

ADRIAN STAN

SINTEZE
MATEMATICE

Dreptul de copyright:

Cartea downloadată de pe site-ul www.mateinfo.ro nu poate fi publicată pe un alt site și nu poate fi folosită în scopuri comerciale fără specificarea sursei și acordul autorului

EDITURA RAFET, 2007

Referenți științifici:

Profesor metodist **Apostol Constantin**

Colegiul Național Alexandru Vlahuță, Râmnicu Sărat

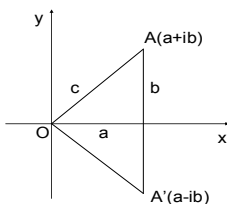
Profesor grad I **Stanciu Neculai**

director Grupul Școlar Tehnic”Sf. Mc. SAVA”,Berca

**Dedic această carte elevilor mei de la Grupul
Şcolar Tehnic „ Sfântul Mucenic Sava”, Berca.**

APLICATII ALE NUMERELOR COMPLEXE

ÎN GEOMETRIE



Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

În geometria plană, se poate utiliza ca metodă de rezolvare a unor probleme sau teoreme numerele complexe fie sub forma algebrică $z=x+iy$, fie sub forma trigonometrică $z=r e^{i\varphi}$ unde $r=|z|$ iar $\varphi = \arg z$ întrucât fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex $z=x+iy$ numit afixul punctului respectiv. De asemenea, fiecărui segment orientat îi putem asocia numărul complex corespunzător.

Dacă $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ sunt puncte în plan iar $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}, \dots, \overrightarrow{OM_n}$ sunt vectorii de poziție corespunzători, atunci vectorul \overrightarrow{OM} se scrie ca o combinație liniară de acești vectori astfel:

$\overrightarrow{OM} = k_1 \overrightarrow{OM_1} + k_2 \overrightarrow{OM_2} + k_3 \overrightarrow{OM_3} + \dots + k_n \overrightarrow{OM_n}$. Pentru a transcrie această relație în complex, considerăm

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ afixele punctelor $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ iar z afixul lui M atunci:

$$z = k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 + \dots + k_n z_n.$$

1. Raportul în care un punct împarte un segment

Fie M_1, M_2 puncte în plan de afixe z_1, z_2 iar punctul M de afix z împarte segmentul orientat $M_1 M_2$ în raportul $k > 0$ astfel:

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = k \Rightarrow z = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}. \text{ Din}$$

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = k \Rightarrow \frac{z - z_1}{z_2 - z} = k \Rightarrow z - z_1 = k(z_2 - z) \Rightarrow z = z_1 + k z_2 - k z \Rightarrow$$

$$z = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}$$

Dacă M este mijlocul lui $M_1 M_2$ atunci $k=1 \Rightarrow z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC situat pe mediana AM ,

$$\text{atunci } \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow k=2 \Rightarrow z_G = \frac{z_A + 2z_M}{1 + 2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

2. Măsura unui unghi.

Fie $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Atunci

$$m(M_2 \hat{O} M_1) = m(M_2 \hat{O} x) - m(M_1 \hat{O} x) = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}$$

Pentru punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$,

$$m(M_3 \hat{M}_1 M_2) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3. Puncte coliniare.

Punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

$M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ sunt coliniare

$$\Leftrightarrow m(\langle M_3 M_1 M_2 \rangle) \in \{0, \pi\}$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\} \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

$M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ sunt coliniare în această ordine

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{z_1 + kz_3}{1+k}, k \in \mathbb{R}$$

4. Drepte perpendiculare.

Două drepte M_1M_2, M_3M_4 perpendiculare:

$$M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}, \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = 0$$

Dacă dreptele M_1M_2 și M_3M_4 sunt perpendiculare atunci unghiul dintre ele este

$$\frac{\pi}{2}, \text{ sau } \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = 0.$$

5. Patrulater inscriptibil.

Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$. Patrulaterul ABCD este inscriptibil

$$\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

ABCD este inscriptibil $\Leftrightarrow m(\langle ACB \rangle) = m(\langle ADB \rangle) \Leftrightarrow$

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

Patru puncte A,B,C,D sunt **conciclice** dacă și numai dacă patrulaterul ABCD este inscriptibil.

6.Triunghiuri asemenea.

Două triunghiuri ABC și A'B'C' cu vârfurile de afixe z_1, z_2, z_3 respectiv z'_1, z'_2, z'_3 sunt asemenea dacă și numai dacă:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z'_2 - z'_1}{z'_3 - z'_1}.$$

Relația se obține din scrierea asemănării triunghiurilor:

$$m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C') \Leftrightarrow \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{z'_2 - z'_1}{z'_3 - z'_1}$$

$$\text{și } \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|z'_2 - z'_1|}{|z'_3 - z'_1|} \Rightarrow$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \text{ și } \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z'_2 - z'_1}{z'_3 - z'_1}.$$

Relația se mai poate scrie și astfel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Astfel putem arăta că un triunghi **ABC** este echilateral \Leftrightarrow

$$z_A \cdot \varepsilon + z_B \cdot \varepsilon^2 + z_C = 0, \text{ unde}$$

ε este rădăcina de ordinul trei a unității, diferită de 1.

TEOREME ȘI PROBLEME REZOLVATE CU AJUTORUL NUMERELOR COMPLEXE

1. a) Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram.

b) Să se arate că se poate construi un patrulater cu distanțele de la un punct T la mijloacele patrulaterului dat .

Rezolvare: a) Fie z_A, z_B, z_C, z_D afixele vârfurilor A,B,C,D ale patrulaterului respectiv.

$$\text{Atunci: afixul mijlocului lui AB este: } z_M = \frac{z_A + z_B}{2};$$

$$\text{afixul mijlocului lui BC este: } z_N = \frac{z_B + z_C}{2};$$

$$\text{afixul mijlocului lui CD este: } z_P = \frac{z_C + z_D}{2};$$

$$\text{afixul mijlocului lui DA este: } z_Q = \frac{z_D + z_A}{2};$$

Pentru a fi paralelogram, trebuie arătat că mijloacele diagonalelor patrulaterului MNPQ coincid,

$$\text{ceea ce este echivalent cu a arăta că: } \frac{z_M + z_P}{2} = \frac{z_N + z_Q}{2}, \text{ relație care}$$

este adevărată dacă înlocuim relațiile de mai sus.

b) Din punctul a) rezultă că MNPQ este paralelogram
 $\Leftrightarrow z_M + z_P = z_N + z_Q \Rightarrow z_M - z_N + z_P - z_Q = 0$. Fie z_T afixul punctului T

$$\Rightarrow (z_M - z_T) + (z_T - z_N) + (z_P - z_T) + (z_T - z_Q) = 0 \Rightarrow$$

$\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TN} + \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TQ} = 0 \Rightarrow$ că se poate forma un patrulater cu lungimile vectorilor

$$\overline{TM} = |z_M - z_T|, \overline{TN} = |z_T - z_N|, \overline{TP} = |z_T - z_P|, \overline{TQ} = |z_T - z_Q|.$$

2. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor unui patrulater ABCD. Să se arate că ABCD este paralelogram dacă și numai dacă

$$z_O = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}.$$

Rezolvare: Dacă ABCD este paralelogram atunci diagonalele AC și BD au același mijloc, așadar relația dată este adevărată. Reciproc, fie M respectiv N mijloacele diagonalelor BD respectiv AC. Atunci

$$z_M = \frac{z_A + z_C}{2} \text{ și } z_N = \frac{z_B + z_D}{2}. \text{ Cum } z_O = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{z_M + z_N}{2} = z_O \Rightarrow$$

O este mijlocul segmentului MN ceea ce se întâmplă numai dacă M, N, O sunt identice \Rightarrow ABCD este paralelogram.

3. Fie triunghiul ABC cu vârfurile de afixe z_A, z_B, z_C , și laturile BC, CA, AB, de lungime a, b respectiv c.

Dacă z_I este afixul centrului cercului înscris în triunghiul ABC atunci să se arate că are loc relația:

$$z_I = \frac{a \cdot z_A + b \cdot z_B + c \cdot z_C}{a + b + c}.$$

Rezolvare:

Fie D \in BC astfel încât AD este bisectoarea unghiului A și E \in AC astfel încât BE este bisectoarea unghiului B. Notăm cu I intersecția dintre AD și BE. Aplicând Teorema bisectoarei în triunghiul ABC

$$\text{Rezultă: } \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \text{ și de aici rezultă } BD = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

Din Teorema bisectoarei în triunghiul ABD

$$\Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{c}{\frac{a \cdot c}{b + c}} = \frac{b + c}{a}.$$

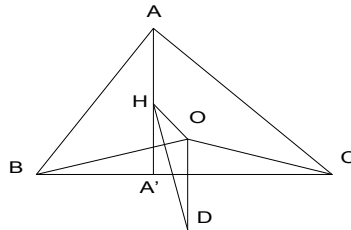
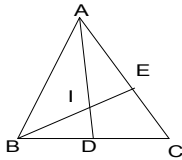
Cum D împarte segmentul orientat BC în raportul $\frac{c}{b}$

$$\Rightarrow z_D = \frac{z_B + \frac{c}{b} \cdot z_C}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{b \cdot z_B + c \cdot z_C}{b + c}. (*)$$

Punctul I împarte segmentul orientat AD în raportul

$$\frac{b+c}{a} \Rightarrow z_I = \frac{z_A + \frac{b+c}{a} \cdot z_D}{1 + \frac{b+c}{a}} = \frac{a \cdot z_A + (b+c) \cdot z_D}{a+b+c}$$

$$\text{Din (*)} \Rightarrow z_I = \frac{a \cdot z_A + b \cdot z_B + c \cdot z_C}{a+b+c}.$$



4. a) Dacă z_A, z_B, z_C respectiv z_H sunt afixele vârfurilor respectiv ortocentrului triunghiului ABC să se arate că : $z_H = z_A + z_B + z_C$.

b) Dacă $G_1(z_1), G_2(z_2), G_3(z_3)$ sunt centrele de greutate ale triunghiurilor BHC, CHA, AHB, și O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, să se arate că centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ este situat pe dreapta OH.

Rezolvare:

a) Se consideră O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și D un punct în plan astfel încât $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC}$.

Cum $OB = OC$ rezultă că patrulaterul OBCD este romb $\Rightarrow OD \perp BC$.

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} \quad (*)$$

Cum $OD \parallel AA'$ și $AA' \perp BC \Rightarrow H \in AA' \Rightarrow H$ se află și pe înălțimile BB', CC' .

Dacă într-un sistem de axe ortogonale luăm punctul O drept originea sistemului, atunci din (*) $\Rightarrow z_H = z_A + z_B + z_C$. Mai mult $\Rightarrow z_H = 3z_G$ adică $OH = 3OG$

b) Fie $G(z_G)$ centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$: $\Rightarrow z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} =$

$$\frac{z_B + z_C + z_H + z_A + z_H + z_C + z_A + z_H + z_B}{9} =$$

$$\frac{2(z_A + z_B + z_C) + 3z_H}{9} = \frac{5}{9}z_H \Rightarrow$$

G aparține lui OH.

5. Fie z_A, z_B, z_C afixele vârfurilor triunghiului ABC, cu $z_A + z_B + z_C \neq 0$. Să se arate că dacă punctele M, N, P au afixele

$$z_M = z_A^2 + z_A \cdot z_B + z_A \cdot z_C,$$

$$z_N = z_B^2 + z_B \cdot z_A + z_B \cdot z_C,$$

$$z_P = z_C^2 + z_C \cdot z_A + z_C \cdot z_B$$

atunci triunghiurile MNP și ABC sunt asemenea.

Rezolvare:

$$\text{Cum } z_M - z_N = (z_A - z_B)(z_A + z_B + z_C),$$

$$z_N - z_P = (z_B - z_C)(z_A + z_B + z_C),$$

$$z_P - z_M = (z_C - z_A)(z_A + z_B + z_C) \Rightarrow$$

$$\frac{|z_M - z_N|}{|z_A - z_B|} = \frac{|z_N - z_P|}{|z_B - z_C|} = \frac{|z_P - z_M|}{|z_C - z_A|} = z_A + z_B + z_C \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Delta MNP \sim \Delta ABC.$$

6. Dacă ABC și MNP sunt două triunghiuri echilaterale din același plan la fel orientate, să se arate că se poate forma un triunghi cu segmentele AM, BN, CP.

Rezolvare:

$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_M - z_N} = \frac{z_A - z_C}{z_M - z_P} \Leftrightarrow$$

$$(z_A - z_B)(z_M - z_P) = (z_M - z_N)(z_A - z_C) \Leftrightarrow$$

$$z_M(z_C - z_B) + z_N(z_A - z_C) + z_P(z_B - z_A) = 0. \text{ Cum}$$

$z_A(z_C - z_B) + z_B(z_A - z_C) + z_C(z_B - z_A) = 0$, prin scăderea celor două egalități \Rightarrow

$$(z_M - z_A)(z_C - z_B) + (z_N - z_B)(z_A - z_C) +$$

$$(z_P - z_C)(z_B - z_A) = 0 \quad (*)$$

iar prin trecere la modul \Rightarrow

$$\begin{aligned} |(z_M - z_A)| \cdot |(z_C - z_B)| &\leq |(z_N - z_B)| \cdot |(z_A - z_C)| + \\ |(z_P - z_C)| \cdot |(z_B - z_A)| &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$AM \cdot BC \leq BN \cdot AC + CP \cdot AB$. Triunghiul ABC este echilateral (AB=AC=BC) $\Rightarrow AM \leq BN + CP$. Din relația (*) pot fi scrise și celelalte două inegalități ceea ce implică faptul că AM, BN și CP pot fi laturile unui triunghi.

7. Fie P un punct situat pe cercul circumscris unui triunghi ABC. Să se arate că ortocentrele triunghiurilor PAB, PBC, PCA formează un triunghi congruent cu triunghiul dat.

Rezolvare:

Fie P de afix z și punctul O centrul cercului circumscris triunghiului ABC astfel încât $z_O = 0$.

Fie H_1 ortocentrul triunghiului MAB de afix : $z_1 = z + z_A + z_B$

Fie H_2 ortocentrul triunghiului MAC de afix :
 $z_2 = z_A + z_C + z$

Fie H_3 ortocentrul triunghiului MBC de afix :
 $z_3 = z + z_B + z_C \Rightarrow$

$$H_1H_2 = |z_2 - z_1| = |z_C - z_B| = BC$$

$$H_1H_3 = |z_3 - z_1| = |z_C - z_A| = AC$$

$$H_2H_3 = |z_3 - z_2| = |z_B - z_A| = AB \Rightarrow c.c.t.d.$$

8. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri cu centrele de greutate G respectiv G' și punctele M, N, P situate pe segmentele AA', BB', CC' care le împart în raportul k . Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP este situat pe segmentul GG' și îl împarte pe acesta tot în raportul k .

Rezolvare: Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$,

$A'(z'_1), B'(z'_2), C'(z'_3), M(z_M), N(z_N), P(z_P)$. astfel încât

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BN}{NB'} = \frac{CP}{PC'} = k$$

$$\text{Atunci : } z_M = \frac{z_1 + kz'_1}{1+k}, \quad z_N = \frac{z_2 + kz'_2}{1+k}, \quad z_P = \frac{z_3 + kz'_3}{1+k}.$$

Centrul de greutate al triunghiului ABC este $G(z_G)$

$$\Rightarrow z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ este $G'(z'_G)$

$$\Rightarrow z'_G = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{3}.$$

Dacă notăm cu $G''(g)$ centrul de greutate al triunghiului MNP

$$\text{atunci } \Rightarrow g = \frac{z_M + z_N + z_P}{3} =$$

$$= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + k(z'_1 + z'_2 + z'_3)}{3(1+k)} = \frac{1}{1+k} \cdot \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} +$$

$$+ \frac{k}{1+k} \cdot \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{3} = \frac{z_G + k \cdot z'_G}{1+k} \Rightarrow$$

G, G', G'' sunt coliniare și punctul G'' împarte segmentul GG' în raportul k .

9. (Teorema lui Pappus). Fie triunghiul ABC și punctele A', B', C' situate pe laturile BC, AC respectiv AB le împart pe acestea în același raport k. Să se arate că triunghiurile ABC și A'B'C' au același centru de greutate.

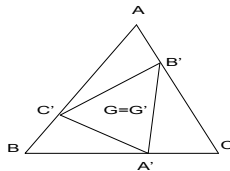
Rezolvare: Fie punctele

$A(z_1), B(z_2), C(z_3), A'(z'_1), B'(z'_2), C'(z'_3)$ și

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = k \Rightarrow$$

$$z'_1 = \frac{z_2 + kz_3}{1+k}, \quad z'_2 = \frac{z_3 + kz_1}{1+k}, \quad z'_3 = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}, \text{ centrul de greutate al triunghiului } A'B'C' \text{ este } G'(g') \text{ cu } g' = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + k(z_1 + z_2 + z_3)}{3(1+k)} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = g,$$

unde G(g) este centrul de greutate al triunghiului ABC.



10. Să se arate că în orice triunghi are loc relația

$$OG^2 = R^2 - \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{9}. \text{ (Teorema lui Euler)}$$

unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, G centrul său de greutate iar R este raza cercului circumscris.

Rezolvare:

Fie O originea sistemului de axe. \Rightarrow

$$OG^2 = R^2 - \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{9} \Leftrightarrow$$

$$9OG^2 = 3R^2 + 3R^2 + 3R^2 - AB^2 - BC^2 - CA^2 \Leftrightarrow$$

$$9\left(\frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)^2 = 3z_A^2 + 3z_B^2 + 3z_C^2 - (z_B - z_A)^2 - (z_C - z_B)^2 - (z_A - z_C)^2 \Leftrightarrow$$

$$z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 + 2(z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A) = 3z_A^2 + 3z_B^2 + 3z_C^2 - 2z_A^2 - 2z_B^2 - 2z_C^2 + 2(z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A)$$

ceea ce este adevărat, rezultă că teorema este demonstrată.

11. Fie A, B, C, D patru puncte oarecare, distincte din plan. Să se arate că există un unic punct G astfel încât $z_A + z_B + z_C + z_D = 0$, unde z_A, z_B, z_C, z_D sunt afixele punctelor A, B, C, D.

Rezolvare.

Fie O originea sistemului cartezian și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Cum mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram rezultă că intersecția diagonalelor MP și NQ pe care o notăm cu G este un punct de afix

$$z_G = \frac{z_M + z_P}{2} = \frac{\frac{z_A + z_B}{2} + \frac{z_C + z_D}{2}}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}.$$

$z_G = 0 \Leftrightarrow z_G = z_O$ adică G coincide cu originea sistemului cartezian \Rightarrow există și este unic punctul G astfel încât $z_A + z_B + z_C + z_D = 0$.

12. Fie ABCD și A'B'C'D' paralelograme astfel încât punctele M, N, P, Q împart segmentele AA', BB', CC', DD' în același raport k. Să se arate că MNPQ este paralelogram.

Rezolvare: Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$,

$A'(z'_1), B'(z'_2), C'(z'_3), D'(z'_4)$ vârfurile paralelogramelor de

afixe corespunzătoare $\Leftrightarrow z_1 + z_3 = z_2 + z_4$,

$$z'_1 + z'_3 = z'_2 + z'_4. \quad (*)$$

Fie $M(z_M), N(z_N), P(z_P), Q(z_Q)$ punctele care împart segmentele AA', BB', CC', DD' în raportul k .

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BN}{NB'} = \frac{CP}{PC'} = \frac{DQ}{QD'} = k$$

Atunci rezultă: $z_M = \frac{z_1 + kz'_1}{1+k}$, $z_N = \frac{z_2 + kz'_2}{1+k}$, $z_P = \frac{z_3 + kz'_3}{1+k}$,

$$z_Q = \frac{z_4 + kz'_4}{1+k}. \text{ Rezultă:}$$

$$z_M + z_P = \frac{z_1 + z_3 + k(z'_1 + z'_3)}{1+k},$$

$$z_N + z_Q = \frac{z_2 + z_4 + k(z'_2 + z'_4)}{1+k}. \text{ Din relațiile (*) rezultă}$$

$z_M + z_P = z_N + z_Q$ ceea ce este echivalent cu faptul că $MNPQ$ este paralelogram.

13. Fie ABCD un patrulater convex și punctele $M, P \in (BD)$, iar $N, Q \in (AC)$ împart segmentele orientate în

raportul k astfel : $\frac{MB}{MD} = \frac{PD}{PB} = \frac{NC}{NA} = \frac{QA}{QC} = k$.

a) Să se arate că centrul de greutate al patrulaterului ABCD coincide cu centrul de greutate al patrulaterului MNPQ.

b) Fie E mijlocul lui (BD) și F mijlocul lui (AC). Să se arate că mijlocul segmentului EF este centrul de greutate al patrulaterului MNPQ.

Rezolvare:

a) Să presupunem că G este centrul de greutate al patrulaterului ABCD și să arătăm că G este și centrul de greutate al patrulaterului MNPQ $\Leftrightarrow z_A + z_B + z_C + z_D =$

$$z_M + z_N + z_P + z_Q$$

$$\text{Din } \frac{MB}{MD} = k \Rightarrow z_M = \frac{z_B - k \cdot z_D}{1-k},$$

$$\frac{QA}{QC} = k \Rightarrow z_Q = \frac{z_A - k \cdot z_C}{1 - k},$$

$$\frac{PD}{PB} = k \Rightarrow z_P = \frac{z_D - k \cdot z_B}{1 - k},$$

$$\frac{NC}{NA} = k \Rightarrow z_N = \frac{z_C - k \cdot z_A}{1 - k} \Rightarrow$$

$$z_M + z_N + z_P + z_Q = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D - k(z_A + z_B + z_C + z_D)}{1 - k}$$

$$= z_A + z_B + z_C + z_D \Rightarrow$$

c.c.t.d.

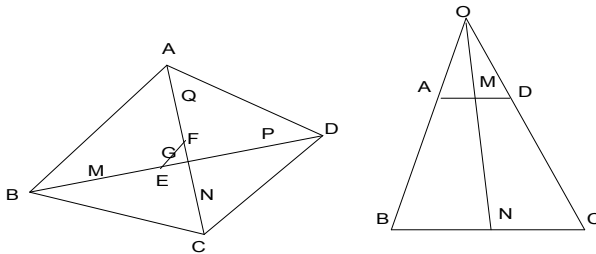
b) Fie G mijlocul segmentului EF. A arăta că G este centrul de greutate al patrulaterului MNPQ revine la a arăta că G este

centrul de greutate al lui ABCD $\Leftrightarrow z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}$.

G este mijlocul lui EF \Rightarrow

$$z_G = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{\frac{z_B + z_D}{2} + \frac{z_A + z_C}{2}}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}$$

\Rightarrow c.c.t.d.



14. Fie ABCD un trapez cu $AD \parallel BC$ și punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$. Notând cu O punctul de intersecție a dreptelor AB cu CD să se demonstreze că punctele O, M, N, sunt coliniare.

Rezolvare:

Fie punctele

$A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D), M(z_M), N(z_N), O(z_O)$ cu afixele corespunzătoare.

$$\text{Din } \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = k < 0 \Rightarrow z_M = \frac{z_A - k \cdot z_D}{1 - k}, \quad z_N = \frac{z_B - k \cdot z_C}{1 - k}.$$

$$\text{Cum } AD \parallel BC \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DC} = t > 0 \Rightarrow$$

$$z_A = \frac{z_O + t \cdot z_B}{1 + t}, \quad z_D = \frac{z_O + t \cdot z_C}{1 + t}$$

Pentru a arăta că O, M, N sunt coliniare este suficient să

$$\text{arătăm că } \frac{OM}{MN} = t \Leftrightarrow z_M = \frac{z_O + t \cdot z_N}{1 + t}.$$

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{z_A - k \cdot z_D}{1 - k} = \frac{\frac{z_O + t \cdot z_B}{1 + t} - k \cdot \frac{z_O + t \cdot z_C}{1 + t}}{1 - k} = \\ &= z_O \left[\frac{1}{(1 + t)(1 - k)} - \frac{k}{(1 + t)(1 - k)} \right] + \\ &+ t \left[\frac{z_B}{(1 + t)(1 - k)} - \frac{k \cdot z_C}{(1 + t)(1 - k)} \right] = \\ &= z_O \cdot \frac{1}{1 + t} + \frac{t}{1 + t} \cdot z_N = \frac{z_O + t \cdot z_N}{1 + t} \end{aligned}$$

Așadar, punctele O, M, N sunt coliniare.

15. Să se demonstreze că dacă ABCD este un patrulater inscriptibil atunci centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB sunt puncte conciclice.

Rezolvare: Fie punctele $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$ - vârfurile patrulaterului ABCD .

ABCD este inscriptibil

$$\Leftrightarrow m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB}) \Leftrightarrow \arg \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} : \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in R. (*)$$

Fie $G_1(z_1)$ - centrul de greutate al triunghiului ABC de afix z_1

$$\Rightarrow z_1 = \frac{z_A + z_B + z_C}{3};$$

$G_2(z_2)$ - centrul de greutate al triunghiului BCD de afix z_2

$$\Rightarrow z_2 = \frac{z_B + z_C + z_D}{3};$$

$G_3(z_3)$ - centrul de greutate al triunghiului CDA de afix z_3

$$\Rightarrow z_3 = \frac{z_C + z_D + z_A}{3};$$

$G_4(z_4)$ - centrul de greutate al triunghiului ABD de afix z_4

$$\Rightarrow z_4 = \frac{z_A + z_B + z_D}{3}.$$

$\Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ este inscriptibil

$$\Leftrightarrow m(\widehat{G_3G_1G_2}) = m(\widehat{G_3G_4G_2}) \Leftrightarrow \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} \in R \Leftrightarrow \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \in R \quad \text{relație}$$

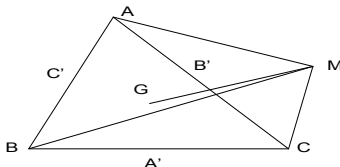
adevărată din (*). Rezultă că patrulaterul

$G_1G_2G_3G_4$ este inscriptibil adică vârfurile sale sunt patru puncte conciclice.

16. Fie ABC un triunghi, M un punct în planul triunghiului, G centrul său de greutate iar A', B' respectiv C' mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Să se arate că are loc relația:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4(MA'^2 + MB'^2 + MC'^2).$$

Rezolvare:



Fie M un punct în exteriorul triunghiului ABC și z_A, z_B, z_C afixele punctelor A, B, C, atunci relația

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4(MA'^2 + MB'^2 + MC'^2) \text{ devine:}$$

$$z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 + 9\left(\frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{z_B + z_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A + z_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A + z_B}{2}\right)^2\right], \text{ unde punctul M}$$

este originea sistemului ortogonal de axe. Mai departe rezultă

$$\begin{aligned} & z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 + z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 + 2(z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A) = \\ & = 2(z_A^2 + z_B^2 + z_C^2) + 2(z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A) \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat, rezultă de aici că relația dată este adevărată.

17. Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC se construiesc pătrate având centrele D și E, astfel încât punctele C și D sunt situate de aceeași parte a dreptei AB, iar punctele A și E sunt separate de dreapta BC. Să se arate că dreptele AC și DE se intersectează după un unghi de 45° .

Rezolvare:

Fie z_A, z_B, z_C, z_D, z_E afixele punctelor A, B, C, D, E.

Cum segmentul BD se obține din rotația lui AD cu un unghi de $90^\circ \Rightarrow$

$$z_B - z_D = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot (z_A - z_D) = i \cdot (z_A - z_D) \quad \Rightarrow$$

$$z_D = \frac{iz_A - z_B}{i - 1}.$$

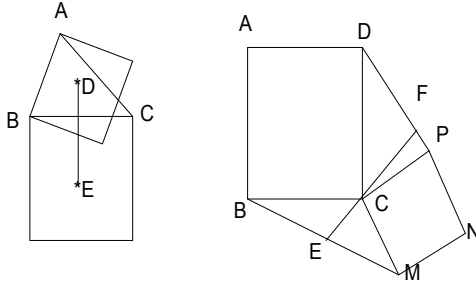
De asemenea BE se obține din rotația lui CE cu un unghi de

$$90^\circ \Rightarrow z_E = \frac{iz_C - z_B}{i - 1}.$$

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_E} = \frac{z_A - z_C}{\frac{iz_A - z_B - iz_C + z_B}{i - 1}} = \frac{i - 1}{i} = 1 + i =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow$$

AC și DE formează între ele un unghi de 45° .



18. Fie ABCD și CMNP două pătrate care nu au puncte interioare comune. Să se arate că mijlocul lui BM, C și piciorul perpendicularei din C pe DP sunt trei puncte coliniare.

Rezolvare:

Fie E mijlocul lui BM și se prelungește EC până se intersectează cu DP în F.

Așadar a arăta că punctele E, C, F sunt coliniare este suficient să arătăm că EF este perpendicular pe DP echivalent cu

$$\frac{z_E - z_F}{z_D - z_P} \in iR.$$

Rotind pe DC cu 90° se obține BC astfel:

$$z_B - z_C = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot (z_D - z_C) = i(z_D - z_C)$$

$$\Rightarrow z_D = \frac{(i-1)z_C + z_B}{i} = (1+i)z_C - iz_B$$

Analog CP se obține din CM printr-o rotație de unghi $90^\circ \Rightarrow$

$$z_P - z_C = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot (z_M - z_C) \Rightarrow z_P = (1 - i)z_C + iz_M.$$

E, C, F coliniare \Rightarrow EC se obține din CF printr-o rotație de $180^\circ \Rightarrow$

$$z_E - z_C = (z_F - z_C) \cdot \frac{CE}{CF} (\cos \pi + i \sin \pi). \text{ Notăm cu } r \text{ raportul}$$

$$\frac{CE}{CF}. \text{ Cum } z_E = \frac{z_B + z_M}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_B + z_M}{2} - z_C = -r \cdot z_F + r \cdot z_C + r \cdot z_F \Rightarrow$$

$$z_F = \frac{2z_C(r+1) - z_B - z_M}{2r}$$

$$\frac{z_E - z_F}{z_D - z_P} = \frac{(r+1)(z_B + z_M - 2z_C)}{-2ri(z_B + z_M - 2z_C)} = \frac{r+1}{2r} \cdot i \in i\mathbb{R} \Rightarrow EF \perp DP.$$

19. Se consideră patrulaterul convex ABCD, iar E respectiv F mijloacele diagonalelor AC respectiv BD.

Să se arate că are loc relația:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

(Relația lui Euler).

Rezolvare.

Fie $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F$ afixele punctelor A, B, C, D, E, F.

Avem de arătat următoarea relație:

$$\begin{aligned} |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_B|^2 + |z_D - z_C|^2 + |z_A - z_D|^2 = \\ |z_C - z_A|^2 + |z_D - z_B|^2 + 4|z_F - z_E|^2. \end{aligned}$$

Cum E respectiv F sunt mijloacele diagonalelor AC respectiv BD \Rightarrow

$$\begin{aligned}
(z_E - z_F)^2 &= z_E^2 - 2z_E \cdot z_F + z_F^2 = \frac{z_A^2 + 2z_A z_C + z_C^2}{4} - \\
&- 2 \frac{z_A + z_C}{2} \frac{z_B + z_D}{2} + \frac{z_B^2 + 2z_B z_D + z_D^2}{4} \Rightarrow \\
4(z_E - z_F)^2 &= z_A^2 + 2z_A z_C + z_C^2 - 2z_A z_B - 2z_A z_D - 2z_C z_B - \\
&- 2z_C z_D + z_B^2 + 2z_B z_D + z_D^2 \Rightarrow \\
4(z_E - z_F)^2 &= (z_A^2 - 2z_A z_B + z_B^2) + (z_C^2 - 2z_B z_C + z_B^2) + \\
&(z_C^2 - 2z_C z_D + z_D^2) + (z_D^2 - 2z_A z_D + z_A^2) - \\
&-(z_A^2 - 2z_A z_C + z_D^2) - (z_B^2 - 2z_B z_D + z_D^2) \\
\text{Am adunat și am scăzut suma } &z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 + z_D^2 \Rightarrow \\
4(z_E - z_F)^2 &= (z_A - z_B)^2 + (z_B - z_C)^2 + (z_C - z_D)^2 + (z_D - z_A)^2 - \\
&-(z_A - z_C)^2 - (z_B - z_D)^2 \Rightarrow \\
4|z_E - z_F|^2 &= |z_A - z_B|^2 + |z_B - z_C|^2 + |z_C - z_D|^2 + |z_D - z_A|^2 - \\
&- |z_A - z_C|^2 - |z_B - z_D|^2 \Rightarrow \\
4EF^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 \text{ c.c.t.d.}
\end{aligned}$$

20. Să se arate că într-un patrulater convex există relația:
 $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

(Inegalitatea lui Ptolemeu)

Rezolvare:

Fie z_A, z_B, z_C, z_D afixele punctelor A, B, C, D. Atunci

$$\begin{aligned}
(z_C - z_A) \cdot (z_D - z_B) &+ (z_B - z_A) \cdot (z_C - z_D) + \\
&+ (z_D - z_A) \cdot (z_B - z_C) = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_C - z_A) \cdot (z_D - z_B) &= (z_B - z_A) \cdot (z_D - z_C) + \\
&+ (z_D - z_A) \cdot (z_C - z_B)
\end{aligned}$$

Prin trecere la modul \Rightarrow

$$\begin{aligned}
|z_C - z_A| \cdot |z_D - z_B| &\leq |z_B - z_A| \cdot |z_D - z_C| + |z_D - z_A| \cdot |z_C - z_B| \Rightarrow \\
AC \cdot BD &\leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.
\end{aligned}$$

21. Fie $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ vârfurile unui patrulater iar D este un

punct de afix $z_D = \frac{z_A z_B + z_A z_C + z_B z_C}{z_A + z_B + z_C}$. Să se arate că patrulaterul

$ABCD$ este inscriptibil.

Rezolvare:

Dacă punctele A, B, C sunt pe un cerc de rază r atunci

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = r > 0 \Rightarrow$$

$$z_A \overline{z_A} = z_B \overline{z_B} = z_C \overline{z_C} = r^2, \text{ mai rămâne să arătăm că și } D \text{ se}$$

$$\text{află pe cerc} \Leftrightarrow |z_D| = r \Leftrightarrow z_D \overline{z_D} = r^2$$

$$\overline{z_D} = \frac{\overline{z_A \cdot z_B + z_B \cdot z_C + z_C \cdot z_A}}{z_A + z_B + z_C} = \frac{r^2(z_A + z_B + z_C)}{z_A z_B + z_B z_C + z_A z_C}$$

$$\Rightarrow z_D \cdot \overline{z_D} = r^2 \Rightarrow ABCD \text{ este inscriptibil}$$

22. Fie triunghiul ABC cu $BM \perp AB$, $BM=AB$, $CP \perp AC$, $CP=AC$,

$E \in BC$, $EB=EC$ astfel încât $NE \perp BC$, $NE = \frac{BC}{2}$. Să se arate că

punctele M, N, P sunt coliniare.

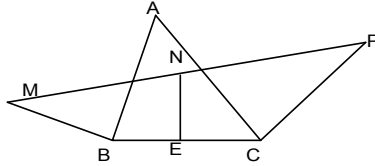
Rezolvare:

$$z_M - z_B = (z_A - z_B) \cdot i \Rightarrow z_M = z_B + (z_A - z_B)i$$

$$z_P - z_C = -(z_A - z_C) \cdot i \Rightarrow z_P = z_C - (z_A - z_C)i$$

$$z_N - \frac{z_B + z_C}{2} = i \frac{z_C - z_B}{2} \Rightarrow z_N = \frac{z_B + z_C}{2} + i \frac{z_C - z_B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_P - z_M}{z_P - z_N} = 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow M, N, P \text{ sunt coliniare}$$



23. Să se determine mulțimea punctelor M de afix z astfel încât punctele $A(1)$, $M(z)$, $B(1+z+z^2)$ să fie coliniare.

Rezolvare:

Fie $z=x+iy$ afixul punctului M .

$$\Rightarrow z_M - z_A = x + iy - 1 = x - 1 + iy$$

$$z_B - z_A = 1 + z + z^2 - 1 = x + iy + (x + iy)^2 = x + x^2 - y^2 + i(y + 2xy)$$

Punctele A , M , B sunt coliniare \Leftrightarrow vectorii

$\overrightarrow{AM}(x-1, y)$, și $\overrightarrow{AB}(x+x^2-y^2, y+2xy)$ să fie coliniari

$$\Leftrightarrow (x-1)(y+2xy) - y(x+x^2-y^2) = 0$$

$\Rightarrow y(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow$ locul geometric căutat este cercul de centru $A(1,0)$ și de rază $\sqrt{2}$.

24. Fie ABC un triunghi iar pe laturile sale se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABP , BMC , CNA . Să se arate că centrele lor de greutate formează un triunghi echilateral.

Rezolvare:

$\triangle MBC$ echilateral \Rightarrow

$$z_B + \varepsilon z_M + \varepsilon^2 z_C = 0 \quad | \cdot \varepsilon^2 \Rightarrow z_B \cdot \varepsilon^2 + z_M + z_C \cdot \varepsilon = 0 \quad (1)$$

$$\triangle ACN \text{ echilateral} \Rightarrow z_C + \varepsilon \cdot z_N + \varepsilon^2 \cdot z_A = 0 \quad (2)$$

ΔAPB echilateral \Rightarrow

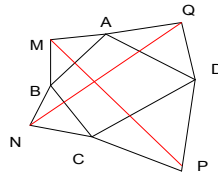
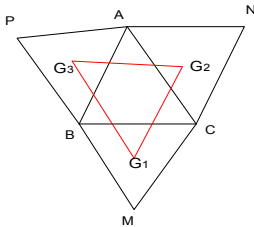
$$z_A + \varepsilon z_P + \varepsilon^2 z_B = 0 \quad | \cdot \varepsilon \Rightarrow z_A \cdot \varepsilon + z_P \cdot \varepsilon^2 + z_B = 0 \quad (3)$$

Adunând cele trei relații \Rightarrow

$$z_B + z_C + z_M + (z_A + z_N + z_C) \cdot \varepsilon + (z_P + z_A + z_B) \cdot \varepsilon^2 = 0 \quad | :3 \Rightarrow$$

$$z_{G_1} + z_{G_2} \cdot \varepsilon + z_{G_3} \cdot \varepsilon^2 = 0$$

$\Rightarrow G_1 G_2 G_3$ este echilateral.



25. Pe laturile patrulaterului ABCD se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele AMB, BNC, CPD, DQA. Să se arate că MP este perpendicular pe NQ.

Rezolvare.

$$z_B - z_M = (z_A - z_M) \cdot i \Rightarrow z_M(1 - i) = z_B - z_A \cdot i$$

$$z_C - z_N = (z_B - z_N) \cdot i \Rightarrow z_N(1 - i) = z_C - z_B \cdot i$$

$$z_D - z_P = (z_C - z_P) \cdot i \Rightarrow z_P(1 - i) = z_D - z_C \cdot i$$

$$z_A - z_Q = (z_D - z_Q) \cdot i \Rightarrow z_Q(1 - i) = z_A - z_D \cdot i \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
(z_P - z_M)(1-i) &= z_D - z_B + (z_A - z_C) \cdot i \\
(z_Q - z_N)(1-i) &= z_A - z_C + (z_B - z_D) \cdot i \Rightarrow \\
z_P - z_M &= (z_Q - z_N) \cdot i \Rightarrow \\
\Rightarrow |MP| &= |NQ| \text{ și } MP \perp NQ.
\end{aligned}$$

26. Fie paralelogramul ABCD și P ∈ (BD), M ∈ (AD), N ∈ (AB) astfel încât PM ⊥ AB și PN ⊥ AD. Să se arate că triunghiul MNC și triunghiul ale căror vârfuri sunt centrele de greutate ale triunghiurilor DMP, BNP, BCD au același centru de greutate.

Rezolvare:

Este suficient să arătăm că $z_M + z_N + z_C = z_1 + z_2 + z_3$, unde z_1, z_2, z_3 sunt afixele centrelor de greutate ale triunghiurilor DMP, BNP, BCD.

$$\text{Avem: } 3z_1 = z_D + z_M + z_P$$

$$3z_2 = z_B + z_N + z_P$$

$$3z_3 = z_B + z_C + z_D \Rightarrow$$

$$3(z_1 + z_2 + z_3) = z_M + z_N + z_C + 2(z_P + z_D + z_B).$$

Cum ABCD este paralelogram

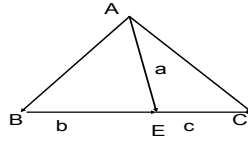
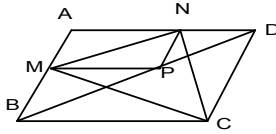
$$\Rightarrow z_A + z_C = z_B + z_D \quad \Bigg| \quad + z_P \Rightarrow z_A + z_C + z_P = z_B + z_D + z_P.$$

Din AMNP paralelogram

$$\Rightarrow z_A + z_P = z_M + z_N \Rightarrow$$

$$z_A + z_C + z_P = z_M + z_N + z_C = z_B + z_D + z_P \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
3(z_1 + z_2 + z_3) &= z_M + z_N + z_C + 2(z_P + z_D + z_B) = \\
&= 3(z_M + z_N + z_C) \Big| : 3 \Rightarrow c.c.t.d.
\end{aligned}$$



27. Fie E un punct situat arbitrar pe latura BC a triunghiului ABC . Să se arate că are loc relația:

$$AB^2 \cdot EC + AC^2 \cdot BE - BE \cdot EC \cdot BC = AE^2 \cdot BC$$

(Teorema lui Stewart).

Rezolvare:

Dacă asociem vectorilor AE, BE, EC numerele complexe corespunzătoare a, b, c atunci lui \overrightarrow{AC} îi corespunde numărul $a+c$, lui \overrightarrow{AB} numărul $a-b$, iar lui \overrightarrow{BC} numărul $b+c$.

Plecând de la identitatea:

$c(a-b)^2 + b(a+c)^2 = a^2(b+c) + bc(b+c)$ pe care trecând-o la module, vom obține tocmai relația din teorema lui Stewart.

28. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $E \in (AD)$, $F \in (BC)$ astfel încât

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \text{ și } M \in (AB), N \in (EF), P \in (CD)$$

astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{EN}{NF} = \frac{DP}{PC}$. Să se arate că M, N, P sunt coliniare.

Rezolvare:

$$\text{Fie } \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = k \quad \Rightarrow \quad z_E = \frac{z_A + kz_D}{1+k} \quad z_F = \frac{z_B + kz_C}{1+k}$$

$$\text{și } \frac{AM}{MB} = \frac{EN}{NF} = \frac{DP}{PC} = t \quad \Rightarrow z_M = \frac{z_A + tz_B}{1+t}; \quad z_N = \frac{z_E + tz_F}{1+t};$$

$$z_P = \frac{z_D + tz_C}{1+t};$$

Prin înlocuirea lui z_E și a lui z_F în z_N rezultă:

$$z_N = \frac{\frac{z_A + kz_D}{1+k} + t \frac{z_B + kz_C}{1+k}}{1+t} = \frac{z_A + tz_B + kz_D + ktz_C}{(1+t)(1+k)} =$$

$$= \frac{\frac{z_A + tz_B}{1+t} + k \frac{z_D + tz_C}{1+t}}{1+k} = \frac{z_M + kz_P}{1+k}$$

\Rightarrow M, N, P sunt coliniare.

BIBLIOGRAFIE

- Culegere de probleme de matematică - Mihai Cocuz, Editura Academiei, București 1984;
- Culegere de probleme de matematică pentru clasa a X-a , - Maria Batinețu-Giurgiu și colaboratori, Editura Porto-Franco, 1993;
- Culegere de probleme pentru concursurile de matematică- D. Acu și colaboratori, Editura Societății de Științe Matematice din România, București, 1997;
- Exercices et problemes de mathematiques- Joseph Gibert;
- Matematica în concursurile școlare 2001, 2004- Dan Brânzei și colaboratori, Editura Paralela 45;
- Numere complexe, Virgil Nicula;
- Probleme din Gazeta Matematică, N. Teodorescu și colaboratori, Editura Tehnică, București 1984.
- Probleme de geometrie și de trigonometrie - Stere Ianuș, Nicolae Soare și colab. Editura Didactică și Pedagogică, București ,1991
- Probleme practice de geometrie - Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff, Editura tehnică, București, 1990;
- Probleme de geometrie - I.C. Drăghicescu, Editura Tehnică, 1987
- Manual de matematică pentru clasa a X-a, Costel Chiteș, Editura Sigma 2000;
- Manual de matematică pentru clasa a X-a, Mircea Ganga, Editura Mathpress 2005;

Dreptul de copyright:
Cartea downloadată de pe site-ul www.mateinfo.ro nu poate fi publicată pe un alt
site și nu poate fi folosită în
scopuri comerciale fără specificarea sursei și acordul autorului

SINTEZE MATEMATICE

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Mulțimea numerelor reale

1. Scrierea în baza zece:

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

a-cifra miilor; b-cifra sutelor; c-cifra zecilor; d-cifra unităților;

$$\overline{a,efg} = a \cdot 10 + e \cdot 10^1 + f \cdot 10^2 + g \cdot 10^3 =$$

$$= a \cdot 10 + e \cdot 0.1 + f \cdot 0.01 + g \cdot 0.001$$

e-cifra zecimilor; f-cifra sutimilor; g-cifra miimilor.

2. Frații

-Frații zecimale finite: $\overline{a,b} = \frac{\overline{ab}}{10}$; $\overline{a,bc} = \frac{\overline{abc}}{100}$;

-Frații zecimale periodice:-

simple: $\overline{a,(b)} = \frac{\overline{ab} - a}{9}$; $\overline{a,(bc)} = \frac{\overline{abc} - a}{99}$;

mixte: $\overline{a,b(c)} = \frac{\overline{abc} - \overline{ab}}{90}$; $\overline{a,b(cd)} = \frac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{990}$;

3. Rapoarte și proporții

$$\frac{a}{b} \text{ se numește raport } \forall b \neq 0; \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = k, \quad n \in \mathbb{Q}^*,$$

k se numește coeficient de proporționalitate ;

Proprietatea fundamentală a proporțiilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

4. Proporții derivate:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ sau } \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ sau } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d} \text{ sau } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \text{ sau } \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}. \end{cases}$$

5. Sir de rapoarte egale:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n};$$

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ sunt direct

proporționale $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ sunt invers
proporționale $\Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n$

6. Modulul numerelor reale Proprietăți:

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in R;$ 2. $|a| = 0, \quad \Leftrightarrow a = 0;$

3. $|a| = |-a|, \quad \forall a \in R;$ 4. $|a| = |b|, \quad \Leftrightarrow a = \pm b;$

5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$ 6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|};$

7. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|;$

8. $|x| = a, \quad \Rightarrow x = \pm a, \quad a > 0;$

9. $|x| \leq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-a, a], \quad a > 0;$

10. $|x| \geq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-\infty, -a] \cup [a, +\infty], \quad a > 0.$

7. Reguli de calcul în R

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$

4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
5. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
8. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

8. Puteri cu exponent întreg

$$\underline{\underline{a^n \text{ def}}} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

1. $a^0 = 1; a^1 = a; 0^n = 0$;
2. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
8. $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$.

9. Proprietățile radicalilor de ordinul doi

1. $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0, \forall a \in R$
2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0$
4. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n = a^{\frac{n}{2}}$,
5. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$
unde $a^2 - b = k^2$.

10. Medii

$$\text{Media aritmetică } m_a = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Media geometrică } m_g = \sqrt{x \cdot y}$$

$$\text{Media ponderată } m_p = \frac{p \cdot x + q \cdot y}{p+q}; p, q - \text{ponderile}$$

$$\text{Media armonică } m_h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}$$

Inegalitatea mediilor

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

11. Ecuții

$$a \cdot x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$$

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}, a \geq 0 ;$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0.$$

$$|x| = a, a \geq 0 \Rightarrow x = \pm a.$$

$$\sqrt{x} = a, a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$$

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1 \Leftrightarrow x \in [a, a+1) .$$

12. Procente

$$p \% \text{ din } N = \frac{P}{100} \cdot N$$

$$D = \frac{S \cdot p \cdot n}{100 \cdot 12} \dots \text{Dobânda obținută prin depunerea la bancă a unei}$$

sume S de bani pe o perioadă de n luni cu procentul p al dobânzii anuale acordate de bancă .

Cât la sută reprezintă numărul a din N .

$$x \% \text{ din } N = a \Rightarrow x = \frac{a \cdot 100}{N} .$$

13. Partea întreagă

$$1. x = [x] + \{x\}, \forall x \in R, [x] \in Z \text{ și } \{x\} \in [0,1)$$

$$2. [x] \leq x < [x] + 1 \quad [x] = a \Rightarrow a \leq x < a + 1$$

$$3. [x] = [y] \Leftrightarrow \exists K \in Z \text{ a. î. } x, y \in [k, k + 1] \Leftrightarrow |x - y| < 1$$

$$4. [x + k] = k + [x], \forall k \in Z, x \in R$$

$$5. \{x + k\} = \{x\}, \forall x \in R, \forall k \in Z$$

$$6. \text{Dacă } \{x\} = \{y\} \Rightarrow x - y \in Z$$

$$7. \text{Dacă } x \in R \Rightarrow \begin{aligned} [[x]] &= [x] \in Z \\ [\{x\}] &= 0, \{[x]\} = 0, \{\{x\}\} = \{x\} \end{aligned}$$

$$8. \text{Identitatea lui Hermite } [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x], \forall x \in R$$

$$9. [x + y] \geq [x] + [y], \forall x, y \in R$$

$$10. \text{Prima zecimală, după virgulă, a unui număr } N \text{ este dată de } [10 \cdot \{N\}] \text{ sau } [(N - [N]) \cdot 10]$$

2. Inegalități

1. $a > 1 \quad a^{k-1} < a^k \quad \forall k \geq 1$
 $a \in (0,1) \quad a^k < a^{k-1} \quad \forall k \geq 1$
2. $0 < a \leq b \Rightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
3. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (\forall) \quad a > 0 \quad a + \frac{1}{a} \leq -2 \quad \forall a < 0.$
4. $\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$
 $\frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$
5. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
6. $\frac{a^2 + b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \forall a, b > 0$
7. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
8. $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
9. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
10. $\sqrt{a+b+c} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \quad \forall a, b, c \geq 0$
11. $(n-1)(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq 2(a_1a_2 + \dots + a_1a_n + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)$
12. $n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}$
13. $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \forall n \in \mathbb{N}, a, b > 0.$
14. $0 < \frac{a}{b} < 2 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+r}{b+r}, \forall r > 0.$
 $1 < \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+r}{b+r}, \forall r > 0$

$$15. |x| \leq a \quad (a > 0) \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

$$16. |a \pm b| \leq |a| + |b|, \quad a, b \in R \text{ sau } C.$$

$$17. |a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|, \text{ in } R \text{ sau } C.$$

$$18. ||a| - |b|| \leq |a - b| \text{ in } R \text{ sau } C.$$

$$19. \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$20. a, b \in Z, m, n \in Z, \sqrt{\frac{m}{n}} \notin Q \Rightarrow |ma^2 - nb^2| \geq 1.$$

21. Numerele pozitive a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă $\exists x, y, z \in R_+^* a_i$

$$a = y + z, \quad b = x + z, \quad c = x + y.$$

$$22. \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \geq 1 \quad a \neq b \quad \forall a, b > 0,$$

$$23. a, b, c \in R_+^* \Rightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

24. Dacă $x_1, \dots, x_n \geq 0$ și $x_1 + \dots + x_n = k$ constant atunci produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ e maxim când $x_1 = \dots = x_n = \frac{k}{n}$.

25. Dacă $x_1, \dots, x_n < 0$ și $\prod_{i=1}^n x_i = k$ constant $\Rightarrow x_1 + \dots + x_n$ e

minimă atunci când $x_1 = \dots = x_n = \sqrt[n]{k}$.

26. Dacă $x_1, \dots, x_n \geq 0$ și $x_1 + \dots + x_n = k = \text{constant}$ atunci

$x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$ este maxim când

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \dots = \frac{x_n}{p_n} = \frac{k}{p_1 + \dots + p_n}, \quad p_i \in N^*, i = \overline{1, n}$$

27. Teorema lui Jensen:

$$\text{Dacă } f : I \rightarrow R, (I \text{ interval}) \text{ și } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq_{(\geq)} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
$$\forall x_1, x_2 \in I \Rightarrow f\left(\frac{x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq_{(\geq)} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$
$$\forall x_i \in I, i = \overline{1, n}.$$

28. Inegalitatea mediilor $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

29. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2. \forall a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

egalitate când $a_i = a_j, \forall i, j = \overline{1, n}$.

30. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowsky-Schwartz.

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \quad \forall a_i, b_i \in R.$$

31. Inegalitatea mediilor generalizate: $"=" \Leftrightarrow \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$.

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{a_1^\beta + \dots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \forall a_i, b_i \in R_+, \alpha \geq \beta,$$

$\alpha, \beta \in R$.

\Downarrow

32. $\left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

33. Inegalitatea lui Bernoulli:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, a \geq -1, \forall n \in N.$$

3. Multimi. Operații cu mulțimi.

1. Asociativitatea reuniunii și a intersecției:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2. Comutativitatea reuniunii și a intersecției:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

3. Idempotența reuniunii și intersecției:

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

4. $A \cup \emptyset = A$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

5. Distributivitatea reuniunii față de intersecție:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. Distributivitatea intersecției față de reuniune:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

7. $A, B \subseteq E, C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

8. $A \subseteq E, C_E(C_E A) = A$

9. $A \setminus B = C_A(A \cap B)$

10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap C$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

$$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$$

11. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

$$x \in C_E A \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin A)$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

12. Relațiile lui **de Morgan**

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q, \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.
2. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r), p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
3. $\neg p \vee p = A, \neg p \wedge p = F$.
4. $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
5. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.
6. $p \wedge A = p, p \vee A = A$
7. $p \vee q = q \vee p, p \wedge q = q \wedge p$
8. $\neg(\neg p) = p$
9. $p \wedge \neg p = F, p \wedge \neg p = A$
10. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
 $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
11. $p \vee F = p, p \wedge F = F$

4. Progresii

1. Șiruri

Se cunosc deja șirul numerelor naturale $0,1,2,3,4,\dots$, șirul numerelor pare $2,4,6,\dots$. Din observațiile directe asupra acestor șiruri, un șir de numere reale este dat în forma a_1, a_2, a_3, \dots unde a_1, a_2, a_3 sunt termenii șirului iar indicii $1,2,3$, reprezintă poziția pe care îi ocupă termenii în șir.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** o funcție $f: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(n) = a_n$

Notăm $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ **șirul de termen general**, a_n

Observație: Numerotarea termenilor unui șir se mai poate face începând cu zero: a_0, a_1, a_2, \dots

a_i , $i \geq 1$ se numește termenul de rang i .

Un șir poate fi definit prin :

a) descrierea elementelor mulțimii de termeni. $2,4,6,8,\dots$

b) cu ajutorul unei formule $a_n = 2n$

c) printr-o relație de recurență. $a_{n+1} = a_n + 2$

Un șir constant este un șir în care toți termenii șirului sunt constanți : $5,5,5,5,\dots$

Două șiruri $(a_n)_n, (b_n)_n$ sunt egale dacă $a_n = b_n, \forall n \in \mathbf{N}$

Orice șir are o infinitate de termeni.

2. Progresii aritmetice

Definiție: Se numește **progresie aritmetică** un șir în care diferența oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r , numit rația progresiei aritmetice.

1. Relația de recurență între doi termeni consecutivi:

$$a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$$

2. $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice \Leftrightarrow

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

3. **Termenul general** este dat de :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

4. Suma oricăror doi termeni egal departați de extremi este egal cu suma termenilor extremi :

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$

5. Suma primilor n termeni :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

6. Șirul termenilor unei progresii aritmetice:

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \dots$$

$$a_m - a_n = (m - n)r$$

7. Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$$x_1 = u - v \quad x_2 = u \quad x_3 = u + v \quad \forall u, v \in \mathfrak{R}$$

8. Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$$x_1 = u - 3v, \quad x_2 = u - v, \quad x_3 = u + v, \quad x_4 = u + 3v, \quad \forall u, v \in \mathfrak{R}$$

9. Dacă $\div a_i \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}$

4. Progresii geometrice

Definiție : Se numește **progresie geometrică** un șir în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q , numit rația progresiei geometrice.

1. **Relația de recurență** : $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$

2. $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ sunt termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $\Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

3. **Termenul general** este dat de : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

4. Produsul oricaror doi termeni egal departati de extremi este egal cu produsul extremilor

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$$

5. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice :

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

6. Șirul termenilor unei progresii geometrice :

$$b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, \dots, b_1 \cdot q^n, \dots$$

7. Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$$x_1 = \frac{u}{v} \quad x_2 = u \quad x_3 = u \cdot v, \forall u, v \in \mathbb{R}_+^*$$

8. Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică astfel :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u}{v^3} \\ x_2 &= \frac{u}{v} \\ x_3 &= u \cdot v \\ x_4 &= u \cdot v^3 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

5. Funcții

I. Fie $f: A \rightarrow B$.

1) **Funcția f este injectivă**, dacă

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

2) Funcția f este injectivă, dacă din $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$.

3) Funcția f este injectivă, dacă orice paralelă la axa Ox intersectează graficul funcției în cel mult un punct.

II.

1) **Funcția f este surjectivă**, dacă $\forall y \in B$, există cel puțin un punct $x \in A$, a.î. $f(x)=y$.

2) Funcția f este surjectivă, dacă $f(A) = B$.

3) Funcția f este surjectivă, dacă orice paralelă la axa Ox , dusă printr-un punct al lui B , intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

III.

1) **Funcția f este bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

2) Funcția f este bijectivă dacă pentru orice $y \in B$ există un singur $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (ecuația $f(x)=y$, are o singură soluție, pentru orice y din B)

3) Funcția f este bijectivă dacă orice paralelă la axa Ox , dusă printr-un punct al lui B , intersectează graficul funcției într-un punct și numai unul.

IV.

$1_A: A \rightarrow A$ prin $1_A(x) = x, \forall x \in A$.

1) **Funcția $f: A \rightarrow B$ este inversabilă**, dacă există o funcție $g: B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$, funcția g este inversa funcției f și se notează cu f^{-1} .

2) $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

3) f este bijectivă $\Leftrightarrow f$ este inversabilă.

V. Fie $f:A \rightarrow B$ si $g: B \rightarrow C$, două funcții.

- 1) Dacă f si g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
- 2) Dacă f si g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
- 3) Dacă f si g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă.
- 4) Dacă f si g sunt (strict) crescătoare, atunci $g \circ f$ este (strict) crescătoare.
- 5) Dacă f si g sunt (strict) descrescătoare, atunci $g \circ f$ este (strict) descrescătoare.
- 6) Dacă f si g sunt monotone, de monotonii diferite, atunci $g \circ f$ este descrescătoare.
- 7) Dacă f este periodică, atunci $g \circ f$ este periodică.
- 8) Dacă f este pară, atunci $g \circ f$ este pară.
- 9) Dacă f si g sunt impare, atunci $g \circ f$ este impară,
- 10) Dacă f este impară si g pară, atunci $g \circ f$ este pară.

VI. Fie $f: A \rightarrow B$ si $g: B \rightarrow C$, două funcții.

Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.

Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă si g surjectivă.

Dacă $f, g: A \rightarrow B$ iar $h: B \rightarrow C$ bijectivă si $h \circ f = h \circ g$, atunci $f = g$.

VII. Fie $f: A \rightarrow B$ si X, Y mulțimi oarecare.

Funcția f este bijectivă, dacă și numai dacă oricare ar fi funcțiile

$u, v: X \rightarrow A$, din $f \circ u = f \circ v$, rezultă $u = v$.

Funcția f este surjectivă, dacă și numai dacă oricare ar fi funcțiile $u, v: B \rightarrow Y$, din $u \circ f = v \circ f$, rezultă $u = v$

VIII.

- 1) Dacă $f : A \rightarrow B$ este strict monotonă, atunci f este injectivă.
- 2) Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodic și monotonă, atunci f este constantă.
- 3) Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă și impară, atunci f^{-1} este impară.
- 4) Fie A finită și $f : A \rightarrow A$. Atunci f este injectivă \Leftrightarrow este surjectivă.

IX. Fie $f : E \rightarrow F$, atunci

- 1) f injectivă $\Leftrightarrow (\exists) g : F \rightarrow E$ (surjectivă) a.i. $g \circ f = 1_E$.
- 2) f surjectivă $\Leftrightarrow (\exists) g : E \rightarrow F$ (injectivă) a.i. $f \circ g = 1_F$
- 3) f bijectivă \Leftrightarrow inversabilă.

X. Fie $f : E \rightarrow F$.

- 1) Funcția f este injectivă dacă și numai dacă $(\forall) A, B \subset E$
 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- 2) Funcția f este surjectivă dacă și numai dacă $(\forall) B \subset F$ există $A \subset E$, astfel încât $f(A) = B$.
- 3) Funcția f este injectivă dacă $f(A - B) = f(A) - f(B)$,
 $\forall A, B \subset E$.

XI. Fie $f : E \rightarrow F$ și $A \subset E, B \subset E$, atunci

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \text{ a.i. } f(x) = y\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

1. Fie $f : E \rightarrow F$ și $A, B \subset E$, atunci

- a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
- b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
- d) $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$.

2. Fie $f: E \rightarrow F$ și $A, B \subset F$ atunci

- a) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,
- b) $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$,
- c) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$,
- d) $f^{-1}(A) - f^{-1}(B) = f^{-1}(A - B)$,
- e) $f^{-1}(F) = E$.

Funcția de gradul al doilea

Forma canonică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

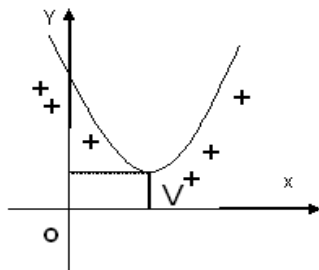
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ este}$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

Graficul funcției este o parabolă de vârf $V \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$, unde

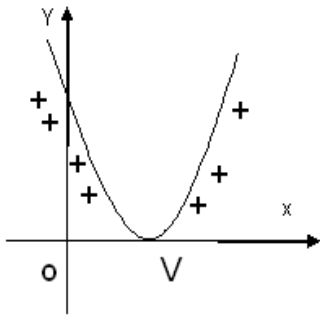
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$a > 0$ **f este convexă;**



$\Delta < 0; x_1, x_2 \in \mathbb{C}$
 $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R};$

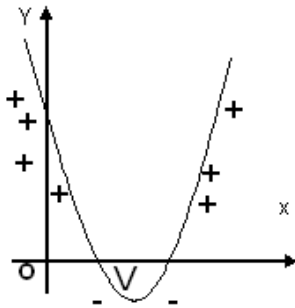
$V \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ - punct
 de minim;



$$\Delta = 0, x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R};$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$



$$\Delta > 0, x_1 \neq x_2 \in \mathbf{R} \quad f(x) \geq 0,$$

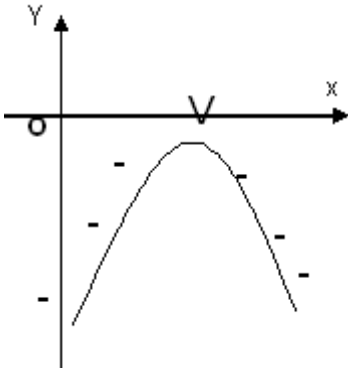
$$\forall x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty);$$

$$f(x) < 0, \forall x \in (x_1, x_2)$$

Pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ funcția este strict descrescătoare;

Pentru $x \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, funcția este strict crescătoare

$a < 0$ funcția este concavă

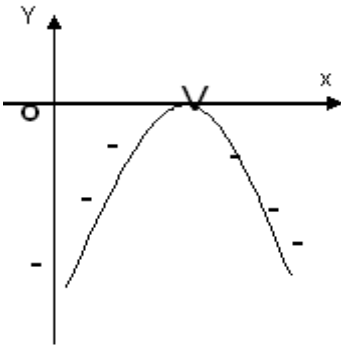


maxim

$$\Delta < 0; x_1, x_2 \in \mathbf{C}$$

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R};$$

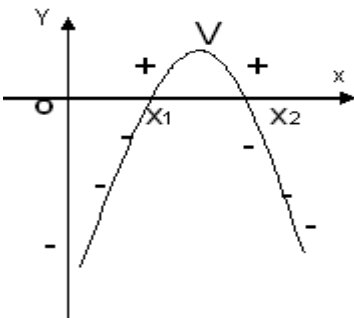
$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) - \text{punct de}$$



$$\Delta = 0, x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbf{R};$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$



$$\Delta > 0, x_1 \neq x_2 \in \mathbf{R}$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [x_1, x_2];$$

$$f(x) < 0,$$

$$\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

Pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ funcția este strict crescătoare;

Pentru $x \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, funcția este strict descrescătoare.

6. NUMERE COMPLEXE

1. NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ ALGEBRICĂ

$$C = \left\{ z \mid z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$$

- mulțimea numerelor complexe.

$$z = a + ib = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

OPERAȚII CU NUMERE COMPLEXE

Fie $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Atunci:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad \text{si} \quad b = d$.

2. $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.

3. $z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$.

4. $\overline{z_1} = a - ib$, conjugatul lui z_1

5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}$

6. $\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$.

PUTERILE LUI i

1. $i^{4k} = 1$;

2. $i^{4k+1} = i$;

3. $i^{4k+2} = -1$;

4. $i^{4k+3} = -i$;

5. $i^{-n} = \frac{1}{i^n}, i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$;

6. $i^{-n} = (-i)^n = (-1)^n \cdot i^n = \begin{cases} i^n, n & \text{par} \\ -i^n, n & \text{impar} \end{cases}$

PROPRIETĂȚILE MODULULUI

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - modulul nr. complexe

1. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ 2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 3. $|z| = |\bar{z}|$

4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 7. $|z^n| = |z|^n$

8. $z \in C; z \in R \Leftrightarrow \text{Im } z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$

ECUAȚII:

$$z^2 = a + ib \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{a + ib} \Rightarrow$$

$$z_{1,2} = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right]$$

,+’ dacă b pozitiv; ,-, dacă b negativ

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

daca $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ sau

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ daca } \Delta < 0$$

NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ GEOMETRICĂ

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi, \quad k = \begin{cases} 0, & (a, b) \in I \\ 1, & (a, b) \in II, III \\ 2, & (a, b) \in IV \end{cases}$$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numește raza polară a lui z

Fie $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ și $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$;

$z_1 = z_2$ $\rho_1 = \rho_2$, si exista $k \in \mathbb{Z}$ a.i $\varphi_1 = \varphi_2 + k\pi$

$$\overline{z_1} \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\overline{z_1} = \rho_1(\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1)$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1} [\cos(-\varphi_1) + i \sin(-\varphi_1)]$$

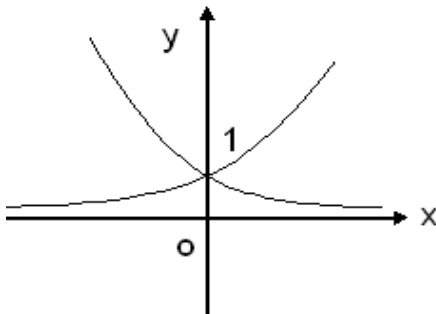
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$z_1^n = \rho_1^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1), n \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} \left(\cos \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right), k \in \overline{0, n-1}$$

7. FUNCTIA EXPONENTIALĂ

Def. f: $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



Dacă $a > 1 \Rightarrow f$ este strict crescătoare

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Dacă $a \in (0, 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Proprietăți:

Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a, b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$$

pentru $a < 0$, nu se definește a^x

Tipuri de ecuații:

1. $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0 \Rightarrow f(x) = \log_a b$
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$
3. $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a, b > 0, a, b \neq 1 \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$
4. ecuații exponențiale reducibile la ecuații algebrice printr-o substituție.
5. ecuații ce se rezolvă utilizând monotonia funcției exponențiale.

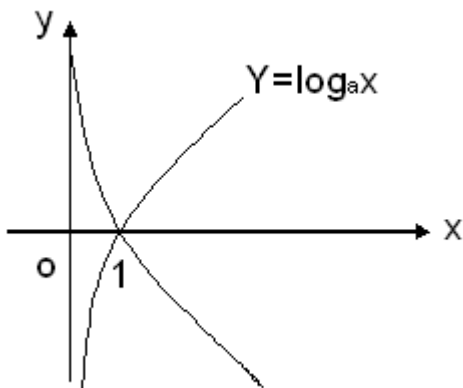
Inecuații

$$a > 1, a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$a \in (0,1) \quad a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

FUNCTIA LOGARITMICĂ

Def: $f:(0,\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0, a \neq 1, x>0$



Dacă $a > 1 \Rightarrow f$ este strict crescătoare

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Dacă $a \in (0,1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Proprietăți:

Fie $a, b, c \in (0, \infty), a, b, c \neq 1, x, y \in (0, \infty), m \in \mathbf{R} \Rightarrow$

$$a^y = x > 0 \Rightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a a^m = m, \quad \log_a b^m = m \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad x = a^{\log_a x}$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

Tipuri de ecuații:

1. $\log_{f(x)} g(x) = b, f, g > 0, f \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)^b$
2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$
3. $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = a^{\log_b g(x)}$
4. ecuații logaritmice reductibile la ecuații algebrice printr-o substituție.
5. ecuații ce se rezolvă utilizând monotonia funcției logaritmice.

Inecuații

$$a > 1, \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$a \in (0, 1) \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

8. BINOMUL LUI NEWTON

În 1664 **Isaac Newton** (1643-1727) a găsit următoarea formulă pentru dezvoltarea binomului $(a+b)^n$. Deși formula era cunoscută încă din antichitate de către matematicianul arab **Omar Khayyam** (1040-1123), **Newton** a extins-o și pentru coeficienți raționali.

TEOREMĂ: Pentru orice număr natural n și a și b numere reale există relația:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \dots + C_n^n b^n$$

(1)

Numerele $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ se numesc coeficienții binomiali ai dezvoltării;

Este necesar să se facă distincție între coeficientul unui termen al dezvoltării și coeficientul binomial al acelui termen.
Exemplu: $(a+2b)^4 = a^4 + 4a^3 \cdot 2b + \dots$

Coeficientul celui de-al doilea termen este 8 iar coeficientul binomial este $C_4^1 = 4$;

Pentru $(a-b)^n$ avem următoarea formă a binomului lui Newton:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} \cdot b + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 - \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \dots + (-1)^n C_n^n b^n$$

(1')

Proprietăți:

1. Numărul termenilor dezvoltării binomului $(a+b)^n$ este $n+1$;

Dacă $n=2k \Rightarrow$ coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării este C_n^k și este cel mai mare.

Dacă $n=2k+1 \Rightarrow C_n^k$ și C_n^{k+1} sunt egali și sunt cei mai mari;

$C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^k > C_n^{k+1} > \dots > C_n^n$ dacă n este par, $n=2k$

$C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^k = C_n^{k+1} > \dots > C_n^n$ dacă n este impar, $n=2k+1$.

2. Coeficienții binomiali din dezvoltare, egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei.

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

(2)

3. Termenul de rang $k+1$ al dezvoltării (sau termenul general al dezvoltării) este

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k, \quad k=0,1,2,\dots,n$$

(3)

⇒ Formula binomului lui Newton scrisă restrâns are forma:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

(4)

4. Relația de recurență între termenii succesivi ai dezvoltării este următoarea:

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}$$

(5)

5. Pentru $a=b=1$ se obține

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n$$

(6)

ceea ce înseamnă că **numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n .**

9. Vectori și operații cu vectori

Definiție:

Se numește segment orientat, o pereche ordonată de puncte din plan;

Se numește **vector**, mulțimea tuturor segmentelor orientate care au aceeași direcție, aceeași lungime și același sens cu ale unui segment orientat.

Observații:

Orice vector \overrightarrow{AB} se caracterizează prin:

- **modul**(lungime,normă), dat de lungimea segmentului AB;
- **direcție**, dată de dreapta AB sau orice dreaptă paralelă cu aceasta;
- **sens**, indicat printr-o săgeată de la originea A la extremitatea B.

Notății: \overrightarrow{AB} vectorul cu originea A și extremitatea B;

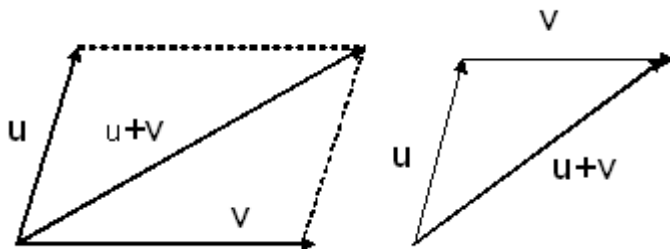
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ - modulul vectorului \overrightarrow{AB} unde $A(x_0, y_0)$, $B(x, y)$.

Definiție:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeași direcție, același sens și același modul. Doi vectori se numesc opuși dacă au aceeași direcție, același modul și sensuri contrare:

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Adunarea vectorilor se poate face după regula triunghiului sau după regula paralelogramului:

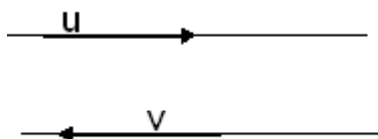


$$\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ sau } \vec{v} = \vec{0}, \forall \lambda \in R$$

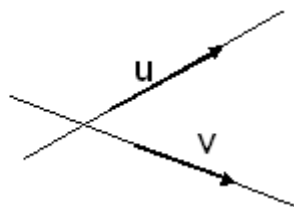
Dacă $\lambda \neq 0, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow |\lambda \cdot \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$, $\lambda \cdot \vec{v}$ are direcția și sensul vectorului \vec{v} dacă $\lambda > 0$ și sens opus lui \vec{v} dacă $\lambda < 0$.

Definiție:

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puțin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli și au aceeași direcție. În caz contrar se numesc necoliniari.



vectori coliniari



vectori necoliniari

Teoremă:

Fie $\vec{u} \neq \vec{0}$ și \vec{v} un vector oarecare.

Vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt **coliniari** $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R$ a.i. $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Punctele A, B, C sunt coliniare

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ si } \overrightarrow{AC} \text{ sunt coliniari} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ a.i. } \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}.$$

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ si } \overrightarrow{CD} \text{ sunt coliniari};$$

Dacă \vec{u} și \vec{v} sunt vectori necoliniari atunci

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ a.i. } x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Teoremă: Fie \vec{a} și \vec{b} doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul \vec{v} , există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (unice) astfel încât $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

Vectorii \vec{a} și \vec{b} formează o bază.

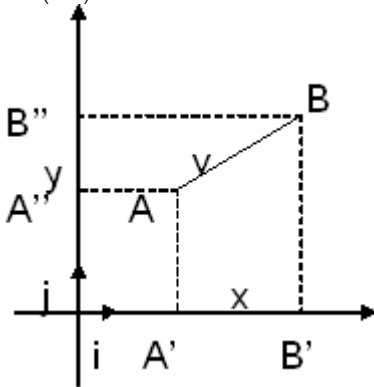
α, β se numesc coordonatele vectorului \vec{v} în baza (\vec{a}, \vec{b}) .

Definiție:

Fie XOY un reper cartezian. Considerăm punctele A(1,0),

B(0,1). Vectorii $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ și $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ se numesc versorii axelor de coordonate. Ei au modulul egal cu 1, direcțiile axelor și sensurile semiaxelor pozitive cu OX și OY.

Baza (\vec{i}, \vec{j}) se numește bază ortonormată.



$$\vec{v} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A''B''} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad x = x_B - x_A, y = y_B - y_A$$

$$\vec{v} = pr_{Ox} \vec{v} \cdot \vec{i} + pr_{Oy} \vec{v} \cdot \vec{j} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Teoremă:

Fie $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$. Atunci:

- 1) $\vec{u} + \vec{v}$ are coordonatele $(x+x', y+y')$;
- 2) $\forall \lambda \in R, \lambda \cdot \vec{v}$ are coordonatele $(\lambda x', \lambda y')$;
- 3) $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$ sunt coliniari

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = k, x', y' \neq 0. \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

4) Produsul scalar a doi vectori nenuli.

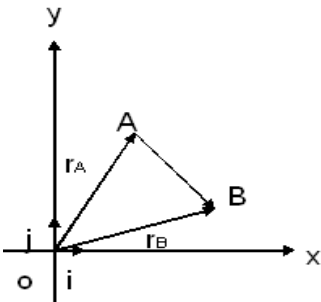
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \quad \text{unde } \alpha = m(\vec{u}, \vec{v}), \alpha \in [0, \pi].$$

$$\cos \alpha = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0; \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

Fie $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$ nenuli. Atunci:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0.$$



$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0, \forall \vec{u}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1; \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

Vectori de poziție. Dacă \vec{r}_A, \vec{r}_B

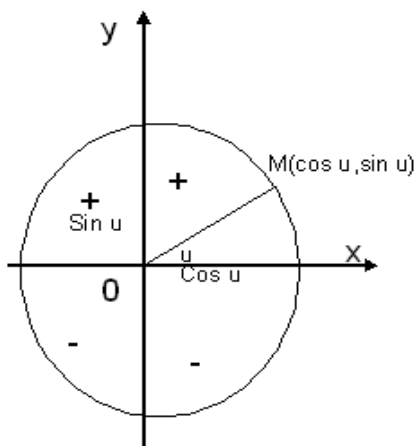
sunt vectori de poziție, atunci: $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

10. Funcții trigonometrice

Semnul funcțiilor trigonometrice:

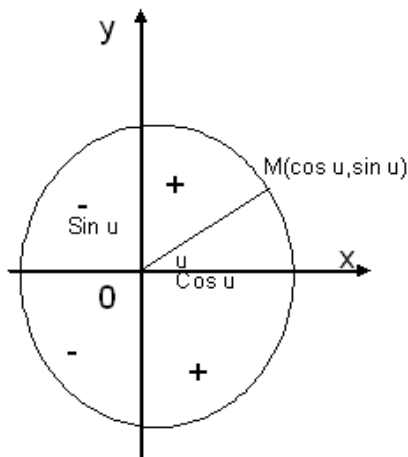
$$\text{Sin: } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

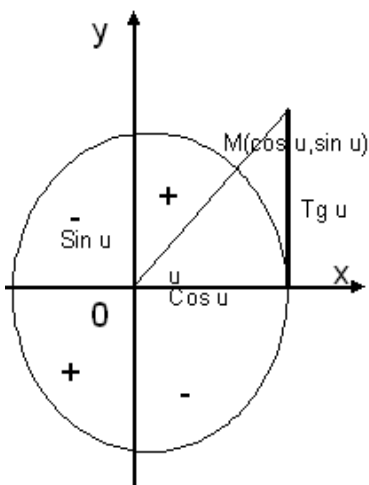
$$\text{arcsin: } [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\text{Cos: } [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{arccos: } [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$





$$\text{Tg: } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{arctg: } \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Reducerea la un unghi ascuțit

Fie $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ Notăm $\text{sgn } f =$ semnul funcției f ; $\text{cof} =$ cofuncția lui f

$$\sin\left(k \frac{\pi}{2} \pm u\right) = \begin{cases} \text{sgn } f\left(k \frac{\pi}{2} \pm u\right) \cdot \sin u, & k = \textit{par} \\ \text{sgn } f\left(k \frac{\pi}{2} \pm u\right) \cdot \cos u, & k = \textit{impar} \end{cases} \quad \text{Analog pentru}$$

celelalte;

$$\text{În general, } f\left(k \frac{\pi}{2} \pm u\right) = \begin{cases} \text{sgn } f\left(k \frac{\pi}{2} \pm u\right) \cdot f(u), & k = \textit{par} \\ \text{sgn } f\left(k \frac{\pi}{2} \pm u\right) \cdot \textit{cof}(u), & k = \textit{impar} \end{cases}$$

Ecuatii trigonometrice

Fie x un unghi, a un număr real și $k \in Z$.

$$\begin{aligned}\sin x = a, |a| \leq 1 &\Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \text{dacă } a \in [0,1] \\ &= (-1)^{k+1} \arcsin |a| + k\pi, \text{dacă } a \in [-1,0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x = a, |a| \leq 1 &\Rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi, \text{dacă } a \in [0,1] \\ &= \pm \arccos a + (2k+1)\pi, \text{dacă } a \in [-1,0]\end{aligned}$$

$$tgx = a, a \in R \Rightarrow x = \arctg a + k\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = a \Rightarrow x = (-1)^k a + k\pi$$

$$\arccos(\cos x) = a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi$$

$$\arctg(tgx) = a \Rightarrow x = a + k\pi$$

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f(x) = (-1)^k g(x) + k\pi$$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$$

$$tgf(x) = tgg(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in Z$$

Ecuatii trigonometrice reductibile la ecuații care conțin aceeași funcție a aceluiași unghi;

Ecuatii omogene în $\sin x$ și $\cos x$ de forma: $a \sin x + b \cos x = 0$; $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$

Ecuatii trigonometrice care se rezolvă prin descompuneri în factori;

Ecuatii simetrice în $\sin x$ și $\cos x$;

Ecuatii de forma:

$$a \sin x + b \cos x + c = 0; a \Rightarrow \sin x + tg\varphi \cos x = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{c}{a} \cos \varphi\right) + k\pi$$

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observație importantă: Prin ridicarea la putere a unei ecuații trigonometrice pot apărea soluții străine iar prin împărțirea unei ecuații trigonometrice se pot pierde soluții;

FORMULE TRIGONOMETRICHE

$$1. \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \alpha \in R$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

2.

$$tg \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \Rightarrow tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$3. \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \pm \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}};$$

$$4. \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$5. \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$6. \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha;$$

$$7. \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha;$$

$$8. \quad tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}; \quad tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha \cdot tg \beta};$$

9.

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg \alpha \cdot ctg \beta - 1}{ctg \alpha + ctg \beta}; \quad ctg(\alpha - \beta) = \frac{ctg \alpha \cdot ctg \beta + 1}{ctg \alpha - ctg \beta};$$

$$10. \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$11. \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$12. \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$13. \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$14. \quad tg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad ctg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

$$15. \quad tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}; \quad ctg 2\alpha = \frac{ctg^2 \alpha - 1}{2ctg \alpha};$$

$$16. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}};$$

17.

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1};$$

$$18. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}};$$

$$19. \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\operatorname{tga} - \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} \quad \operatorname{ctga} + \operatorname{ctgb} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\operatorname{ctga} - \operatorname{ctgb} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{arctg } x + \text{arcctg } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

11. ECUAȚIILE DREPTEI ÎN PLAN

1. Ecuația carteziană generală a dreptei:

$$\mathbf{ax+by+c=0} \quad (\text{d})$$

Punctul $M(x_0, y_0) \in d \Leftrightarrow a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0$

2. Ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

3. Ecuația dreptei determinată de un punct $M(x_0, y_0)$ și o direcție dată (are panta \mathbf{m})

$$\mathbf{y-y_0=m(x-x_0)}$$

4. Ecuația explicită a dreptei (ecuația normală):

$$\mathbf{y=mx+n}, \text{ unde } m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ este panta}$$

dreptei și n este ordonata la origine.

5. Ecuația dreptei prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a, b \neq 0.$

6. Fie (d): $y=mx+n$ și (d'): $y=m'x+n'$

Dreptele d și d' sunt paralele $\Leftrightarrow m=m'$ și $n \neq n'$.

Dreptele d și d' coincid $\Leftrightarrow m=m'$ și $n=n'$.

Dreptele d și d' sunt perpendiculare $\Leftrightarrow mm' = -1.$

Tangenta unghiului φ a celor două drepte este

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right|$$

7. Fie $d: \mathbf{ax+by+c=0}$ și $d': \mathbf{a'x+b'y+c'=0}$ cu $a', b', c' \neq 0$ și $\theta = m(\langle d, d' \rangle)$

$$\text{Dreptele } d \text{ și } d' \text{ sunt paralele } \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\text{Dreptele } d \text{ și } d' \text{ coincid} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\text{Dreptele } d \text{ și } d' \text{ sunt concurente} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow$$

$$ab' - ba' \neq 0.$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}} \quad \text{unde}$$

$\vec{v}(-b, a), \vec{v}'(-b', a')$ sunt vectorii directori ai dreptelor d și d' .

Dreptele d și d' sunt perpendiculare,

$$d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0$$

8. Fie punctele $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ în plan.

Dreptele AB și CD sunt paralele, $AB \parallel CD$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in R^*, \alpha \vec{AB} = \alpha \vec{CD} \quad \text{sau} \quad m_{AB} = m_{CD}.$$

Dreptele AB și CD sunt perpendiculare,

$$AB \perp CD \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$$

Condiția ca punctele $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ să fie coliniare este:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

9. Distanța dintre punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ este

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

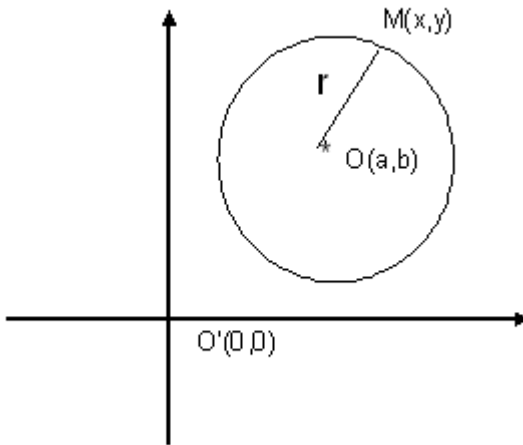
Distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ la o dreaptă h de ecuație (h): $ax + by + c = 0$ este dată de:

$$d(M_0, h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12. CONICE

1. CERCUL

Definiție: Locul geometric al tuturor punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru se numește cerc.



$$C(O, r) = \{M(x, y) \mid OM = r\}$$

1. Ecuația generală a cercului

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

2. Ecuația cercului de centru: $O(a, b)$ respectiv $O(0, 0)$ și raza „ r ”

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 ; x^2 + y^2 = r^2$$

3. Ecuația cercului de diametru $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

4. Ecuația tangentei după o direcție

$$O(0,0) : y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$O(a,b) : y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

5. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$

$$(x \cdot x_0) + (y \cdot y_0) = r^2 \text{ respectiv}$$

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$$

6. Ecuația normală a cercului

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0 \text{ cu}$$

$$O(-m; -n) \text{ și } r^2 = m^2 + n^2 - p$$

7. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + m(x + x_0) + n(y + y_0) + p = 0$$

8. Distanța de la centrul cercului $O(a, b)$ la dreapta de ecuație $y = mx + n$ este

$$d(O, d) = \frac{|ma - b + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ sau } (d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

9. Ecuațiile tangentelor din punctul exterior $M(x_0, y_0)$

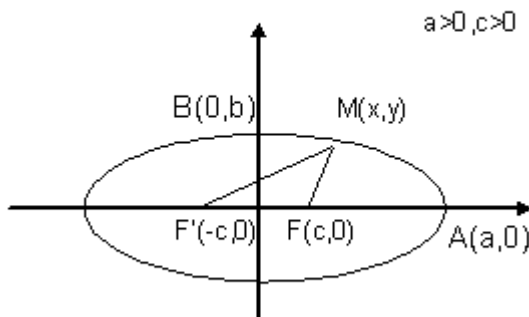
I. Se scrie ecuația 4 și se pune condiția ca M să aparțină cercului de ecuație 4.

II. $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$x^2 + y^2 = r^2, \Delta = 0$$

2. ELIPSA

Definiție: Locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor la două puncte fixe, constantă, se numește elipsă.



F, F' - focare, FF' distanța focală

$$E = \{M(x, y) \mid MF + MF' = 2a\}$$

MF, MF' - raze focale

1. Ecuația elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2$$

2. Ecuația tangentei la elipsă

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

3. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$ la elipsă

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1, \quad m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

4. Ecuațiile tangentelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$ la elipsă

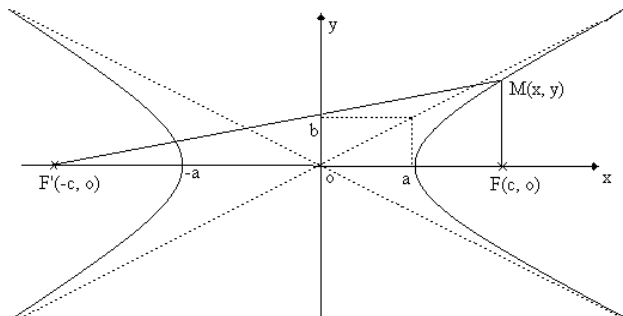
VAR I Se scrie ecuația 2 și se pune condiția ca M să aparțină elipsei de ecuație 2 de unde rezultă m

VAR II Se rezolvă sistemul $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cu condiția } \Delta = 0$$

3. HIPERBOLA

Definiție: Locul geometric al punctelor din plan a căror diferență la două puncte fixe este constantă, se numește hiperbolă



$$H: = \{ M(x,y) \mid |MF - MF^2| = 2a \}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{ --ecuația asimptotelor}$$

1. Ecuația hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2;$$

Daca $a = b \Rightarrow$ hiperbola echilaterală

2. Ecuația tangentei la hiperbolă

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

3. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1, \quad m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

4. Ecuațiile tangențelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$

VAR I. Se scrie ecuația 2 și se pune condiția ca M să aparțină hiperbolei de ecuație 2, de unde rezultă m .

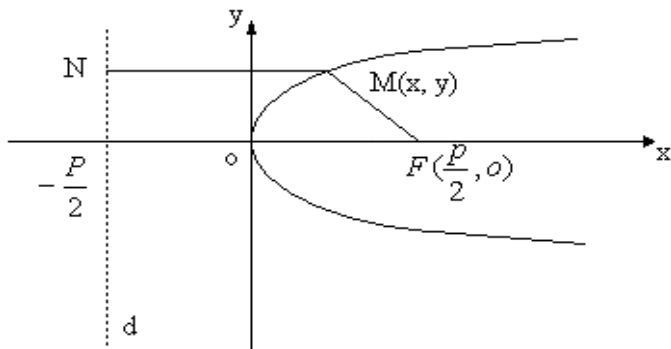
VAR II. Se rezolvă sistemul

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{cu } \Delta = 0$$

4. PARABOLA

Definiție: Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, (numit focar) și o dreaptă fixă (numită directoare), se numește parabolă.



$$P: = \{ M(x, y) \mid MF = MN \}$$

(d): $x = -\frac{P}{2}$ (locul geometric al punctelor din plan de unde putem

duce tangente la o parabolă).

1. Ecuația parabolei

$$y^2 = 2px$$

2. Ecuația tangentei la parabolă

$$y = mx + \frac{P}{2m}$$

3. Ecuația tangentei în $M(x_0, y_0)$

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$

4. Ecuația tangentelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$

VAR I. Se scrie ecuația 2 și se pune condiția ca $M \in$ (ecuația 2) \Rightarrow
m

VAR II. Se rezolvă sistemul

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y^2 = 2px \quad \text{cu } \Delta = 0$$

13. ALGEBRA LINIARĂ

1. MATRICE.

Adunarea matricelor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & a \cdot y \\ a \cdot z & a \cdot t \end{pmatrix}$$

Înmulțirea matricelor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot z & a \cdot y + b \cdot t \\ c \cdot x + d \cdot z & c \cdot y + d \cdot t \end{pmatrix}$$

Transpusa unei matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

2. DETERMINANȚI.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f - c \cdot e \cdot g - f \cdot h \cdot a - i \cdot b \cdot d$$

Proprietăți:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;

5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulțite cu un element a , obținem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulțit cu determinantul matricei inițiale.

6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale atunci determinantul matricei este nul;

7. Dacă la o matrice pătratică A de ordin n presupunem că

elementele unei linii i sunt de forma $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$

atunci $\det A = \det A' + \det A''$;

8. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelate linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.

9. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu același element se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei inițiale;

10. Determinantul Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

11. Dacă într-un determinant toate elementele de deasupra diagonalei principale sau de dedesubtul ei sunt egale cu zero, atunci determinantul este egal cu $a \cdot c \cdot f$;

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f$$

12. Factor comun

$$\begin{vmatrix} a \cdot x & a \cdot y & a \cdot z \\ b \cdot m & b \cdot n & b \cdot p \\ u & v & r \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & r \end{vmatrix}$$

3. Rangul unei matrice

Fie $A \in M_{m,n}(C)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \min(m, n)$.

Definiție: Se numește minor de ordinul r al matricei A , determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecția celor r linii și r coloane.

Definiție: Fie $A \neq O_{m,n}$ o matrice. Numărul natural r este rangul matricei $A \Leftrightarrow$ există un minor de ordinul r al lui A , nenul iar toți minorii de ordin mai mare decât $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Teorema: Matricea A are rangul $r \Leftrightarrow$ există un minor de ordin r al lui A iar toți minorii de ordin $r+1$ sunt zero.

Teorema: Fie $A \in M_{m,n}(C)$, $B \in M_{n,s}(C)$. Atunci orice minor de ordinul k , $1 \leq k \leq \min(m, s)$ al lui AB se poate scrie ca o combinație liniară de minorii de ordinul k al lui A (sau B).

Teorema: Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal cu rangul fiecărei matrice.

Definiție: $A \in M_n(C)$. A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. (A este nesingulară).

Teorema: Inversa unei matrice dacă există este unică.

Observații: 1) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

$$2) A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

$$(A \rightarrow A^c \rightarrow A^* = ((-1)^{i+j} d_{ij})_{i,j} \rightarrow A^{-1})$$

$$3) A^{-1} \in M_n(Z) \Leftrightarrow \det A = \pm 1.$$

Stabilirea rangului unei matrice:

Se ia determinantul de ordinul $k-1$ și se bordează cu o linie (respectiv cu o coloană). Dacă noul determinant este nul rezultă că ultima linie (respectiv coloană) este combinație liniară de celelalte linii (respectiv coloane).

- Un sistem se numește compatibil nedeterminat \Leftrightarrow are o infinitate de soluții;

Rezolvarea matriceală a unui sistem

Fie $A, B \in M_n(C)$.

$$A^{-1} \mid A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X_j = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \overline{b_i}, j = \overline{1, n}.$$

Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:

Teorema lui Cramer: Dacă $\det A \underline{\text{not}} \Delta \neq 0$, atunci sistemul

$$AX=B \text{ are o soluție unică } X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Teorema lui Kronecker- Capelli: Un sistem de ecuații liniare este compatibil \Leftrightarrow rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui Rouché: Un sistem de ecuații liniare este compatibil \Leftrightarrow toți minorii caracteristici sunt nuli.

Notăm cu m -numărul de ecuații;

n - numărul de necunoscute;

r -rangul matricei coeficienților.

I	$m=n=r$	Sistem compatibil determinat	$\Delta \neq 0$
II	$m=r < n$	Sistem compatibil nedeterminat	Minorul principal este nenul
III	$n=r < m$	Sistem compatibil determinat sau	Dacă toți minorii caracteristici sunt nuli

		Sistem incompatibil	Există cel puțin un minor caracteristic nenul
IV	$r < n, r < m$	Sistem compatibil nedeterminat sau	Dacă toți minorii caracteristici sunt nuli
		Sistem incompatibil	Există cel puțin un minor caracteristic nenul

Teorema: Un sistem liniar și omogen admite numai soluția banală $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

14. SIRURI DE NUMERE REALE

1. Vecinătăți. Puncte de acumulare.

Definiția 1 : Se numește șir , o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(n) = a_n$.

Notăm $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_0, a_1, a_2, \dots$ sau $\overline{a_1, a_2, a_3, \dots}$.

Orice șir are o infinitate de termeni; a_n este termenul general al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiția 2 : Două șiruri $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt egale $\Leftrightarrow a_n = b_n, \forall n \geq k \in \mathbb{N}$

Definiția 3: Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numește vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}$, o mulțime V pentru care $\exists \varepsilon > 0$ și un interval deschis centrat în a de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$.

Definiția 4: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$. Un punct $\alpha \in \overline{D}$ se numește punct de acumulare pentru D dacă în orice vecinătate a lui α există cel puțin un punct din $D - \{\alpha\} \Leftrightarrow V \cap (D - \{\alpha\}) \neq \emptyset$. Un punct $x \in D$ care nu e punct de acumulare se numește punct izolat.

2. Șiruri convergente

Definiția 5 : Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent către un număr $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă în orice vecinătate a lui a se află toți termenii șirului cu excepția unui număr finit și scriem $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ sau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

a se numește limita șirului .

Teorema 1: Dacă un șir e convergent , atunci limita sa este unică.

Teorema 2: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Atunci:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton crescător $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ sau

$$a_{n+1} - a_n \geq 0, \text{ sau } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1;$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este stict crescător $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ sau
 $a_{n+1} - a_n > 0, \text{ sau } \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1;$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton descrescător $\Leftrightarrow a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ sau
 $a_{n+1} - a_n \leq 0, \text{ sau } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1;$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător $\Leftrightarrow a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ sau
 $a_{n+1} - a_n < 0, \text{ sau } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$

Definiția 6. Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ astfel încât $|a_n| \leq M$ sau

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha \leq a_n \leq \beta$.

Teorema 3: Teorema lui Weierstrass: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Definiția 7: Dacă un șir are limită finită \Rightarrow șirul este convergent.

Dacă un șir are limită infinită $+\infty$ sau $-\infty \Rightarrow$ șirul este divergent.

Teorema 4: Orice șir convergent are limită finită și este mărginit dar nu neapărat monoton.

Teorema 5: Lema lui Cesaro:

Orice șir mărginit are cel puțin un subșir convergent.

Definiția 8: Un șir e divergent fie dacă nu are limită, fie dacă are o limită sau dacă admite două subșiruri care au limite diferite.

OBS: Orice șir crescător are limită finită sau infinită.

Teorema 6: Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ este un șir strict crescător și

nemărginit atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Un șir

descrescător cu termenii pozitivi este mărginit de primul termen și de 0.

3. Operații cu șiruri care au limită

Teorema 7: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri care au limită:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b.$$

Dacă operațiile

$$a+b, ab$$

$\frac{a}{b}, a^b$ au sens atunci șirurile

$$a_n + b_n, a_n - b_n, \alpha \cdot a_n, a_n \cdot b_n, \frac{a_n}{b_n}, a_n^{b_n} \text{ au limită}$$

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n;$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n;$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim a_n;$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

$$\lim a_n^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}$$

$$\lim(\log_a a_n) = \log_a(\lim a_n)$$

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$$

Prin **convenție** s-a stabilit: $\infty + \infty = \infty$; $a + \infty = \infty, a \in \mathbf{R}$; $a + (-\infty) = -\infty$; $-\infty + (-\infty) = -\infty$; $a \cdot \infty = \infty, a > 0$;

$a \cdot \infty = -\infty, a < 0$; $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$; $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$; $\infty^\infty = \infty$; $\infty^{-\infty} = 0$;

$$0^\infty = 0; \quad \infty^a = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 0 \\ 0, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

Nu au sens operațiile: $\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 1^\infty, 1^{-\infty}, \infty^0$.

Teorema 8: Dacă $|a_n - a| \leq b_n$ și $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Dacă $a_n \geq b_n$ și $b_n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Dacă $a_n \leq b_n$ și $b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

Dacă $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$.

Dacă $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |0|$.

Teorema 9: Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la zero, iar $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir mărginit, atunci șirul produs $a_n \cdot b_n$ este convergent la zero.

4. Limitele unor șiruri tip

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, \text{dacă } q = 1 \\ \infty, \text{dacă } q > 1 \\ \text{nu există, dacă } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p) = \begin{cases} \infty, & a_0 > 0 \\ -\infty, & a_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 \cdot n^p + a_1 \cdot n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 \cdot n^q + b_1 \cdot n^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, \text{dacă } p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, \text{dacă } p = q \\ \infty, \text{dacă } p > q \text{ și } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty, \text{dacă } p > q \text{ și } \frac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\dots \quad \lim_{x_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e \quad \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1 \quad \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1 \quad \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a \quad \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{(1 + x_n)^r - 1}{x_n} = r$$

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^p} = \infty \quad \lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_n^p} = 0$$

15. LIMITE DE FUNCȚII

Definiție: O funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limită laterală la stânga (respectiv la dreapta) în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow$ există $l_s \in \mathbb{R}$ (respectiv $l_d \in \mathbb{R}$) a. î. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_s$, (respectiv $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_d$).

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow x_0 & x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 & x > x_0 \end{array}$$

Definiție: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ un punct de acumulare. Funcția f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0)$

Proprietăți:

1. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ există, atunci această limită este unică.

$$x \rightarrow x_0$$

2. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$

$x \rightarrow x_0$ Reciproc nu.

3. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

4. Fie $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists U$ o vecinătate a lui $x_0 \in D$ astfel încât $f(x) \leq g(x) \forall x \in D \cap U - \{x_0\}$ și dacă există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0 \qquad x \rightarrow x_0 \quad x \rightarrow x_0$$

5. Dacă $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D \cap U - \{x_0\}$ și

$$\exists \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow X_0} h(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow X_0} g(x) = l.$$

$$x \rightarrow X_0 \quad x \rightarrow X_0 \quad x \rightarrow X_0$$

6.

$$|f(x) - l| \leq g(x) \quad \forall x \in D \cap U - \{x_0\} \text{ și}$$

$$\text{Dacă } \lim_{x \rightarrow X_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = l$$

7. Dacă $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = 0$ și $\exists M > 0$ a.î. $|g(x)| \leq M$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

$$\text{Dacă } f(x) \geq g(x) \text{ și } \lim_{x \rightarrow X_0} g(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = +\infty.$$

8.

$$\text{Dacă } f(x) \leq g(x) \text{ și } \lim_{x \rightarrow X_0} g(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = -\infty.$$

OPERAȚII CU FUNCȚII

Dacă există $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow X_0} g(x) = l_2$ și au

sens operațiile $l_1 + l_2, l_1 - l_2, l_1 \cdot l_2, \frac{l_1}{l_2}, l_1^{l_2}, \sqrt[l_1]{l_2}$

atunci:

1. $\lim_{x \rightarrow X_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.

2. $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)g(x) = l_1 \cdot l_2$

$$3. \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$4. \lim f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2}$$

$$5. \lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{l_1}$$

$$P(X) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = a_0 (\pm\infty)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ \infty, & \text{dacă } q > 1 \\ \text{nu} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \text{există,} & \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 \cdot x^p + a_1 \cdot x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 \cdot x^q + b_1 \cdot x^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, \text{dacă } p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, \text{dacă } p = q \\ \infty, \text{dacă } p > q \text{ și } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty, \text{dacă } p > q \text{ și } \frac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

$$a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$a \in (0, 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

$$a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$$

$$a \in (0, 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{(1+u(x))^r - 1}{u(x)} = r$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad \lim_{u(x) \rightarrow \infty} \frac{u(x)^k}{a^{u(x)}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \quad \lim_{u(x) \rightarrow \infty} \frac{\ln u(x)}{u(x)^k} = 0$$

16. FUNCȚII CONTINUE

DEFINIȚIE. O funcție $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește continuă în punctul de acumulare $x_0 \in D \Leftrightarrow$ oricare ar fi vecinătatea V a lui $f(x_0)$, există o vecinătate U a lui x_0 , astfel încât pentru orice

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in V.$$

DEFINIȚIE. $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D \Leftrightarrow f$ are limită în x_0 și $\lim f(x) = f(x_0)$

sau $l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$.

x_0 se numește punct de continuitate.

Dacă funcția nu este continuă în $x_0 \Rightarrow f$ se numește discontinuă în x_0 și x_0 se numește punct de discontinuitate. Acesta poate fi:

- punct de discontinuitate de prima speță dacă $l_s(x_0), l_d(x_0)$ finite, dar $\neq f(x_0)$;

- punct de discontinuitate de a doua speță dacă cel puțin o limită laterală e infinită sau nu există.

DEFINIȚIE. f este continuă pe o mulțime (interval) \Leftrightarrow este continuă în fiecare punct a mulțimii (intervalului).

• Funcțiile elementare sunt continue pe domeniile lor de definiție.

Exemple de funcții elementare: funcția constantă c , funcția identică x , funcția polinomială $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, funcția rațională $f(x)/g(x)$, funcția radical $\sqrt[n]{f(x)}$, funcția logaritmică $\log f(x)$, funcția putere x^a , funcția exponențială a^x , funcțiile trigonometrice $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.

PRELUNGIREA PRIN CONTINUITATE A UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT DE ACUMULARE

DEFINIȚIE. Fie $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f are limita

$l \in \mathbb{R}$ în punctul de acumulare $x_0 \notin D \Rightarrow$

$$f: D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

este o funcție continuă în x_0 și se numește prelungirea prin continuitate a lui f în x_0 .

OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

T₁. Dacă $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în x_0

(respectiv pe D) atunci $f+g, \alpha f, f \bullet g, f/g, f^{\alpha}, \sqrt{f}$

sunt continue în x_0 (respectiv pe D); $\alpha \in \mathbb{R}, g \neq 0$.

T₂. Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e continuă în $x_0 \in D$ (respectiv pe D) $\Rightarrow |f(x)|$ e continuă în $x_0 \in D$ (respectiv pe D).

Reciproca nu e valabilă.

T₃. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continuă în $x_0 \in A$ și $g: B \rightarrow A$ continuă în $x_0 \in B$, atunci $f \circ g$ e continuă în $x_0 \in A$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$

Orice funcție continuă comută cu limita.

PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR CONTINUE PE UN INTERVAL

LEMĂ. Dacă f este o funcție continuă pe un interval $[a, b]$ și dacă are valori de semne contrare la extremitățile intervalului

$(f(a) \bullet f(b) < 0)$ atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

• Dacă f este strict monotonă pe $[a, b] \Rightarrow$ ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o rădăcină în intervalul (a, b) .

f este strict monotonă $\Leftrightarrow f: I \rightarrow J$ - continuă
 $f(I) = J$ - surjectivă
 f - injectivă

Orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită și își atinge marginile.

STABILIREA SEMNULUI UNEI FUNCȚII

PROP. O funcție continuă pe un interval, care nu se anulează pe acest interval păstrează semn constant pe el.

DEFINIȚIE. Fie $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($I = \text{interval}$) f are proprietatea lui Darboux.

$\Leftrightarrow \forall a, b \in I$ cu $a < b$ și $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$ sau $\lambda \in (f(b), f(a)) \Rightarrow \exists c \in (a, b)$, a.î. $f(c) = \lambda$.

TEOREMĂ. Orice funcție continuă pe un interval are P.D.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are P.D. atunci $\Rightarrow f(I)$ e interval.
(Reciproca e în general falsă).

CONTINUITATEA FUNCȚIILOR INVERSE

T₁. Fie $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă a.î. $f(I)$ e interval. Atunci f este continuă.

T₂. Orice funcție continuă și injectivă pe un interval este strict monotonă pe acest interval.

T₃. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale.
Dacă f e bijectivă și continuă atunci inversa sa f^{-1} e continuă și strict monotonă.

17. DERIVATE

FUNȚIA	DERIVATA
C	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
x^a	ax^{a-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
sin x	cosx
cos x	-sinx
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} \arccos x & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \operatorname{arctg} x & \frac{1}{1+x^2} \\ \operatorname{arcctg} x & -\frac{1}{1+x^2} \\ \ln x & \frac{1}{x} \\ \log_a x & \frac{1}{x \ln a} \\ (u^v)' & v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$$

REGULI DE DERIVARE

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(\mathcal{X}f)' = \mathcal{X}f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

18. STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile .

1. Punctele de extrem ale unei funcții.

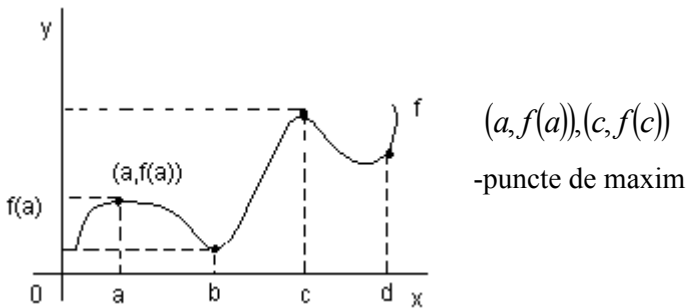
Fie I un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție. Se numește punct de maxim (respectiv de minim)(local) al funcției f , un punct $a \in I$ pentru care există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(x) \leq f(a)$ (respectiv $f(x) \geq f(a)$) $\forall x \in V$.

- Un punct de maxim sau de minim se numește punct de extrem.
- a se numește punct de maxim (respectiv de minim) global dacă $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). $\forall x \in I$.

Obs.1. O funcție poate avea într-un interval mai multe puncte de extrem. (vezi desenul).

Obs.2. O funcție poate avea într-un punct a un maxim (local), fără a avea în a cea mai mare valoare din interval. (vezi desenul $f(a) < f(c)$).



$(b, f(b)), (d, f(d))$ -puncte de minim

TEOREMA LUI FERMAT

Dacă f este o funcție derivabilă pe un interval I și $x_0 \in I$ un punct de extrem, atunci $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică:

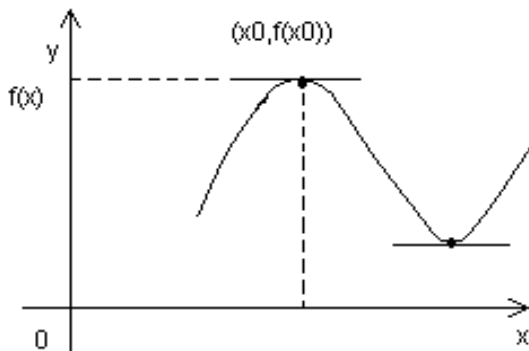
• Deoarece $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu OX .

Obs.1. Teorema este adevărată și dacă funcția este derivabilă numai în punctele de extrem.

Obs.2. Condiția ca punctul de extrem x_0 să fie interior intervalului este esențială.

(dacă ar fi o extremitate a intervalului I atunci s-ar putea ca $f'(x_0) \neq 0$). Ex. $f(x) = x$.

Obs.3. Reciproca T. lui FERMAT nu este adevărată. (se pot găsi funcții astfel încât $f'(x_0) = 0$ dar x_0 să nu fie punct de extrem).



• Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ se numesc puncte critice. Punctele de extrem se găsesc printre acestea.

• Teorema lui Fermat dă condiții suficiente (dar nu și necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

O altă teoremă care dă condiții suficiente pentru ca derivata să se anuleze este :

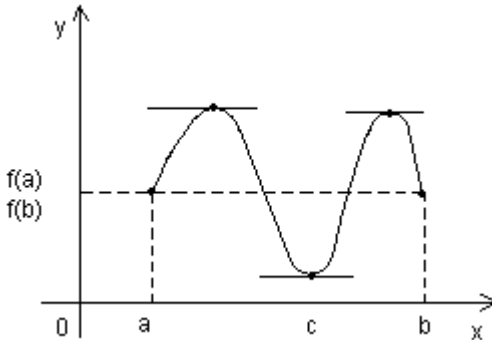
TEOREMA LUI ROLLE.

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$. Dacă:

1. f este continuă pe $[a, b]$;
2. f este derivabilă pe (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$, atunci \exists cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.î $f'(c) = 0$.

INTEPRETAREA GEOMETRICA

Dacă funcția f are valori egale la extremitățile unui interval $[a, b]$, atunci există cel puțin un punct în care tangenta este paralelă cu axa ox .



Consecința 1. Între două rădăcini ale unei funcții derivabile se află cel puțin o rădăcină a derivatei.

Consecința 2. Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcției.

TEOREMA LUI LAGRANGE (sau a creșterilor finite)

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I (interval, $a, b \in I$, $a < b$). Dacă:

1. f este continuă pe $[a, b]$

2. f este derivabilă pe (a, b) , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.î să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ

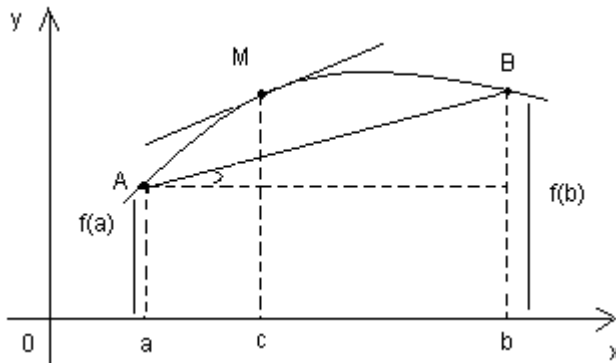
Dacă graficul funcției f admite tangenta în fiecare punct (cu excepția eventual, a extremităților) există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile), în care tangenta este paralelă cu coarda care unește extremitățile.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{tangenta la grafic în } M \text{ are coeficientul.}$$

unghiular $f'(c)$ dar

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Obs.1. Dacă $f(a) = f(b) \Rightarrow$ Teorema lui Rolle.



Consecința 1. Dacă o funcție are derivata nula pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval.

• Dacă o funcție are derivata nula pe o reuniune disjunctă de intervale proprietatea nu mai rămâne adevărată în general.

$$\text{Expl. } f : (0,1) \cup (2,3) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 2, & x \in (2,3) \end{cases}$$

Consecința 2. Dacă f și g sunt două funcții derivabile pe un interval I și dacă au derivatele egale $f' = g'$ atunci ele diferă printr-o constantă. $f - g = c$. $c \in \mathbb{R}$

• Dacă f și g sunt definite pe o reuniune disjunctă de intervale, proprietatea e falsă în general. Expl. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Consecința 3.

Dacă $f'(x) > 0$ pe $I \Rightarrow f$ e strict crescătoare pe I .

Dacă $f'(x) < 0$ pe $I \Rightarrow f$ e strict descrescătoare pe I .

Consecința 4. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ Dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = l \in \bar{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow f$ are derivata în x_0 și $f'(x_0)$.

Dacă $l < \infty \Rightarrow f$ e derivabilă în x_0 .

Consecința 5. Dacă $f'(x) \neq 0$ pe $I \Rightarrow f'$ păstrează semn constant pe I .

ETAPELE REPREZENTĂRII GRAFICULUI UNEI FUNCȚII

1. Domeniul de definiție;

2. Intersecția graficului cu axele de coordonate :

Intersecția cu axa Ox conține puncte de forma $\{x, 0\}$, unde x este o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ {dacă există}.

Intersecția cu axa Oy este un punct de forma $\{0, f(0)\}$ {dacă punctul 0 aparține domeniului de definiție}

3. Studiul continuității funcției pe domeniul de definiție :

Dacă funcția este definită pe \mathbb{R} se studiază limita funcției la $\pm\infty$ iar dacă este definită pe un interval se studiază limita la capetele intervalului.

4. Studiul primei derivate :

a. Calculul lui f' .

b. Rezolvarea ecuației $f'(x)=0$. Rădăcinile acestei ecuații vor fi eventuale puncte de maxim sau de minim ale funcției ;

c. Stabilirea intervalelor pe care semnul lui f' este constant.

Acestea reprezintă intervalele de monotonie pentru f .

5. Studiul derivatei a doua :

a. Se calculează f''

b. Se rezolvă ecuația $f''(x)=0$. Rădăcinile acestei ecuații vor fi eventuale puncte de inflexiune ale graficului

c. Determinarea intervalelor pe care semnul lui f'' este constant.

Astfel, pe intervalele pe care $f'' > 0$ funcția este convexă și pe cele pe care $f'' < 0$, funcția este concavă.

6. Asimptote :

a. Asimptotele orizontale sunt drepte de forma $y=a$, unde

$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ dacă cel puțin una din aceste limite are sens și

există în \mathbb{R} .

b) Asimptotele verticale sunt drepte de forma $x=x_0$, dacă există cel puțin o limită laterală a funcției în x_0 , infinită.

c) Asimptotele oblice sunt drepte de forma $y=mx+n$, unde

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$, analog și pentru

$-\infty$.

7. Tabelul de variație;

8. Trasarea graficului.

19. PRIMITIVE

Primitive. Proprietăți.

Fie I un interval din \mathbb{R} .

Definiția 1. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se spune că f admite primitive pe I dacă $\exists F: I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

- a) F este derivabilă pe I ;
- b) $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

F se numește **primitiva lui f** . (I poate fi și o reuniune finită disjunctă de intervale).

Teorema 1.1 Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f , atunci există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in I$.

Demonstrație : Dacă F_1, F_2 sunt primitive atunci F_1', F_2' sunt

$$\text{derivabile} \Rightarrow F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0, x \in I.$$

$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c, c = \text{constantă}$$

OBS 1. Fiind dată o primitivă F_0 a unei funcții, atunci orice primitivă F a

lui f are forma $F = F_0 + c, c = \text{constantă}$

$\Rightarrow f$ admite o infinitate de primitive.

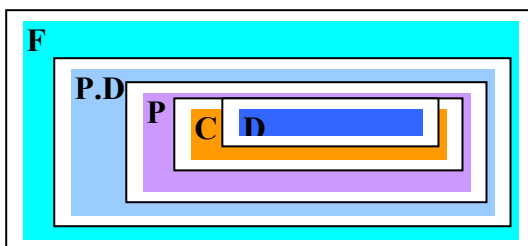
OBS 2. Teorema nu mai rămâne adevărată dacă I este o reuniune disjunctă de intervale
 Expl: $f: \mathbb{R} - \{0\}, f(x) = x^2$

$$F = \frac{x^3}{3}, G = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2 \end{cases}$$

F, G sunt primitive ale lui f dar $F-G$ nu e constantă . Contradicție cu T 1.1

OBS 3. Orice funcție care admite primitive are **Proprietatea lui Darboux**.

Se știe că derivata oricărei funcții are Proprietatea lui Darboux , rezultă că f are Proprietatea lui Darboux. $F' = f$.



OBS 4. Dacă I este interval și $f(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) / x \in I\}$ nu este interval atunci f nu admite primitive.

Dacă presupunem că f admite primitive atunci din OBS 3 rezultă că f are P lui Darboux, rezultă $f(I)$ este interval ceea ce este o contradicție.

OBS 5. Orice funcție continuă definită pe un interval admite primitive.

Definiția 2. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește **integrala nedefinită** a funcției f și se notează prin simbolul $\int f(x) dx$. Operația de calculare a primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește **integrare**.

Simbolul \int a fost propus pentru prima dată de Leibniz, în 1675.

Fie $F(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ Pe această mulțime se introduc operațiile :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in I, \alpha \text{ constantă}$$

$$C = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} / f \in R\}$$

$$\int f(x) dx = \{F \in F(I) / F \text{ primitivă a lui } f\}.$$

Teorema 1.2 Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții care admit primitive și $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, atunci funcțiile $f+g$, af admit de asemenea primitive și au loc relațiile:
 $\int (f+g) = \int f + \int g$, $\int af = a \int f$, $a \neq 0$, $\int f = \int f + C$

Formula de integrare prin părți.

Teorema 1.1 Dacă $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile cu derivatele continue, atunci funcțiile fg , $f'g$, fg' admit primitive și are loc relația:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Formula schimbării de variabilă (sau metoda substituției).

Teoremă: Fie I, J intervale din \mathbb{R} și

$\varphi: I \rightarrow J$, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, funcții cu proprietățile:

1) φ este derivabilă pe I ;

2) f admite primitive. (Fie F o primitivă a sa.)

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \varphi'$ adică:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi + C$$

5. Integrarea funcțiilor trigonometrice

Calculul integralelor trigonometrice se poate face fie folosind **formula integrării prin părți**, fie **metoda substituției**. În acest caz se pot face substituțiile:

1. Dacă funcția este impară în $\sin x$,

$\int (-\sin x, \cos x) dx = -\int (\sin x, \cos x) dx$ atunci $\cos x = t$.

2. Dacă funcția este impară în $\cos x$,

$\int (\sin x, -\cos x) dx = -\int (\sin x, \cos x) dx$ atunci $\sin x = t$.

3. Dacă funcția este pară în raport cu ambele variabile $\int (-\sin x, -\cos x) dx$ atunci $\tan x = t$.

4. Dacă o funcție nu se încadrează în cazurile 1,2,3, atunci se utilizează substituțiile universale:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ unde } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

5. Se mai pot folosi și alte formule trigonometrice:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Integrarea funcțiilor raționale

Definiție: O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, se numește rațională dacă

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, x \in I, \text{ unde } f, g \text{ sunt funcții polinomiale.}$$

Dacă $\operatorname{grad} f \geq \operatorname{grad} g$, atunci se efectuează împărțirea lui f la g
 $\Rightarrow f = qg + r$, $0 \leq \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$ și deci

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}. \text{ Pentru } R(x) \text{ se face}$$

scrierea ca suma de funcții raționale simple.

PRIMITIVELE FUNCȚIILOR CONTINUE SIMPLE

$$1. \int c dx = c \cdot x + C, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctgx} + C$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tgx} + C$$

$$9. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$10. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$12. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$17. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$18. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$19. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$20. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$21. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$22. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$23. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$24. \int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C$$

$$25. \int \frac{1}{(ax + b)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(ax + b)^{n-1}} \cdot \frac{1}{a} + C$$

$$26. \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} + C =$$

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int x \cdot \left(\frac{-1}{2(x^2 + a^2)} \right)' dx$$

$$27. \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \begin{cases} \int \frac{1}{a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]} dx, \Delta > 0 \\ \int \frac{1}{a[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]} dx, \Delta < 0 \end{cases}$$

$$28. \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \ln |ax^2 + bx + c| + C$$

$$29. \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{m(2ax + b) + n}{ax^2 + bx + c} dx = m \cdot \ln |ax^2 + bx + c| + n \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

Bibliografie:

- Arno Kahane. Complemente de matematică, Editura Tehnică, București, 1958.
- C. Năstăsescu, C. Niță, Gh. Rizescui: "Matematică-Manual pentru clasa a IX-a", E.D.P., București, 1982.
- C. Năstăsescu, C. Niță, I. Stănescu: Matematică-Manual pentru clasa a X-a-Algebră", E.D.P., București, 1984.
- E. Beju, I. Beju: "Compendiu de matematică", editura Științifică și Enciclopedică, București, 1996.
- E. Rogai, "Tabele și formule matematice", Editura tehnică, 1983.
- „Mică enciclopedie matematică”, Editura tehnică, București, 1980.
- Luminița Curtui, "Memorator de Matematică-Algebra, pentru clasele 9-12", Editura Booklet, 2006.

Probleme propuse și rezolvate

1. Să se determine numerele întregi a și b astfel încât

$$\sqrt{4\sqrt{6} + 14} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3};$$

Rezolvare:

Ridicăm la puterea a doua expresia dată:

$$4\sqrt{6} + 14 = 2a^2 + 2\sqrt{6}ab + 3b^2;$$

Din egalarea termenilor asemenea între ei rezultă : $ab=2$ și $2a^2+3b^2=14$ rezultă: $a=1$ și $b=2$.

2. Dacă $a - \frac{1}{a} = 7$, să se calculeze $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

Rezolvare:

Ridicăm la puterea a doua relația dată: $(a - \frac{1}{a})^2 = 49$,

$a^2 + \frac{1}{a^2} = 51$ procedând analog se obține

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = 51^2 - 2 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 2599.$$

3. Aflați X din $X \cdot 3^{2008} = (3^{2008} - 1) : (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2007}})$

Rezolvare:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2007}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{2008} - 1}{3^{2008}}, \text{ după formula}$$

$$1 + X + X^2 + \dots + X^n = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}$$

$$\Rightarrow X \cdot 3^{2008} = [3^{2008} - 1] \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{2008}}{3^{2008} - 1} \Rightarrow X = \frac{2}{3}$$

4. Să se calculeze: $\frac{2a - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - a}$ **unde** $a = \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}}$

Rezolvare:

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{11+3}{2}} - \sqrt{\frac{11-3}{2}} = \sqrt{7} - 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 2\sqrt{6} + 4 - 3 - \sqrt{6} = \sqrt{6} + 1$$

5. Știind că $\frac{a}{b} = \sqrt{3} - 1$ **să se calculeze partea întreagă a numărului** $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow a = \sqrt{3} + 1, b = 1 &\Rightarrow \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + 1}{(\sqrt{3} + 1)^2 - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 1}{3 + 2\sqrt{3} + 1 - 1} \\ &= \frac{5 + 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{(5 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})}{9 - 12} = \\ &= \frac{15 - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 12}{-3} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{-3} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{3} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{4\sqrt{3} - 3}{3} \right] = 1$$

6. Se dă numărul $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

Să se arate ca $x^2 = 4$

Să se calculeze $(X+2)^{2007}$

Rezolvare:

a)

$$x = \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} =$$

$$|1-\sqrt{5}| - |1+\sqrt{5}| = -1 + \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} = -2 \Rightarrow x^2 = 4$$

b. $x = -2 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^{2007} = 0$

7. Dacă $\frac{a}{b} = \sqrt{2007}$, să se calculeze $\frac{66b}{a\sqrt{223-9b}}$.

Rezolvare:

$$a = b\sqrt{2007} \Rightarrow \frac{66b}{b\sqrt{2007} \cdot \sqrt{223-9b}} = \frac{66}{223 \cdot 3 - 9} = \frac{66}{660} = \frac{1}{10}$$

8. Să se calculeze suma

$$S = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2007}}.$$

Rezolvare: $S =$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} + \dots + \sqrt{2^{2007}}) +$$

$$+ (\sqrt{2^2} + \sqrt{2^4} + \dots + \sqrt{2^{2006}}) =$$

$$= \sqrt{2}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1003}) +$$

$$+ 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1003} + 1 - 1 =$$

$$= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1003})(\sqrt{2} + 1) - 1 =$$

$$= [(2^{1004}) - 1](\sqrt{2} + 1) - 1.$$

Am adăugat și am scăzut 1.

9. Calculați: $E = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \left(2^{68} - 3^{51} \mid + 2^{68}\right) : 3^{50}$

Rezolvare:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (2^4)^{17} - (3^3)^{17} < 0 &\Rightarrow E = \sqrt{3} + 1 + 2 - \sqrt{3} + (-2^{68} + 3^{51} + 2^{68}) : 3^{50} \\ &= 3 + 3^{51} : 3^{50} = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

10. Determinați $n \in Z$ astfel încât $\frac{\sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{n} \in Z$.

Rezolvare

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{n} &= \frac{|3-\sqrt{5}| + |\sqrt{5}-1|}{n} = \frac{3-\sqrt{5} + \sqrt{5}-1}{n} \\ &= \frac{2}{n} \in Z \Leftrightarrow n \in \{-2, -1, 1, 2\} \end{aligned}$$

11. Să se rezolve ecuația: $(2x-4)(2x-3)(2x+1)(2x+2)=-6$

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu:

$$(2x-4)(2x+2)(2x-3)(2x+1)=-6 \Leftrightarrow (4x^2-4x-8)(4x^2-4x-3)=-6$$

Notam $4x^2-4x-8=t$

$$\Rightarrow t(t-5)=-6 \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Rightarrow t_1=2 \text{ și } t_2=3$$

$$\Rightarrow 4x^2-4x-8=2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} \quad 4x^2-4x-$$

$$8=3 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2}.$$

12 . Se dă ecuația:

$x^2 + 18x + 1 = 0$. Se cere să se calculeze $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației .

Rezolvare :

Fie $A = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$. Se ridică la puterea a treia

$$A^3 = x_1 + x_2 + 3 \sqrt[3]{x_1 x_2} \cdot A$$

Cum $x_1 + x_2 = -18$ $x_1 x_2 = 1$ (Relațiile lui Viete)

$A^3 - 3A + 18 = 0$; Soluția reală a acestei ecuații este $A = -3$;
restul nu sunt reale

$$A^3 + 3A^2 - 3A^2 - 9A + 6A + 18 = 0$$

$$A^2(A+3) - 3A(A+3) + 6(A+3) = 0$$

$$(A+3)(A^2 - 3A + 6) = 0$$

$$A = -3$$

13. Doua drepte perpendiculare între ele în punctul M(3;4) intersectează axa OY în punctual A si OX în punctual B.

a) să se scrie ecuația dreptei AB

b) să se arate ca diagonalele patrulaterului AOBM sunt perpendiculare ,unde 0 este originea sistemului.

Rezolvare :

Scriem ecuațiile dreptelor AM si MB

$$(1) AM : y - 4 = m(x - 3) \text{ cum } AM \perp MB$$

$$(2) MB : y - 4 = -\frac{1}{m}(x - 3)$$

Aflam coordonatele lui A:

$$- \text{ din (1) când } x = 0 \Rightarrow y = 4 - 3m$$

Aflam coordonatele lui B:

$$- \text{ din (2) când } y = 0 \Rightarrow x = 4m + 3$$

Fie $P(x,y)$ mijlocul lui AB

$$\Rightarrow X = \frac{4M + 3}{2}, y = \frac{4 - 3m}{2} \Rightarrow x = \frac{2x - 3}{4}$$

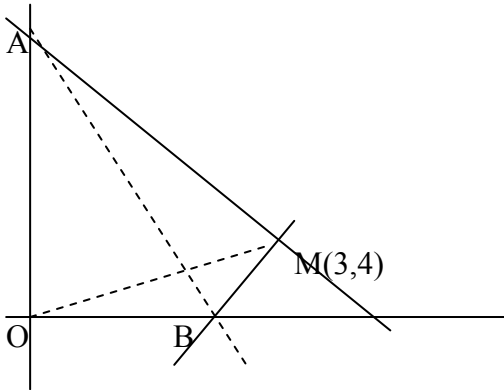
$$\Rightarrow 2y = 4 - 3 \cdot \frac{2x - 3}{4} \Rightarrow 8y = 16 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 8y - 25 = 0 (\text{ec. dreptei } AB)$$

$$\Rightarrow \text{panta dreptei } AB \text{ este } m = -\frac{3}{4}.$$

Panta dreptei OM este evident

$$\frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{om} = -1 \Rightarrow OM \perp AB.$$



14. Se dau punctele $A(2,6)$, $B(-4,3)$, $C(6,-2)$. Se cere:
- perimetrul triunghiului ABC și natura sa ;
 - coordonatele centrului de greutate;
 - ecuația dreptei BC ;
 - ecuația medianei AM și lungimea sa;
 - ecuația înălțimii din A pe BC și lungimea sa ;
 - ecuația dreptei care trece prin A și face un unghi de 30° cu axa OX ;

- g) ecuația dreptei care trece prin A și este paralelă cu BC;
 h) ecuația bisectoarei din A și lungimea ei
 i) aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

a) Aplicând formula distanței pentru cele trei laturi ale triunghiului $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ obținem:

$$AB = 3\sqrt{5}, BC = 5\sqrt{5}, AC = 4\sqrt{5} \Rightarrow P = 12\sqrt{5};$$

Se verifică cu reciproca teoremei lui Pitagora că triunghiul este dreptunghic cu unghiul de 90° în vârful A.

b) Coordonatele centrului de greutate sunt date de formula:

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right);$$

c) Ecuația dreptei BC se scrie folosind formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$\frac{y - 3}{-5} = \frac{x + 4}{10} \Rightarrow 5x + 10y - 10 = 0 \quad x + 2y - 2 = 0$$

(forma generală a dreptei) sau $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (forma normală);

d) Coordonatele mijlocului segmentului BC sunt : $M(1, \frac{1}{2}) \Rightarrow$

ecuația medianei este:

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 6}{\frac{1}{2} - 6} \Rightarrow 11x - 2y - 10 = 0; \text{ Pentru calculul lungimii}$$

medianei AM se poate folosi faptul că într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză:

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}, \text{ altfel se poate aplica formula distanței.}$$

e) Fie AD înălțimea din A \Rightarrow AD și BC sunt perpendiculare ceea ce înseamnă că produsul pantelor este egal cu -1. Cum

panta dreptei BC este $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ panta lui AD este 2. Rămâne să

scriem ecuația dreptei care trece prin A și are panta 2 :

$y-6=2(x-2) \Rightarrow 2x-y+2=0$ este ecuația înălțimii din A;

Pentru calculul înălțimii (într-un triunghi dreptunghic) este convenabil să aplicăm formula:

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5};$$

Altfel, trebuia rezolvat sistemul format din ecuațiile dreptelor BC și AD pentru a determina coordonatele lui D.

f) $y-6=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$; Am aplicat formula $y-y_0=m(x-x_0)$ în condițiile în care panta este $\operatorname{tg}30^\circ$

g) $y-6=-\frac{1}{2}(x-2)$ unde $-\frac{1}{2}$ este panta dreptei BC .

h) Fie AE bisectoarea unghiului A.

Din teorema bisectoarei $k = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$. Folosindu-ne de raportul în care un punct împarte un segment rezultă coordonatele lui E $\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$. Atunci ecuația bisectoarei este:

$$\frac{x-2}{\frac{2}{7}-2} = \frac{y-6}{\frac{6}{7}-6} \Rightarrow 21x-7y=0. \text{ Pentru a calcula lungimea}$$

bisectoarei ne putem folosi și de formula

$$AE = \frac{2AB \cdot AC \cos \frac{A}{2}}{AB + AC} \text{ care este utilizată de obicei când se}$$

cunoaște măsura unghiului a cărei bisectoare se calculează.

$$\Rightarrow AE = \frac{12\sqrt{10}}{7}.$$

i) Aria triunghiului dreptunghic ABC este dată de formula $A =$

$$\frac{AB \cdot AC}{2} = 30.$$

Se va insista pe faptul că dacă triunghiul nu ar fi fost dreptunghic ar fi trebuit să se calculeze distanța de la A la dreapta BC adică tocmai lungimea înălțimii iar aceasta s-ar putea face mai simplu folosind formula :

Distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ la o dreaptă h de ecuație (h): $ax+by+c=0$ este dată de:

$$d(M_0, h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

15. Sa se rezolve ecuația :

$$2006^x - 2005^x = 6 \cdot 2005^{\frac{x}{2}} + 4 \left(2005^{\frac{x}{4}} + 2005^{\frac{3x}{4}} \right) + 1$$

Rezolvare : Ecuația dată este echivalentă cu :

$$2006^x = \left(2005^{\frac{x}{4}} + 1 \right)^4$$

Ridicăm la puterea

$$\frac{1}{4} \Rightarrow 2006^{\frac{x}{4}} = 2005^{\frac{x}{4}} + 1 \Rightarrow 2006^{\frac{x}{4}} - 2005^{\frac{x}{4}} = 1 \quad (x)$$

Din monotonia funcției $f(x) = (1+a)^x - a^x$ care e strict crescătoare \Rightarrow ecuația (x) are soluție unică $\Rightarrow x = 4$

16 . Să se rezolve ecuația:

$$2007^x - 2006^x = 3 \left(2006^{\frac{2x}{3}} + 2006^{\frac{x}{3}} \right) + 1$$

Rezolvare:

Ecuția dată este echivalentă cu:

$$2007 = (2006 + 1)^{\frac{x}{3}} \cdot 3$$

Ridicăm la puterea $1/3 \Rightarrow$

$$2007 = 2006 + 1 \Rightarrow$$

$$2007 - 2006 = 1 \quad (*)$$

Din monotonia funcției $f(x) = (1+a)^x - a^x$ care e strict crescătoare \Rightarrow ecuația (*) are soluție unică: $x = 3$

17. Să se determine numărul de cifre din care este compus numărul 7^{2007} .

Rezolvare:

$$10^2 < abc < 10^3 ; \quad p = 3$$

$$10^3 < \overline{abcd} < 10^4 ; \quad p = 4$$

(*) $10^{p-1} \leq N < 10^p$, unde p reprezintă numărul de cifre ale lui N .

$$\text{Din } (*) \Rightarrow \lg 10^{p-1} \leq \lg N < \lg 10^p \Rightarrow p-1 \leq \lg N < p .$$

$$\text{Pentru } N = 7^{2007} \Rightarrow \lg N = 2007 \lg 7 \approx 1696 \text{ de cifre.}$$

18. Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ e

inversabilă , unde :

$$a = 2005^{2006}$$

$$b = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2006}$$

$$c = 1 + 11 + 111 + \dots + \frac{111\dots 11}{2006 \text{ ori de } 1}$$

$$d = 2006^{2005}$$

Rezolvare :

A e inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ ultima cifră a numărului $\det A$
 $e \neq 0$

$$u(a) = 5$$

$$u(d) = 6$$

$$u(b) = 6 \Rightarrow u(\det A) = 5 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 0 - 6 = 4 \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0.$$

$$u(c) = 6$$

Probleme - sinteze

I. NUMERE REALE. APLICAȚII.

1. Să se calculeze:

- a) $\sqrt{98} - \sqrt{44} - \sqrt{50} + \sqrt{99}$.
- b) $(7\sqrt{2} - 8\sqrt{3}) - (5\sqrt{2} - 6\sqrt{3}) + (-\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$.
- c) $(\sqrt{20} - \sqrt{18}) \cdot (\sqrt{45} + \sqrt{50}) - \sqrt{10}$.
- d) $(5^{20} + |3^{30} - 5^{20}|) : 9^{14}$.
- e) $(|2^{87} - 3^{58}| - 3^{58}) : 16^{20}$.
- f) $\left| \frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} \right| \cdot \frac{12}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.
- g) $5\sqrt{2} + 3 \cdot \left\{ -8\sqrt{3} + 4 \cdot [3\sqrt{2} + 2 \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})] \right\} : 2^2$.
- h) $\frac{12 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{12 + 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}}$.
- i) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{20}} \right) : \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^{-1}$.

$$j) \sqrt{6561} + \sqrt{1225} - \sqrt{5184}.$$

$$k) \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{32}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) : (3\sqrt{2})^{-1}$$

$$l) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$m) \sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}.$$

$$n) \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} - \sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}.$$

$$o) \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}.$$

$$p) \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16x^{16}}}}}{\sqrt{\sqrt{25y^{24}}}}.$$

$$q) \sqrt{3+\sqrt{7}} \cdot (\sqrt{13-\sqrt{7}} - \sqrt{5-\sqrt{7}}).$$

$$r) \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{3}).$$

$$s) \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}.$$

$$t) \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

$$u) \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}.$$

$$v) (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

2. Dacă $a=2006.2007$, arătați că $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}} < 2007$.

3. Să se calculeze numărul $\sqrt{a^2 - b^2}$ pentru $a = 242,5$ și $b = 46,5$

4. Comparați numerele:

$$a = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} + 2\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} + 4(6 - \sqrt{5})$$

$$b = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

5. Dacă $\frac{a}{b} = \sqrt{1996}$, calculați $\frac{3b}{a \cdot \sqrt{499} + 3b}$.

6. Arătați că numărul

$$a = |1,41 - \sqrt{2}| + (2^{51} - 3^{34} + 2^{51}): 3^{25} + 1,41 - \sqrt{2} \text{ e pătrat perfect.}$$

7. Să se arate că expresia

$$E = \frac{2a - b}{a + 2b} \in \mathbb{Q} \text{ știind ca } a = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$b = \sqrt{\sqrt{7} - 1} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$$

8. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E(a) = \sqrt{6a^4 + \sqrt{6a^8 + \sqrt{5a^{16} + \sqrt{16a^{32}}}}, a)0.$$

9. Care număr este mai mare: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ sau $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

10*. Să se arate că: a) $a)\sqrt{5n+7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$b)\sqrt{5n+13} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

11. Să se arate că: a) $\sqrt{3^{2n+2} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$b)\sqrt{2^{2n} \cdot 9^{n+1} + 4^{n+2} \cdot 3^{2n}} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$$

12. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 31 + 32} \in \mathbb{Q}$.

13. Să se afle x știind că $\sqrt{2^x} = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{999}$.

14. Să se afle numerele întregi x pentru care $\sqrt{\frac{2x-4}{x+5}} \in \mathbb{Z}$.

$$a) \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$$

15. Să se verifice egalitățile:

$$b) \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = 3$$

16. Să se ordoneze crescător numerele: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{6}$.

17. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

$$a) \frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} \quad b) \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1} \quad c) \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{5}} \quad d) \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \quad e) \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}}}$$

18. Să se determine rădăcina pătrată a numărului $a = 6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

19. Să se determine cel mai mare număr natural n cu proprietatea:

$$\frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}} \leq 3\sqrt{2}$$

20. Fie a, b, c numere raționale astfel încât $ab + ac + bc = 1$. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathcal{Q}$$

21. Să se demonstreze că $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ nu este un număr rațional.

II. PROGRESII ARITMETICE

1. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ dacă :

a) $a_1 = -3$; $r = 5$ b) $a_1 = 7$; $r = 2$ c) $a_1 = 1,3$; $r = 0,3$

2. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$:

a) $a_1, a_2, 15, 21, 27, \dots$ b) $a_1, a_2, -9, -2, 5, \dots$

3. Să se calculeze primii cinci termeni ai șirului cu termenul general a_n

a) $a_n = 3n + 1$; b) $a_n = 3 + (-1)^n$ c) $a_n = n^2 + n + 1$

4. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică . Dacă se dau doi termeni ai progresiei să se afle ceilalți :

a) $a_3 = 7, a_5 = 13, a_9 = ?, a_{15} = ?$

b) $a_8 = 40, a_{20} = -20, a_7 = ?, a_{10} = ?$

c) $a_6 = 2, a_{10} = 36, a_9 = ?, a_{11} = ?$

d) $a_2 = -5, a_9 = -125, a_7 = ?, a_{19} = ?$

5. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică. Se dau :

$$a) a_1 = -2, r = 0,5 \text{ se cere } a_{12}$$

$$b) a_1 = 3, r = -1,5 \text{ se cere } a_{19}$$

$$c) a_{10} = 131, r = 12 \text{ se cere } a_1$$

$$d) a_{200} = 0, r = -3 \text{ se cere } a_1$$

6. Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice dacă :

$$a) a_5 = 27, a_{27} = 60$$

$$b) a_{20} = 0, a_{60} = -92$$

$$c) a_1 + a_7 = 42, a_{10} - a_3 = 21$$

$$d) a_2 + a_4 = 16, a_1 \cdot a_5 = 28$$

$$e) S_{10} = 8S_5, S_3 = -3$$

$$f) a_1 + a_2 + a_3 = a_7, a_3 + a_4 + a_5 = a_{12} + 2$$

7. Șirul $(x_n)_n$ este dat prin formula termenului general.

a) $x_n = 2n - 5$; b) $x_n = 10 - 7n$. Să se arate că $(x_n)_n$ e o progresie aritmetică.
Să se afle primul termen și rația.

$$a) a_1 = 10, a_{100} = 150$$

8. $\div a_i$. Să se afle S_{100} dacă : b) $a_1 = 2, r = -5$

$$c) a_1 = 5,5, a_{100} = 7,5$$

9. Cunoscând S_n să se găsească :

a) primii cinci termeni ai progresiei aritmetice dacă $S_n = 5n^2 + 3n$; $S_n = 3$

$$n^2 ; S_n = \frac{n^2}{4} - n.$$

b) $a_1 = ?$, $r = ?$ dacă $S_n = 2n^2 + 3n$;

10. Este progresie aritmetică un șir pentru care :

$$a) S_n = n^2 - 2n ; \quad b) S_n = 7n - 1 ; \quad c) S_n = -4n^2 + 11.$$

11. $\div a_i$, $S_{10} = 100$, $S_{30} = 900$. Să se calculeze S_{50} .

12. Determină $x \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele numere să fie în progresie aritmetică.

a) $x-3, 9, x+3$; b) $x^2 + 2, (3x)^2, 4 - 2x + x^2$ c)

$\sqrt{x+2}, 18, \sqrt{x-2}$

13. Să se rezolve ecuațiile :

- a) $1+7+13+\dots+x=280$;
 b) $1+3+5+\dots+x=169$;
 c) $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\dots+(x+28)=155$;
 d) $(x+1)+(x+3)+(x+5)+\dots+(x+25)=338$;
 e) $x+(x+5)+(x+10)+\dots+(x+100)=2100$.

14. Să se arate că următoarele numere sunt în progresie aritmetică :

- a) $(a+b)^2, a^2+b^2, (a-b)^2$;
 b) $\frac{a}{b(a-b)}, \frac{a+b}{2ab}, \frac{b}{a(b-a)}$;
 c) $\frac{a}{x+1}, \frac{x+a-1}{2x}, \frac{x^2+a-1}{x(x+1)}, x \neq -1, x \neq 0$.

15. Să se arate că dacă numerele $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ sunt în progresie aritmetică atunci numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică.

16. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică.

Să se arate că :
$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}, \forall n \geq 2.$$

17. Fie ecuația $ax^2+bx+c=0$ cu soluțiile x_1, x_2 . Dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică atunci există relația : $2(x_1+x_2)+x_1 \cdot x_2 + 1 = 0$

18. Să se demonstreze : a) $\div a^2 - bc, b^2 - ca, c^2 - ab \Leftrightarrow \div a, b, c$
 b)

$$\div a^2 + 2bc, b^2 + 2ca, c^2 + 2ab \Leftrightarrow \div \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$$

c)

$$\div a\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}}, b\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}}, c\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}, d\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}} \Rightarrow \div a^2, b^2, c^2, d^2$$

III. PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$ dacă :

a) $b_1 = 6, q = 2$ b) $b_1 = -24, q = -0,5$

c) $b_2 = -10, q = \frac{1}{2}$ d) $b_2 = 0,5, q = \sqrt{3}$

e) $b_1 = 1, q = 5$

2. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$:

a) $b_1, b_2, 24, 36, 54, \dots$ b) $b_1, b_2, 225, -135.81, \dots$

3. Dacă se cunosc doi termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$

a) $b_3 = 6, b_5 = 24$, să se găsească b_7, b_9, b_{10}

b) $b_5 = 10, b_8 = -10, \dots, b_6, b_{12}, b_3$.

4. Să se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin :

a) $b_1 = 2, b_{n+1} = 3b_n$ b) $b_1 = 4, b_{n+1} = -3b_n$

c) $b_1 = 9, b_{n+1} = 2b_n$ d) $b_1 = 10, b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$

5. Este progresie geometrică un șir pentru care suma primilor n termeni este :

a) $S_n = n^2 - 1$; b) $S_n = 2^n - 1$; c) $S_n = 3^n + 1$

6. Să se determine x a.î. numerele următoare să fie în progresie geometrică :

a) $a+x, b+x, c+x$; b) $2x^2, x^4, 32$; c) $1, x^2, 6 - x^2$;

7. Să se găsească primul termen b_1 și rația q a progresiei geometrice $(b_n)_n$ dacă :

$$\text{a) } \begin{cases} b_2 - b_1 = -4 \\ b_3 - b_1 = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} b_3 - b_2 = 12 \\ b_4 - b_2 = 48 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} b_6 = 25 \\ b_8 = 9 \end{cases}$$

8. Să se calculeze sumele :

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}$

b) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2008}}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{2008}}$

e) $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + 11111 \dots 1$ (de n ori 1)

f) $3 + 33 + 333 + \dots + 33333 \dots 3$

g) $7 + 77 + 777 + \dots + 7777 \dots 7$ (de n ori 7)

h) $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{2007}$

9. Să se rezolve ecuațiile :

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2007} = 0, x \neq 1$

b) $1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \dots + (1 + x)^{2007} = 0, x \neq 0$

IV. LOGARITMI

1. Să se logaritizeze expresiile în baza a : a) $E = a^2 \sqrt[7]{ab^6}$.

b) $E = 4 \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$.

c) $E = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt{a \cdot b^2}}$

2. Să se determine expresia E știind că : $\lg E = 2 \lg a - \frac{1}{2} \lg b - 3 \lg 3$.

3. Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$.

4. Să se calculeze expresiile: a) $11^{\log_{21} 25}$

$$b) 7^{\frac{1}{\log_4 49}}$$

$$c) E = \log_2 25 - \log_2 \left(\frac{20}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{4}{21} \right)$$

$$d) \log_5 (\log_3 (\log_6 216))$$

$$e) \log_2 (\log_5 (\log_3 243))$$

$$f) \frac{\log_5 125 - \log_3 \sqrt[3]{9}}{64^{\log_8 2} + \log_2 \sqrt{2}}$$

$$g) \frac{49^{\log_7 3} + \log_3 81}{\log_2 \sqrt[3]{2} - \log_3 \sqrt{3}}$$

5. Să se arate că expresia: $E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}}$ este independentă de valorile strict mai mari ca 1 ale variabilelor x, y, z .

6. Să se calculeze expresiile: a) $E = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

b) $E = 3^{1+\log_3 7} - 2^{\log_4 121}$

7. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \dots + \log_2 n} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \dots + \log_3 n} + \dots + \frac{1}{\log_n 1 + \log_n 2 + \dots + \log_n n}$$

8. Să se arate că dacă a, b, c sunt în progresie geometrică atunci are loc egalitatea:

$$\frac{2}{\log_b x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} \quad \forall a, b, c \in R^*_{+} - \{1\}, x > 0$$

9. Să se arate că dacă x, y, z sunt în progresie geometrică atunci $\log_a x, \log_b y, \log_c z$ sunt în progresie aritmetică.

PRIMITIVE

1. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții.

1. $\int (3x^5 - 2x^3 + 3x - 2) dx$

2. $\int x(x-1)(x-2) dx$

3. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$

4. $\int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}) dx$

5. $\int (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[5]{x}) dx$

6. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[5]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

7. $\int x \sqrt{(x-1)^3} dx$

8. $\int \left(2x + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx$

9. $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx$

10. $\int (x^5 + 5^x) dx$

11. $\int \left(\frac{5 + 4x}{x} \right)^2 dx$

12. $\int \frac{(x+2)^3}{x^3} dx$

13. $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$

14. $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$

15. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

16. $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$

17. $\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$

18. $\int \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 3}} dx$

19. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

20. $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx$

21. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

2..Să se calculeze primitivile următoarelor funcții compuse.

1. $\int 5 \cdot 2^{5x} dx$
2. $\int 3^{4x} dx$
3. $\int 4 \sin 4x dx$
4. $\int 3 \cos 3x dx$
5. $\int \frac{1}{5x+3} dx$
6. $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$
7. $\int \frac{1}{4x^2-16} dx$
8. $\int \frac{1}{25-9x^2} dx$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 5x} dx$
11. $\int \operatorname{tg} 4x dx$
12. $\int 2 \operatorname{ctg} 2x dx$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+4^2}} dx$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}} dx$

3. Să se calculeze primitivile următoare utilizând metoda integrării prin părți:

1. $\int \ln x dx$
2. $\int x \ln x dx$
3. $\int x^2 \cdot \ln x dx$
4. $\int \frac{1}{x} \ln x dx$
5. $\int \frac{1}{x^2} \ln x dx$
6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$
7. $\int \ln^2 x dx$
8. $\int \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$
9. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$
10. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
11. $\int \cos(\ln x) dx$
12. $\int \sin(\ln x) dx$
13. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$
14. $\int x \ln(x-1) dx$
15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ln(1 + \sqrt{x^2+1}) dx$
16. $\int x \ln \frac{x-1}{x+1} dx$
17. $\int (x^2+1) \cdot e^x dx$
18. $\int x \cdot e^{-x} dx$
19. $\int (x^2+2x) \cdot e^{3x} dx$
20. $\int x^2 \cdot e^x dx$
21. $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$
22. $\int (x^3+5x^2-2) \cdot e^{2x} dx$
23. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$
24. $\int \frac{3 \cdot 2^x + 2 \cdot e^x}{2^x} dx$

25. $\int e^x \cdot \sin x dx$

26. $\int e^x \cdot \cos x dx$

27. $\int e^x \cdot \sin 2x dx$

28. $\int e^x \cdot \cos 2x dx$

29. $\int x \cdot \sin x dx$

30. $\int x \cdot \cos x dx$

31. $\int x^2 \cdot \sin x dx$

32. $\int x^2 \cdot \cos x dx$

33. $\int x^2 \cdot \sin 2x dx$

34. $\int x^2 \cdot \cos 2x dx$

35. $\int x \cdot \sin^2 x dx$

36. $\int x \cdot \cos^2 x dx$

37. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

38. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

39. $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

40. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

41. $\int e^{-x} \cdot \sin^2 x dx$

42. $\int \cos^2(\ln x) dx$

43. $\int x \cdot \sqrt{x^2 - 9} dx$

44. $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 16} dx$

45. $\int x \cdot \sqrt{4 - x^2} dx$

46. $\int \sqrt{x} \ln x dx$

47. $\int \frac{x^2 - 2x + 5}{e^x} dx$

3. Să se calculeze integralele prin metoda substituției

1. $\int (ax + b)^n dx$

2. $\int (2x - 1)^9 dx$

3. $\int x(2x - 1)^9 dx$

4. $\int x(5x^2 - 3)^7 dx$

5. $\int x^2(x^3 + 1)^6 dx$

6. $\int x^k(x^{k+1} + 1)^n dx$

7. $\int x \cdot 7^{x^2} dx$

8. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

9. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

10. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

11. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

12. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

- | | |
|---|--|
| 13. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1} dx$ | 14. $\int x\sqrt{x-1} dx$ |
| 15. $\int \sqrt{2x+5} dx$ | 16. $\int x\sqrt{1+x^2} dx$ |
| 17. $\int x^3 \sqrt{1-x^4} dx$ | 18. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2} dx$ |
| 19. $\int \sqrt[3]{2x+5} dx$ | 20. $\int \sqrt{x^2-6x-7} dx$ |
| 21. $\int \sqrt{-x^2-x+2} dx$ | 22. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ |
| 23. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$ | 24. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ |
| 25. $\int \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 26. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$ |
| 27. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+2x-3}} dx$ | 28. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x+4}} dx$ |
| 29. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}} dx$ | 30. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ |
| 31. $\int \frac{1}{x(1+\ln x)^4} dx$ | 32. $\int \frac{1}{x(\ln^2 x+8)} dx$ |
| 33. $\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}} dx$ | 34. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ |
| 35. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$ | 36. $\int x^3 \sqrt{x^2+2} dx$ |
| 37. $\int \frac{1}{x(2005+\ln x)^{2006}} dx$ | 38. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ |

4. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții trigonometrice:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ | 2. $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$ |
| 3. $\int \sin(2x+5) dx$ | 4. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$ |

5. $\int (tgx + tg^3 x) dx$ 6. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$
7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ 8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$
9. $\int \frac{x}{1 - \cos x} dx$ 10. $\int \sin^3 x dx$
11. $\int \cos^3 x dx$ 12. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
13. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx$ 14. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - (\cos^2 x)^2}} dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin^2 x} dx$ 16. $\int \frac{1}{\sin x} dx$
17. $\int \frac{1}{\cos x} dx$ 18. $\int \sin^{10} x \cdot \cos^3 x dx$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot (2005 + \arcsin x)^{2006}} dx$ 20. $\int \frac{(\arctg x)^{2006}}{1 + x^2} dx$

5. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții raționale:

1. $\int \frac{1}{3x + 5} dx$ 2. $\int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx$ 3. $\int \frac{x}{x + 4} dx$
4. $\int \frac{1 - 3x}{2x + 3} dx$ 5. $\int \frac{1}{(2x + 3)^{2005}} dx$ 6. $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$
7. $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$ 8. $\int \frac{x^2}{x^2 - 2} dx$ 9. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$
10. $\int \frac{1}{3x^2 + 5} dx$ 11. $\int \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} dx$
12. $\int \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx$ 13. $\int \frac{1}{x(x + 2)} dx$

14. $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

16. $\int \frac{1}{3x^2 + x + 1} dx$

18. $\int \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 1} dx$

20. $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 5x + 6} dx$

22. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx$

24. $\int \frac{x}{x^4 + \frac{1}{4}} dx$

26. $\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx$

28. $\int \frac{x}{(x - 1)^{10}} dx$

15. $\int \frac{1}{2x^2 - x - 3} dx$

17. $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

19. $\int \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 5} dx$

21. $\int \frac{5x - 2}{x^2 + 4} dx$

23. $\int \frac{x^2}{x^6 - 3} dx$

25. $\int \frac{2x}{1 + x^4} dx$

27. $\int \frac{x^3}{(x - 1)^{12}} dx$

29. $\int \frac{x^2}{x^6 + 4} dx$

ISTORICUL NOȚIUNILOR MATEMATICE

➤ **Sec. 18 î.e.n.** mesopotamienii creează primele tabele de înmulțire;

➤ **sec. 6 î.e.n.** este cunoscută asemănarea triunghiurilor de către **Thales**;

➤ **Sec. 5 î.e.n.** pitagorienii introduc noțiunile de număr prim, număr compus, numere relativ prime, numere prime perfecte;

➤ **Sec. 4 î.e.n.**

Aristotel (384-322 î.e.n) filozof grec a introdus noțiunile de perimetru, teoremă, silogism.

➤ **Sec. 3 î.e.n.**

▶ Matematicianul grec **Euclid**(330-275 î.e.n) cel care a întemeiat celebra școală din Alexandria (în 323 î.e.n) a introdus noțiunile de semidreaptă, tangentă la o curbă, puterea unui punct față de un cerc sau sferă, sau denumirile de paralelogram, poliedru, prismă, tetraedru. A enunțat teorema catetei și a înălțimii pentru un triunghi dreptunghic și a demonstrat concurența mediatoarelor unui triunghi;

▶ **Apolonius din Perga**(262-200 î.e.n), unul din cei mai mari geometri ai antichității introduce pentru prima dată denumirile pentru conice, de elipsă, hiperbolă, parabolă și noțiunile de focare, normale și definește omotetia și inversiunea și dă o aproximare exactă a lui π cu patru zecimale.

▶ este dată aria triunghiului în funcție de laturi sau în funcție de raza cercului înscris și semiperimetru;

▶ **Eratostene din Cyrene**(275-195 î.e.n) introduce metoda de determinare a tuturor numerelor prime mai mici decât un număr dat, metodă cunoscută sub numele de „Ciurul lui Eratostene”

► în prima carte din „Elementele” lui Euclid este cunoscută teorema împărțirii cu rest și „algoritmul lui Euclid” pentru aflarea c.m.m.d.c. a două numere întregi

➤ **85-168** matematicianul grec **Ptolemeu** prezintă în cartea sa „Almagest”, pe lângă vaste cunoștințe de astronomie și trigonometrie și diviziunea cercului în 360 de părți congruente și exprimarea acestora în fracții sexagesimale.

➤ **Sec. 3** s-a dat formularea teoremei celor trei perpendiculare de către **Pappos**; acesta a mai dat și definiția conicelor precum și teorema despre volumul corpurilor de rotație

➤ **Sec. 7**

► sunt cunoscute regulile de trei directă și inversă de către **Bragmagupta**, matematician indian;

► **Arhimede**(287-212 î.e.n) precursor al calculului integral, a determinat aria și volumul elipsoidului de rotație și ale hiperboloidului de rotație cu pânze.

➤ **1202- Leonardo Fibonacci** (1170-1240) matematician italian introduce notația pentru fracția ordinară;

➤ **1228-** Fibonacci introduce denumirea pentru numărul zero, precum și sistemul de numerație zecimal. Tot prin opera sa „Liber abaci” sunt introduse pentru dată în Europa numerele negative, fiind interpretate ca datorii;

➤ **1150-** este descrisă extragerea rădăcinii pătrate și a celei cubice în cartea „Lilavati” a matematicianului indian **Bhaskara**(1114-1185), tot el prezintă și operațiile de înmulțire și împărțire cu numere negative;

➤ **1515-** rezolvarea ecuațiilor de gradul al treilea cu o necunoscută de către Scipio del Fero, iar mai târziu de **Niccolo Tartaglia** în 1530, și pe acelea de gradul al patrulea de Ludovico Ferrari în 1545. Acestea au fost făcute cunoscute abia în 1545 de către Girolamo Cardano(1502-1576) în lucrările sale, deși promisese autorilor lor să nu le divulge;

- **1591**-matematicianul francez **Francois Viete**(1540-1603) introduce formulele cunoscute sub numele de relațiile lui Viete;
- **1614**- inventarea logaritmilor naturali de către **John Neper**(1550-1617);
- **1637**- este introdusă noțiunea de variabilă de către **Rene Descartes**(1596-1650), cel care a introdus literele alfabetului latin pentru notații și a folosit coordonatele carteziene (definite după numele său), reducând problemele de geometrie la probleme de algebră;
- **1640**- este introdusă denumirea pentru cicloidă de către **Galileo Galilei** (1564-1642);
- **1654**- începutul creării teoriei probabilităților datorat corespondenței dintre **Pierre Fermat**(1601-1665) și **Blaise Pascal**(1623-1662) și dezvoltarea combinatoricii odată cu apariția lucrării lui Pascal, „Combinatîones”;
- **1656**- matematicianul englez **John Wallis**(1616-1703) introduce simbolul ∞ cu notațiile $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$ și a denumirilor de interpolare respectiv mantisă
- **1670**- este determinat semnul sinusului și desenată sinusoida respectiv secantoida de către John Wallis);
- **1678**- este dată teorema lui Ceva de către **Ceva Giovanni**(1648-1734);
- **1679**- în „Varia opera mathematica” apărută postum, a lui Pierre Fermat(1601-1665), a fost dată „Marea teoremă a lui Fermat”, reguli de integrare, definiția derivatei.
- **1692**- este scris primul manual de calcul integral de către matematicianul elvețian **Jean Bernoulli**(1667-1748)” *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque*”, tipărit abia în 1742 și de asemenea a mai scris un manual de calcul diferențial, descoperit abia în 1920.
„Regula lui l’Hospital” este dată de către Jean Bernoulli lui Guillaume de l’Hospital pe care acesta o publică în 1696;

- **1690-** este propusă denumirea de integrală de către **Jacques Bernoulli**(1654-1705)
- **1692-** sunt descoperite proprietățile spiralei logaritmice (Jacques Bernoulli)
- **1694-** este descoperită curba numită lemniscată, caracterizată de inegalitatea $(1+x)^n \geq 1+nx$ (Jacques Bernoulli);
- **1696-1697-** introducerea calculului variațional, punerea problemei izoperimetrelor de către Jean Bernoulli.
- **1705-** este dată „Legea numerelor mari” de către Jacques Bernoulli;
- **1711-** realizarea dezvoltării în serie a funcțiilor e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, de către matematicianul englez **Isaac Newton**(1642-1727) cel care a pus bazele calculului diferențial și integral concomitent cu **Gottfried Leibniz**(1646-1716);
- **1729-** este demonstrată existența rădăcinilor complexe în număr par a unei ecuații algebrice cu coeficienți reali de către **Mac Laurin Colin**(1698-1746);
- **1731-** utilizarea sistemului de axe perpendiculare pentru a determina poziția unui obiect în funcție de cele trei coordonate;
- **1733-** crearea trigonometriei sferoidale de către **Alexis Clairaut**(1713-1765);
- **1735-** Matematicianul elvețian Leonhard Euler(1707-1783) introduce și calculează constanta $e = \lim(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0,577215\dots, n \rightarrow \infty$;
- **1739-** introducerea conceptului de integrală curbilinie de către Alexis Clairaut;
- **1746-** relația lui Stewart este demonstrată de **Mathew Stewart** după ce în prealabil ea îi fusese comunicată de către Robert Simson în 1735;
- **1747**
 - ▶este enunțată problema celor trei corpuri de către Clairaut;

- ▶ introducerea metodei multiplicatorilor nedeterminați în studiul sistemelor de ecuații diferențiale de către **Jean Le Rond D'Alembert**(1717-1783);
- ↻ **1750- Gabriel Cramer** dă o regulă de rezolvare a sistemelor cunoscută sub denumirea de metoda lui Cramer;
- ↻ **1755-** sunt puse bazele calculului variațional de către Lagrange(1736-1813) concomitent cu Euler,
- ↻ **1765-** începutul creării geometriei descriptive de către **Gaspard Monge**(1746-1818);
- ↻ **1766-** crearea mecanicii analitice de către **Joseph Lagrange**(1736-1813) cu enunțarea principiului vitezelor virtuale și a ecuațiilor Lagrange;
- ↻ **1767-** demonstrarea iraționalității lui π de către **Heinrich Lambert**(1728-1777);
- ↻ **1768-** demonstrarea existența factorului integrant la ecuațiile diferențiale de ordinul întâi de către **D'Alembert**;
- ↻ **1771-** a fost dată ecuația planului normal și formula distanței dintre două puncte din spațiu de către matematicianul francez G. Monge;
- ↻ **1775-** introducerea noțiunilor de soluție generală și soluție particulară în teoria ecuațiilor diferențiale de către **Leonhard Euler**; acesta a introdus și funcția $\varphi(n)$ - indicatorul lui Euler, precum și notațiile e , i , $f(x)$ și a creat teoria fracțiilor continue;
- ↻ **1780-** au fost introduse liniile de curbură ale suprafețelor(G. Monge);
 - ▶ sunt descoperite funcțiile automorfe de matematicianul francez Henri Poincare(1854-1912);
- ↻ **1785-** a fost dată ecuația planului tangent(G. Monge);
- ↻ **1796-** este dată „Teorema lui Fourier” de determinare a numărului rădăcinilor reale cuprinse într-un interval, de către Joseph Fourier(1768-183);
- ↻ **1797-** este dată formula creșterilor finite, cunoscută sub denumirea de „teorema lui Lagrange”;

➤ **1798-** au fost considerate cosinusurile directe ale unei drepte (G. Monge); este introdus simbolul $[\cdot]$, pentru partea întreagă de către Arien Marie Legendre (1752-1833);

➤ **1807-**, 1822 sunt date seriile Fourier care au contribuit la crearea teoriei analitice a căldurii.

➤ **1812-** este introdusă seria hipergeometrică de către Carl Friedrich Gauss (1777-1855) matematician german, cel care a demonstrat teorema fundamentală a algebrei;

➤ **1816-1835- Augustin Cauchy** (1789-1857), fondatorul analizei matematice moderne, a enunțat criteriul de convergență al seriilor, criteriu care-i poartă numele, a dat primele teoreme de existență din teoria ecuațiilor diferențiale și al ecuațiilor cu derivate parțiale, a introdus noțiunile de afix, modul al unui număr complex, numere conjugate, transpoziție;

➤ **1820-** introducerea noțiunii de raport anarmonic de către **Chasles Michel** (1793-1880), fondatorul geometriei proiective alături de matematicianul francez Jean Poncelet;

➤ **1822**

▶ introducerea funcțiilor Bessel de către **Friedrich Bessel**;

▶ este introdusă notația pentru integrala definită

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ de către } \mathbf{Fourier.};$$

▶ este propusă denumirea de reprezentare conformă de către Gauss;

▶ cercul lui Euler sau cercul celor nouă puncte este considerat pentru prima dată de către Charles Brianchon, Jean Poncelet și Karl Feuerbach, atribuindu-se din greșeală numele lui Euler acestei teoreme;

- ↪ **1823-1831-** începutul creării primei geometrii neeuclidiene de către **Janoş Bolyai**(1802-1860) concomitent și independent de cea a lui Lobacevski.
- ↪ **1824-**
 - ▶ este dată denumirea de geometrie neeuclidiană de către Gauss;
 - ▶ **Niels Abel**(1802-1829) demonstrează imposibilitatea rezolvării cu ajutorul radicalilor, a ecuațiilor algebrice de grad mai mare decât patru;
- ↪ **1825-** Abel introduce integralele ce-i poartă numele;
- ↪ **1827-** este creată teoria funcțiilor eliptice de către Abel;
- ↪ **1828**
 - ▶sunt introduse formele fundamentale ale suprafețelor și curburii totală a unei suprafețe(curbura Gauss) de către Gauss;
 - ▶demonstrarea teoremei lui Fermat pentru $n=5$ de către matematicianul german **Dirichlet** (1805-1859);
- ↪ **1830-** este propusă denumirea de grup cu înțelesul actual de către matematicianul francez Evariste Galois(1811-1832);
- ↪ **1831-** definitivarea calculului cu numere complexe de către Gauss ;
- ↪ **1834-** introducerea noțiunii de factor de discontinuitate, referitor la integralele
- ↪ **1837-** introducerea notațiilor pentru limite laterale de către Dirichlet și a funcției care îi poartă numele, funcția Dirichlet;
 - W. Hamilton introduce termenul de asociativitate a unei legi de compoziție;
- ↪ **1839-** introducerea noțiunii de integrale multiple(Dirichlet);
- ↪ **1840-** este dată o formă a eliminantului a două ecuații algebrice de către **James Sylvester**(1814-1897), matematician englez;
- ↪ **1841-** descoperirea invarianților de către matematicianul irlandez George Bole (1815-1864);

introducerea noțiunilor de margine inferioară și superioară ale unei funcții, de convergență uniformă de către **Weierstrass**(1815-1897);

➤ **1843-** descoperirea cuaternionilor de către **William Hamilton** (1805-1865);

➤ **1845-** „Teorema limită centrală” este dată de matematicianul rus **Pafnuti Cebâșev**;

➤ **1846-** Legea numerelor mari – **Cebâșev**;
introducerea variabilei complexe în teoria numerelor imaginare de către D’Alembert;

➤ **1847**

▶ este introdus calculul logic de **George Boole**, creatorul algebrei booleene;

▶ este introdusă noțiunea de ideal de către **Ernest Kummel**(1810-1893);

➤ **1851-** sunt introduse noțiunile de rang și semnătură a unei forme pătratică și sunt propuse noțiunile de matrice și jacobian(J. Sylvester);

introducerea suprafețelor riemann de către matematicianul german Bernhard Riemann(1826-1866), lui datorându-se studiul integralei definite.

➤ **1852-** introducerea segmentelor orientate \overrightarrow{AB} de către Chasles Michael(1793-188) care a formulat și proprietățile axei radicale a două cercuri precum și a conicelor și cuadrivelor.

➤ **1853-** Kronecker(1823-1891) introduce notația $|a_{ij}| = \det(a_{ij})$;

➤ **1854-** este introdusă noțiunea de oscilație într-un punct de către Riemann care creează o nouă geometrie neeuclidiană, numită geometria sferică;

➤ **1858-** crearea calculului matriceal de către **Arthur Cayley**(1821-1895) matematician englez ;

➤ **1871 Dedekind** introduce noțiunile de corp și modul ceea ce în limbajul actual exprimă noțiunile de subcorp și Z-submodul ale lui C. Tot el introduce mulțimea întregilor unui corp de numere algebrice, definind și

idealele acestei mulțimi și demonstrează teorema fundamentală de descompunere unică a oricărui ideal în produs de ideale prime;

➤ **1872-**

▶ introducerea structurilor de subinel și modul de către **Dirichlet**;

▶ introducerea numerelor raționale prin tăieturi de către **Dedekind**;

➤ **1873- Charles Hermite**(1822-1901) demonstrează

transcendența numărului $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,718281\dots$

➤ **1874-** este dată denumirea de subgrup de către **Sophus Lie**(1842-1899);

➤ **1874-1897-** crearea teoriei mulțimilor de către **Georg Cantor**(1845-1918). El a introdus noțiunile de mulțime deschisă, mulțime închisă, mulțime densă, mulțime bine ordonată, mulțime numărabilă, punct de acumulare, punct izolat, produs cartezian, reuniune, intersecție.

➤ **1878-** rezolvarea problemei celor patru culori pentru colorarea hărților de către **Cayley**;

➤ **1880-**sunt descoperite funcțiile automorfe de matematicianul francez **Henri Poincare**(1854-1912);

➤ **1882- Ferdinand Lindemann**(1852-1939) a demonstrat transcendența numărului $\pi = 3,141592\dots$; (un număr se numește transcendent dacă nu este soluția niciunei ecuații algebrice cu coeficienți raționali); tot el demonstrează imposibilitatea cvadraturii cercului cu rigla și compasul;

1893- H. Weber, asociază conceptului de corp, sensul de astăzi, ca o structură cu o lege de grup aditiv și o înmulțire asociativă, distributivă și în care orice element e inversabil;

➤ **1897-** introducerea denumirii de inel de către **Hilbert**(1862-1943);

➤ **1899** -axiomatizarea geometriei de către **David Hilbert**;

- **1900-** introducerea axiomatică a numerelor întregi(D.Hilbert);
- **1905-** este introdusă noțiunea de distanță între două mulțimi închise de către matematicianul român Dimitrie Pompeiu(1873-1954);
- **1910-** este introdusă denumirea de funcțională de către **Jacques Hadamard** (1865-1963), unul din fondatorii analizei funcționale;
- **1912** -este descoperită noțiunea de derivată areolară(Pompeiu)
- **1927-s-a** stabilit formula Onicescu referitoare la geodezice dată de **Octav Onicescu**(1892-1983);
- **1928** -este introdusă funcția areolar-conjugată de către matematicianul român **Miron Nicolescu**(1903-1975);
- **1933** -introducerea funcțiilor convexe de ordin superior de către Tiberiu **Popoviciu**(1906-1975);
- **1936** -Matematicianul român **Gheorghe Mihoc**(1906-1981) dă o metodă cunoscută sub numele de metoda Schulz-Mihoc, de determinare a legilor limită ale unui lanț Markov;
- **1941** -teorema lui Moisiil referitoare la geodezicele unui spațiu riemannian este introdusă de **Grigore Moisiil**(1906-1973);
- **1944** -este introdusă în domeniul algebrei moderne noțiunea de semnătură de către matematicianul român **Dan Barbilian**(1895-1961);
- **1950** -este introdusă noțiunea de Δ - derivată de către Dan Barbilian;
- **1996** -celebra conjectură a lui Fermat este demonstrată de către **Andrew Wiles** de la institutul Isaac Newton din Cambridge.
- **2000** -este determinat cel mai mare număr prim $2^{6972593} - 1$, având două milioane de cifre, obținut cu ajutorul a 20 de mii de calculatoare puse în rețea;

BIBLIOGRAFIE.

- 1: N. Mihăileanu- Istoria matematicii, vol.1, vol2., Editura Științifică și enciclopedică; București, 1974/ 1981;
- 2: Vasile Bobancu- Caleidoscop matematic, Editura Niculescu;
3. Neculai Stanciu, 100 de probleme rezolvate. Editura Rafet;
4. Mică enciclopedie matematică, Editura Tehnică, București

Cuprins

Aplicații ale numerelor complexe în geometrie.....	5
Sinteze matematice	
Mulțimea numerelor reale.....	37
Inegalități.....	42
Mulțimi. Operații cu mulțimi.....	45
Progresii.....	47
Funcții.....	50
Numere complexe.....	56
Funcția exponențială și logaritmică.....	59
Binomul lui Newton.....	63
Vectori și operații cu vectori.....	65
Funcții trigonometrice.....	69
Formule trigonometrice.....	72
Ecuatiile dreptei în plan.....	75
Conice.....	77
Algebră liniară.....	82
Șiruri de numere reale.....	88
Limite de șiruri.....	93
Funcții continue.....	98
Derivate.....	101
Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	103
Primitive.....	109
Probleme propuse și rezolvate.....	117
Probleme.sinteze.....	128
Istoricul noțiunilor matematice.....	143

