Laura Radu

POLINOAME

Ploieşti
2013

POLINOAME

(EDIȚIE ELECTRONICĂ ONLINE, 2013)

Autor: **LAURA RADU**

ISBN 978-973-0-14632-2

Site web: www.mateinfo.ro

CUPRINS

INTRODUCERE

Polinoamele constituie un domeniu foarte important şi bine studiat al algebrei tradiționale. Numeroase probleme de matematică dintre cele mai diverse, sunt enunțate şi rezolvate cu ajutorul polinoamelor.

Prezenta lucrarea se adresează elevilor de clasa a XII-a care studiază Matematică-M2 şi reprezintă un mijloc de fixare a cunoştințelor despre polinoame.

Cartea respectă programa specifică profilului şi are ca scop formarea de competențe la elevi în învățarea polinoamelor.

Lucrarea este structurată pe trei capitole. Primele două capitole cuprind noțiuni teoretice referitoare la polinoame: forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame, divizibilitatea polinoamelor, rădăcini ale polinoamelor, relațiile lui Viète şi rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior.

Capitolul trei conține diverse probleme rezolvate prin care se fixează noțiunile teoretice prezentate în primele două capitole.

Polinoamele constituie o etapă fundamentală în formarea capacităților de abstractizare a elevilor. Calculul cu polinoame stă la baza celor mai multe tehnici matematice.

Autorul

CAPITOLUL I
INELE DE POLINOAME

1.1. Inelul polinoamelor în nedeterminata X

Se consideră un inel comutativ şi unitar A şi mulțimea tuturor funcțiilor de la N la A, adică $A^N = \{f / f : N \to A\}$.

Un element f din mulțimea A^N, fiind o funcție, se reprezintă cu ajutorul valorilor sale sub forma $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, ..) = (a_i)_{i\in N}$.

Dacă $f, g \in A^N$, $f = (a_i)_{i\in N}$, $g = (b_i)_{i\in N}$ atunci $f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in N$.

Pe mulțimea A^N se definesc două legi de compoziție interne, adunarea şi înmulțirea polinoamelor.

Fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ şi $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ două polinoame din A^N. Polinomul $f+g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ se numeşte suma polinoamelor f şi g, iar polinomul $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_r \ldots\ldots\ldots)$, , unde:

$c_0 = a_0 b_0$,

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$,

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$,

…………………………..

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_r b_0 = \sum_{i=0}^{r} a_r b_{r-i} = \sum_{i+j=r} a_i b_j$$

....

se numeşte produsul polinoamelor f şi g.

Exemplu.

Dacă f = (-2, 1, 3,-4, 0, 0,…...) şi g = (1, 0, -1, 1, 0, 0, …...), atunci suma lor este: $f+g$ = (-1, 1, 2, -3, 0, 0,…...), iar produsul lor este:

fg = (-2·1, -2·0+1·1, (-2)·(-1)+1·0+3·1, -2·1+1·(-1)+3·0+(-4)·1, -2·0+1·1+3·(-1)+(-4)·0+0·1, (-2)·0+1·0+3·1+(-4)·(-1), -4, 0, 0, ...…) = (-2, 1, 5, -7, -2, 7, -4, 0,…...).

Polinoamele de forma $(a,0,0,0,...) = a$ se numesc polinoame constante.

Deci $\left(A^N,+,\cdot\right)$ este o structură algebrică bine definită.

Cele două operaţii definite anterior verifică următoarele proprietăţi:

Asociativitatea şi comutativitatea adunării

Fie $f,g,h \in A^N, f = (a_i)_{i\in N}, g = (b_i)_{i\in N}, h = (c_i)_{i\in N}$.

Atunci, pentru orice $i \in N$ avem $a_i + b_i = b_i + a_i$ şi $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$, deoarece adunarea în A este comutativă şi asociativă.

Rezultă că $f + g = g + f$ şi $(f+g)+h = f+(g+h)$, oricare ar fi f, g şi h, deci adunarea pe A^N este comutativă şi asociativă.

Elementul neutru şi elementul simetrizabil faţă de adunare

Există în A^N element neutru faţă de adunare, şi anume funcţia

$0 : N \to A,\ 0(i) = 0, \forall i \in N.$ Pentru orice $f \in A^N, f = (a_i)_{i\in N}$, opusul său este $-f \in A^N$ şi $f + (-f) = (-f) + f = 0.$

Exemplu.

$f = (1,-2,0,6,...) \in A^N \Rightarrow -f = (-1,2,0,-6,...).$

Comutativitatea şi asociativitatea înmulţirii

Înmulţirea pe A fiind comutativă rezultă că $\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j = \sum\limits_{j+i=k} b_j a_i \ \ \forall i,j \in N,$

$k = i + j \Rightarrow fg = gf$, deci înmulţirea pe A^N este comutativă.

Se deduce în mod analog că $(fg)h = f(gh)$, adică înmulţirea pe A^N este asociativă.

Elementul neutru față de înmulțire

Există în A^N element neutru față de înmulțire şi anume: $(1,0,0,......0,......)$.

Distributivitatea înmulțirii față de adunare

Fie $f(g+h)=(d_0, d_1,..., d_k,...)$, $fg+fh=(d_0^{'}, d_1^{'},..., d_k^{'},...)$ şi

$d_k = \sum_{i+j=k} a_i(b_j + c_j) = \sum_{i=j=k} a_i b_j + \sum_{i+j=k} a_i c_j$.

Înmulțirea fiind distributivă față de adunare rezultă că $d_k = d_k^{'}, \forall n \in N$, de unde rezultă că $f(g+h) = fg + fh$ şi înmulțirea pe A^N este distributivă față de adunare.

În concluzie, $(A^N,+,\cdot)$ este inel comutativ şi unitar.

1.2. Forma algebrică a unui polinom

Notația $f=(a_0, a_1, a_2,...)$ introdusă pentru polinoame nu este prea comodă în operațiile cu polinoame. De aceea, pentru simplificare, se foloseşte o altă scriere pentru polinoame.

Polinomul $(0,1,0,0,...)$ se notează cu X şi se numeşte nedeterminată.

Utilizând operația de înmulțire a polinoamelor rezultă:

$X^2 = X \cdot X = (0,1,0,0,......) \cdot (0,1,0,0,......) = (0,0,1,0,......)$,

$X^3 = X \cdot X^2 = (0,1,0,0,......) \cdot (0,0,1,0,......) = (0,0,0,1,0......)$,

....

$X^n = X \cdot X^{n-1} = (0,1,0,0,......) \cdot (0,0,.....,0,1,0,......) = (0,0,.....,0,1,0......)$

....

Prin definiție $X^0 = 1$.

Folosind adunarea şi înmulţirea definite pe A^N , pentru $f=(a_0,a_1,a_2,......)$ putem scrie

$$f=(a_0,a_1,a_2,......)=(a_0,0,0,......)+(0,a_1,0,......)+(0,0,a_2,0,......)+(0,0,......0,a_i,0,......)+......=$$
$$=(a_0,0,0,......)+(a_1,0,0,......)\cdot(0,1,0,......)+(a_2,0,0,......)\cdot(0,0,1,0,...)+......+(a_i,0,......)\cdot(0,0,...,0,1,0,...)=$$
$$=a_0+a_1X+a_2X^2+......+a_iX^i+......=\sum_{i\in N}a_iX^i,$$

(unde există doar un număr finit de termeni nenuli).

Deci $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_iX^i+...=\sum_{i\in N}a_iX^i$ (1)

şi

$$f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_mX^m=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$$

$(1^{'})$

unde $a_0,a_1,a_2,.....,a_m$ sunt coeficienţii polinomului *f,* iar monoamele de forma

a_kX^k, $0\le k\le n$, se numesc termenii polinomului.

Din relaţia $(1^{'})$ rezultă că orice polinom nenul este o sumă finită de monoame nenule.

Datorită scrierii (1) sau $(1^{'})$ pentru polinoame, se adoptă pentru mulţimea A^N notaţia $A[X]$. În particular , avem incluziunea A$\subset A[X]$. Datorită scrierii (1) sau $(1^{'})$ elementele din $A[X]$ se mai numesc polinoame într-o singură nedeterminată .

Definiţie. Un element $f\in A[X]$ de forma

$$f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n,\quad a_i\in A,\quad i\ge 0 \qquad (2)$$

şi se numeşte polinom în nedeterminata X cu coeficienţi în inelul comutativ şi unitar A.

Elementele $a_0,a_1,a_2,.....,a_n\in A$ se numesc coeficienţii polinomului *f.*

Expresia (2) se numeşte forma algebrică a polinomului *f.*

În cazul particular când $A\in\{Q,R,C,Z_p\}$ se obţin mulţimile de polinoame:

$Z[X]$= mulţimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienţi în Z,

$Z_n[X]$= mulţimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienţi în Z_n,

$Q[X]$= mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în Q,

$R[X]$=mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în R,

$C[X]$=mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în C,

$Z_p[X]$= mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în Z_p, cu p prim.

Au loc incluziunile: $Z[X] \subset Q[X] \subset R[X] \subset C[X]$.

Exemple.

1) Polinomul $f = \sqrt{2} + \frac{1}{3}X^2 - 5X^3$ este un polinom cu coficienți reali.

2) Polinomul $f = \frac{2}{3} - 2X^2 + \frac{1}{2}X^4$ este un polinom cu coficienți raționali.

3) Polinomul $f = 4 - 4X^2 - X^3$ este un polinom cu coficienți întregi.

4) Polinomul $f = X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}$ este un polinom cu coeficienți în Z_p.

Definiție.

Dacă $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in A[X]$, atunci $f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \geq 0$.

Gradul unui polinom

Definiție.

Se numeşte gradul polinomului *f,* notat prin grad(f) sau grad *f,* cel mai mare număr natural n astfel încât $a_n \neq 0$.

În acest caz a_n se numeşte coeficientul dominant al polinomului *f*. Numărul a_0 se numeşte termenul liber al polinomului f.

Se obişnuieşte ca polinomul f să se scrie sub forma $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$, lucru întotdeauna posibil deoarece adunarea polinoamelor este comutativă.

Exemple.

1) Polinomul $f = X + 3$ are coeficientul dominant egal cu 1 şi grad f=1.

2) Polinomul $f = -2X^5 - X^3 + X$ are coeficientul dominant egal cu -2 şi grad f=5.

3) Polinomul constant $f = a$, unde $a \in C, a \neq 0$ are gradul 0, deci grad f=0.

4) Polinomul nul, f= 0, are gradul egal cu -∞.

Proprietăți ale gradului:

Fie $f, g \in A[X]$. Atunci pentru gradul sumei şi produsului celor două polinoame au loc următoarele relațiile:

$$\text{grad}(f+g) \leq \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$$

$$\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

Aplicație (Elemente inversabile din A[X])

Un polinom $f \in A[X]$ este inversabil dacă şi numai dacă există $g \in A[X]$ astfel încât $fg = 1$ (cu alte cuvinte, singurele polinoame inversabile sunt polinoamele constante nenule).

1.3. Funcția polinomială. Rădăcină a unui polinom

Definiție.

Fie un polinom $f \in A[X]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $n \in N$, $\alpha \in A$.

Numărul $f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^n, a_n \neq 0$ se numeşte valoarea polinomului f în punctul α.

Astfel, se poate pune în evidență o funcție, $\bar{f} : A \to A$, $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$ numită funcția polinomială asociată polinomului f.

Dacă $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$, atunci $\bar{f} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$.

Gradul polinomului dă gradul funcției polinomiale. Coeficienții polinomului sunt coeficienții funcției polinomiale. A determina funcția polinomială înseamnă a-i preciza coeficienții.

Un polinom şi funcția polinomială asociată sunt noțiuni distincte. Un polinom este o expresie formală, o funcție polinomială are un domeniu de definiție, un codomeniu şi o lege de corespondență determinată de expresia polinomului.

Definiție.

Un element $x_0 \in A$ este rădăcină a polinomului f dacă $f(x_0) = 0$.

Exemple:

1) Dacă $f = X^2 - 4X + 1$ atunci valoarea polinomului f în 1 este $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = -2$.
2) Dacă $f = 2 - 3X + 4X^2$ atunci valoarea polinomului f în $\sqrt{2} - 1$ este $f(\sqrt{2}-1) = 2 - 3\sqrt{2} + 3 + 4(2 - 2\sqrt{2} + 1) = 5 - 3\sqrt{2} + 12 - 8\sqrt{2} = 17 - 11\sqrt{2}$.
3) Dacă $f = -3X^4 + X^3 - X$ atunci valoarea polinomului f în i este $f(i) = -3i^4 + i^3 - i = -3 - i - i = -3 - 2i$.
4) Dacă $f = X^2 - X - 2$ atunci valoarea polinomului f în -1 este $f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$ şi elementul -1 este rădăcină a polinomului *f*.

1.4. Adunarea şi înmulțirea polinoamelor
Proprietăți

Considerăm polinoamele $f, g \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ şi $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $n \geq m$.

Atunci suma polinoamelor *f* şi *g*, notată *f*+*g*, se defineşte ca fiind polinomul

$$f+g=a_o+b_0+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2+......+(a_m+b_m)X^m+.......+a_nX^n$$

iar produsul polinoamelor *f* şi *g*, notat fg, se defineşte ca fiind polinomul

$$fg=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+.......$$
$$......+(a_0b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+......+a_kb_0)X^k+........+a_nb_mX^{n+m}.$$

Exemplu

Dacă $f=X^2-X-1$ şi $g=X+2$, atunci $f+g=(X^2-X-1)+(X+2)=X^2+1$ şi $fg=(X^2-X-1)(X+2)=X^3+2X^2-X^2-2X-X-2=X^3-3X^2-3X-2$.

Dacă *f* şi *g* sunt polinoame cu coeficienți reali, (respectivi raționali, întregi), atunci produsul lor este un polinom cu coeficienți reali, (respectivi raționali, întregi).

Proprietățile adunării polinoamelor

1. Adunarea este comutativă, adică oricare ar fi f şi g, din $A[X]$, avem
   $f+g=g+f$.
2. Adunarea este asociativă, adică oricare ar fi f, g şi h din $A[X]$, avem
   $(f+g)+h=f+(g+h)$.
3. Polinomul constant $f=0$ este element neutru pentru adunarea polinoamelor, în sensul că oricare ar fi $f\in C[X]$, avem
   $f+0=0+f=f$.
4. Orice polinom are un opus, adică oricare ar fi $f\in C[X]$ există un polinom notat $-f$, astfel încât
   $f+(-f)=(-f)+f=0$.

Observație

Dacă *f* şi *g* sunt două polinoame, suma $f+(-g)$ se notează simplu prin $f-g$ şi se numeşte diferența dintre *f* şi *g*.

Proprietățile înmulțirii polinoamelor

1. Înmulțirea este comutativă, adică oricare ar fi f şi g, din $A[X]$, avem

   $fg = gf$.

2. Înmulțirea este asociativă, adică oricare ar fi f, g şi h din $A[X]$, avem

   $(fg)h = f(gh)$.

3. Polinomul $f = 1$ este element neutru pentru înmulțire, adică oricare ar fi $f \in A[X]$, avem

   $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$.

4. Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică oricare ar fi polinoamele f, g şi h din $A[X]$, au loc relațiile:

   $f(g+h) = fg + fh$ si $(f+g)h = fh + gh$.

5. Dacă f şi g sunt polinoame nenule, atunci produsul lor este un polinom nenul ($f \neq 0$ şi $g \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$).
6. Simplificarea cu un factor nenul.
7. Dacă f, g, h sunt polinoame astfel încât $fg = fh$ şi $f \neq 0$, atunci $g = h$.

1.5. Împărțirea polinoamelor

Aritmetica inelelor de polinoame *A[X]* este analoagă aritmeticii inelului Z al numerelor întregi. Această analogie este realizată prin două teoreme fundamentale: teorema împărțirii cu rest şi teorema de descompunere în factori ireductibili.

Teorema împărțirii cu rest din *Z* ne spune că fiind date două numere naturale a şi b , $b \neq 0$, există exact două numere naturale unice q şi r astfel încât are loc egalitatea: $a = bq + r$, unde $0 \le r < b$.

În teoria împărțirii polinoamelor, se întâlneşte o propritate analoagă.

Teoremă. (Teorma împărțirii cu rest a polinoamelor)

Fiind date două polinoame oarecare $f, g \in A[X]$, $g \neq 0$ şi coeficientul dominant al lui g inversabil, atunci există şi sunt unice două polinoame $q, r \in A[X]$ astfel încât $f = gq + r$ unde grad (r)<grad (g).

Teorema împărțirii cu rest este valabilă în $C[X]$, $R[X]$, $Q[X]$, Z_p [X] (p-prim), dar în Z[X] rămâne adevărată doar dacă $g = \pm 1$ deoarece singurele elemente inversabile ale lui Z sunt +1 şi -1.

Algoritmul împărțirii

1) Dacă $grad\ f < grad\ g$, atunci $q = 0$ si $r = f$.

2) Fie $grad\ f \geq grad\ g$. Atunci:

- se aşează polinoamele f şi g sub forma unei scheme, ca în cazul împărțirii a două numere;
- se determină primul termen al câtului prin împărțirea termenului de grad maxim al lui f la termenul de grad maxim a lui g ;
- se înmulțeşte aceasta cu g ; se înlocuieşte fiecare coeficient din produs cu opusul său; se trec termenii astfel obținuți sub termeni de acelaşi grad ai lui f şi apoi se face suma celor două polinoame, obținându-se primul rest parțial, f_1 ;
- dacă $grad\ f_1 > grad\ g$, continuăm procedeul (cu f_1 , în locul lui f) până în momentul în care apare primul rest parțial de grad strict mai mic decât gradul lui g .

Exemplu.

Fie polinoamele $f = X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 2X + 1$ şi $g = X^2 + X - 3$. Să se determine câtul şi restul împărțirii lui f la g.

$$\begin{array}{l|l} X^5 + 2X^4 - 3X^3 \qquad + 2X + 1 & X^2 + X - 3 \\ \cline{2-2} \underline{- X^5 - X^4 + 3X^3} & X^3 + X^2 - X + 4 \end{array}$$

$$/ \quad X^4 \qquad\qquad +2X+1$$

$$\underline{-X^4 - X^3 + 3X^2}$$

$$/ \quad -X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$

$$\underline{+X^3 + X^2 - 3X}$$

$$/ \quad +4X^2 - X + 1$$

$$\underline{-4X^2 - 4X + 12}$$

$$/ \quad -5X + 13$$

Deci câtul este $q = X^3 + X^2 - X + 4$, iar restul $r = -5X + 13$.

Formula împărțirii cu rest se scrie, în acest caz astfel:

$$2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1 = (X^2 - 3)(2X^3 + X^2 + X + 3) + (-5X + 10).$$

Împărțirea prin $X - a$. Schema lui Horner.

În aritmetică, grație unor criterii de divizibilitate, se poate verifica imediat dacă un număr este divizibil printr-un alt număr, fără a efectua împărțirea. De exemplu, un număr este divizibil cu 2 dacă ultima cifră este pară, un număr este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3, şi aşa mai departe. Şi în algebră, există de asemenea, teoreme care simplifică calculele.

Teoremă (Teorema restului)

Restul împărțirii unui polinom $f \in A[X]$, $f \neq 0$ prin binomul $g = X - a \in A[X]$ este egal cu valoarea numerică a polinomului f pentru $x = a$, adică $r = f(a)$.

Exemplu.

Să se determine restul împărțirii polinomului $f = 2X^4 - 5iX^3 + 3X + i + 2$ prin binomul $g = X - i$.

Soluție:

Conform teoremei de mai sus, restul este

$$r = f(i) = 2i^4 - 5i \cdot i^3 + 3i + i + 2 = 2 - 5 + 3i + i + 2 = -1 + 4i$$

Teorema restului are dezavantajul că nu ne spune nimic despre câtului împărțirii polinomului *f* prin binomul $X - a$.

Schema lui Horner

Un procedeu de aflare a câtului şi restului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$ este schema lui Horner.

Fie $f \in A[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$ şi $a \in A$.

Teorema împărțirii cu rest a lui f la $X - a$ se scrie:

$$f = (X - a)q + r, \tag{1}$$

unde câtul q este un polinom de grad *n-1*, iar restul $r = f(a) \in A$.

Dacă $q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1 X + b_0$, relația (1) se scrie:

$$a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 = (X - a)\,(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1 X + b_0) + r$$

Deci:

$$a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 =$$

$$= b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + ... + (b_0 - ab_1)X + (r - ab_0) \quad (2)$$

Din egalitatea celor două polinoame ale relației (2) obținem că

$$\begin{aligned} & b_{n-1} = a_n, \\ & b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1} \\ & b_{n-3} = ab_{n-2} + a_{n-2}, \\ & .... \\ & b_0 = ab_1 + a_1, \\ & r = ab_0 + a_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Egalitățile (3) se trec în tabelul următor:

	X^n a_n	X^{n-1} a_{n-1}	X^{n-2} a_{n-2}	…….. ……..	X a_1	X^0 a_0
a	a_n	$ab_{n-1} + a_{n-1}$	$ab_{n-2} + a_{n-2}$	……..	$ab_1 + a_1$	$ab_0 + a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	………	b_0	r

În rândul de sus al tabelului se scriu coeficienții polinomului *f*, iar în rândul de jos coeficienții $b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0$ ai câtului şi restul *r*.

Observație.

Schema lui Horner ne oferă nu numai un procedeu de obținere a câtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$, dar şi un procedeu de determinare a restului.

Exemple

Utilizând schema lui Horner, să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f prin

polinomul *g* dacă:

a) $f = X^4 - 2X^3 + 6X^2 + X - 3$, $g = X - 2$.

	X^4 1	X^3 -2	X^2 6	X 1	X^0 -3
2	1	$2 \cdot 1 + (-2) = 0$	$2 \cdot 0 + 6 = 6$	$2 \cdot 6 + 1 = 13$	$2 \cdot 13 + (-3) = 23$
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci câtul şi restul împărțirii sunt $q = X^3 + 6X + 13$ şi $r = 23$.

b) $f = 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + X^2 - 1$, $g = X + 1$.

	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	2	3	-4	1	0	-1
-1	2	1	-5	6	-6	5
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci câtul şi restul împărțirii sunt: $q = 2X^4 + X^3 - 5X^2 + 6X - 6, \quad r = 5$.

1.6. Divizibilitatea polinoamelor

1.6.1. Relația de divizibilitate. Proprietăți

Relația de divizibilitate în inelul polinoamelor K[X], unde K poate fi Q, R, C sau Z_p, cu p număr prim, este asemănătoare relației de divizibilitate din mulțimea numerelor întregi.

Definiție.

Dacă $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, atunci g divide f dacă există un polinom $q \in K[X]$ astfel încât $f = gq$.

Polinomul g se spune că este un divizor al lui f sau că f este un multiplu al lui g.

Proprietăți ale relației de divizibilitate.

1. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că g divide pe f dacă şi numai dacă restul împărțirii lui f la g este zero.
2. Dacă g/f şi $f \neq 0$ atunci grad(g)≤grad(f).
3. Polinoamele de grad zero, adică constantele nenule, divid orice polinom.
4. Dacă f este un polinom şi $a \in C, a \neq 0$, atunci af / f.
5. Relația de divizibilitate este reflexivă (adică f / f oricare ar fi polinomul f) şi tranzitivă (adică dacă f / g şi g / h, atunci f / h, oricare ar fi $f, g, h \in C[X]$).
6. Dacă f / g şi f / h, atunci $f /(g + h)$ şi $f /(g - h)$ oricare ar fi $f, g, h \in C[X]$.
7. Dacă g / f şi f / g atunci există $a \in C$, $a \neq 0$, astfel încât $f = ag$.

Definiție.

Două polinoame f şi g pentru care f / g şi g / f se numesc asociate în divizibilitate (deci dacă se divid reciproc) şi scriem $f \sim g$.

Exemplu.

Polinoamele $f = X^3 - X^2 + 4X - 1$ şi $g = 3X^3 - 3X^2 + 12X - 3$ sunt asociate în divizibilitate deoarece $f = \frac{1}{3}g$.

Definiție.

Divizorii de forma *a* şi *af*, $a \in C - \{0\}$ se numesc divizori improprii ai lui $f \in C[X]$; ceilalți divizori ai lui *f*, dacă există , se numesc divizori proprii.

Teoremă (Teorema lui Bézout).

Un element $a \in K$ este rădăcină pentru polinomul $f \in K[X], f \neq 0$ dacă şi numai dacă *f* este divizibil cu $X - a$.

Deci polinomul *f* este divizibil cu $X - a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a$ este rădăcină a polinomului *f*.

Definiție.

Spunem că un element $a \in K$ este rădăcină multiplă de ordin *p* pentru polinomul $f \in A[X], f \neq 0$, dacă *f* se divide prin $(X - a)^p, p \in N, p \geq 2,$ dar *f* nu se divide prin $(X - a)^{p+1}$.

În particular, un element $a \in K$ este rădăcină de ordinul 2 (sau rădăcină dublă) pentru *f*, dacă *f* se divide cu $(X - a)^2$ dar nu se divide cu $(X - a)^3$. Un element $a \in K$ este rădăcină de ordinul 3 (sau rădăcină triplă) pentru *f*, dacă *f* se divide cu $(X - a)^3$ dar nu se divide cu $(X - a)^4$.

1.6.2. Polinoame ireductibile

Fie *K* un corp comutativ şi $K[X]$ inelul polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți din K, unde $K \in \{Q, R, C, Z_p\}$.

Definiție.

Un polinom $f \in K[X]$ se numeşte ireductibil peste K dacă are gradul cel puțin unu şi dacă nu are divizori proprii.

În caz contrar se numeşte reductibil peste K.

Un polinom $f \in K[X]$ este reductibil peste K dacă există două polinoame $g, h \in K[X]$, $g, h \neq 0$ de grad cel puțin unu astfel încât $f = gh$.

Observație. Orice polinom de gradul 1 din $K[X]$ este ireductibil peste K.

Problema descompunerii unui polinom în factori ireductibili (factorizarea polinoamelor) este operația inversă înmulțirii polinoamelor. Reamintim faptul că atunci când factorizăm un număr natural, căutăm numere prime al căror produs să fie numărul dat. Când factorizăm un polinom, căutăm polinoame al căror produs să fie polinomul dat.

Este foarte important a specifica mulțimea din care fac parte polinoamele.

Aşadar, un polinom $f \in C[X]$ este reductibil peste **C** dacă există două polinoame (cel puțin) $g, h \in C[X]$, $g, h \neq 0$ de grad cel puțin unu pentru care $f = gh$.

Analog, un polinom $f \in R[X]$ este reductibil peste R dacă există două polinoame (cel puțin), $g, h \in R[X]$, $g, h \neq 0$ de grad cel puțin unu pentru care $f = gh$.

De asemenea, un polinom $f \in Q[X]$ este reductibil peste Q(X) dacă există două polinoame (cel puțin) $g, h \in Q[X]$, de grad cel puțin unu pentru care $f = gh$.

Teoremă (d 'Alambert –Gauss).

Orice polinom cu coeficienți complecşi de grad mai mare sau egal cu unu are cel puțin o rădăcină complexă.

Este foarte importantă precizarea polinoamelor ireductibile în principalele inele de polinoame.

1. Un polinom $f \in C[X]$ este ireductibil, dacă şi numai dacă

$f = aX + b; a, b \in C, a \neq 0.$

2. Un polinom $f \in R[X]$ este ireductibil, dacă şi numai dacă:

$f = aX + b; a, b \in R, a \neq 0$ sau $f = aX^2 + bX + c; a, b, c \in R, a \neq 0; b^2 - 4ac < 0$.

Deci orice polinom de gradul întâi din K[X] este un polinom ireductibil.

Pentru a arata că un polinom este ireductibil într-o mulțime se foloseşte metoda reducerii la absurd.

Exemplu.

Arătăm că $f = X^2 - 2 \in Z[X]$ este ireductibil peste *Z*, dar este reductibil peste *R*.

Soluție.

Presupunem că *f* ar fi reductibil peste Z, deci ar admite o scriere de forma:

$f = (aX + b)(mX + n), a, b, m, n \in Z, a, m \neq 0$.

După efectuarea calculelelor, avem:

$X^2 - 2 = amX^2 + (an + bm)X + bn$,

şi conform egalității polinoamelor obținem sistemul $\begin{cases} am = 1 \\ an + bm = 0 \\ bn = -2 \end{cases}$,

care nu are soluții în Z. Deci *f* este ireductibil peste Z.

Cum $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, unde $X - \sqrt{2}, X + \sqrt{2} \in R[X]$, se deduce că f este reductibil peste *R*.

Teoremă.

Fie $f \in K[X]$. Atunci f se poate scrie ca un produs finit de polinoame ireductibile din inelul $K[X]$.

Observații.

1) Scrierea este unică (abstracție făcând ordinea factorilor). Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt n rădăcini ale lui *f* în *R*, atunci

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$$

2) Fie R un inel integru $f \in R[X]$ un polinom cu grad(f) >1. Dacă *f* are o rădăcină în *R*, atunci f este reductibil în inelul $R[X]$.

3) Un polinom reductibil în $R[X]$ nu are în mod necesar rădăcini în *R*.

Exemple

1) Să se descompună în factori ireductibili peste Z_5 polinomul $f = X^3 + X + \hat{3}$.

Soluție:

Se observă că $f(\hat{1}) = 0$, adică $x = \hat{1}$ este rădăcină a polinomului *f*, rezultă

$$f = (X - \hat{1})(X^2 + X + \hat{2}) = (X + \hat{4})(X^2 + X + \hat{2})$$

Polinomul $g = X^2 + X + \hat{2}$ este ireductibil în $Z_5[X]$, deoarece are gradul doi şi nu are rădăcini în corpul Z_5, pentru că: $g(\hat{0}) = \hat{2}, g(\hat{1}) = \hat{4}, g(\hat{2}) = \hat{3}, g(\hat{3}) = \hat{4}, g(\hat{4}) = \hat{2}$.

Deci $f = (X + \hat{4})(X^2 + X + \hat{2}) \in Z_5[X]$ reprezintă descompunerea polinomului f în factori ireductibili peste Z_5.

2) Să se arate că polinomul $f = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n) - 1$ este ireductibil peste *Z[X]* unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Z$ şi sunt diferite două câte două.

Soluție:

Presupunem prin absurd că $f = gh$, unde $g, h \in Z(X)$.

Cum $f(a_i) = -1 \Rightarrow g(a_i) = 1, h(a_i) = -1$ sau $g(a_i) = -1, h(a_i) = 1$, şi rezultă $g(a_i) + h(a_i) = 0,\ 1 \le i \le n$.

Deoarece $grad(g + h) < n$, iar $(g + h)$ se anulează în *n* puncte diferite se deduce $g + h = 0$.

Deci $f(X) = -[g(X)]^2$, contradicție, deoarece coeficientul lui X^n, din *f* este 1.

1.6.3. Cel mai mare divizor comun. Algoritmul lui Euclid

Se consideră K un corp comutativ.

Definiție.

Fie $f, g \in K[X]$. Spunem că polinomul $d \in K[X]$ este un cel mai mare divizor comun al polinoamelor *f, g* dacă:

1) *d* este divizor comun pentru *f*, *g*, adică d / f şi d / g;
2) orice alt divizor comun pentru *f* şi *g* îl divide pe *d*, adică:
   $\forall d' \in K[X], d' / f$ şi $d' / g \Rightarrow d' / d$.

Cel mai mare dizizor comun (c.m.m.d.c) al polinoamelor *f*, *g* se notează (f, g).

Lemă.

Dacă $f, g, q, r \in K[X]$ astfel încât $f = gq + r$ şi dacă există (g, r), atunci există şi (f, g) şi mai mult $(f, g) = (g, r)$.

Teoremă.

Orice două polinoame din $K[X]$ au un c.m.m.d.c..

Modul de a obține un c.m.m.d.c a două polinoame se numeşte **algoritmul lui Euclid**:

- se împarte polinomul f, de grad mai mare, la cel de grad mai mic, g, obținând câtul q_1 şi restul r_1
- se împarte împărțitorul g la restul r_1 şi se obțin câtul q_2 şi restul r_2;
- se continuă procedul, obținându-se pentru cât şi rest polinoamele q_3 şi respectiv r_3; q_4 şi respectiv r_4 etc.;
- ultimul rest nenul obținut este un c.m.m.d.c. al poliniamelor f şi g.

Cel mai mare divizor comun a două polinoame este unic până la înmulțirea cu o constantă (până la o asociere în divizibilitate).

Dacă $(f, g) = 1$, atunci f şi g sunt prime între ele.

Exemple

1) Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$$f = X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 \text{ şi } g = X^3 + X^2 + X - 3.$$

Soluție:

Se aplică algoritmul lui Euclid. Se împarte f la g.

$$
\begin{array}{l|l}
X^4+X^3-2X^2-4X+4 & X^3+X^2+X-3 \\
-X^4-X^3-X^2+3X & \hline \\
\hline & X \\
-3X^2-X+4 &
\end{array}
$$

Pentru a evita coeficienții fracționari, vom înmulți în prealabil pe g cu 3 şi restul împărțirii cu –1. Împărțim împărțitorul la rest:

$$
\begin{array}{l|l}
3X^3+3X^2+3X-9 & 3X^2+X-4 \\
-3X^3-X^2+4X & \hline \\
\hline & X \\
2X^2+7X-9 &
\end{array}
$$

Acum, pentru a evita din nou coeficienții fracționari, vom înmulți pe $3X^2+X-4$ cu 2 şi continuăm operația:

$$
\begin{array}{l|l}
6X^2+2X-8 & 2X^2+7X-9 \\
-6X^2-21X+27 & \hline \\
\hline & 3 \\
\quad -19X+19 &
\end{array}
$$

Am obținut restul $-19X+19$. Pentru a evita din nou coeficienții fracționari, vom împărți restul cu –19 şi împărțim împărțitorul la rest.

$$
\begin{array}{l|l}
2X^2+7X-9 & X-1 \\
-2X^2+2X & \hline \\
\hline & 2X+9 \\
\quad 9X-9 & \\
\quad -9X+9 & \\
\hline
\quad - - - - - - &
\end{array}
$$

Ultimul rest nenul este polinomul $X-1$ şi deci $(f,g)=X-1$.

2) Să se arate că plinoamele $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$ şi $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ sunt prime între ele.

Soluție:

Se observă că, $g = (X-1)(X^2 - X + 1)$ iar $f(1) = 4$ şi $f = (X^2 - X + 1)(3X+1) - X + 1$. Deci $(f, g) = 1$.

3) Să se arate că plinoamele $f = X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12$ şi $g = X^3 - 5X^2 - 3X + 17$ sunt prime între ele.

Soluție:

Folosind algoritmul lui Euclid , arătăm că c.m.m.d.c al polinoamelor *f* şi *g* este 1.

Prima împărțire din algoritmul lui Euclid este:

$$
\begin{array}{l|l}
X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12 & X^3 - 5X^2 - 3X + 17 \\
\hline
-X^5 + 5X^4 + 3X^3 - 17X^2 & X^2 + 1 \\
\hline
\qquad X^3 - 5X^2 - 2X + 12 & \\
\qquad -X^3 + 5X^2 - 17 & \\
\hline
\qquad\qquad -2X - 5 &
\end{array}
$$

A doua împărțire (înmulțim pe *g* cu 2 şi pe $-2X - 5$ cu -1):

$$
\begin{array}{l|l}
2X^3 - 10X^2 - 6X + 34 & 2X + 5 \\
\hline
-2X^3 - 5X^2 & X^2 - \frac{15}{2}X + \frac{63}{4} \\
\hline
-15X^2 - 6X + 34 & \\
15X^2 + \frac{75}{2}X & \\
\hline
\frac{63}{2}X + 34 & \\
-\frac{63}{2}X - \frac{315}{4} & \\
\hline
-\frac{179}{4} &
\end{array}
$$

Deci $(f,g)=1$, polinoamele *f* şi *g* sunt prime între ele..

1.6.4. Cel mai mic multiplu comun

Fie K un corp comutativ.

Definiție.

Fie $f,g \in K[X]$. Spunem că polinomul $m \in K[X]$ este un cel mai mic multiplu comun al polinoamelor *f, g* dacă :

1) m este multiplu comun pentru *f, g*, adică f/m şi g/m;
2) orice alt multiplu comun pentru *f* şi *g*, este multiplu al lui *m*, adică:
   $\forall m' \in K[X], f/m'$ şi $g/m' \Rightarrow m/m'$.

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c) al polinoamelor *f, g* va fi notat cu $[f,g]$.

Următoarea teoremă ne dă un procedeu de obținere a unui c.m.m.m.c a două polinoame.

Teoremă.

Fie *f* şi *g* două polinoame dintre care cel puțin unul este nenul.

Dacă *d* este c.m.m.d.c al lui *f* şi *g*, atunci polinomul $m=\frac{fg}{d}$ este un c.m.m.m.c al lui *f* şi *g*

(aici $\frac{fg}{d}$ înseamnă câtul împărțirii polinomului *fg* prin *d*).

Exemplu.

Să se determine c.m.m.m.c. al polinoamelor:

$$f=2X^5-3X^4-5X^3+X^2+6X+3 \text{ şi } g=X^4-X^3-X^2+1.$$

Soluție:

Se află mai întâi c.m.m.d.c. al celor două polinoame folosind algoritmul lui Euclid.

Prima împărțire:

$$
\begin{array}{l|l}
2X^5-3X^4-5X^3+X^2+6X+3 & X^4-X^3-X^2+1 \\ \cline{2-2}
-2X^5+2X^4+2X^3-2X & 2X-1 \\ \cline{1-1}
\quad -X^4-3X^3+X^2+4X+3 & \\
\quad X^4-X^3-X^2+1 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad -4X^2+4X+4 &
\end{array}
$$

Restul $-4X^3+4X+4$ îl împărțim cu -4 şi obținem X^2-X-1.

A doua împărțire:

$$
\begin{array}{l|l}
X^4-X^3-X^2+1 & X^2-X-1 \\ \cline{2-2}
-X^4+X^2+X & X-1 \\ \cline{1-1}
\quad -X^3+X+1 & \\
\quad X^3-X-1 & \\ \cline{1-1}
\quad \text{---} \quad \text{----} \quad \text{---} &
\end{array}
$$

Ultimul rest nenul este X^2-X-1. Deci polinomul $d=X^3-X-1$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor *f* şi *g*.. Cum $g=\left(X^2-X-1\right)\left(X-1\right)$, atunci polinomul:

$$
\begin{aligned}
m=\frac{fg}{d}=f\cdot\frac{g}{d}=f\cdot(X-1)=(X-1)\left(2X^5-3X^4-5X^3+X^2+6X+3\right)= \\
=2X^6-5X^5-2X^4+6X^3+5X^2-3X-3
\end{aligned}
$$

este un c.m.m.m.c. al polinoamelor *f* şi *g*.

CAPITOLUL II
RĂDĂCINI ALE POLINOAMELOR

2.1. Rădăcini complexe ale polinoamelor

Definiție.

Fie $f \in C[X]$ polinom neconstant cu grad$(f) \geq 1$. Ecuația $f(x) = 0$ se numeşte ecuația polinomială sau ecuația algebrică asociată polinomului *f*.

Teorema fundamentală a algebrei

Orice ecuație algebrică $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 = 0$ de grad mai mare sau egal cu 1 şi cu coeficienți complecşi are cel puțin o rădăcină complexă.

Corolar.

1) Orice polinom $f \in C[X]$, de grad $n \geq 1$, are n rădăcini (nu neaparat distincte; o rădăcină, se repetă de un număr de ori, egal cu ordinul său de multiplicitate).

2) Dacă $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0, a_n \neq 0, n \geq 1$, iar $x_{1,} x_2, ... x_n$, sunt rădăcinile lui *f* atunci $f = a_0 (X - x_1)(X - x_2) .... (X - x_n)$.

3) Dacă un polinom, de grad, cel mult *n*, se anulează pentru $n+1$ valori, distincte, atunci $f = 0$.

2.1.1. Polinoame cu coeficienți reali

Pentru polinoamele cu coeficienți reali următorul rezultat este important.

Teoremă.

Fie $f \in R[X]$, $f \neq 0$. Dacă $x_0 = a + ib, b \neq 0$ este o rădăină complexă a lui f, atunci:

1). $\bar{x}_0 = a - ib$ este de asemenea o rădăcină complexă a lui f;

2). x_0 şi $\bar{x}_0$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Din teoremă rezultă că dacă f, un polinom cu coeficienți reali, are rădăcina complexă $x_0 = a + ib$, atunci mai are ca rădăcină şi conjugata $\bar{x}_0 = a - ib$ şi cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate.

Dacă x_0 este o rădăcină simplă, atunci polinomul f se divide prin $X - x_0$. Cum şi $\bar{x}_0$ este de asemenea rădăcină rezultă că f se divide şi prin $X - \bar{x}_0$. Deci f se divide prin

$$(X - x_0)(X - \bar{x}_0) = (X - a - ib)(X - a + ib) = (X - a)^2 - (ib)^2 = X^2 - 2aX + a^2 + b^2.$$

Din teoremă rezultă următorul:

Corolar.

1) Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe (care nu sunt numere reale).

2) Orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

Teorema (de descompunere în factori ireductibili).

Orice polinom $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$, $f \in R[X]$ se poate scrie ca un produs de polinoame de gradul întâi sau doi cu coeficienți reali.

Exemplu

Să se determine parametrii reali m,n ştiind că polinomul $f = X^4 - 3X^3 + mX^2 - (n+2)X + 1$ are rădăcina complexă $x_1 = 1 - i$.

Soluție:

Cum $f \in R[X]$ şi $x_1 = 1 - i$ atunci f admite şi rădăcina complexă conjugată $x_2 = 1 + i$.

Prin urmare f se divide prin produsul

$$(X - x_1)(X - x_2) = (X - 1 + i)(X - 1 - i) = X^2 - 2X + 2$$

Efectuând împărțirea lui f prin $X^2 - 2X + 2$, se impune condiția ca restul să fie polinomul nul. Avem: $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - X + m - 4) + (2m - n - 8)X - 2m + 9$

Deci $(2m - n - 8)X - 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n - 8 = 0 \\ -2m + 9 = 0 \end{cases}$ de unde $m = \dfrac{9}{2}, n = 1$.

Exemplu

Să se descompună în factori ireductibili peste *R* polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$.

Soluție:

Factorii ireductibili ai unui polinom cu coeficienți reali sunt cei de gradul întâi şi de gradul al doilea cu coeficienți reali, cei de gradul al doilea având discriminantul negativ.

Putem scrie $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

Fiecare din factorii de gradul al doilea $X^2 - X + 1,\ X^2 + X + 1$ are discriminantul negativ $(\Delta = -3)$, iar aceştia sunt factori ireductibili pentru f în *R[X]*.

2.1.2. Polinoame cu coeficienți raționali

Cum $Q[X] \subset R[X]$, înseamnă că rezultatele referitoare la polinoamele cu coeficienți reali

rămân valabile şi pentru polinoamele cu coeficienți raționali.

În mulțimea $Q[X]$ unde are loc:

Teoremă.

Fie $f \in Q[X], f \neq 0$. Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}, a, b \in Q, b > 0, \sqrt{b} \notin Q$, este o rădăcină pătratică a lui f, atunci: 1) $\bar{x}_0 = a - \sqrt{b}$ este de asemena o rădăcină (conjugata pătratică a lui x_0) a lui f;

2) $x_0, \bar{x}_0$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Teorema afirmă că dacă un polinom f, cu coeficienți raționali, are ca rădăcină numărul pătratic $x_0 = a + \sqrt{b}$, atunci are ca rădăcină şi numărul pătratic conjugat $\bar{x} = a - \sqrt{b}$, şi mai mult cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate .

Dacă x_0 este rădăcină simplă a lui f, atunci f se divide prin $X - x_0$. Cum şi $\bar{x}_0$ este rădăcină simplă a lui f rezultă că f se divide şi prin $X - \bar{x}_0$. Deci f se divide prin produsul

$$(X - x_0)(X - \bar{x}_0) = (X - a - \sqrt{b})(X - a + \sqrt{b}) = (X - a)^2 - (\sqrt{b})^2 = X^2 - 2aX + a^2 - b.$$

Exemplu

Fie $f = X^4 - 4X^3 + X^2 + 6X + 2$ cu rădăcina $x_1 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 1 + \sqrt{2}$ este, de asemenea rădăcină a polinomului *f.* Atunci:

$$f \vdots (X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2}) \Rightarrow f \vdots (X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2) \Rightarrow$$
$$f \vdots (X^2 - 2X - 1)$$

Efectuând împărțirea obținem $f = (X^2 - 2X - 1)(X^2 - 2X - 2)$ şi de aici rezultă că $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$.

2.1.3. Polinoame cu coeficienți întregi

Următorul rezultat se referă la mulțimea $Z[X]$ şi ne oferă un mod de a descoperi rădăcinile raționale sau întregi ale unui polinom.

Mai precis are loc următoarea teoremă:

Teoremă.

Fie $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n, a_n \neq 0, f \in Z[X]$.

1) Dacă $x_0 = \frac{p}{q}$ (p, q - numere prime între ele) este o rădăcină rațională a lui f, atunci:

a) p divide termenul liber (adică p / a_0);

b) q divide coeficientul dominant al polinomului (adică q / a_n)

2) În particular, dacă $x_0 = p$ este o rădăcină întreagă a lui f, atunci p este un divizor al termenului liber (adică p / a_0).

Teorema afirmă că pentru un polinom f cu coeficienți întregi rădăcinile raționale posibile se află printre fracțiile $\frac{p}{q}$, iar p este un divizor (în Z) al termenului liber a_0, iar q un divizor (în Z) al coeficientului dominant a_n al polinomului. În particular dacă pentru $f \in Z[X]$ se caută rădăcinile întregi, atunci acestea (dacă există) obligatoriu se află printre divizorii întregi ai termenului liber.

Exemplu

Fie $f = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 8X + 4 \in Z[X]$. Deci, dacă f admite o rădăcină rațională de forma $\frac{p}{q}$ atunci $p / 4, q / 1$. Rezultă că $x_1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Folosind schema lui Horner, obținem:

$$f = (X - 2)(X + 2)(X^2 - 2X - 1)$$

de unde rezultă că $x_1 = 2; x_2 = -2; x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2} \in R - Q$.

2.2. Relațiile lui Viete

Fie K un corp comutativ şi $K[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienților în K. Pentru un polinom $f \in K[X]$ de grad n, teorema lui Bézout stabileşte o corespondență bijectivă între rădăcinile din K ale lui f şi factorii liniari din descompunerea lui f în $K[X]$.

Fiecărei rădăcini $x \in K$ îi corespunde factorul liniar $X - x$ şi reciproc. Deci factorii liniari din descompunerea unui polinom f în $K[X]$ sunt de forma $X - x_1, X - x_2, \ldots, X - x_p, (p \le n)$.

Dacă $grad(f) = n$, atunci $f = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_p)\cdot g,\ g \in K[X]$.

Dacă $p = n$, atunci $f = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n)\cdot g$, unde evident $grad(g) = 0$, adică $g \in K - \{0\}$.

Următoarea teoremă pune în evidență legătura între rădăcinile unui polinom f şi coeficienții săi.

Teoremă

Fie $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,\quad a_n \ne 0,\ f \in K[X]$ un polinom de grad n, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$, nu neapărat distincte. Atunci au loc relațiile:

$$
\begin{cases}
S_1 = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\
S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\ldots + x_1x_n + \ldots\ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_k = x_1x_2\ldots\ldots x_k + x_1x_2\ldots\ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots\ldots + a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots\ldots a_n = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}
\end{cases}
$$

cunoscute sub numele de relațiile lui Viète.

Observații.

1) A rezolva o ecuație polinomială, înseamnă a-i determina rădăcinile (rădăcinile polinomului).

2) Relațiile lui Viète sunt importante pentru un polinom (pentru determinarea unor parametri din structura lui, a rădăcinilor), ori de câte ori, se dă o relație (sau mai multe) între unele dintre rădăcinile polinomului.

3) Practic, ori de câte ori, avem o informaţie despre rădăcinile unui polinom, acesteia i se ataşează relaţiile lui Viète.

Particularizare

Relaţiile lui Viete pentru polinomul $f \in C[X]$, cu grad$(f) = 2,3,4$.

- Presupunem $f = a_2X^2 + a_1X + a_0$, $a_2 \neq 0$, cu rădăcinile x_1, x_2.

  Relaţiile lui Viète sunt : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}$

- Presupunem $f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, $a_2 \neq 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

  Relaţiile lui Viète sunt : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$

- Presupunem $f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, $a_2 \neq 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

  Relaţiile lui Viète sunt : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$

Observaţie

Relaţiile a doua şi a treia a ultimului sistem sunt uneori convenabil să se scrie sub forma

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{a_2}{a_4}$$

şi respectiv

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 = -\frac{a_1}{a_4}.$$

Exemplu

Fie polinomul $f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$. Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f ştiind că $x_1 + x_2 = x_3$.

Soluție:

Scriem relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 29, \\ x_1x_2x_3 = 20. \end{cases}$$

Cum $x_1 + x_2 = x_3$, atunci din prima relație a sistemului avem: $2x_3 = 10$ deci $x_3 = 5$.

Din $x_1x_2x_3 = 20$, obținem $x_1x_2 = 4$.

Formăm sistemul următor:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

care dă rădăcinile: $x_1 = 1$ şi $x_2 = 4$.

Exemplu.

Să se găsească relația între a, b, c ştiind că rădăcinile polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ sunt în progresie geometrică.

Soluție:

Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui *f* atunci avem relațiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

Cum x_1, x_2, x_3 sunt în progresie geometrică, atunci $x_2^2 = x_1 x_3$.

Din ultima relație a sistemului, obținem: $x_2^3 = -c$.

Cum $f(x_2) = 0$, atunci $x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$, de unde rezultă că $ax_2^2 + bx_2 = 0$.

Deci $x_2 = 0$ sau $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Dacă $x_2 = -\frac{b}{a}$ din $x_2^3 = -c$, obținem $a^3c - b^3 = 0$.

Dacă $x_2 = 0$, atunci $x_1 x_3 = 0$ şi din relația a doua a sistemului, obținem $b = 0$.

Cum $x_2^3 = -c$, atunci $c = 0$. Dar se observă că ultima relație a sistemului este îndeplinită pentru $b = c = 0$.

Observație

Relațiile lui Viète sunt folosite în numeroase probleme în care se cere să se determine ecuația, cunoscându-se relațiile între rădăcini.

Exemplu

Fie ecuația $x^3 - 5x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini dublul rădăcinilor ecuației date.

Soluție.

Notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 5x + 1 = 0$ şi cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm. Avem $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$, $y_3 = 2x_3$.

Atunci $y_1 + y_2 + y_3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$,

$$\begin{aligned} y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 &= (2x_1)(2x_2) + (2x_1)(2x_3) + (2x_2)(2x_3) = \\ &= 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4(-5) = -20. \end{aligned}$$

$$y_1y_2y_3 = 8x_1x_2x_3 = -8.$$

Aplicând relațiile lui Viète, ecuația care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3, este $y^3 - 20y + 8 = 0$.

Exemplu.

Fie ecuația $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini inversele rădăcinilor date.

Soluție:

Notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$ şi cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm. Avem $y_1 = \frac{1}{x_1},\ y_2 = \frac{1}{x_2},\ y_3 = \frac{1}{x_3}.$

Atunci $y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -7,$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -1,$$

$$y_1y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} = -1.$$

Ecuația de gradul 3 care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este următoarea:

$$y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0$$

2.2. Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior

Definiție

Se numeşte ecuație algebrică de necunoscută x, o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde f este un polinom nenul.

Definiție

Un număr $a \in C$ este soluție (sau rădăcină) a ecuației $f(x) = 0$, dacă $x = a$ verifică ecuația dată, adică dacă $f(a) = 0$.

Gradul polinomului dă gradul ecuației algebrice. Dacă polinomul are gradul n, atunci ecuația are gradul n. Coeficienții polinomului se numesc coeficienții ecuației algebrice.

Toate rezultatele stabilite pentru rădăcinile polinoamelor rămân valabile şi pentru ecuațiile algebrice definite de acestea.

O ecuație care nu poate fi redusă la o ecuație algebrică prin operațiile de adunare, înmulțire, ridicare la putere, etc., se numeşte ecuație transcendentă.

Exemple de ecuații transcendente: $x-2=\cos x$, $\ln x-7x^3+2x-4=0$, $tgx+3^x+x=2$.

Ecuațiile algebrice de grad superior sunt acele ecuații algebrice care au gradul mai mare sau egal cu 3.

2.3.1. Ecuații binome

Definiție

O ecuație de forma $x^n-a=0,\ n\in N,\ n\geq 2,\ a\in C$ se numeşte ecuație binomă.

Metodă de rezolvare:

Se scrie ecuația sub forma $x^n=a$, iar numărul complex a se pune sub formă trigonometrică, $a=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\ \alpha\in[0,2\pi),\ r=\sqrt{x^2+y^2}$ dacă $a=x+iy$.

Atunci rădăcinile ecuației date au forma:

$$x_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right],\ k=\overline{0,n-1}.$$

Imaginile geometrice ale rădăcinilor x_k, $k=\overline{0,n-1}$, sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de centru O (originea reperului cartezian) şi de rază $\sqrt[n]{r}$.

În particular, dacă $a=1$, ecuația devine $x^n=1$, iar rădăcinile ecuației se numesc rădăcini de ordin n ale unității.

Exemplu.

Să se rezolve ecuația: $x^6+1=0$

Soluție:

Scriem ecuația ca $x^6=-1$, se aduce -1 sub formă trigonometrică: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ şi deci rădăcinile ecuației date sunt:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right),\ k = \overline{0,5}.$$

2.3.2. Ecuații bipătrate

Forma generală a ecuațiilor bipătrate este:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{, unde } a,b,c \in C \text{ şi } a \neq 0.$$

Rezolvarea ecuației se face notând $x^2 = y$ şi se obține ecuația de gradul al doilea

$ay^2 + by + c = 0$ cu rădăcinile: $y_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ şi $y_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Din egalitatea $x^2 = y$ se obțin ecuațiile $x^2 = y_1$ şi $x^2 = y_2$ cu rădăcinile:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Numerele x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuției bipătrate.

Exemplu

Să se rezolve ecuația $x^4 - 4x^2 - 32 = 0$

Soluție:

Se notează $x^2 = y$ şi se obține ecuația $y^2 - 4y - 32 = 0$ cu $\Delta = 144$ şi soluțiile reale $y_1 = 8,\ y_2 = -4.$ Revenind la notația făcută se obțin ecuațiile: $x^2 = 8$ cu soluțiile reale $x_1 = 2\sqrt{2},\ x_2 = -2\sqrt{2}$ şi $x^2 = -4$ cu soluțiile complexe conjugate $x_3 = 2i,\ x_4 = -2i.$

Observație

În mod analog se rezolvă ecuația trinomă $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Se notează $x^n = y$ şi se obține ecuația de gradul al doilea $ay^2 + by + c = 0$ cu rădăcinile y_1 şi y_2, după care se rezolvă ecuațiile binome $x^n = y_1$ şi $x^n = y_2$.

Exemplu

Să se rezolve ecuația $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$.

Soluție:

Se notează $x^4 = y$ şi ecuația dată devine: $y^2 + 2y - 3 = 0$. Rezolvând ecuația găsim $y_1 = 1$ şi $y_2 = -3$. Înlocuim valorile lui y în notația făcută şi obținem:

$$x^4 = 1 \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i$$

$$x^4 = -3 \Rightarrow \quad x_k = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \ k = \overline{0,3}.$$

2.3.3. Ecuații reciproce

Definiție

O ecuație de forma $a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_1 x + a_0 = 0$, cu $a_n \neq 0$, în care $a_{n-i} = a_i$, $0 \le i \le n$ (termenii egali depărtați de extremi au coeficienții egali) se numeşte ecuație reciprocă de gradul n.

Formele ecuațiilor reciproce care vor fi supuse atenției sunt:

- $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0,$ dacă $n = 3;$
- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0,$ dacă $n = 4;$
- $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0$, dacă $n = 5$.

Proprietăți generale ale ecuațiilor reciproce:

- Dacă ecuația reciprocă are rădăcina α, atunci ea are şi rădăcina $\frac{1}{\alpha}$.
- Orice ecuație reciprocă de grad impar are rădăcina $x = -1$.
- Orice ecuație de grad impar se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ şi a unei ecuații reciproce de grad par.

Rezolvarea ecuației reciproce de grad 4 se face împărțind ecuația prin x^2 şi se obține:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0. \qquad (1)$$

Se notează $x+\frac{1}{x}=y$, iar $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ şi ecuația (1) se scrie în funcție de *y,* astfel:

$$ay^2+by+c-2a=0$$

cu soluțiile y_1, y_2. Revenim la substituție şi rezolvăm ecuațiile $x+\frac{1}{x}=y_1$, $x+\frac{1}{x}=y_2$.

Toate soluțiile acestei ecuații sunt soluțiile ecuației date.

Exemple

Să se rezolve ecuațiile:

1) $x^3-3x^2-3x+1=0$

Soluție:

Se observă că este o ecuație reciprocă de grad impar. Rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuației $x+1=0$ (când $x_1=-1$) şi a unei ecuații (reciproce) de gradul al doilea. Pentru a găsi coeficienții acestei ecuații utilizăm schema lui Horner (coeficienții din ultima linie sunt coeficienții căutați).

	X^3 1	X^2 -3	X -3	X 1
-1	1	-4	1	0

Din schemă rezultă ecuația $x^2-4x+1=0$ cu rădăcinile $x_{2,3}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$.

Ecuația dată are soluțiile: -1, $2\pm\sqrt{3}$.

2) $2x^4+7x^3+9x^2+7x+2=0$

Soluție:

Împărțim ecuația prin x^2 şi obținem : $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0.$

Notăm $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$. Ecuația anterioară devine:

$$2\left(y^2-2\right)+7y+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2+7y+5=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=-\frac{5}{2},\ y_2=-1.$$

Deoarece $x+\frac{1}{x}=y$, obținem ecuațiile $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ şi $x+\frac{1}{x}=-1;$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2+\frac{5}{2}x+1=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=-\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ x_4=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

CAPITOLUL III
PROBLEME REZOLVATE

Problema 1.

Să se determine un polinom f de gradul al doilea, $f \in R[X]$, ştiind că $f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=-1$.

Soluție:

Forma algebrică a unui polinom de gradul al doilea este $f = aX^2 + bX + c,\ a,b,c \in R,\quad a \neq 0$. Condițiile din problemă se transcriu sub forma:

$$f(-1)=1 \Leftrightarrow a-b+c=1; f(0)=0 \Leftrightarrow c=0; f(1)=-1 \Leftrightarrow a+b+c=-1$$

Sistemul obținut în necunoscutele *a,b,c* este:

$$\begin{cases} a-b+c=1 \\ c=0 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \text{ şi are soluția } a=0, b=-1, c=0.$$

Cum *a* trebuie să fie nenul, deducem că nu există polinom de gradul al doilea care să verifice condițiile date.

Problema 2.

Se consideră polinomul $f=(1+X)^{2012}=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_{2012}X^{2012}$.

a) Să se calculeze $a_0+a_2+a_4+...+a_{2012}$.

b) Să se calculeze $a_1+a_3+...+a_{2011}$.

Soluție:

Calculând valoarea polinomului f în $x=1$ obținem suma tuturor coeficienților acestuia:

$$f(1)=2^{2012}=a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_{2011}+a_{2012}\ . \tag{1}$$

Pentru $x=-1$, avem:

$$f(-1)=0=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots-a_{2011}+a_{2012}\ . \qquad (2)$$

Adunând relația (1) cu relația (2) rezultă că $2^{2012}=2(a_0+a_2+\ldots+a_{2012})$ şi

$$a_0+a_2+\ldots+a_{2012}=2^{2011}.$$

Ținând seama de această ultimă egalitate şi de (1) rezultă $a_1+a_3+\ldots+a_{2011}=2^{2011}$.

Problema 3.

Determinați gradul polinomului

$f=(m^2-1)X^5+(m^2-3m+2)X^4-(m-1)X^3+(m+6)X^2+X-3$, $f\in R[X]$, în raport cu parametrul real m.

Soluție:

Rezolvăm ecuațiile formate cu coeficienți ai polinomului:

$$m^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad m=\pm1$$

$$m^2-3m+2=0 \quad\Rightarrow\quad m=1 \text{ şi } m=2$$

$$m-1=0 \quad\Rightarrow\quad m=1$$

$$m+6=0 \quad\Rightarrow\quad m=-6\,.$$

Discuție după $m\in R$:

- Dacă $m\in R\setminus\{\pm1\} \quad\Rightarrow\quad m^2-1\neq0 \quad\Rightarrow\quad grad\ f=5$
- Dacă $m=-1 \quad\Rightarrow\quad m^2-1=0$

  $m^2-3m+2\neq0 \quad\Rightarrow\quad grad\ f=4$
- Dacă $m=1 \quad\Rightarrow\quad m^2-1=0$

  $m^2-3m+2=0$

  $m-1=0$

  $m+6\neq0 \quad\Rightarrow\quad grad\ f=2\,.$

Problema 4.

Determinați valorile reale ale parametrilor a şi b astfel încât polinomul $f=X^4-8X^3+4X^2+aX+b$ să fie pătrat perfect.

Soluție:

Polinomul f este pătrat perfect dacă se poate scrie sub forma $f = \left(X^2 + mX + n\right)^2$.

Se elimină parantezele şi se obţine:

$$f = X^4 + m^2X^2 + n^2 + 2mX^3 + 2nX^2 + 2mnX \Rightarrow$$

$$f = X^4 + 2mX^3 + \left(m^2 + 2n\right)X^2 + 2mnX + n^2$$

dar $f = X^4 - 8X^3 + 4X^2 + aX + b$, rezultă:

$$\begin{cases} 2m = -8 \\ m^2 + 2n = 4 \\ 2mn = a \\ n^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -6 \\ a = 48 \\ b = 36 \end{cases}.$$

Problema 5.

Să se afle un polinom de grad cât mai mic astfel încât împărţit la $X + 2$ să dea restul -1 şi împărţit la $X - 1$ să dea restul 3.

Soluţie:

Din teorema împărţirii cu rest avem $f = (X + 2)q_1 - 1$ şi $f = (X - 1)q_2 + 3$. Se observă că $\text{grad}\left(f\right) \neq 0$.

Fie $f = aX + b$. Din relaţiile de mai sus avem $f\left(-2\right) = -1$ şi $f\left(1\right) = 3$, de unde rezultă că:

$$\begin{cases} -2a + b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \text{ şi } b = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{4}{3}X + \frac{5}{3}.$$

Problema 6.

Să se afle un polinom de gradul trei astfel încât împărţit la $X^2 - 3X$ dă restul $6X - 15$ şi împărţit la $X^2 - 5X + 8$ dă restul $2X - 7$.

Soluţie:

Fie polinomul de gradul trei cu proprietăţile din enunţ.

Deci $f = \left(X^2 - 3X\right)q_1 + 6X - 15$ (din teorema împărţirii cu rest) şi $f = \left(X^2 - 5X + 8\right)q_2 + 2X - 7$.

Deoarece $\text{grad}(f)=3 \Rightarrow \text{grad}(q_1)=1$ şi $\text{grad}(q_2)=1$. Din prima relație se obține $f(0)=-15$ şi $f(3)=3$. Fie $q_2 = aX+b.$ Făcând $X=0$ şi apoi $X=3$ în a doua relație se obține:

$$\begin{cases} -15 = 8b-7 \\ 3 = 2(3a+b)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ 3a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}.$$

Astfel, $f = (X^2-5X+8)(X-1)+2X-7 \quad \Rightarrow \quad f = X^3-6X^2+15X-15$.

Problema 7.

Să se determine un polinom $f = X^4+aX^3+bX^2+cX+d$ astfel încât împărțit la X^2-3X+1 să dea restul $2X+1$ şi împărțit la X^2-1 să dea restul $-2X+2.$

Soluție:

Aplicând teorema împărțirii cu rest putem scrie:

$f=(X^2-3X+1)q_1+2X+1$ şi

$f=(X^2-1)q_2-2X+2 \quad \Rightarrow f(1)=0$ şi $f(-1)=4$.

Cum $\text{grad}(f)=4 \Rightarrow \text{grad}(q_1)=2 \Rightarrow q_1 = X^2+mX+n$.

Pentru $X=1$ şi respectiv $X=-1,$ în prima relație obținem:

$$\begin{cases} 0=-(1+m+n)+3 \\ 4=5(1-m+n)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=2 \\ -m+n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$$

Deci:

$$\begin{aligned} f &= (X^2-3X+1)(X^2+X+1)+2X+1 = \\ &= X^4+X^3+X^2+-3X^3-3X^2-3X+X^2+X+1+2X+1= \\ &= X^4-2X^3-X^2+2. \end{aligned}$$

Problema 8.

Se consideră polinomul $f=4mX^3+3X^2-mX+6$ cu coeficienți reali. Să se determine $m \in R$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g=X-1$.

Soluție:

$(X-1)/f \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow 4m+3-m+6=0 \Leftrightarrow 3m=-9 \Leftrightarrow m=-3$.

Problema 9.

Se consideră polinomul $f = X^4 + 2aX^3 + (a+1)X^2 + 5X - 4$ cu coeficienți reali.Să se determine $a \in R$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X - \sqrt{3}$.

Soluție:

$$(X-\sqrt{3})/f \quad \Leftrightarrow \quad f(\sqrt{3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}^4 + 2a\sqrt{3}^3 + (a+1)\sqrt{3}^2 + 5\sqrt{3} - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$9 + 6a\sqrt{3} + 3a + 3 + 5\sqrt{3} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-\left(8+5\sqrt{3}\right)}{3(2\sqrt{3}+1)} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-22-11\sqrt{3}}{3\cdot 11} \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{-2-\sqrt{3}}{3}.$$

Problema 10.

Să se determine parametrii reali m, n, p astfel încât polinomul f să se dividă prin polinomul g, în cazul $f = X^4 + (m+n)X^3 + (m-1)X^2 + X + 1 + 2n$ şi $g = X^2 + 2X + 3$.

Soluție:

Aplicăm algoritmul de împărțire celor două polinoame şi obținem:

$$f = g\left[X^2 + (m+n-2)X - m - 2n\right] + (n-m+7)X + 3m + 8n + 1.$$

Condiția g/f impune ca restul să fie egal cu polinomul nul, adică:

$$\begin{cases} -m+n+7=0 \\ 3m+8n+1=0 \end{cases}, \text{ de unde rezultă soluția } m = 5, \quad n = -2.$$

Problema 11.

Să se determine $m, n \in Z_5$ astfel încât polinomul $f = \hat{2}X^3 + mX^2 + \hat{3}X + n$ să se dividă

prin polinomul $g = X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $f, g \in Z_5[X]$.

Soluție:

Se observă că $g = \left(X + \hat{1}\right)^2$ şi se aplică repetat schema lui Horner.

	X^3	X^2	X	X^0
	$\hat{2}$	m	$\hat{3}$	n
$-\hat{1} = \hat{4}$	$\hat{2}$	$m+\hat{3}$	$\hat{4}m$	$m+n=\hat{0}$
$-\hat{1} = \hat{4}$	$\hat{2}$	$m+\hat{1}$	$\hat{3}m+\hat{4}=\hat{0}$	

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} m+n=\hat{0} \\ \hat{3}m+\hat{4}=\hat{0} \end{cases}$ şi se obține soluția $m=\hat{2}, n=\hat{3}$.

Problema 12.

Să se determine a şi b astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$

Soluție:

Cum $(X-1)^2 / f \Rightarrow (X-1)/ f \Rightarrow f(1)=0$. Deci:

$$\left.\begin{matrix} f(1)=a+b-3 \\ f(1)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b-3=0 \Rightarrow b=3-a.$$

Polinomul f devine:

$$f = aX^4 + (3-a)X^3 - 3 = aX^4 + 3X^3 - aX^3 - 3 = aX^3(X-1) + 3(X-1)(X^2+X+1) =$$
$$= (X-1)(aX^3 + 3X^2 + 3X + 3)$$

Ştiind că $(X-1)^2 / f \Rightarrow (X-1)/(aX^3+3X^2+3X+3)$.

Notăm $g = aX^3 + 3X^2 + 3X + 3$ şi avem:

$$\left.\begin{matrix} X-1/g \Rightarrow g(1)=0 \\ g(1)=a+3+3+3=a+9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+9=0 \Rightarrow a=-9$$

şi $b = 3-a = 3-(-9) = 12$. În concluzie a = - 9 şi b =12.

Problema 13.

Fie $f = X^3 - 6X^2 + 3X + 2$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Calculați:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Soluție: Scriem relațiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{1} = 6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \end{cases}$$

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

$$= 6^2 - 2 \cdot 3 = 36 - 6 = 30$$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = -\frac{3}{2}$

c) x_1, x_2, x_3 rădăcini ale polinomului f, atunci:

$$x_1^3 - 6x_1^2 + 3x_1 + 2 = 0$$

$$x_2^3 - 6x_2^2 + 3x_2 + 2 = 0$$

$$x_3^3 - 6x_3^2 + 3x_3 + 2 = 0$$

Adunând cele trei relații, obținem:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6 \cdot 30 - 3 \cdot 6 - 6 = 180 - 24 = 156$$

Problema 14.

Fie $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X + 1$ şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale. Calculați:

a) $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$;

b) $\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_3} - 1\right)\left(\frac{1}{x_4} - 1\right)$.

Soluție:

a) Ştiind că polinomul f are rădăinile x_1, x_2, x_3, x_4, atunci acesta se poate scrie sub forma:

$$f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Calculând valoarea polinomului f în 1, obţinem:

$$f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4).$$

Dar $f(1) = 1 + 2 - 4 + 3 - 1 = 1$ rezultă că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1$.

b) $\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_3} - 1\right)\left(\frac{1}{x_4} - 1\right) = \frac{(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{-1} = -1$

Problema 15.

Se consideră polinomul $f = X^3 + X + \hat{1} \in Z_2[X]$. Arătaţi că polinomul f este ireductibil în $Z_2[X]$.

Soluţie:

Presupunem că f ar fi reductibil. Atunci g se poate scrie ca un produs de două polinoame ireductibile, unul de gradul 1 şi unul de gradul 2, sau ca un produs de trei polinoame de gradul 1. Deci, în fiecare caz, polinomul f trebuie să conţină cel puţin un factor de gradul 1. Atunci f admite cel puţin o rădăcină în Z_2.

Calculăm valorile polinomului în elementele din Z_2: $f(\hat{0}) = \hat{1}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$ şi observăm că polinomul f nu admite rădăcini, de unde rezultă că f este ireductibil.

Problema 16.

Fie polinomul $f = X^5 - 2X + 2$ şi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rădăcinile sale.

a) Determinaţi restul împărţirii lui f la polinomul $X^2 - 1$.

b) Calculaţi $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6$.

c) Calculaţi $(3 - x_1^2)(3 - x_2^2)(3 - x_3^2)(3 - x_4^2)(3 - x_5^2)$.

Soluţie:

a) Notăm $g = X^2 - 1 \Leftrightarrow g = (X - 1)(X + 1)$.

Deoarece $grad\ g = 2 \Rightarrow grad\ r < 2 \Rightarrow r = aX + b$. Aplicăm teorema împărțirii cu rest şi obținem: $f = gq + r \Leftrightarrow f = (X-1)(X+1)\cdot q + aX + b$.

Calculăm:

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= a + b \\ f(1) &= 1 - 2 + 2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a + b = 1$$

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= -a + b \\ f(-1) &= -1 + 2 + 2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -a + b = 3$$

Rezolvând sistemul format de cele două ecuații în necunoscutele a şi b, obținem $a = -1$ şi $b = 2$, de unde $r = -X + 2$.

b) Dacă $x_i, i = \overline{1,5}$ sunt rădăcinile polinomului f, atunci :

$$x_i^5 - 2x_i + 2 = 0 \quad /\cdot x_i \quad \Rightarrow$$

$$x_i^6 - 2x_i^2 + 2x_1 = 0, \quad \forall i = \overline{1,5}$$

Însumând relațiile după i, obținem: $\sum_{i=1}^{5} x_i^6 - 2\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$

Aplicând relațiile lui Viete, avem :

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - 2(x_1x_2 + \cdots + x_4x_5) = 0$$

şi atunci $\sum_{i=1}^{5} x_i^6 = 0$.

c) Deoarece $x_1, \ldots, x_5$ sunt rădăcinile polinomului f, atunci f se scrie sub forma:

$$f = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_5)$$

Astfel, putem scrie:

$$\begin{aligned}
&(3 - x_1^2)(3 - x_2^2)\ldots\ldots\ldots(3 - x_5^2) = \\
&= (\sqrt{3} - x_1)(\sqrt{3} - x_2)\ldots\ldots\ldots(\sqrt{3} - x_5)(\sqrt{3} + x_1)(\sqrt{3} + x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\sqrt{3} + x_5) = \\
&= f(\sqrt{3})\cdot(-1)^5\cdot(-\sqrt{3} - x_1)(-\sqrt{3} - x_2)\ldots\ldots\ldots(-\sqrt{3} - x_5) = \\
&= -f(\sqrt{3})\cdot f(-\sqrt{3}) = -(9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2)(-9\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2) = \\
&= (7\sqrt{3} + 2)(7\sqrt{3} - 2) = 49\cdot 3 - 4 = 147 - 4 = 143
\end{aligned}$$

Problema 17.

Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + X + 1$ unde a şi b sunt numere reale şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Dacă $a = b = 0$, determinați restul împărțirii lui f la $X + 2$.

b) Demonstrați că pentru orice $p, q \in R$, $p \neq q$, câturile împărțirii lui f la $X - p$ şi $X - q$ nu sunt egale.

Soluție:

a) Deoarece $a = b = 0$ atunci $f = X^4 + X + 1$ şi restul împărțirii lui f la $X + 2$ este $r = f(-2) = 16 - 2 + 1 = 15$.

b) Presupunem că cele două câturi ale împărțirilor sunt egale şi aplicând teorema împărțirii cu rest obținem:

$$f = (X - p) \cdot c + f(p)$$

$$f = (X - q) \cdot c + f(q).$$

Scădem cele două relații şi rezultă că $0 = (q - p) \cdot c + f(p) - f(q)$.

Deoarece gradul deîmpărțitului este 4, gradul împărțitorului este 1 atunci gradul câtului este 3. Deci $grad[(q - p) \cdot c + f(p) - f(q)]$=3 pentru că $p \neq q$. Atunci polinomul $(q - p) \cdot c + f(p) - f(q)$ nu poate fi egal cu polinomul nul deoarece el are gradul 3. Deci presupunerea făcută este falsă şi rezultă că cele două câturi nu sunt egale.

Problema 18.

Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + aX + 1$, unde a un este număr real şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile polinomului.

a) Determinați valorile lui a pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.

b) Calculați $\frac{x_1^2 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 - 1}{x_2} + \frac{x_3^2 - 1}{x_3} + \frac{x_4^2 - 1}{x_4}$.

c) Calculați $(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4)$.

Soluție:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + ... + x_3x_4) = 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (-a)^2 - 2\cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$$

b) x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui $f \;\Rightarrow\; f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$

$$\frac{x_1^2 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 - 1}{x_2} + \frac{x_3^2 - 1}{x_3} + \frac{x_4^2 - 1}{x_4} =$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) =$$

$$= -a - \frac{x_2x_3x_4 + \dots\dots\dots + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = -a - \frac{-a}{1} = -a + a = 0$$

c) $(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) = 2^4\left(\frac{1}{2} - x_1\right)\left(\frac{1}{2} - x_2\right)\left(\frac{1}{2} - x_3\right)\left(\frac{1}{2} - x_4\right) =$

$$= 16\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = 16\cdot\left(\frac{1}{16} + \frac{a}{8} + \frac{a}{2} + 1\right) = 1 + 2a + 8a + 16 = 10a + 17$$

Problema 19.

Fie polinomul $f = X^4 - 4X^2 + X + 2$ şi x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui.

a) Calculați $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.

b) Arătăți că

$$f(x_1 + x_2 + x_3) + f(x_1 + x_2 + x_4) + f(x_1 + x_3 + x_4) + f(x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

Soluție:

a) Se observă că suma coeficienților polinomului f este egală cu 0, de unde rezultă că $x = 1$ este rădăcină a polinomului şi deci $f(1) = 0$. De aici rezultă că:

$$f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2) = 0$$

b) $f(x_1 + x_2 + x_3) + f(x_1 + x_2 + x_4) + f(x_1 + x_3 + x_4) + f(x_2 + x_3 + x_4) =$

$$= f(-x_4) + f(-x_3) + f(-x_2) + f(-x_1) =$$

$$= (x_4^4 - 4x_4^2 - x_4 + 2) + (x_3^4 - 4x_3^2 - x_3 + 2) + (x_2^4 - 4x_2^2 - x_2 + 2) + (x_1^4 - 4x_1^2 - x_1 + 2) =$$

$$= f(x_4) - 2x_4 + f(x_3) - 2x_3 + f(x_2) - 2x_2 + f(x_1) - 2x_1 =$$

$$= 0 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -2\cdot 0 = 0$$

Problema 20.

Un polinom împărțit prin $X-2$, $X+3$, $X+2$ dă resturile -1, -6 şi respectiv 3. Să se afle restul împărțirii polinomului prin $(X-2)(X+3)(X+2)$.

Soluție:

Din teorema restului, avem: $f(2)=-1$, $f(-3)=-6$ şi $f(-2)=3$, iar din teorema împărțirii cu rest avem: $f=(X-2)(X+3)(X+2)\cdot q+r$, $grad\ r<3$.

Fie $r=aX^2+bX+c$ şi atunci:

$$f=(X-2)(X+3)(X+2)\cdot q+aX^2+bX+c.$$

Calculăm:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=4a+2b+c \\ f(2)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+2b+c=-1 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-3)=9a-3b+c \\ f(-3)=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 9a-3b+c=-6 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=4a-2b+c \\ f(-2)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a-2b+c=3 \qquad (3)$$

$$(1)-(3) \quad \Rightarrow \quad 4b=-4 \quad \Rightarrow \quad b=-1$$

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4a+c=1 \\ 9a+c=-9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 5a=-10 \quad \Rightarrow \quad a=-2$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad c=-1+8+2 \quad \Rightarrow \quad c=9$$

Deci restul împărțirii unui polinom la polinomul $(X-2)(X+3)(X+2)$ este $r=-2X^2-X+9$.

Problema 21.

Să se arate că dacă un polinom f este divizibil prin $(X-a)$ şi prin $(X-b)$, $a\neq b$, atunci f este divizibil prin $(X-a)(X-b)$.

Soluție:

$$f\,\vdots\,(X-a)\Rightarrow f(a)=0\ ,\quad f\,\vdots\,(X-b)\Rightarrow f(b)=0$$

Aplicăm teorema împărțirii cu rest: $f=(X-a)(X-b)\cdot q+r$, $grad\ r<2$.

Atunci fie $r=mX+n$ şi deci: $f=(X-a)(X-b)\cdot q+mX+n$.

Calculăm:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=ma+n \\ f(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ma+n=0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b)=mb+n \\ f(b)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow mb+n=0 \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (1) şi (2), găsim că $m=n=0$, unde rezultă că $r=0$ şi de aici deducem că $f \vdots (X-a)(X-b)$.

Problema 22.

Să se determine expresia restului împărțirii unui polinom oarecare $f \in C[X]$ prin $(X-a)(X-b)$.

Soluție:

Restul împărțirii polinomului f la $(X-a)$ este $f(a)$ iar restul împărțirii polinomului f la $(X-b)$ este $f(b)$.

Folosim teorema împărțirii cu rest: $f=(X-a)(X-b)\cdot q+r,\ grad\ r<2$, dăm formă restului $r=mX+n$ şi obținem:

$$f=(X-a)(X-b)\cdot q+mX+n.$$

Calculăm $f(a)$ şi $f(b)$ şi obținem :

$$\begin{cases} f(a)=ma+n \\ f(b)=mb+n \end{cases} \Rightarrow \quad m(a-b)=f(a)-f(b) \quad \Rightarrow$$

$$m=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Înlocuind pe m în sistem avem:

$$a\cdot\frac{f(a)-f(b)}{a-b}+n=f(a) \Rightarrow a\cdot f(a)-a\cdot f(b)+(a-b)n=a\cdot f(a)-b\cdot f(a) \Rightarrow$$

$$(a-b)n=a\cdot f(b)-b\cdot f(a) \quad \Rightarrow \quad n=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{a-b}$$

În concluzie $r=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}X+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

Problema 23.

Să se arate că polinomul $f = (2X^2 + X + 2)^3 + (2X^2 - X + 2)^7$ se divide prin polinomul $g = X^2 + 1$.

Soluție:

Descompunem polinomul g după rădăcini:

$$g = X^2 + 1 \Leftrightarrow g = (X - i)(X + i)$$

Calculăm: $f(i) = (2i^2 + i + 2)^3 + (2i^2 - i + 2)^7 = i^3 - i^7 = -i - i^3 \cdot i^4 =$

$$= -i - (-i) = -i + i = 0 \quad \Rightarrow \quad f \vdots (X - i) \qquad (1)$$

$$f(-i) = (2i^2 - i + 2)^3 + (2i^2 + i + 2)^7 = -i^3 + i^7 =$$

$$= -(-i) + i^4 \cdot i^3 = i - i = 0 \quad \Rightarrow \quad f \vdots (X + i) \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $f \vdots (X - i)(X + i) \quad \Rightarrow \quad f \vdots (X^2 + 1)$.

Problema 24.

Să se arate că polinomul $f = (X^2 + 1)^{6n+2} + X^4 + 1$, $n \in N$, se divide prin polinomul $g = X^2 + X + 1$.

Soluție:

Ştim că f este divizibil cu g dacă orice rădăcină a lui g este şi rădăcină a lui f. Fie α o rădăcină a lui g. Atunci:

$$g(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \ \ / \cdot (\alpha - 1) \neq 0 \ \Rightarrow$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^3 = 1$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \ \Rightarrow \quad \alpha^2 + 1 = -\alpha$$

Calculăm: $f(\alpha) = (\alpha^2 + 1)^{6n+2} + \alpha^4 + 1 = (-\alpha)^{6n+2} + \alpha \cdot \alpha^3 + 1 =$

$$= \alpha^{6n+2} + \alpha + 1 = \alpha^{6n} \cdot \alpha^2 + \alpha + 1 =$$

$$= (\alpha^3)^{2n} \cdot \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f \vdots g$$

Problema 25

Arătați că polinomul $f = X^{4n+3} + X^{4n+2} + X + 1$, $n \in N$, se divide cu polinomul $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

Soluție:

Dacă α este o rădăcină a polinomului g, atunci:

$$g(\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad / \cdot (\alpha - 1) \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^4 = 1.$$

Calculând $f(\alpha) = \alpha^{4n+3} + \alpha^{4n+2} + \alpha + 1 = (\alpha^4)^n \cdot \alpha^3 + (\alpha^4)^n \cdot \alpha^2 + \alpha + 1 =$

$$= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \;\Rightarrow\; f \,\vdots\, g.$$

Problema 26

Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c, \in R$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$.

a) Să se determine numărul real c, știind că $f(1) + f(-1) = 2a + 1$.

b) Știind că $a = -3$, $b = 1$, $c = 1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se exprime, în funcție de numerele reale a, b, c, determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

Soluție:

a) $f(1) + f(-1) = 2a + 1 \;\Rightarrow\; 1 + a + b + c - 1 + a - b + c = 2a + 1 \;\Rightarrow$

$$2a + 2c = 2a + 1 \;\Rightarrow\; 2c = 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}$$

b) $f = x^3 - 3x^2 + x + 1 \;\Leftrightarrow\; f = x^3 - x^2 - x^2 + x - x^2 + 1 \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; f = x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1)(x+1) \;\Leftrightarrow\; f = (x-1)(x^2 - x - x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; f = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 8 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$$

c) $D = 3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3$

x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui $f \Rightarrow \quad x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$$

$$x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = 0$$

Însumând relațiile, obținem: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + a\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + b\left(x_1 + x_2 + x_3\right) + 3c = 0$

Folosind relațiile lui Viete, avem: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) =$

$$= (-a)^2 - 2b = a^2 - 2b$$

Deci: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a\left(a^2 - 2b\right) - b \cdot (-a) - 3c$

$$= -a^3 + 2ab + ab - 3c$$

$$= -a^3 + 3ab - 3c$$

Problema 27

Se consideră polinomul $f = (X+1)^{2013} + (X-1)^{2013}$, având forma algebrică $f = a_{2013}X^{2013} + a_{2012}X^{2012} + \ldots + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, \ldots, a_{2013} \in R$.

a) Să se calculeze $f(-1) + f(1)$.

b) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f.

c) Să se determine restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.

Soluție:

a) $f(-1) + f(1) = (-1+1)^{2013} + (-1-1)^{2013} + (1+1)^{2013} + (1-1)^{2013}$

$$= (-2)^{2013} + 2^{2013}$$

$$= -2^{2013} + 2^{2013}$$

$$= 0$$

b) Forma algebrică a polinomului f fiind $f = a_{2013}X^{2013} + a_{2012}X^{2012} + \ldots + a_1X + a_0$, calculăm:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a_{2013} + a_{2012} + \ldots + a_1 + a_o \\ f(1) = 2^{2013} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_{2013} + a_{2012} + \ldots + a_1 + a_0 = 2^{2013}.$$

c) Notăm $g = X^2 - 1 \Leftrightarrow g = (X-1)(X+1)$

Deoarece $grad\ g = 2 \Rightarrow grad\ r < 2 \Rightarrow r = aX + b$

Aplicăm teorema împărțirii cu rest : $f = (X-1)(X+1)\cdot q + aX + b$.

Calculăm:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a+b \\ f(1) = 2^{2013} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b = 2^{2013}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -a+b \\ f(-1) = -2^{2013} \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b = -2^{2013}$$

Formăm sistem cu cele două ecuații, rezolvăm sistemul şi găsim $a = 2^{2013}$ şi $b = 0$, de unde $r = 2^{2013}\cdot X$.

Problema 28

Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii α pentru polinoamele:

a) $f = X^5 - 3X^4 - X^3 + 11X^2 - 12X + 4 \in R[X]$, $\alpha = 1$

Folosim schema lui Horner:

	X^5 1	X^4 -3	X^3 -1	X^2 11	X^1 -12	X^0 4
1	1	-2	-3	8	-4	0
1	1	-1	-4	4	0	
1	1	0	-4	0		
1	1	1	-3			

$\alpha = 1$ este rădăcină de multiplă de ordin 3

b) $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} \in Z_3[X]$, $\alpha = \hat{1}$

	X^3 $\hat{1}$	X^2 $\hat{2}$	X^1 $\hat{2}$	X^0 $\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$

$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$		

$\alpha = \hat{1}$ este rădăcină multiplă de ordin 2

Problema 29

Fără a efectua împărțirea să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^{100} + X^{99} + X$ la polinomul $g = X^3 - X$.

Soluție:

$$grad\ g = 3 \Rightarrow\ grad\ r < 3 \Rightarrow r = aX^2 + bX + c$$

$$f = g \cdot q + r \Rightarrow\ f = X(X-1)(X+1) \cdot q + aX^2 + bX + c$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = c \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a + b + c \\ f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b + c = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = a - b + c \\ f(-1) = 1 - 1 - 1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ a - b + c = -1$$

Cu cele trei ecuații formăm sistem: $\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow\ r = X^2 + 2X$.

Problema 30

Să se determine polinomul $f \in R[X]$, de grad 3 astfel încât $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4, \forall n \in N$.

Soluție:

Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1 + d$$

$$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$$

$$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$$

....

$$f(n) = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Însumăm relațiile şi obținem:

$$a(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + c(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n \cdot d = n^4$$

$$a \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + b \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + c \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot d = n^4 \quad / : n$$

$$a \cdot \frac{n(n+1)^2}{4} + b \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + c \cdot \frac{n+1}{2} + d = n^3$$

$$3a \cdot n(n+1)^2 + 2b(n+1)(2n+1) + 6c(n+1) + 12d = 12n^3$$

$$3an^3 + 6an^2 + 3an + 4bn^2 + 2bn + 4bn + 2b + 6cn + 6c + 12d = 12n^3$$

$$3a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

$$6a + 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 + 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -6$$

$$3a + 2b + 4b + 6c = 0 \quad \Rightarrow \quad 6c = -12 + 36 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

$$2b + 6c + 12d = 0 \quad \Rightarrow \quad 12d = 12 - 24 \quad \Rightarrow \quad d = -1$$

Deci $f = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1$.

Problema 31

Arătați că polinomul $f = X^4 + X + 1$, $f \in Z[X]$ nu se poate descompune în factori ireductibili peste Z.

Soluție:

Verificăm dacă f admite rădăcini întregi. Rădăcinile întregi dacă există, se găsesc printre divizorii lui 1.

$f(1) = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ nu este rădăcină

$f(-1) = 1 - 1 + 1 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ nu este rădăcină

Deci f nu se descompune într-un produs de factori în care cel puțin unul să aibă gradul 1.

Presupunem că f se descompune astfel: $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) \in Z[X]$.

Atunci $f = X^4 + cX^3 + dX^2 + aX^3 + acX^2 + adX + bX^2 + bcX + bd \Rightarrow$

$\Rightarrow f = X^4 + (a+c)X^3 + (b+ac+d)X^2 + (ad+bc)X + bd$.

Dar $f = X^4 + X + 1$, rezultă că: $\begin{cases} a+c=0 \\ b+d+ac=0 \\ ad+bc=1 \\ bd=1 \end{cases}$

Cazul I: $b = d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ ac=-2 \\ a=c=1 \end{cases} \Rightarrow S = \phi$ deoarece $a+c$ nu poare fi în acelaşi timp şi 0 şi 1.

Cazul II: $b = d = -1 \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ ac=2 \\ -a-c=1 \Rightarrow a+c=-1 \end{cases} \Rightarrow S = \phi$ deoarece $a+c$ nu poate fi în acelaşi timp şi 0 şi -1.

Rezultă că f nu se poate scrie ca produs de polinoame de gradul 2.

În concluzie polinomul f este ireductibil peste *Z*.

Problema 32

Fie $f \in R[X]$ un polinom cu proprietatea $(x+1)\cdot f(x-2)+(x-4)\cdot f(x)=2x+7$, $\forall x \in R$.

Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - X - 2$.

Soluție:

Polinomul g se scrie după rădăcini sub forma: $g = (X-2)(X-1)$.

Deoarece $grad\ g = 2 \Rightarrow grad\ r < 2 \Rightarrow r = aX + b$.

Aplicăm teorema împărțirii cu rest: $f = (X-2)(X-1)\cdot q + aX + b$ şi de aici obținem că

$$\begin{cases} f(2) = 2a+b \\ f(-1) = -a+b \end{cases} \qquad (1)$$

Trebuie să calculăm $f(2)$ şi $f(-1)$.

În condiția din ipoteză înlocuim pe x cu -1 şi cu 4:

$$x = -1 \Rightarrow -5\cdot f(-1) = 5 \Rightarrow f(-1) = -1$$

$x = 4 \Rightarrow 5 \cdot f(2) = 15 \Rightarrow f(2) = 3$.

Sistemul (1) devine: $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, iar restul împărțirii va fi $r = \dfrac{4}{3}X + \dfrac{1}{3}$.

Problema 33.

Să se determine parametrii reali *m, n, p* astfel încât polinomul *f* să se dividă prin polinomul *g*, în cazul : $f = X^3 + (2n+1)X^2 + mX - m - n$, $g = (X-1)(X+1)$.

Soluție:

Metoda 1 (Prin împărțire directă). Aplicând algoritmul de împărțire a lui *f* prin *g* avem :

$$\begin{array}{l|l} X^3 + (2n+1)X^2 + mX - m - n & X^2 - 1 \\ \cline{2-2} -X^3 + X & X + 2n + 1 \\ \hline \quad (2n+1)X^2 + (m+1)X - m - n & \\ \quad -(2n+1)X^2 + 2n + 1 & \\ \hline \qquad (m+1)X - m + n + 1 & \end{array}$$

Atunci $f = g(X + 2n + 1) + (m+1)X - m + n + 1$.

Polinomul *f* se divide prin *g* dacă restul $r = (m+1)X - m + n + 1$ este polinom nul, adică dacă $m + 1 = 0$ și $-m + n + 1 = 0$, adică $m = -1,\ n = -2$.

Metoda 2. Arătăm că orice rădăcină a împărțitorului este rădăcină şi pentru deîmpărțit. În acest caz $x_1 = 1,\ x_2 = -1$ sunt rădăcinile împărțitorului. Aceste valori trebuie să fie rădăcini şi pentru *f*, adică $f(1) = 0,\ f(-1) = 0.$ Sistemul format are soluția $m = -1,\ n = -2$.

Metoda 3 (Schema lui Horner). Se aplică de două ori schema lui Horner: o dată pentru *f* şi rădăcina $x = 1$ şi apoi pentru câtul obținut şi rădăcina $x = -1$.

	X^3	X^2	X	X^0
	1	$2n+1$	m	$-m-n$
1	1	$2n+2$	$2n+m+2$	$n+2=0$

-1	1	$2n+1$	$m+1=0$	

Din $m+1=0$ şi $n+2=0$, rezultă $m=-1,\ \ n=-2.$

Metoda 4 (Metoda coeficienților nedeterminați). Câtul trebuie să fie un polinom de gradul întâi de forma $q = X + a$. Avem egalitatea de polinoame

$$f = g(X+a) \Leftrightarrow X^3 + (2n+1)X^2 + mX - m - n = X^3 + aX^2 - X - a.$$

De aici, prin identificare, rezultă sistemul :

$$\begin{array}{c|l} X^2 & 2n+1 = a \\ X & \quad m = -1 \\ X^0 & -m-n = -a \end{array} \quad \text{cu soluția } m=-1,\ \ n=-2,\ a=-3.$$

Problema 34.

Să se determine parametrul real *m* şi să se rezolve următoarea ecuație, ştiind că rădăcinile reale ale ecuației sunt în progresie aritmetică: $x^3 - 12x^2 + mx - 28 = 0$.

Soluție:

Metoda 1.

Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației, atunci condiția ca ele să fie în progresie aritmetică este dată prin relația $2x_2 = x_1 + x_3$.

Acestei relații îi asociem relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m \\ x_1x_2x_3 = 28. \end{cases}$$

Din prima relație a lui Viète şi relația dată rezultă $3x_2 = 12,$ adică $x_2 = 4$ şi $x_1 + x_3 = 8$.

Din ultima relație a lui Viète se deduce $x_1x_3 = 7$.

Din sistemul: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 8 \\ x_1x_3 = 7 \end{cases}$ rezultă $x_1 = 1,\ x_3 = 7$ sau $x_1 = 7,\ x_3 = 1$.

Din a doua relație a lui Viète $m = 39.$ Valoarea cerută pentru m este $m = 39,$ iar rădăcinile sunt: 1, 4, 7.

Metoda 2.

Dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt în progresie aritmetică, atunci le alegem de forma:

$$x_1 = x_0 - r,\ \ x_2 = x_0,\ \ x_3 = x_0 + r.$$

Din prima relație a lui Viète rezultă $3x_0 = 12,$ adică $x_0 = 4.$

Rădăcinile sunt : $4 - r,\ 4,\ 4 + r,$ iar din ultima relație a lui Viète avem $16 - r^2 = 7$ sau $r^2 = 9,$ adică $r = \pm 3.$

Dacă $r = -3,$ atunci $x_1 = 7,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,$ iar pentru $r = 3,$ avem rădăcinile $x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 7.$

Din a doua relație a lui Viète se obține $m = 39.$

Problema 35

Să se arate că polinomul $f = (X-1)^{6n+1} + (X-2)^2$ este divizibil cu polinomul $g = X^2 - 3X + 3,\ \forall n \in N.$

Soluție:

Aplicăm proprietatea care afirmă că $f \vdots g$ dacă orice rădăcină a polinomului g este şi rădăcină a polinomului f.

Fie α o rădăcină a polinomului g. Atunci:

$$g(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 3\alpha + 3 = 0 \ /\cdot \alpha \neq 0$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 0 \ /-1$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = -1$$

$$(\alpha - 1)^3 = -1$$

Calculăm $f(\alpha) = (\alpha - 1)^{6n+1} + (\alpha - 2)^2$

$$= \left[(\alpha-1)^3\right]^{2n} \cdot (\alpha - 1) + \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$= (-1)^{2n} \cdot (\alpha - 1) + \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$= \alpha - 1 + \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$= \alpha^2 - 3\alpha + 3 = 0 \Rightarrow f \vdots g$$

Problema 36

Să se descompună în factori ireductibili polinomul $f = X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$, $f \in Z_5[X]$.

Soluție:

Calculăm: $f(\hat{0}) = \hat{3} \;\Rightarrow\; x = \hat{0}$ nu este rădăcină

$f(\hat{1}) = \hat{1} + \hat{3} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} \Rightarrow\; x_1 = \hat{1}$ este rădăcină

În continuare aplicăm schema lui Horner:

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0	
	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\Rightarrow x_1 = \hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$		
$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$		
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$		$\Rightarrow x_2 = \hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$			
$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$			$\Rightarrow x_3 = \hat{4}$
$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$				$\Rightarrow x_4 = \hat{4}$

Rădăcinile polinomului f sunt : $x_1 = \hat{1}$, $x_2 = \hat{3}$, $x_3 = \hat{4}$, $x_4 = \hat{4}$, iar descompunerea lui f în factori ireductibili este:

$$f = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X - \hat{4})^2 \quad \Leftrightarrow \quad f = (X + \hat{1})^2 (X + \hat{2})(X + \hat{4}).$$

Problema 37

Să se determine parametrii reali m, n, p astfel încât polinomul $f = X^4 - mX^3 + (m+n)X^2 + (p+1)X + n - 2p$ să admită rădăcina triplă $x = 1$.

Soluție:

Din $f(1)=0 \Rightarrow 1-m+m+n+p+1+n-2p=0 \Rightarrow 2n-p=-2 \Rightarrow p=2n+2$.

Polinomul devine: $f=X^4-mX^3+(m+n)X^2+(2n+3)X-3n-4$.

Aplicăm schema lui Horner:

	X^4 1	X^3 -m	X^2 m+n	X^1 2n+3	X^0 -3n-4
1	1	1-m	1+n	3n+4	0
1	1	2-m	-m+n+3	-m+4n+7=0	
1	1	3-m	-2m+n+6=0		

Punând condițiile ca resturile împărțirilor să fie egale cu 0, se obține sistemul:

$$\begin{cases} -m+4n+7=0 \\ -2m+n+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m+8n+14=0 \\ 2m-n-6=0 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{17}{7} \text{ şi } n=-\frac{8}{7} \Rightarrow p=-\frac{2}{7}.$$

Problema 38

Se consideră ecuația $x^3-3x^2+6x+4=0$. Să se calculeze:

a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; b) $x_1^3+x_2^3+x_3^3$; c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4$;

d) $x_1^5+x_2^5+x_3^5$; e) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$; f) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$;

g) $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}$.

Soluție:

Scriem relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=\frac{3}{1}=3 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=\frac{6}{1}=6 \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{4}{1}=-4 \end{cases}$$

a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$

$= 3^2 - 2 \cdot 6 = 9 - 12 = -3$

b) x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini ale polinomului f, atunci:

$$x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1 + 4 = 0$$

$$x_2^3 - 3x_2^2 + 6x_2 + 4 = 0$$

$$x_3^3 - 3x_3^2 + 6x_3 + 4 = 0$$

Adunând cele trei relații, obținem:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + 6\left(x_1 + x_2 + x_3\right) + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \cdot (-3) - 6 \cdot 3 - 12 = -9 - 18 - 12 = -39$$

c) x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini ale polinomului f, atunci:

$$x_i^3 - 3x_i^2 + 6x_i + 4 = 0 \text{ , } i \in \{1,2,3\} \qquad (1)$$

Înmulțim ecuația cu $x_i \neq 0$ şi avem:

$$x_i^4 - 3x_i^3 + 6x_i^2 + 4x_i = 0 \text{ , } i \in \{1,2,3\}.$$

Notăm: $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,

$S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Adunăm relațiile după i şi obținem $S_4 - 3S_3 + 6S_2 + 4S_1 = 0 \Rightarrow$

$S_4 = 3S_3 - 6S_2 - 4S_1 \Rightarrow S_4 = 3 \cdot (-39) - 6 \cdot (-3) - 4 \cdot 3 = -117 + 18 - 12 = -111$.

Deci $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -111$.

d) În mod analog, înmulțind relația (1) cu $x_i^2 \neq 0$ şi însumând după i obținem:

$$S_5 - 3S_4 + 6S_3 + 4S_2 = 0 \qquad S_5 = 3S_4 - 6S_3 - 4S_2$$

$$S_5 = 3 \cdot (-111) - 6 \cdot (-39) - 4 \cdot (-3) = -333 + 234 + 12 = -87.$$

Deci $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -87$.

e) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$

f) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} = \dfrac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{x_1^2x_2^2x_3^2} =$

$$=\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2(x_1x_1x_2x_3+x_1x_2x_2x_3+x_1x_2x_3x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2}=$$

$$=\frac{6^2-2\cdot(-4)\cdot 3}{(-4)^2}=\frac{36+24}{16}=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}.$$

Deci $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{15}{4}$.

g) $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}=$

$$=\frac{x_2x_3+x_2+x_3+1+x_1x_3+x_1+x_3+1+x_1x_2+x_1+x_2+1}{x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1+x_2+x_3+1}=$$

$$=\frac{6+2\cdot 3+3}{-4+6+3+1}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}.$$

Deci $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}=\frac{5}{2}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Andronache, M., Şerbănescu, D., ş.a., *Matematică pentru examenul de bacalaureat*, Ed. Art, Bucureşti, 2011;

2. Becheanu, M., Niță, C., Ştefãnescu, M., ş.a., *Algebră,* Ed. AII, Bucureşti, 1998;

3. Burtea, M., Burtea, G., *Culegere de exerciții şi probleme,* Ed. Campion, Bucureşti, 2009;

4. Burtea, M., Burtea, G., *Matematică-M2 clasa a XII-a,* Ed. Campion, Bucureşti, 2011;

5. Coşniță, C., Turtoiu, F., *Probleme de algebră,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1989;

6. Ganga, M., *Algebră, Manual pentru clasa a XII-a*, Ed.Mathpress, Ploieşti, 2004;

7. Ganga, M., *Matematică, Manual pentru clasa a XII-a*, *profil M2,* Ed.Mathpress, Ploieşt, 2007;

8. Ion, I.D., Niță, C., Năstăsescu, C., *Complemente de algebră,* Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984;

9. Monea, M., Monea, S., ş.a., *Matematică, Bacalaureat 2013*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2012;

10. Panaitopol, L., Drăghicescu, I.C., *Polinoame şi ecuații algebrice,* Ed. Albatros, Bucureşti, 1980;

11. Postolache, M., Saulea, T., ş.a., *Matematică, manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2007.