt coliniare, deci $AA'\cap BB'\cap CC'=O$.(q.e.d.).

Observaţie. Şi în cazul plan (*teorema II.11.*), omologia de centru O - propriu şi axă improprie este o *omotetie*, iar omologia de centru impropriu şi axă improprie este o *translaţie.*

Demonstraţie.*I).* Dacă $a\cap b\cap c=O$ şi d_i - dreaptă improprie, rezultă $AB\|A'B',BC\|B'C',CA\|C'A'$, deci $\Delta OAB\approx\Delta OA'B',\Delta OBC\approx\Delta OB'C'$ şi $\Delta OCA\approx\Delta OC'A'$.De aici avem $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=k$, de unde A',B',C' sunt omoteticile punctelor A,B,C în raport cu centrul O de modul k.(q.e.d.).

II). Dacă $a\|b\|c$ şi $AB\|A'B',BC\|B'C',CA\|C'A'$, rezultă $ABB'A',BCC'B',CAA'C'$ sunt paralelograme.De aici $AA'=BB'=CC'=t$, deci avem o translaţie a ΔABC în direcţia comună $a\|b\|c$ pe distanţa t.(q.e.d.).

Teorema II.14.Teorema lui Pascal pentru hexagon.
Într-un hexagon înscris într-un cerc, laturile opuse se taie în puncte coliniare.

Demonstraţie. Pentru claritatea desenului vom considera hexagonal stelat $AB'CA'BC'$ înscris în cercul $C(O;R)$ cu perechile de laturi opuse $(AB',A'B)$; $(B'C,BC')$; $(CA',C'A)$ (fig.18.).Fasciculele de vârfuri A şi C ale căror raze trec prin A',B',B,C' sunt egale (conform *teoremei II.3.*).

(1) $A(BA'B'C')=C(BA'B'C')$.

Fie $X=BA'\cap AC'$ şi tăiem fasciculul de vârf A cu secanta BA', apoi din *teorema II.2*, rezultă :

(2) $A(BA'B'C')=C(BA'B'C')$.

Fie $Y=BC'\cap A'C$ şi tăiem fasciculul de vârf C cu secanta BC'.Din *teorema II.2*, rezultă :

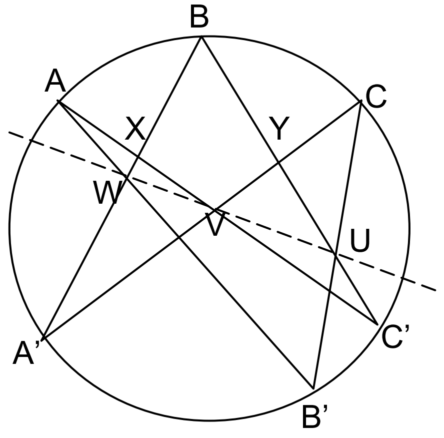


Fig.18

(3) $C(BA'B'C') = (BYUC')$.

Din relaţiile (1), (2) şi (3), rezultă (4) $(BA'WX) = (BYUC') =$ diviziuni anarmonice egale cu B punct comun..

Din *teorema II. 7.*, şi schema de mai jos:

Puncte corespondente

B	B	comun
A'	Y	dreapta $A'Y$
W	U	dreapta WU
X	C'	dreapta XC'

rezultă $A'Y, WU, XC'$ sunt concurente.Deoarece, $A'Y \cap XC' = V$, avem $V \in WU$.(q.e.d.).

Teorema II.15.Teorema lui Pascal pentru patrulatere înscrise.

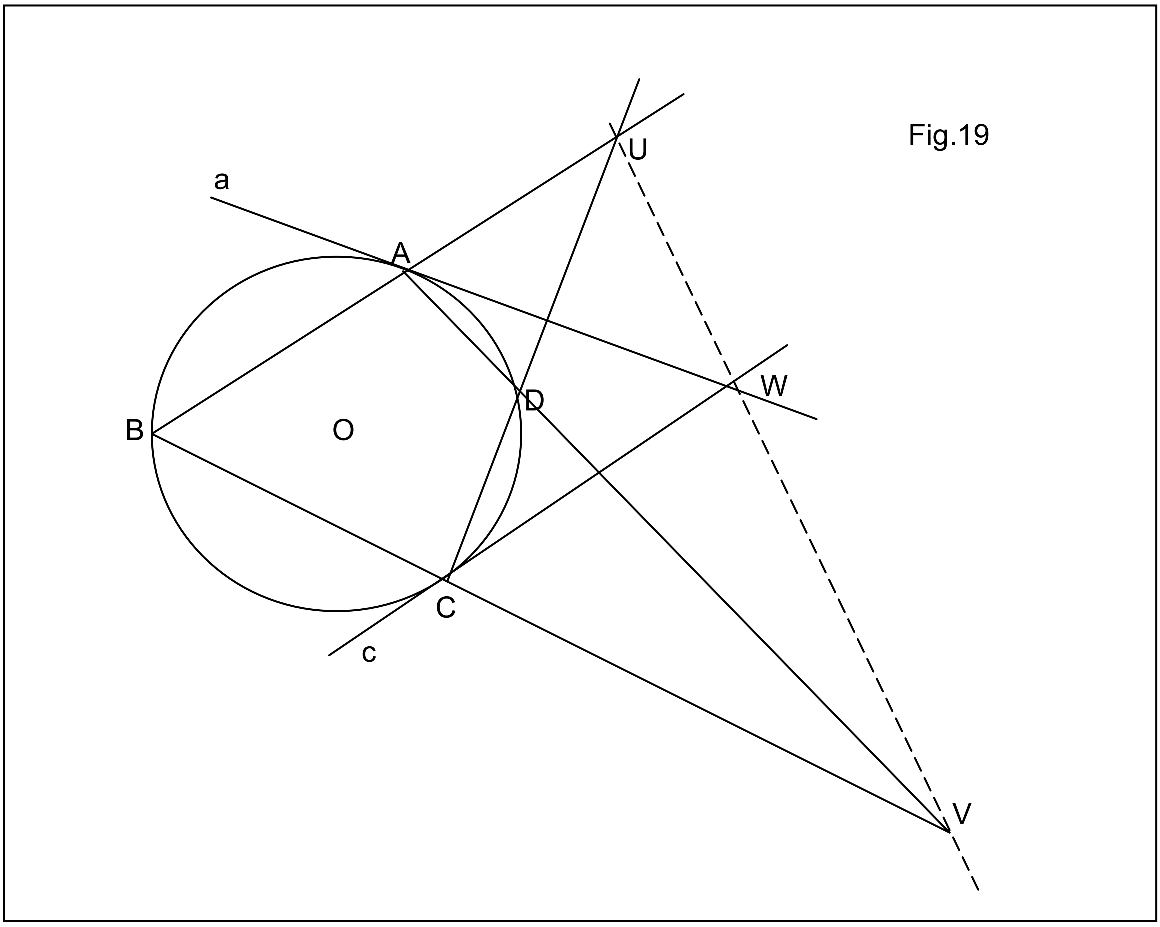
Într-un patrulater inscriptibil, inersecţiile laturilor opuse şi cele ale tangentelor la cercul circumscris duse prin perechile de vârfuri opuse sunt 4 puncte coliniare.

Demonstraţie.

Fie $U = AB \cap CD, V = BC \cap AD$, iar a şi c tangentele în A şi C la cercul $C(O;R)$ (fig.19).

Considerăm $W = a \cap c$.

Din teorema 5, $A(BaDC) = C(BADC)$, dar din *teoremele I.7. şi I.8.* avem $A(BaDC) = A(CDaB)$, $C(BADc) = C(ABcD)$.Rezultă $A(CDaB) = C(ABcD)$, fascicule anarmonice egale cu raza comună AC.



Raze corespondente:

AC	CA	rază comună
AD	CB	$AD \cap CB = V$
a	c	$a \cap c = W$
AB	CD	$AB \cap CD = U$

Rezultă că: (1) U, V, W sunt coliniare.

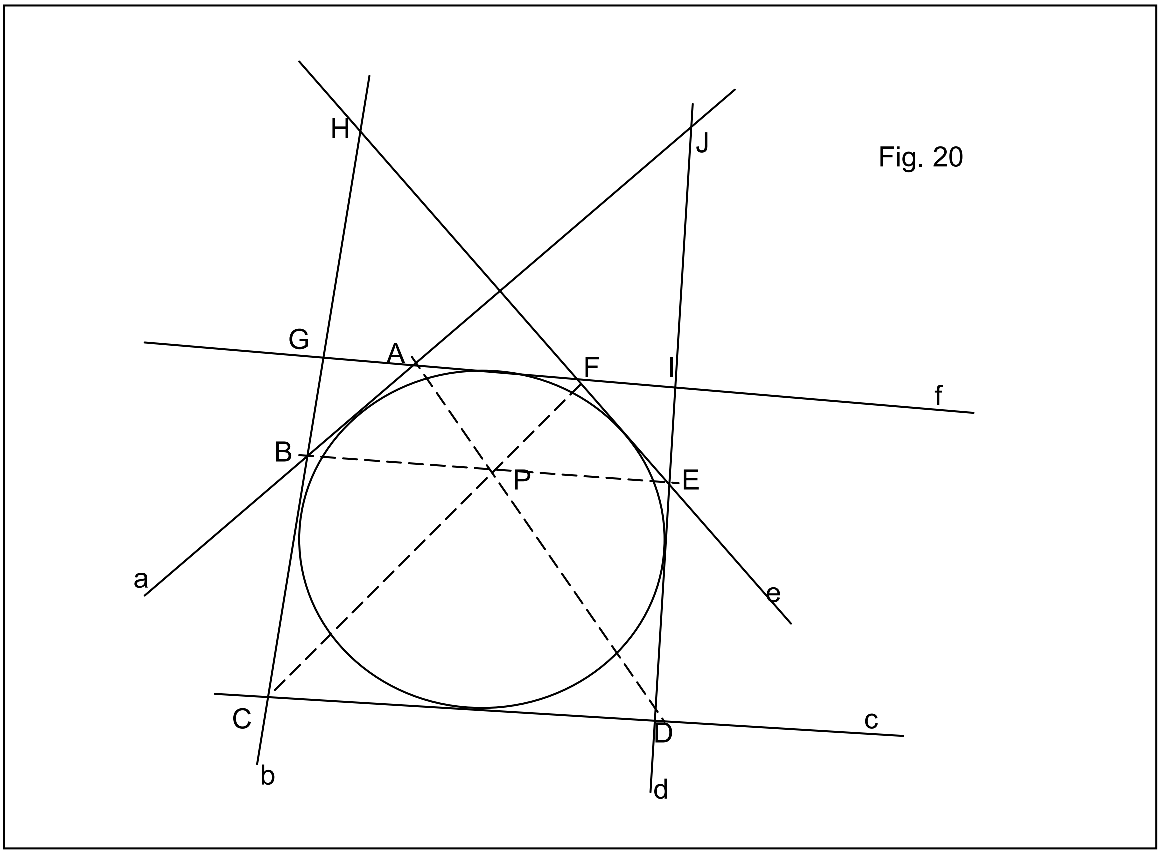
Raționând analog pentru tangentele b şi d, duse prin punctele B şi D de pe $C(O;R)$, cu $T = b \cap d$, deducem (2)$T \in UV$.Din (1) şi (2) rezultă că U, V, W, T sunt coliniare.(q.e.d.).

Teorema II.16.Teorema lui Brianchon.

Într-un hexagon circumscris unui cerc diagonalele sunt concurente.

Demonstrație. Fie $ABCDEF$ un hexagon circumscris cercului $C(O;R)$.Considerăm tangentele a, c, e şi f tăiate, pe rand, de tangentele b şi d, unde $G = b \cap f, H = b \cap e, I = d \cap f$ şi $J = d \cap a$ (fig.20).Aplicând *teorema II.4*, rezultă $(BCHG) = (JDEI)$, şi permutând convenabil (vezi partea I) obținem $(GHCB) = (IEDJ)$.

În continuare, considerăm fasciculele anarmonice cu vârfurile în F şi A:
$F(GHCB) = A(IEDJ)$, egale şi cu raza comună $FG = AI = f$.



Conform *teoremei II.8.*, şi schema de mai jos
Raze corespondente:

FG	AI	rază comună
FH	AE	$FH \cap AE = E$
FC	AD	$FC \cap AD = P$
FB	AJ	$FB \cap AJ = B$

rezultă $P \in EB$, adică diagonalele AD, FC şi EB sunt concurente în P.(q.e.d.).

Teorema II.17.Teorema lui Newton.

Într-un patrulater circumscriptibil, cele două diagonale împreună cu cele două drepte determinate de punctele de contact ale perechilor de laturi opuse cu cercul înscris, sunt patru drepte concurente.

Demonstrație. Fie $ABCD$ patrulaterul circumscris cercului $C(O;R)$; E,F,G,H punctele de contact ale laturilor AB,BC,CD,DA cu cercul $C(O;R)$; $I = AB \cap CD, J = BC \cap AD$ (fig.21).Aplicăm *teorema II.6.* tangentelor în H şi F la cerc, avem: $(HAJD) = (JBFC)$, şi permutând convenabil $(HAJD) = (JDHA)$, deci : $(JDHA) = (JBFC)$, diviziuni anarmonice egale, cu un punct comun J.Conform *teoremei II.7.* şi schemei de mai jos:

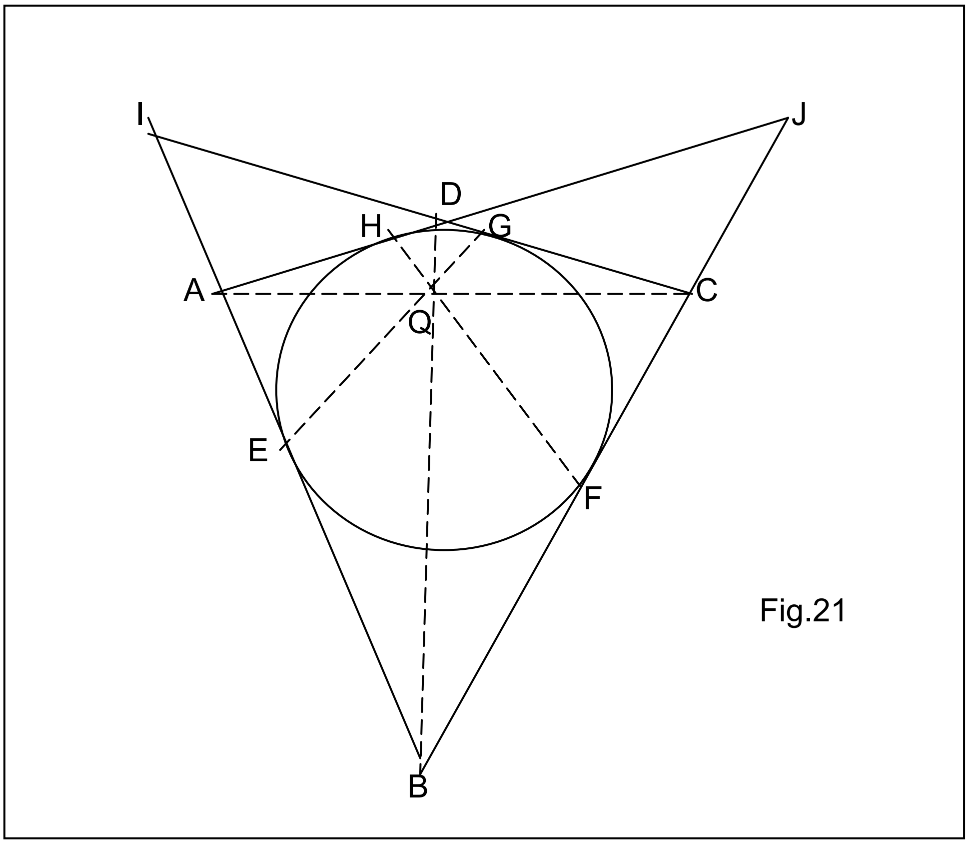


Fig.21

Puncte corespondente

J	J	punct comun
D	B	dreapta DB
H	F	dreapta HF
A	C	dreapta AC

$Q = AC \cap BD$, rezultă (1) $Q \in HF$.

Raționăm analog pentru diviziunile de pe tangentele în E şi G la cerc, şi obținem $(IBEA) = (IDGC)$, apoi cu schema de mai jos:

Puncte corespondente

I	I	punct comun
B	D	dreapta BD
E	G	dreapta EG
A	C	dreapta AC

Cum $AC \cap BD = Q$, rezultă (2) $Q \in EG$.

Din (1) şi (2) rezultă $AC, BD, EG,$ şi FH sunt concurente în punctual Q.

Teorema II.18.Într-un trapez isoscel, intersecția laturilor neparalele şi intersecțiile tangentelor duse prin vârfurile opuse la cercul circumscris trapezului, sunt puncte coliniare pe o dreaptă paralelă cu bazele.

Demonstrație. Fie $ABCD$,un trapez isoscel cu $AB \| CD$, şi $AD = BC$.

Considerăm a, b, c şi d tangentele la cercul $C(O; R)$ circumscris trapezului,duse prin vârfurile trapezului.Notăm: $U = AD \cap BC, W = a \cap c, T = d \cap b$ şi $AB \cap CD = V_i$ (punctul impropriu pe direcția paralelelor AB şi CD, $V_i \in AB$ şi $V_i \in CD$) – vezi fig.22.

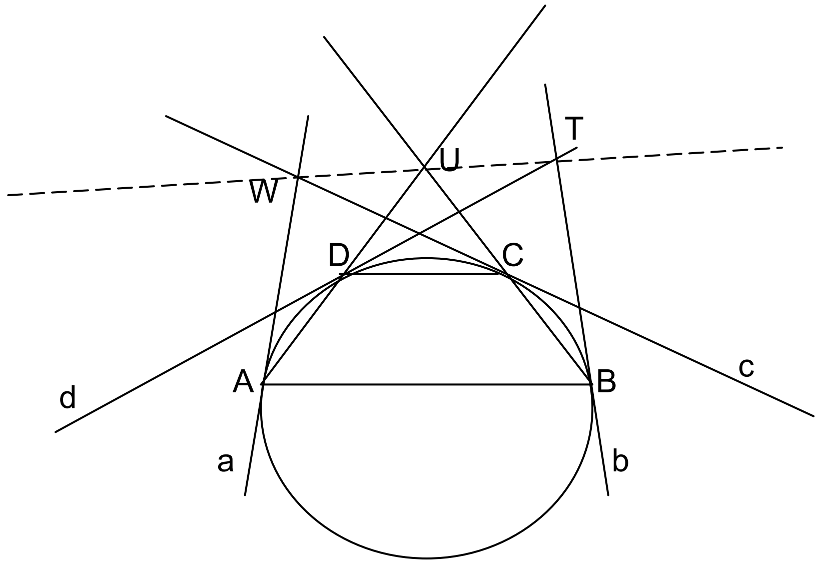


Fig.22

Din *teorema II.5.,* avem şirul de egalităţi: $A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$, care grupate câte două şi permutând convenabil $A(aBCD) = C(ABcD)$, rezultă $A(CDaB) = C(ABcD)$, fascicule anarmonice egale cu raza AC comună.Conform *teoremei II.8.,* din schema de mai jos:
raze corespondente:

AC	CA	rază comună
AD	CB	$AD \cap CB = U$
a	c	$a \cap c = W$
AB	CD	$AB \cap CD = V_i$

deducem $V_i \in UW$ .Rezultă $(1) UW \| AB \| CD$.

În continuare se procedează ca mai sus, $B(AbCD) = D(ABCd) \Rightarrow B(DCbA) = D(BAdC)$, fascicule anarmonice egale cu raza BD comună.
Raze corespondente:

BD	DB	rază comună
BC	DA	$BC \cap DA = U$
b	d	$b \cap d = T$
BA	DC	$BA \cap DC = V_i$

rezultă $V_i \in UT$, deci $(2) UT \| AB \| CD$.

Din (1) şi (2) rezultă că punctele W, U şi T sunt situate pe o dreaptă paralelă cu AB şi CD .(q.e.d.).

Teorema II.19. Raportul anarmonic al unui fascicul este egal cu *raportul anarmonic al coeficienţilor unghiulari* ai razelor fasciculului.

Demonstraţie. Fie $O(abcd)$ fasciculul de vârf O şi raze a, b, c şi d .Considerăm o dreaptă OX , astfel încât : $\alpha = \widehat{xa}, \beta = \widehat{xb}, \gamma = \widehat{xc}, \delta = \widehat{xd}$.

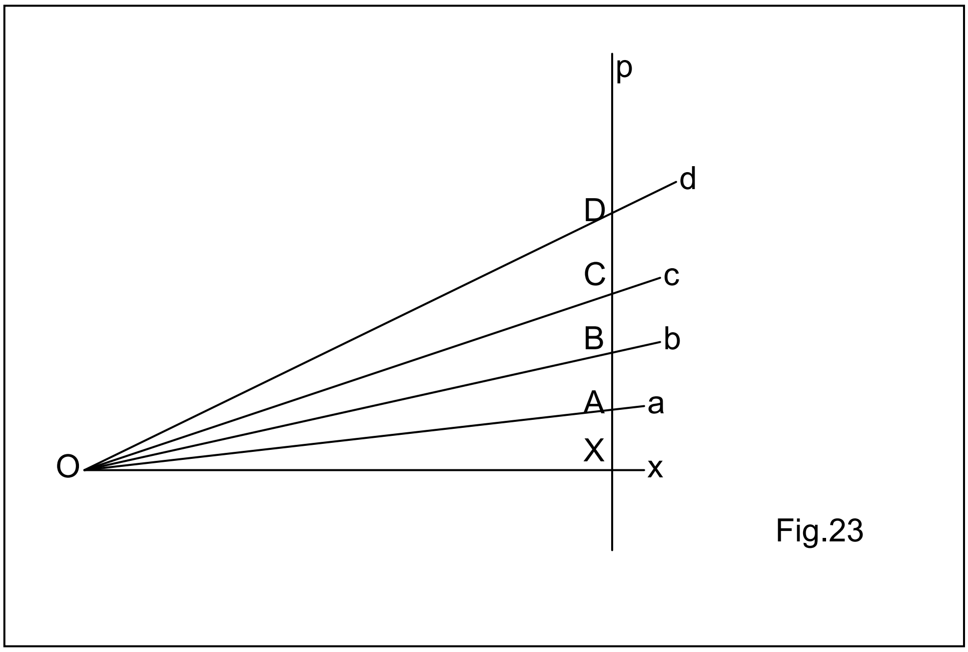


Fig.23

Ducem o dreaptă $p \perp Ox$ şi notăm $: X = p \cap Ox, A = p \cap a, B = p \cap b, C = p \cap c, D = p \cap d$ (vezi fig.23).

Rezultă $r = O(abcd) = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{XA - XC}{XB - XC} : \frac{XA - XD}{XB - XD}$, însă notând $OX = x, tg\alpha = m_a, tg\beta = m_b, tg\gamma = m_c, tg\delta = m_d$, avem $XA = xm_a, XB = xm_b, XC = xm_c, XD = xm_d$.Deci $r = \frac{m_c - m_a}{m_c - m_b} : \frac{m_d - m_a}{m_d - m_b}$.(q.e.d.).

Aplicație.Polara unghiulară.

Fie (xy), un unghi de vârf O şi laturi x, y, iar A un punct nesituat pe laturile lui.O secantă mobilă care conține punctul A taie laturile unghiului în punctele X şi Y.
Se cere locul geometric al punctului M, conjugatul armonic al lui A în raport cu X şi Y.

Soluție.Se aplică *teorema II.19.,* pentru :

$a = x, b = OM, c = y, d = OA, m_a = 0, m_b \overset{not}{=} m, m_c \overset{not}{=} m_0, m_d = \overset{not}{=} m_A$, şi $r = -1$.

Rezultă : $\frac{m_0}{m_0 - m} + \frac{m_A}{m_A - m} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_A}$.

Deci $m = constant$.Locul geometric este OM, de direcție fixă, cu coeficientul unghiular față de OX egal cu media armonică ai coeficienților unghiulari ai dreptelor OY şi OA față de OX.

Justificarea *motto*-ului ales este :

Pentru construcția *geometriei proiective* se utilizează *metoda axiomatică sintetică*.După ce se construieşte *corpul coordonatelor* asociat unui *spațiu proiectiv* sau *plan proiectiv desarguesian*, se poate trece, în cazul unui *corp comutativ*, la dezvoltarea *geometriei analitice* (*în coordonate*) *proiective*.*Geometria afină* se recuperează pe complementara unui *hiperplan* al spaţiului proiectiv;se poate face deci trecerea de la *proprietăţi proiective* la *proprietăţi afine* şi reciproc.

XIII. Solving problems of concurrence and collinearity using properties of pencils of lines

"Projective geometry is whole geometry"
Arthur Cayley

Neculai N. Stanciu

Abstract. This article is devoted to the study of two fundamental and reciprocal questions: when do three given points lie on a single line, and when do three given lines pass through a single point? The techniques we describe in this article will be augmented by more sophisticated approaches, such as the Papus's theorems, the Desargues's theorems, the Pascal's theorem and the Brianchon's theorem.

The formalism of projective geometry makes a discussion of such properties possible, and exposes some remarkable facts, such as the duality of points and lines.While technique "cross-ratio" of four points, and in the light of duality the cross-ratio of four lines can be useful on contest problems, much of the material here is considered "too advanced" for primary and secondary school education.This is a pity, as some of the most beautiful classical geometry appears only in the projective geometry.
Key words: cross-ratio, bivalent range, harmonic range, harmonic conjugate, concurrence and collinearity .
AMS Classification. 51-xx,51Axx, 51A05.

1**. Main purpose** - of the results below is familiarizing readers with new methods *(little known even teachers of mathematics)* solving problems of concurrence and collinearity namely the techniques offered by pencils of lines properties.
We consider fig.1 where $S(a,b,c,d)$ or $S(A,B,C,D)$ represents a *convergent pencil of lines*, with its own point S and rays a,b,c,d or SA , SB,SC,SD and fig.2 where $S(a,b,c,d)$ is a *parallel pencil of lines* with rays a,b,c,d or SA , SB,SC,SD (S is *improperly point*).

Fig.2

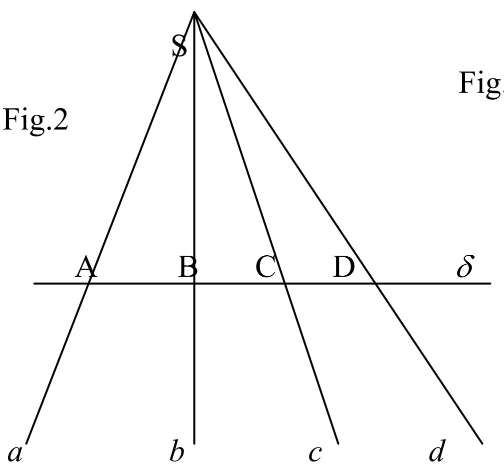
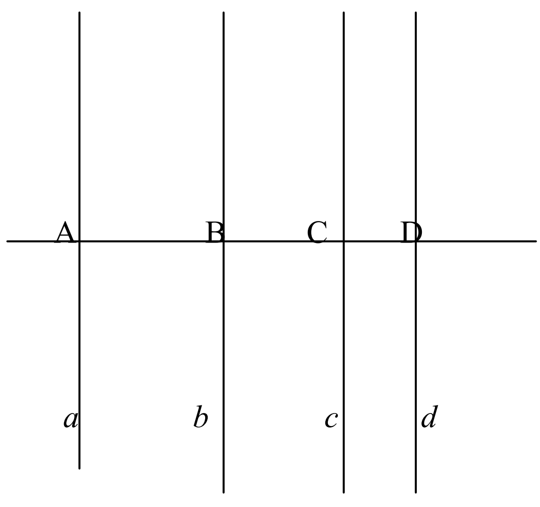


Fig.1



If the *cross-ratio* $(ABCD)\stackrel{def}{=}\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}$ is *harmonic* ($(ABCD)=-1$) then the pencil attachment $S(ABCD)$ is called *harmonic pencil of lines.*

2. Cross-ratio corresponding to a convergent pencil of lines

We consider the pencil of lines $S(abcd)$ cut by line δ (you see fig.1) in the points $A=\delta\cap a, B=\delta\cap b, C=\delta\cap c, D=\delta\cap d$ .If $S(XYZ)\stackrel{not}{=}$ triangle area with vertices X,Y and Z, $\widehat{XY}\stackrel{not}{=}\widehat{XSY}$, $h=d(S,\delta)$, then $\frac{CA}{CB}=\frac{CA\cdot h}{CB\cdot h}=\frac{2\cdot S(CSA)}{2\cdot S(CSB)}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

$$(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}:\frac{S(DSA)}{S(DSB)}=\frac{SC\cdot SA\cdot\sin(\widehat{ca})}{SC\cdot SB\cdot\sin(\widehat{cb})}:\frac{SD\cdot SA\cdot\sin(\widehat{da})}{SD\cdot SB\cdot\sin(\widehat{db})}=$$

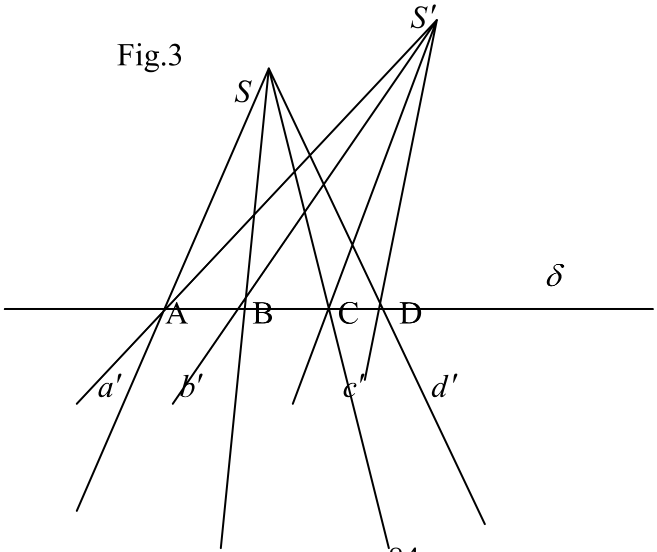
$$=\frac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})}:\frac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}.$$

If $S(abcd)\stackrel{not}{=}\frac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})}:\frac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$, then results $(ABCD)=S(abcd)$.

3. Properties (invariant's theorems)

Theorem 1. On a line δ we consider four fixed points A,B,C,D .For any $S\notin\delta$, we denoted $a=SA, b=SB, c=SC, d=SD$. Cross-ratio corresponding to a convergent pencil of $S(abcd)$ is *invariant.*
Proof. Let $S,S'\notin\delta$, so fig.3.

Fig.3

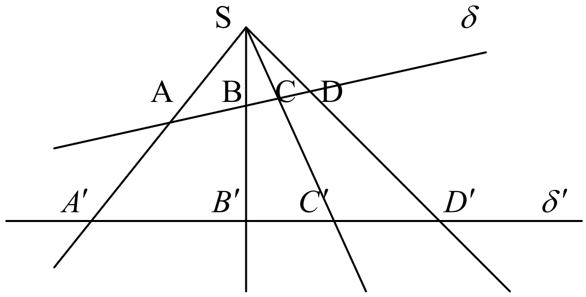


a b c d

Because $S(abcd) = (ABCD)$ and $S'(a'b'c'd') = (ABCD)$ results
$S(abcd) = S'(a'b'c'd')$.(q.e.d).

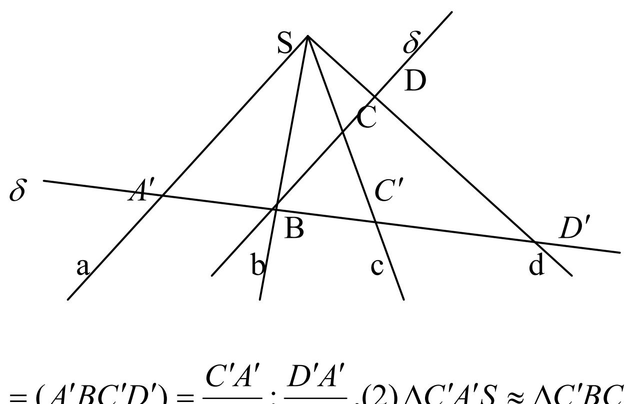
Theorem 2. We consider fixed pencil of lines with vertix S and rays a,b,c,d .For any secant line δ which intersect the rays of pencil in $A = a \cap \delta, B = b \cap \delta, C = c \cap \delta,$ and $D = d \cap \delta$, Double-ratio corresponding to division $(ABCD)$ este *invariant.*
Proof. Let δ and δ' two some secant lines (you see fig.4), which intersect the rays of the pencil of lines in the points A,B,C,D and A',B',C',D' .

Fig.4



We have $(ABCD) = S(abcd)$ and $(A'B'C'D') = S(abcd)$ .Hence
$(ABCD) = (A'B'C'D')$.(q.e.d.).
Pencil of lines cut by a secant paralell with one of the rays.
Let $S(abcd)$ be a pencil of lines and $\delta \| a$ (you see fig.5).

Fig.5



(1) $S(abcd) = (A'BC'D') = \dfrac{C'A'}{C'B} : \dfrac{D'A'}{D'B}$,(2) $\Delta C'A'S \approx \Delta C'BC \Rightarrow \dfrac{C'A'}{C'B} = \dfrac{SA'}{CB}$,
(3) $\Delta D'A'S \approx \Delta D'BD \Rightarrow \dfrac{D'A'}{D'B} = \dfrac{SA'}{DB}$ .Under (1),(2) and (3) results :
$S(abcd) = \dfrac{SA'}{CB} : \dfrac{SA'}{DB} = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB} = (A'BC'D')$.

We have the following "mnemotehnical" rule for writing the double-ratio $\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$.

So $\delta \| a$ scriem $\delta \cap a = A_i$ (improperly point on the direction parallels $\delta \| a$),

$S(abcd)=\frac{CA_i}{CB}:\frac{DA_i}{DB}$ and we take $CA_i : DA_i = 1$ (switching to limit $A' \to A_i$).

$S(abcd)=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$.

Corollary. Let B,C,D be the fixed points on a line δ,

$a \| \delta, S \in a, SB = b, SC = c, SD = d$.

Then $\forall S \in a, S(abcd)$ is invariant.

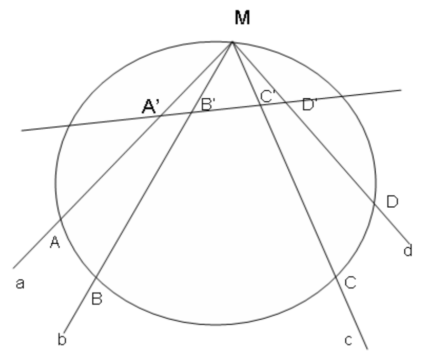
Proof. Let $A_i = \delta \cap a$. $S(abcd)=(A_iBCD)=\frac{CA_i}{CB}:\frac{DA_i}{DB}=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$=constant.

Theorem 3. Let A,B,C,D be the fixed points on $C(O;R)$ and $M \in C(O;R)$ (you see fig.6).If $MA = a, MB = b, MC = c, MD = d$ then , $\forall M \in C(O;R)$ $M(abcd)$ is invariant.

Proof. $M(abcd)=\frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})}:\frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$=constant, because A,B,C,D are fixed points and

$\hat{ca}=\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}$=ct., $\hat{cb}=\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}$=ct., $\hat{da}=\frac{\overset{\frown}{DCBA}}{2R}$=ct., $\hat{db}=\frac{\overset{\frown}{DCB}}{2R}$=ct.

Fig.6



Observation. You see figure 6, results $M(ABCD)=M(A'B'C'D')$.

Theorem 4. Let A,B,C,D be fixed points on $C(O;R)$ and ,a,b,c,d the tangents in the four points at circle $C(O;R)$ .Then whatever tangent t to the circle $C(O;R)$ in point $T \in C(O;R)$, the points $A_1 = a \cap t, B_1 = b \cap t, C_1 = c \cap t$ şi $D_1 = d \cap t$ formed a invariant division $(A_1B_1C_1D_1)$.

Proof. We have figure 7

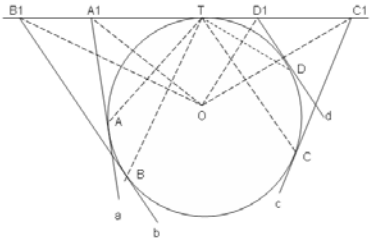


Fig.7

$(A_1B_1C_1D_1) = O(A_1B_1C_1D_1)$ .We consider the pencil of lines with vertix T and the rays $TA \perp OA_1$, $TB \perp OB_1$, $TC \perp OC_1$, $TD \perp OD_1$ .So $T(ABCD) = O(A_1B_1C_1D_1)$.

We get $(A_1B_1C_1D_1) = T(ABCD) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})$ =constant.

Theorem 5. On circle $C(O;R)$ consider distinct points A,B,C,D and tangent a,b,c,d in these points at the circle (you see fig.8).We have:
$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$.

Proof. $A(aBCD) = (\sin C\hat{A}a : \sin C\hat{A}B) : (\sin D\hat{A}a : \sin D\hat{A}B) =$

$= (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R}) = r =$ constant=
$= B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$ (from the equalities of sines).

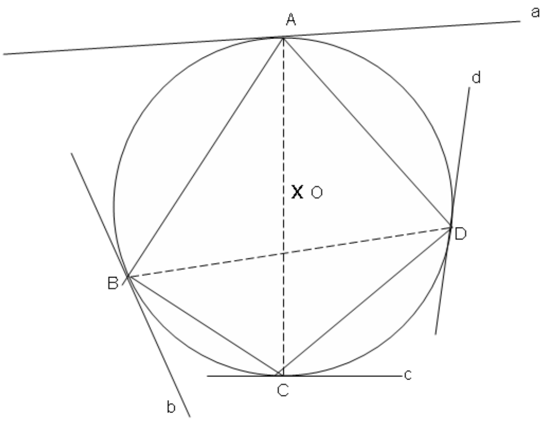


Fig. 8

Observation. *Theorem 5* represents the limit case *of the theorem 3* – the point M on the $C(O;R)$ is one of the points A,B,C or D.

Teorema 6. On circle $C(O;R)$ we consider the distinct points A,B,C,D and the tangents at the circle in these points a,b,c,d (you see fig.9).
If denoted $E = a \cap b, F = b \cap c, G = c \cap d, H = d \cap a, I = b \cap d$ and $J = a \cap c,$ then we have the equalities : $(AEJH) = (EBFI) = (JFCG) = (HIGD)$.

Proof. We consider the pencil of lines with vertex O and rays OA, OE, OJ, OH

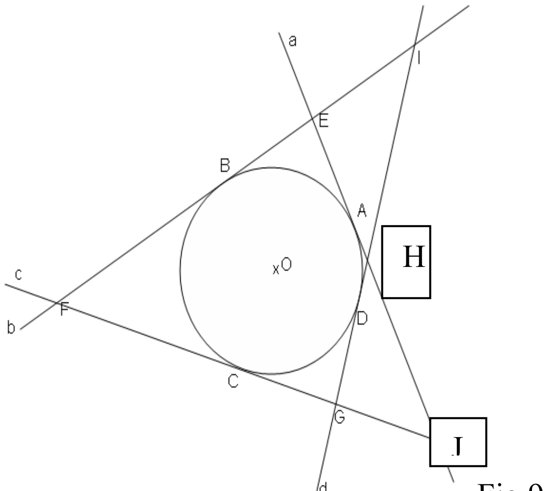


Fig.9

$OAEJH$, then the pencil of lines with vertex in A and the rays perpendiculars on the rays of previously pencil of lines : $a \perp OA, AB \perp OE, AC \perp OJ$, $AD \perp OH$, $A(aBCD)$ and we have

$(AEJH) = O(AEJH) = A(aBCD)$.

The same is obtained the equalities:

$(EBFI) = O(EBFI) = B(AbCD)$;

$(JFCG) = O(JFCG) = C(ABcD)$;

$(HIGD) = O(HIGD) = D(ABCd)$.

Now we use the equalities:

$$\hat{CAa} = \hat{CBA} = c\hat{CA} = \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} \text{ şi } \hat{CDA} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2R} = \pi - \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}, \text{ and results:}$$

$$\sin(\hat{CAa}) = \sin(\hat{CBA}) = \sin(c\hat{CA}) = \sin(\hat{CDA}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}) .$$

The same is obtained the equalities:

$$\sin(\hat{CAB}) = \sin(\hat{CBb}) = \sin(c\hat{CB}) = \sin(\hat{CDB}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R})$$

$$\sin(\hat{DAa}) = \sin(\hat{DBA}) = \sin(\hat{DCA}) = \sin(d\hat{DA}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R})$$

$$\sin(\hat{DAB}) = \sin(\hat{DBb}) = \sin(\hat{DCB}) = \sin(d\hat{DB}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R}).$$

Given these values can write:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R})$$

(q.e.d.).

Observation. *Theorem 6* represents the limit case of *theorem 4* - the tangenta t at the circle $C(O;R)$ is one of the tangents a, b, c, d .

4. Theorems on concurrence and collinearty

Theorem 7. If $(ABCD) = (AB'C'D')$ - have a *common point* A, then the lines BB', CC', DD' are concurrence.

Proof. We have the fig.10.

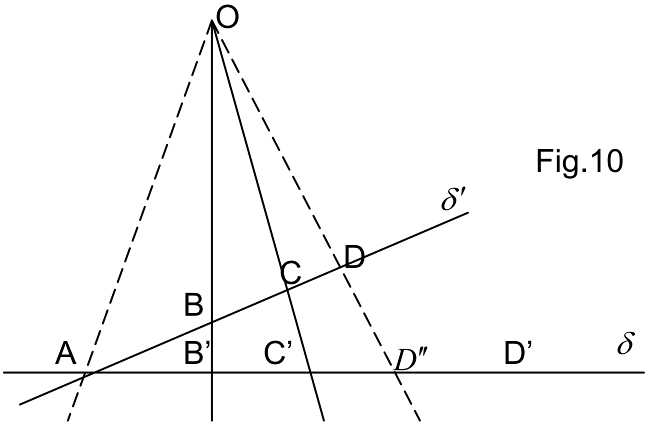


Fig.10

Let $O = BB' \cap CC'$ and $D'' = OD \cap \delta'$. We use the *theorem 2* and results $(ABCD) = (AB'C'D'')$, now use the hypothesis and we have $(ABCD) = (AB'C'D')$. Hence $(AB'C'D'') = (AB'C'D')$, then $D'' = D'$.(q.e.d.).

Theorem 8. If $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ - *common ray* $SS' = a$, then the points of intersection of the three pairs of rays correspondent: $B = b \cap b', C = c \cap c', D = d \cap d'$ are collinear.

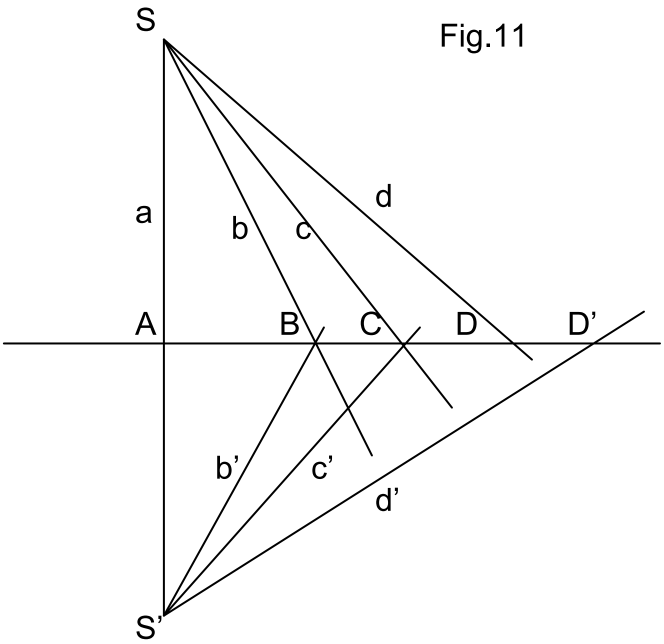


Fig.11

Proof.

Let $A = BC \cap a, D = BC \cap d$, $D' = DC \cap d'$ (fig.11).

From the hypothesis we get (1) $S(abcd) = S'(ab'c'd')$. We intersect the pencil of lines $S(abcd)$ with BC and results (2) $S(abcd) = (ABCD)$. We intersect the pencil of lines $S'(ab'c'd')$ with BC and results (3) $S'(ab'c'd') = (ABCD')$. From this three relations we get $(ABCD) = (ABCD')$, then $D = D'$.(q.e.d.).

5. At the end - I propose some classical theorems that can be attacked with pencils of lines techniques*(**theorem 7** and **theorem 8**)*.

Teorema 9. Pappus's theorem

If A, B and C are three points on one line , D, E and F are three points on another line , and AE meets BD at X , AF meets CD at Y , and BF meets CE at Z , then the three points X, Y and Z are collinear.

Teorema 10.Desargues's theorem.

In a projective space, two triangles are in perspective *axially* if and only if they are in perspective *centrally*.

To understand this, denote the three vertices of one triangle by (lower-case) *a*, *b*, and *c*, and those of the other by (capital) *A*, *B*, and *C*. Axial perspectivity is the condition satisfied if and only if the point of intersection of *ab* with *AB*, and that of intersection of *ac* with *AC*, and that of intersection of *bc* with *BC*, are collinear, on a line called the *axis of perspectivity*. Central perspectivity is the condition satisfied if and only if the three lines *Aa*, *Bb*, and *Cc* are concurrent, at a point called the *center of perspectivity*.

Theorem 11. Pascal's theorem (The dual of Brianchon's theorem **).**

Given a (not necessarily regular, or even convex) hexagon inscribed in a conic section, the three pairs of the continuations of opposite sides meet on a straight line, called the "Pascal line".

Theorem 12. Brianchon's theorem (The dual of Pascal's theorem)**.**

Given a hexagon circumscribed on a conic section, the lines joining opposite polygon vertices (polygon diagonals) meet in a single point.

References

[1] http://www.nct.anth.org.uk/

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry

[3] http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/

[4] http://www.math.poly.edu/courses/projective_geometry/

[6] http://www.cs.elte.hu/geometry/csikos/proj/proj.html

[7] http://www.geometer.org/mathcircles/projective.pdf

Neculai Stanciu
Department of mathematics
High School "Saint Mc. Sava" Berca
Micro V, Bl. 36, Ap. 15, Buzău, Romania
stanciuneculai@yahoo.com

Bibliografie

[1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
[2] Mihăileanu, N. N., Complemente de geometrie sintetică, E.D.P., Bucureşti, 1965.

Neculai STANCIU (CV)

Profesor de matematicã

Studii
Master în management educaţional şi comunicare instituţionalã, SNSPA, Bucureşti (2005 – 2007)
Licenţiat în matematicã, Universitatea Bucureşti (1992 – 1998)
Licenţiat al Facultăţii de Tehnologia Construcţiilor de Maşini, Universitatea Tehnicã ''Gh. Asachi'' Iaşi (1987 – 1992)
Cursuri Postuniversitare pentru profesionalizarea pedagogicã a absolvenţilor de învăţământ superior, Universitatea Politehnicã Bucureşti, (1994)

Experienţă profesională
Titular la Şc.”GeorgeEmil Palade” şi Şc. Nr.6 – Buzău (din 2009)
Titular la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzău (1997 – 2009)
Lider de sindicat la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzău (2004 – 2005)
Director adjunct la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzău (2005)
Director la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzău (din 2006)
Lider de sindicat la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzău (2008)
Şeful catedrei de matematică (2008 – 2009)
Titular la Şcoala George Emil Palade Buzău şi Şcoala nr. 6 Buzău (2009 – 2010)

Lucrări publicate
Reflecţii Metodice şi Psihopedagogice, Editura Casa Corpului Didactic ''I. Gh. Dumitraşcu'', Buzău, 2005 (coautor)
Matematicã de vacanţã, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2006 (coautor)
Monografie Zona – Berca – Buzău, Editura Casa Corpului Didactic ''I. Gh. Dumitraşcu'', Buzău, 2006 (coautor)
Matematicã gimnaziu & liceu, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2007
Elemente de Management Educaţional, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2007 (coautor)
Peste 100 de probleme şi comunicãri ştiinţifice
Peste 30 de articole de pedagogie şi metodicã

Altele
Membru în Biroul de conducere al Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, filiala Râmnicu Sărat
Directorul revistei de cultură matematică pentu tineret „Sclipirea Minţii”

CUPRINS

Moto:

„Conştiinţa datoriei împlinite prelungeşte viaţa”