Neculai STANCIU

PROBLEME DE MATEMATICÃ GIMNAZIU & LICEU

Buzãu, 2009

Dedic această carte soției mele Roxana Mihaela Stanciu şi copiilor noştriBogdan Andrei şi Maria.

Referenți ştiințifici:
Prof. gr. I Constantin Apostol, Colegiul Național „Alexandru Vlahuțã”, Râmnicu Sãrat
Prof. gr. I Gheorghe Ghițã, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Buzãu
Redactor: Roxana Mihaela Stanciu
Tehnoredactare computerizatã: Roxana Mihaela Stanciu

PREFAȚÃ

Soluția unei probleme trebuie privitã ca o sursã de metode şi idei care se vor dovedi utile şi în alte împrejurãri.Dintr-o problemã elevul trebuie sã obținã şi sã rețină cât mai multe informații .

Pornind de la aceste motive, cartea de fațã se adreseazã elevilor care se pregãtesc pentru concursurile de matematicã.Problemele selectate sunt problemele originale ale autorului - în marea lor majoritate publicate – în cãrți şi reviste de specialitate ca: „Matematicã de vacanțã'', ''Gazeta matematicã'', ''Revista matematicã din Timişoara'', ''Revista de informare matematicã din Braşov'', ''Sã înțelegem matematica'' (Bacãu), ''Recreații matematice" (Iaşi) etc.

Soluțiile problemelor sunt clare, concise, imediat dupã enunț.Aceasta reprezintã de fapt nota de originalitate şi factorul de utilitate al cãrții.Mai spun cã lucrarea este utilã şi prin faptul cã are un caracter complet, unitar, conținând probleme din clasele V – XII.

Berca, 2009 Autorul

I.

***Motto**:“Aritmetica şi Geometria dispun de resurse bogate de dezvoltare a capacităţii copilului de a se mira, de a se întreba, de a imagina răspunsuri, de a tatona diferite căi de rezolvare, de a stabili punţi de legătură cu înţelegerea naturii, a limbajului, a istoriei şi geografiei.Dar totul trebuie să se bazeze pe dezvoltarea propriei sale curiozităţi, în aşa fel încât el să accepte ca unică răsplată bucuria, plăcerea de a înţelege, prin paşi mărunţi, câte ceva din lumea care îl înconjoară şi de a se înţelege pe sine.La întrebarea pe care o auzim mereu, din partea unor elevi, dar şi din partea unor părinţi sau educatori:De ce matematică pentru copii care nu-şi propun să devină matematicieni? le răspundem: Pentru că matematica este un mod de gândire cu valoare universală şi pentru că ea prilejuieşte bucurii spirituale la care orice fiinţă umană ar trebui să aibă acces.În măsura în care adolescenţii vor învăţa să se, bucure de frumuseţile matematicii, ale ştiinţei, ale artei şi literaturii şi vor simţi nevoia de a le frecventa, ei nu vor mai suferi de plictiseală iar tentaţia unor activităţi derizorii, uneori antisociale, va scădea”*

Savantul Academician, Solomon Marcus

Problemă pentru ciclul primar

La o oră de sport participă elevi din clasa a III-a şi elevi din clasa a IV-a, în total 46. Profesorul aşează elevii pe un rând astfel încât între doi elevi de clasa a IV-a să se afle doi elevi de clasa a III-a.Să se afle câţi elevi sunt în clasa a III-a şi câţi elevi sunt în clasa a IV-a.

Soluţie.Dacă notăm cu a numărul elevilor din clasa a IV-a şi cu b numărul elevilor din clasa a III-a din enunţ rezultă relaţiile:
$a+b=46$ şi $b=2(a-1)$.Se obţine $a=16$ şi $b=30$.

Problemă pentru ciclul primar,

Găsiţi numărul $\overline{abcd}:2$ ştiind că cifrele sale verifică relaţiile:
$(1) a+b+c+d=11, (2) b+c+d=7, (3) c+d=7, (4) d=2a-2$.

Soluţie.Dacă scădem relaţiile (1) şi (2) obţinem $a=4$, apoi scădem relaţiile (2) şi (3) şi rezultă $b=0$.Din (4) avem $d=6$, iar din (2) $c=1$.De aici obţinem $\overline{abcd}=4016$. Numărul căutat este 2008.

Problemă pentru ciclul primar,

Într-o şcoală, în luna mai 2008, raportul fete:băieţi era de 2:3.În prezent, raportul este 1:2, numărul băieţilor a rămas neschimbat, iar numărul fetelor este cu 10 mai mic.Să se afle câte fete şi câţi băieţi erau în şcoală în luna mai 2008.

Dată la Concursul Sclipirea Minţii - 2008

Soluție.Notăm cu f numărul fetelor şi cu b numărul băieților.Deoarece în luna mai 2008 raportul fete-băieți era 2:3 ,rezultă $f = 2k$ şi $b = 3k$ .Din datele prezente avem $2(2k-10) = 3k$, de unde $k = 20$.
Deci $f = 40, b = 60$.

Dată la Concursul "Sclipirea Minții" 2008

Problema pentru clasa a V - a,

Aratati ca fractia :

$\dfrac{a^2b+ab^2}{c^2d+cd^2}, (\forall a,b,c,d \in N^*)$ este reductibila.Generalizati rezultatul.

Solutie :

Numerele de forma $a^2b+ab^2 = ab(a+b)$ sunt numere pare.
De aici rezulta ca numaratorul si numitorul fractiei se divide cu 2
si fractia este reductibila.

Generalizare :

Fractia $\dfrac{a_1^{\,2}b_1+a_1b_1^{\,2}+a_2^{\,2}b_2+a_2b_2^{\,2}+...+a_n^{\,2}b_n+a_nb_n^{\,2}}{c_1^{\,2}d_1+c_1d_1^{\,2}+c_2^{\,2}d_2+c_2d_2^{\,2}+...+c_m^{\,2}d_m+c_md_m^{\,2}}$

este reductibila $(\forall a_i, b_i \in N^*, c_j, d_j \in N^*, i \in \{1,2,...,n\}, j \in \{1,2,...,m\})$

Problema pentru clasa a V-a

Arătați cã fracția

$\dfrac{3^a+5^b+7^c+2d}{ab(a+b)}, (a,b \in N^*, c,d \in N)$ nu se simplificã

printr - un numar par.

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10109)

Soluție:
Se demonstreazã usor ca $3^a+5^b+7^c+2d$ este un numar impar
(se calculeaza ultima cifrã a sa) ,
iar $ab(a+b)$ un numãr par; deci fractia datã nu se simplificã
printr - un numar par.

Problema pentru clasa a V-a

Arătaţi că fracţia

$$\frac{2005^a + 2007^b + 1}{ab(a+b)}, (a, b \in N^*) \text{ nu se simplifica}$$

printr - un numar par.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9945)

Soluţie:

Se demonstreaza usor ca $2005^a + 2007^b + 1$ este un numar impar

(se calculeaza ultima cifra a sa),

iar $ab(a+b)$ un numar par; deci fractia data nu se simplifica

printr - un numar par.

Problema pentru clasa a V-a

Arătati ca fractia

$$\frac{a^2b + ab^2 + 7^n}{c^2d + cd^2 + 6^m}, \text{ nu se simplifica printr - un numar par}$$

$(\forall a, b, c, d, n \in N; \forall m \in N^*)$.

Solutie :

Fractia data se scrie :

$\frac{ab(a+b) + 7^n}{cd(c+d) + 6^m}$.Tinand cont ca :

$ab(a+b) = par, cd(c+d) = par, 6^m = par, 7^n = impar,$

obtinem faptul ca numaratorul este un numar impar iar numitorul

un numar par.

De aici rezulta ca fractia nu se simplifica printr - un numar par.

Problema pentru clasa a V-a

Arătaţi că fracţia

$$\frac{5^a + 7^b + 1}{ab(a+b)}, (a, b \in N^*) \text{ nu se simplifica printr - un numar par.}$$

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9945); Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10295)

Soluție:
Se demonstreaza usor ca $5^a + 7^b + 1$ este un numar impar
(se calculeaza ultima cifra a sa),
iar $ab(a+b)$ un numar par; deci fractia data nu se simplifica
printr - un numar par.

Problema pentru clasa a V-a

Sã se afle x şi y numere naturale astfel încât
fractia $\frac{3}{(x-1)(y-2)}$ sa fie echiunitara.
Solutie :
fractia data este echiunitara daca $(x-1)(y-2)=3$.
Avem urmatoarele posibilitati :
1.$x-1=1$ si $y-2=3 \Leftrightarrow x=2$ si $y=5$;
2.$x-1=3$ si y - 2 = 1 $\Leftrightarrow x=4$ si y = 3.
Deci $(x,y)\in\{(2,5),(4,3)\}$.

Problema pentru clasa a V-a

Sã se afle x şi y numere naturale astfel încât
fractia $\frac{xy - x + 2y - 2}{3}$ sa fie subunitara.
Soluție:
Avem $xy-x+2y-2 = x(y-1)+2(y-1) = (x+2)(y-1)$.
Valorile posibile ale produsului $(x+2)(y-1)$ sunt 0,1 si 2.
Efectuand calculele obtinem solutiile :
1.$\begin{cases} y=1 \\ x\in N \end{cases}$; 2.$\begin{cases} x=0 \\ \text{y}=2 \end{cases}$.

Problema pentru clasa a V-a
Arãtați cã fracția
$\frac{4n+6}{n^2+n}$ (n $\in$ N), se poate simplifica.

Soluție:
Numitorul se scrie $n(n+1)$.Produsul a doua numere naturale
consecutive este par.
Numaratorul se scrie $2(2n+3)$, deci este divizibil cu 2.
Fractia se poate simplifica cu 2.

Problema pentru clasa a V-a

Arãtați cã fracția

$\frac{6}{10^n - 1}, (n \in N^*)$ se poate simplifica.

Soluție:

Observam ca $10^n - 1 = 10...0 - 1 = 99...9$, deci numitorul se divide

cu 3 pentru orice $n \in N^*$;

fractia se simplifica cu 3.

Problema pentru clasa a V-a

Arãtați cã fracția

$$\frac{2003^a + 2005^b + 2007^c + 2d}{ab(a+b)}, (a, b \in N^*, c, d \in N)$$

nu se simplificã printr - un numar par.

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10109)

Soluție:

Se demonstreazã usor ca $2003^a + 2005^b + 2007^c + 2\text{d}$

este un numar impar

(se calculeaza ultima cifrã a sa),

iar $ab(a+b)$ un numãr par; deci fractia datã nu se simplificã

printr - un numar par.

Problemã pentru clasa a V-a

Sa se afle suma numerelor de forma $\overline{ab}$ cu $\frac{a+1}{b} \in N$ si $\frac{b+2}{a} \in N$.

Publicată în RMT – nr. 3 / 2006 (VI.204.); G.M. – nr. 9 / 2006 (E: 13267)& Crux M391 – aprilie 2009

Soluție:

Este necesar ca $b \le a+1$ si $a \le b+2$, deci $b \in \{a-2, a-1, a, a+1\}$.

$$\text{(1) Pentru } b = a-2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{a-2} \in N \Rightarrow \frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2} \in N \\ \frac{a-2+2}{a} \in N \Rightarrow 1 \in N \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-2 \in \{1,3\} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow b = 1 \\ a = 5 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$(2)\text{Pentru b = a - 1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{a-1} \in N \Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \in N \\ \frac{a+1}{a} \in N \Rightarrow \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \in N \end{cases} \Rightarrow a \in \Phi$$

$$(3)\text{Pentru b = a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{a} \in N \\ \frac{a+2}{a} \in N \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$(4)\text{Pentru b = a + 1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{a+1} \in N \Rightarrow 1 \in N \\ \frac{a+3}{a} \in N \Rightarrow \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \in N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 2 \\ a = 3 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Asadar, $\overline{ab} \in \{31, 53, 11, 12, 34\}$ si suma ceruta este 141.

Problemă pentru clasa a V-a,

Fie $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2008$. Aflați cel mai mare număr natural n cu proprietatea că 3^n divide A.

Publicată în G.M. –nr. 5 / 2007 (E: 13439)

Soluție. Numărul A conține 2008 factori. Notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului a. Din cei 2008 factori $\left[\frac{2008}{3}\right] = 669$ sunt divizibili cu 3; $\left[\frac{2008}{9}\right] = 223$ sunt divizibili cu 3^2; $\left[\frac{2008}{27}\right] = 74$ sunt divizibili cu 3^3; $\left[\frac{2008}{81}\right] = 24$ sunt divizibili cu 3^4; $\left[\frac{2008}{243}\right] = 8$ sunt divizibili cu 3^5 și $\left[\frac{2008}{729}\right] = 2$ sunt divizibili cu 3^6. Nu avem nici un factor divizibil cu $3^7 = 2187$. Avem în total 669+223+74+24+8+2=1000 factori de $3 \Rightarrow n = 1000$.

Problemă pentru clasa a V-a,

În câte zerouri se termină numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2007$?.

Soluție. Numărul A conține 2007 factori. Notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului a. Din cei 2007 factori $\left[\frac{2007}{5}\right] = 401$ sunt divizibili cu 5; $\left[\frac{2007}{25}\right] = 80$ sunt divizibili cu 5^2; $\left[\frac{2007}{125}\right] = 16$ sunt divizibili cu 5^3 și $\left[\frac{2007}{625}\right] = 3$ sunt divizibili cu 5^4. Nu avem nici un factor divizibil cu $5^5 = 3125$. Avem în total 401+80+16+3=500 factori de $5 \Rightarrow 5^{500}$ divide A. Deci A se termină cu 500 de zerouri.

Problemã pentru clasa a V-a

Determinati solutiile naturale ale ecuatiei :
$x(x+1)(x+7)=2^{y}.$

Solutie :

Fie $x=2^{u}$, $x+1=2^{v}$, $x+7=2^{t}$.
Rezulta $u+v+t=y$ si 2^{v} - 2^{u} $=1$, respectiv 2^{t} - 2^{u} $=7$
Ultimile doua relatii se mai scriu $2^{u}(2^{v-u}$ -1$)=1$ si $2^{u}(2^{t-u}$ -1$)=7$.
Urmeaza ca $u=0$ si 2^{v-u} -1 $=1$ respectiv 2^{t-u} -1 $=7$,
de unde $v=0$ si $t=3$.
Pr in urmare solutia ecuatiei este : $x=1$, y $=4$.

Problemã pentru clasa a V-a,

Rezolvați în NxN ecuația :
$\frac{1}{x+2006}+\frac{2007}{y+2007}=1,$ daca $x-y\in N^{*}$.
Publicată în GM – nr. 11 / 2006 (C:3086.) & dată la Olimpada de Matematică Faza Locală – clasa a VIII – a , Sibiu, 2007; Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9942)

Soluție:
Din $x-y\in N^{*}\Rightarrow x-y\geq 1\Rightarrow x\geq y+1\Rightarrow x+2006\geq y+2007$
$\Rightarrow \frac{1}{x+2006}\leq\frac{1}{y+2007}$

Avem $\frac{1}{x+2006}+\frac{2007}{y+2007}\leq\frac{1}{y+2007}+\frac{2007}{y+2007}=\frac{2008}{y+2007}$
$\Rightarrow 1\leq\frac{2008}{y+2007}\Rightarrow y\leq 1$
De unde $y\in\{0,1\}$.
Pentru $y=0\Rightarrow\frac{1}{x+2006}=0\Rightarrow$ nu avem solutie;
Pentru $y=1\Rightarrow x=2$.
Solutia este $x=2, y=1$.

Problemã pentru clasa a V-a

Probleme rezolvate

Sã se compare numerele:
$2006^{2006}+2007^{2007}$ si $2^{8024}\cdot 3^{1003}\cdot 7^{4012}+2^{6021}\cdot 223^{2007}$.

Soluție:

$2007=3^2\cdot 223;$

$2^3\triangleleft 3^2 \Leftrightarrow 2^3\cdot 223\triangleleft 2007 \Leftrightarrow 2^{3\cdot 2007}\cdot 223^{2007}\triangleleft 2007^{2007}$

$\Leftrightarrow (1)2^{6021}\cdot 223^{2007}\triangleleft 2007^{2007}.$

$2006=2\cdot 17\cdot 59;$

$$\begin{cases}3\triangleleft 2^2\\ 49\triangleleft 59\\ 16\triangleleft 17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3^{1003}\triangleleft 2^{2006}\\ 49^{2006}\triangleleft 59^{2006}\\ 16^{2006}\triangleleft 17^{2006}\end{cases}\Leftrightarrow (2)3^{1003}\cdot 7^{4012}\cdot 2^{8024}\triangleleft 2006^{2006}.$$

Din (1) si (2) $\Rightarrow 2006^{2006}+2007^{2007}\triangleright 2^{6021}\cdot 223^{2007}+2^{8024}\cdot 3^{1003}\cdot 7^{4012}.$

Problemã pentru clasa a V-a

Sã se compare numerele:
$2006^{2006}\cdot 2007^{2007}$ si $2^{14045}\cdot 3^{1003}\cdot 7^{4012}\cdot 223^{2007}$.

Soluție:

$2007=3^2\cdot 223;$

$2^3\triangleleft 3^2 \Leftrightarrow 2^3\cdot 223\triangleleft 2007 \Leftrightarrow 2^{3\cdot 2007}\cdot 223^{2007}\triangleleft 2007^{2007}$

$\Leftrightarrow (1)2^{6021}\cdot 223^{2007}\triangleleft 2007^{2007}.$

$2006=2\cdot 17\cdot 59;$

$$\begin{cases}3\triangleleft 2^2\\ 49\triangleleft 59\\ 16\triangleleft 17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3^{1003}\triangleleft 2^{2006}\\ 49^{2006}\triangleleft 59^{2006}\\ 16^{2006}\triangleleft 17^{2006}\end{cases}\Leftrightarrow (2)3^{1003}\cdot 7^{4012}\cdot 2^{8024}\triangleleft 2006^{2006}.$$

Din (1) si (2) $\Rightarrow 2006^{2006}\cdot 2007^{2007}\triangleright 2^{14045}\cdot 3^{1003}\cdot 7^{4012}\cdot 223^{2007}.$

Problemã pentru clasa a V-a

Rezolvați în NxN ecuația :
$\frac{1}{x+a}+\frac{a+1}{y+a+1}=1,$ daca $x-y\in N^*, a\in N.$

Publicată în RMT – nr. 3 / 2007 (V.229.)

Soluție:

Din $x-y\in N^{*}\Rightarrow x-y\geq 1\Rightarrow x\geq y+1\Rightarrow x+a\geq y+a+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+a}\leq \dfrac{1}{y+a+1}$

Avem $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{a+1}{y+a+1}\leq \dfrac{1}{y+a+1}+\dfrac{a+1}{y+a+1}=\dfrac{a+2}{y+a+1}$

$\Rightarrow 1\leq \dfrac{a+2}{y+a+1}\Rightarrow y\leq 1$

De unde $y\in\{0,1\}$.

Pentru $y=0\Rightarrow \dfrac{1}{x+a}=0\Rightarrow$ nu avem solutie;

Pentru $y=1\Rightarrow x=2$.

Solutia este $x=2, y=1$.

Problemã pentru clasa a V-a

Sã se gãseascã numerele de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 15 care au 15 divizori.

Publicată în RMT – nr. 1 / 2007 (O.V.167.)

Soluție:

$\overline{abcd}$ divizibile cu $15\Rightarrow \overline{abcd}=3^{n}\cdot 5^{m}\cdot p^{k}\cdot\ldots$

$\overline{abcd}$ au 15 divizori $\Rightarrow 15=(n+1)\cdot(m+1)\cdot(k+1)\cdot\ldots$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1=3 \text{ si } m+1=5\Rightarrow n=2, m=4\\ \text{sau}\\ n+1=5 \text{ si } m+1=3\Rightarrow n=4, m=2\end{cases}$$

Avem: $\overline{abcd}=3^{2}\cdot 5^{4}=5625$ sau $\overline{abcd}=3^{4}\cdot 5^{2}=2025$.

$\overline{abcd}\in\{2025,5625\}$.

Problemã pentru clasa a V-a

Sã se gãseascã numerele de forma $\overline{abcde}$ divizibile cu 15 care au 25 divizori.

Soluție:

$\overline{abcde}$ divizibile cu $15\Rightarrow \overline{abcd}=3^{n}\cdot 5^{m}\cdot p^{k}\cdot\ldots$

$\overline{abcd}$ au 25 divizori $\Rightarrow 25=(n+1)\cdot(m+1)\cdot(k+1)\cdot\ldots$

$\Rightarrow n+1=5$ si $m+1=5\Rightarrow n=4$ si $m=4$

Avem: $\overline{abcde}=3^{4}\cdot 5^{4}=50625$.

$\overline{abcde}\in\{50625\}$.

Problemã pentru clasa a V-a

Sã se gãseascã numerele de forma $\overline{abcde}$ divizibile cu 35 care au 15 divizori.

Soluție:

$\overline{abcde}$ divizibile cu $35 \Rightarrow \overline{abcd} = 5^n \cdot 7^m \cdot p^k \cdot ...$

$\overline{abcd}$ au 15 divizori $\Rightarrow 15 = (n+1)\cdot(m+1)\cdot(k+1)\cdot ...$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1=3 \text{ si } m+1=5 \Rightarrow n=2, m=4 \\ \text{sau} \\ n+1=5 \text{ si } m+1=3 \Rightarrow n=4, m=2 \end{cases}$$

Avem: $\overline{abcde} = 5^2 \cdot 7^4 = 60025$ sau $\overline{abcde} = 5^4 \cdot 7^2 = 30625.$

$\overline{abcde} \in \{30625, 60025\}.$

Problemã pentru clasa a V-a

Sã se afle numerele naturale n şi m care verificã condițiile:

(i) $n = 5^y \cdot 11^z;$

(ii) $m = 2^x \cdot 11^z;$

(iii) n are 15 divizori;

(iv) m are 12 divizori.

Publicatã în S.G.M – nr. 10 / 2008 (S.E 08 - 72), datã la concursul interjudețean"Jose Marti" –clasa a VI-a- Bucureşti, 2009

Soluție:

$$\begin{cases} \text{din (iii)} \Rightarrow (y+1)\cdot(z+1)=15 \\ \text{din (iv)} \Rightarrow (x+1)\cdot(z+1)=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1=5 \\ x+1=4 \\ z+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{din (i)} \Rightarrow n = 5^4 \cdot 11^2 = 75625 \\ \text{din (ii)} \Rightarrow m = 2^3 \cdot 11^2 = 968 \end{cases}$$

Problemã pentru clasa a VI-a,

Aflați restul împãrțirii numãrului $3^{2006} + 3^{2007}$ la 8.

Publicatã în G.M. – nr. 4 / 2007 (25776)

Soluție:

$$3^{2006} + 3^{2007} = 3^{2006}(1+3) = 4 \cdot 3^{2006} = 4 \cdot \left(3^2\right)^{1003} = 4 \cdot (8+1)^{1003} =$$

$= 4 \cdot (M8 + 1) = M8 + 4,$ deci restul cerut este 4.

Problemã pentru clasa a VI- a,

Sã se arate cã 23 divide $3^{23} + 5^{23} + 15^{23}$.

Publicatã în RIM – nr.XIV -2007 (10115)

Soluție.Se aplicã Mica teoremã a lui Fermat: $\forall a \in Z, p = prim, p \neq a \Rightarrow a^{p-1} = M_p + 1.$

$3^{23}+5^{23}+15^{23}=3\cdot 3^{22}+5\cdot 5^{22}+15\cdot 15^{22}=3\cdot(M_{23}+1)+5\cdot(M_{23}+1)+15\cdot(M_{23}+1)=$
$=M_{23}+3+5+15=M_{23}$

Problemã pentru clasa a V-a,

Să se determine mulțimea $A=\{x\in N/x=y+z, y=3a, z=6b, 0\prec a+2b\prec 4\}$.

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10118)

Soluție.(1) $x=y+z=3a+6b=3\cdot(a+2b)\in N$.Din $0\prec a+2b\prec 4$ şi (1) rezultă
(2) $a+2b\in\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{5}{3},2,\frac{7}{3},\frac{8}{3},3,\frac{10}{3},\frac{11}{3}\right\}$.Din (1) şi (2) avem
$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

Problemã pentru clasa a V-a,

Fie $A=\{x\in N/x=y+z, y=na, z=2nb, 0\prec a+2b\prec 4, n\in N^*\}$.Să se determine A şi cardA.

Soluție.(1) $x=y+z=na+2nb=n(a+2b)$
$x\in N\overset{(1)}{\Longrightarrow} a+2b\in\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{4n-1}{n}\right\}$ Avem $A=\{1,2,3,...,4n-1\}$ şi cardA=4n-1.

Problemă pentru clasa a V- a,

Aflați restul împărțirii numărului N=$\overline{ababab}+10$ la 13.

Soluție. Numărul $\overline{ababab}=10101\cdot\overline{ab}=M_{13}$.Obținem că restul împărțirii numărului N la 13 este 10.

Problemă pentru clasa a V- a,

Aflați restul împărțirii numărului N=$\overline{ababab}+13$ pe rând la 21 şi 37.

Vezi RMT – 1 / 2009, O.V. 214, şi SGMB- mai / 2009 (S:E09.168)

Soluție. Numărul $\overline{ababab}=10101\cdot\overline{ab}=M_{21}=M_{37}$.Obținem că restul împărțirii numărului N la 21 şi 37 este 13.

Problemă pentru clasa a V-a,

Fie $A=\{x\in N/x=y+z, y=na, z=2nb, m\prec a+2b\prec p, n,m,p\in N^*\}$Să se determine cardA.

Soluție.(1) $x=y+z=na+2nb=n(a+2b)$
(2) $m\prec a+2b\prec p\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} mn\prec x\prec pn$.Deoarece $x,mn,pn\in N^*\Rightarrow cardA=pn-mn-1$.

Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10294)

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se determine mulțimea $A=\{x\in N/3\cdot 5^n<x<5^{n+1}, n\in N\}$ astfel încât $cardA=9$.

Soluție.Primul element al lui A este pe de o parte $3\cdot 5^n+1$ şi pe de altă parte $5^{n+1}-9$.

Deci avem egalitatea $3.5^n + 1 = 5^{n+1} - 9 \Leftrightarrow 10 = 5 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^n \Leftrightarrow 10 = 2 \cdot 5^n \Leftrightarrow n = 1$.
Mulțimea este $A = \{16,17,18,19,20,21,22,23,24,\}$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in N / 3 \cdot 5^n \leq x \leq 5^{n+1}, n \in N\right\}$ astfel încât $cardA = 11$..

Soluție.Primul element al lui A este pe de o parte $3 \cdot 5^n$ și pe de altă parte $5^{n+1} - 11 + 1$.
Deci avem egalitatea $3.5^n = 5^{n+1} - 11 + 1 \Leftrightarrow 10 = 5 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^n \Leftrightarrow 10 = 2 \cdot 5^n \Leftrightarrow n = 1$.
Mulțimea este $A = \{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25\}$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se rezolve în $N \times N$ ecuația: $3^{x^2+y+1} - 3^{x^2+2} = 216$.
Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10121)

Soluție.Scoatem pe 3^{x^2+2} factor și avem:
$3^{x^2+2}(3^{y-1} - 1) = 3^3 \cdot 2^3$
Din cei doi factori din membrul stâng unul este multiplu de 3 fără a fi și multiplu de 2 iar,
celălalt este multiplu de 2 fără a fi și multiplu de 3, deci avem:
$3^{x^2+2} = 3^3$ și $3^{y-1} - 1 = 2^3$.În continuare $x^2 + 2 = 3$; $y - 1 = 2$, de unde $x = 1$ și $y = 3$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Se consideră două numere de câte cinci cifre fiecare în care intră toate cifrele o singură dată .Să se afle suma acestor două numere știind că este de tipul $\overline{knmmm}$, cu $n = m - 1$ și $k = 2m + 1$.

Soluție. Suma a două numere de câte cinci cifre în care să intre toate cifrele o singură dată este multiplu de 9, deoarece suma cifrelor este 45.
Din $9 \mid \overline{abcde} + \overline{fghij} = \overline{klmmm}$, cu $n = m - 1$ și $k = 2m + 1$ rezultă că numărul căutat nu poate fi decât 72333.

Problemă pentru ciclul primar (sau clasa a V-a),

Să se găsească toate numerele de trei cifre care satisfac simultan condițiile:
(1) produsul cifrelor numărului este egal cu triplul sumei cifrelor acestuia ;
(2) una din cifrele numărului este egală cu suma celorlate două cifre ale numărului.

Soluție.Fie a, b și c cifrele numărului căutat și, fără a restrânge generalitatea , presupunem $a \leq b \leq c$.Din $abc = 3(a + b + c)$ și $c = a + b$, rezultă $abc = 6c$, de unde $ab = 6$ .Avem $(a, b, c) \in \{(1,6,7),(2,3,5)\}$.
Obținem deci soluțiile:
$\overline{abc} \in \{167,176,235,253,325,352,523,532,617,671,716,761\}$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se arate că numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 2008 care se divid cu 3, sau cu 5 , sau cu 7 este multiplu de 109, iar numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 2008 care nu sunt divizibile cu 3, nici cu 5 , nici cu 7 este multiplu de 17.

Publicată în SM – nr. 1 / 2008 (G.7.)

Soluție.Fie A - mulțimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008 divizibile cu 3, B - mulțimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008 divizibile cu 5, iar C - mulțimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008 divizibile cu 7.

Atunci $cardA = \left[\frac{2008}{3}\right] = 669$, $cardB = \left[\frac{2008}{5}\right] = 401$, $cardC = \left[\frac{2008}{7}\right] = 286$, $card(A \cap B) = \left[\frac{2008}{15}\right] = 133$, $card(B \cap C) = \left[\frac{2008}{35}\right] = 57$, $card(A \cap C) = \left[\frac{2008}{21}\right] = 95$, $card(A \cap B \cap C) = \left[\frac{2008}{105}\right] = 19$.

Din $card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(B \cap C) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)$ =1090= M_{109}.

Acum putem afla şi numărul numerelor mai mici sau egali cu 2008 care nu sunt divizibile cu 3, nici cu 5, nici cu 7.

Acestea sunt în număr de 2008-1090=918= M_{17}.

Problemă pentru clasa a V-a,

Rezolvați în numere naturale ecuația:

$a^b b^a + a^b + b^a = 89$.

Soluție. Avem $a^b b^a + a^b + b^a = 89 \Leftrightarrow a^b b^a + a^b + b^a + 1 = 90 \Leftrightarrow (a^b + 1)(b^a + 1) = 90$.

$90 = 1 \cdot 90 = 2 \cdot 5 = 3 \cdot 30 = 5 \cdot 18 = 6 \cdot 15 = 9 \cdot 10$ şi simetricile acestor produse.

Obținem soluții pentru $\begin{cases} a^b + 1 = 9 \\ b^a + 1 = 10 \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} a^b + 1 = 10 \\ b^a + 1 = 9 \end{cases}$

Se obțin soluțiile $(a,b) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se găsească opt numere naturale distincte pătrate perfecte a cărui produs este 2008^8.

Publicată în SM – nr. 3 / 2009 (G.84.)

Soluție.Lemă.Dacă $d_1, d_2, ..., d_k$ sunt toți divizorii naturali ai numărului n atunci avem relația: $(d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k)^2 = n^k$.

Demonstrație.Fie $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$.Avem relațiile: $d_1 = \frac{n}{d_k}, d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}, ..., d_k = \frac{n}{d_1}$ care înmulțite membru cu membru dau relația din enunț.

În cazul nostru $2008 = 2^3 \cdot 251$ şi are opt divizori iar din lemă rezultă $(d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_8)^2 = 2008^8$.

Numerele căutate sunt deci pătratele divizorilor numărului 2008, adică:

$1^2, 2^2, 4^2, 8^2, 251^2, 502^2, 1004^2, 2008^2$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se arate că suma divizorilor naturali ai numărului 2008 este multiplu de 7.

Soluție. Se ştie că suma divizorilor numărului $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ este $S = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$.Descompunem numărul $2008 = 2^3 \cdot 251$ apoi se calculează suma divizorilor $S = 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = M_7$.

M391.Crux Mathematicorum
Aprilie
2009

Determine all positive integers a and b for which $\frac{a+1}{b}$ and $\frac{b+2}{a}$ are simultaneously positive integers.

Solution:
It is necesary that $b \le a+1$ and $a \le b+2$, so $b \in \{a-2, a-1, a, a+1\}$.

$$\text{(1) For } b = a-2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{a-2} \in N \Rightarrow \frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2} \in N \\ \frac{a-2+2}{a} \in N \Rightarrow 1 \in N \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-2 \in \{1,3\} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow b = 1 \\ a = 5 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

(2)For b = a - 1 $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{a-1} \in N \Rightarrow \dfrac{a+1}{a-1} = 1 + \dfrac{2}{a-1} \in N \\ \dfrac{a+1}{a} \in N \Rightarrow \dfrac{a+1}{a} = 1 + \dfrac{1}{a} \in N \end{cases} \Rightarrow a \in \Phi$

(3)For b = a $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{a} \in N \\ \dfrac{a+2}{a} \in N \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$

(4)For b = a + 1 $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{a+1} \in N \Rightarrow 1 \in N \\ \dfrac{a+3}{a} \in N \Rightarrow \dfrac{a+3}{a} = 1 + \dfrac{3}{a} \in N \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 2 \\ a = 3 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$

The sosution are, $(a, b) \in \{(3,1), (5,3), (1,1), (1,2), (3,4)\}$

Problemã pentru clasa a V-a (a VI-a),

Arătați că dacă $2009 | 2a + 12b + 7c$ şi $2009 | a + b + c$ atunci $2009 | a + 5b + 3c$.

Publicată în SM – nr. 3 / 2008 (G.90.)

Soluție.Din

$$\begin{cases} 2009 | 2a + 12b + 7c \\ 2009 | a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2009 | 2a + 12b + 7c \\ 2009 | 2a + 2b + 2c \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} 2009 | 10b + 5c \Rightarrow 2009 | 5(2b + c)$$

$\Rightarrow 2009 | 2b + c$, deoarece $(2009,5) = 1$.

Din

$$\begin{cases} 2009 | 2b + c \\ 2009 | a + b + c \\ 2009 | 2a + 12b + 7c \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2009 | 3a + 15b + 9c \Rightarrow 2009 | 3(a + 5b + 3c) \Rightarrow 2009 | a + 5b + 3c,$$

deoarece $(2009,3) = 1$.

Problemă pentru clasa a V-a,

Rezolvați în numere naturale ecuația: $x^2 - 5y = 2007$.

Publicată în SM – nr. 2 / 2008

Soluție. Vom demonstra că ecuația nu are soluții numere naturale.

Ecuația este echivalentă cu $x^2 = 5y + 2007$.

Ultima cifră a numărului $5y + 2007$ este 2 sau 7.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

Problemă pentru clasa a V-a,

Determinați mulțimea $A=\{(x,y)\in N\times N \mid 2006<x^2-2005\cdot y<2009\}$.

Soluție.Vom demonstra că $A=\phi$.

Deoarece $(x,y)\in N\times N$ rezultă $x^2-2005\cdot y\in\{2007,2008\}$.

1. Dacă $x^2-2005\cdot y=2007$, avem $x^2=2005\cdot y+2007$.Dar, ultima cifră a numărului $2005y+2007$ este 2 sau 7.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

2. Dacă $x^2-2005\cdot y=2008$, avem $x^2=2005\cdot y+2008$.Dar, ultima cifră a numărului $2005y+2008$ este 3 sau 8.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

În concluzie mulțimea nu are nici un element.

Problemă pentru clasa a V-a,

Să se determine numerele naturale x și y știind că $x^2-5y\in\{2,3,7,8\}$.

Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluție.Vom demonstra că nu există numere naturale care respectă condiția din ipoteză.

1. Dacă $x^2-5\cdot y=2$, avem $x^2=5\cdot y+2$.Dar, ultima cifră a numărului $5y+2$ este 2 sau 7.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

2. . Dacă $x^2-5\cdot y=3$, avem $x^2=5\cdot y+3$.Dar, ultima cifră a numărului $5y+3$ este 3 sau 8.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

3. Dacă $x^2-5\cdot y=7$, avem $x^2=5\cdot y+7$.Dar, ultima cifră a numărului $5y+7$ este 2 sau 7.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

4. Dacă $x^2-5\cdot y=8$, avem $x^2=5\cdot y+8$.Dar, ultima cifră a numărului $5y+8$ este 3 sau 8.Prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

Problemă pentru clasa a V- a,

Aflați cea mai mică fracție cuprinsă între $\frac{2006}{2007}$ și $\frac{2007}{2008}$.

Soluție.Avem (1) $\frac{2006}{2007}<\frac{x}{y}<\frac{2007}{2008}$, unde $\frac{x}{y}$ este fracția cerută .Relația (1) este echivalentă cu (2) $2006<\frac{x}{y-x}<2007$.Deci $\frac{x}{y-x}$ este de forma:

$\frac{x}{y-x}=2006+\frac{a}{b}$, cu $a<b$ și $a\neq 0, b\neq 0$.Obținem $\frac{x}{y-x}=\frac{2006\cdot b+a}{b}$. De aici deducem că x este minim dacă $2006\cdot b+a$ este minim , adică dacă $b=2$ și $a=1$.

Atunci $x=2006\cdot 2+1=4013$.Din $y-x=b$, avem $y=4015$.

Fracția cerută este $\frac{4013}{4015}$.

Problemă pentru clasa a V-a (XII),

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$x^3=1024^y+15$.

Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluție.Vom demonstra că nu există soluții numere naturale.

Cuburile perfecte prin împărțire la 7 dau resturile 0, 1 sau 6.
Puterile lui 2 prin împărțire la 7 dau resturile 1, 2 sau 4.
Numerele $1024^y + 15$ prin împărțire la 7 dau resturile 2, 3 sau 5.
Rezultă că ecuația nu are soluții în $N \times N$.

Problemă pentru clasa a V-a (XII),

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:
$27x^3 = 8^y + 15$.
Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluție.Vom demonstra că nu există soluții numere naturale.
Cuburile perfecte prin împărțire la 7 dau resturile 0, 1 sau 6.
Puterile lui 2 prin împărțire la 7 dau resturile 1, 2 sau 4.
Numerele $8^y + 15$ prin împărțire la 7 dau resturile 2, 3 sau 5.
Rezultă că ecuația nu are soluții în $N \times N$.

Problemă pentru clasa a V-a sau a VI-a,

Fie $N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2007}{2008}$.Arătați că $44 < \frac{1}{N} < 2009$.

Soluție.Din $\begin{cases} \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} > \frac{3}{5} \\ .... \\ \frac{2007}{2008} > \frac{2007}{2009} \end{cases}$, rezultă $N > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot ... \cdot \frac{2007}{2009} = \frac{1}{2009}$

(1)

Din $\begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ .... \\ \frac{2007}{2008} < \frac{2008}{2009} (deoarece\, 2007 \cdot 2009 = 2008^2 - 1 < 2008^2) \end{cases}$, avem:

$N < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{2008}{2009} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{2008}{2007} \right) \cdot \frac{1}{2009} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2009}$, de unde

$N^2 < \frac{1}{2009} < \frac{1}{1936} = \frac{1}{44^2}$, deci:

$N < \frac{1}{44}$

(2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă Q.E.D.

Problemă pentru clasa a V-a sau a VI-a,

Arătați că $44 < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{2010}{2009} < 2011$.

Soluție. Fie $N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2009}{2010}$.

Din $\begin{cases} \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} > \frac{3}{5} \\ .... \\ \frac{2009}{2010} > \frac{2009}{2011} \end{cases}$, rezultă

$N > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot ... \cdot \frac{2009}{2011} = \frac{1}{2011}$

(1)

Din $\begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ .... \\ \frac{2009}{2010} < \frac{2010}{2011} (\textit{deoarece}\, 2009 \cdot 2011 = 2010^2 - 1 < 2010^2) \end{cases}$, avem:

$N < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{2010}{2011} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{2010}{2009}\right) \cdot \frac{1}{2011} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2011}$, de unde

$N^2 < \frac{1}{2011} < \frac{1}{1936} = \frac{1}{44^2}$, deci:

$N < \frac{1}{44}$

(2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă Q.E.D.

Problemă pentru Gimnaziu,

Să se rezolve în numere naturale sistemul:

$a \le c \le b$, $a \le d \le b$, $a \le \frac{c+d}{cd} \le b$.

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10125)

Soluție. Pentru $c = d = a$, avem $\frac{c+d}{cd} = \frac{2}{a}$, și din ultima relație rezultă $a^2 \le 2$;ținând cont că $a \in N$, rezultă $a = 1$.

Pentru $c = d = b$, avem $\frac{c+d}{cd} = \frac{2}{b}$, şi tot din ultima relaţie rezultă $1 \le \frac{2}{b} \le b$.Atunci $b \le 2$, şi cum $1 < b \in N$ rezultă $b = 2$.
Apoi din primele două relaţii rezultă $c \in \{1,2\}$ şi $d \in \{1,2\}$ care îndeplinesc şi ultima condiţie.
Soluţia sistemului este: $a = 1$, $b = 2$, $c \in \{1,2\}$, $d \in \{1,2\}$

Problemă pentru clasa a VI-a,

Să se determine toate numerele naturale a,b,c,d care îndeplinesc condiţiile:
(1) $a \le c \le b$;
(2) $a \le d \le b$;
(3) $a \le \frac{c+d}{cd} \le b$.

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10125)

Soluţie. Pentru $c = d = a$, avem $\frac{c+d}{cd} = \frac{2}{a}$, deci din (3) rezultă $a^2 \le 2$ şi $a \in N$.Rezultă $a = 1$.
Pentru $c = d = b$, avem $\frac{c+d}{cd} = \frac{2}{b}$, şi din (3) rezultă $1 \le \frac{2}{b} \le b$.Atunci $b \le 2$, şi cum $1 < b \in N$ rezultă $b = 2$.
Apoi din condiţiile (1) şi (2) rezultă $c \in \{1,2\}$ şi $d \in \{1,2\}$ care îndeplinesc şi condiţia (3).

Problemă pentru clasa a VI- a,

Fie x, y, z numere întregi nenule şi $A = x^{n^2} \cdot y^{m+2} \cdot z^{p+2}$, $B = x^{n+4} \cdot y^{m^2+2} \cdot z^{p^2}$.
Să se arate că A şi B au acelaşi semn.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9952)

Soluţie.Avem $A \cdot B = x^{n^2+n+4} \cdot y^{m^2+m+4} \cdot z^{p^2+p+2} \succ 0$ (deoarece n^2+n, m^2+m şi p^2+p sunt numere pare)$\Rightarrow$ A şi B au acelaşi semn.

Problemă pentru clasa a VI- a,

Fie numărul $n = 2006^{2006} + 2007^{2007}$.Determinaţi restul împărţirii lui n prin 5.

Soluţie.Se calculează ultima cifră a lui n , $u(n) = 9$.Avem că $n = M_5 + 9$, de unde rezultă că restul împărţirii lui n prin 5 este 4.

Problemă pentru clasa a VI- a,

Să se arate că numerele $A = 2006^{2006} + 2007^{2007}$ şi $B = 2007^{2007} + 2008^{2008}$ dau acelaşi rest prin împărţirea lor la 5.

Publicată în RMT – nr. 4 / 2007 (V.234.)

Soluţie.Se calculează ultima cifră a celor două numere şi obţinem u(A)=u(B)=9.
Avem $A = M_5 + 9$, $B = M_5 + 9$, de unde rezultă că restul împărţirii lor la 5 este 4.

Problemă pentru clasa a VI- a,

Să se rezolve în Z ecuaţia $(x+2005)^{2008} = (x+2007)^{2008}$.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9952)

Soluție.
$(x+2005)^{2008}=(x+2007)^{2008}\Rightarrow(x+2005)^2=(x+2007)^2\Rightarrow x+2005=x+2007$ sau $x+2005=-x-2007\Rightarrow x=-2006$.

Problemă pentru clasa a VI-a,
Fie P perimetrul şi S suma diagonalelor unui poligon convex cu 5 laturi.
Să se arate că $S\geq P$.

Soluție.Să notăm cu A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 vârfurile poligonului.Poligonul are 5 diagonale: $A_1A_3,A_1A_4,A_2A_4,A_2A_5$ şi A_3A_5.Se ştie (sau se verifică uşor) că suma diagonalelor unui patrulater convex $ABCD$ este cel puțin egală cu suma a două laturi opuse,
$AC+BD\geq AB+CD$
şi pentru ca să avem egalitate este necesar ca punctele A,B,C,D să fie pe o dreaptă.Luăm acum câte două diagonale consecutive şi obținem patrulatere convexe pentru care avem relațiile:
$A_1A_3+A_2A_4\geq A_1A_2+A_3A_4$, $A_1A_4+A_2A_5\geq A_1A_2+A_4A_5$,
$A_3A_5+A_4A_1\geq A_3A_4+A_5A_1$,m
$A_1A_3+A_2A_5\geq A_2A_3+A_1A_5$, $A_3A_5+A_2A_4\geq A_2A_3+A_4A_5$
de unde deducem, adunând membru cu membru
$2S\geq 2P$ care demonstrează relația din enunț.Condiția să avem egalitate este ca 3 vârfuri ale poligonului să fie confundate într-un punct al segmentului determinat de celelalte două vârfuri.

Problemă pentru clasa a VI-a,
Fie P perimetrul şi S suma diagonalelor unui poligon convex cu 6 laturi.
Să se arate că $S\geq\frac{3P}{2}$.

Publicată în RMT – nr. 4 / 2008 (O.VI.211)

Soluție. Soluție.Să notăm cu A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 vârfurile poligonului.Poligonul are 9 diagonale: $A_1A_3,A_1A_5,A_2A_4,A_2A_6,A_3A_5,A_4A_6$, şi A_1A_4,A_2A_5,A_3A_6.Se ştie (sau se verifică uşor) că suma diagonalelor unui patrulater convex $ABCD$ este cel puțin egală cu suma a două laturi opuse,
$AC+BD\geq AB+CD$
şi pentru ca să avem egalitate este necesar ca punctele A,B,C,D să fie pe o dreaptă.
Notăm cu $S_1=A_1A_3+A_1A_5+A_2A_4+A_2A_6+A_3A_5+A_4A_6$ şi $S_2=A_1A_4+A_2A_5+A_3A_6$.
Folosind inegalitatea de mai sus obținem :

$$\begin{cases}A_1A_4+A_2A_5\geq A_1A_2+A_4A_5\\ A_2A_5+A_3A_6\geq A_2A_3+A_5A_6\\ A_3A_6+A_1A_4\geq A_1A_6+A_3A_4\end{cases}$$

, de unde prin adunare rezultă $2S_2\geq P\Leftrightarrow(1)S_2\geq\frac{P}{2}$

Analog se obțin :

$$\begin{cases}A_1A_3+A_2A_4\geq A_1A_2+A_3A_4\\ A_1A_5+A_4A_6\geq A_1A_6+A_4A_5\\ A_2A_6+A_1A_3\geq A_1A_6+A_2A_3\\ A_3A_5+A_4A_6\geq A_3A_4+A_5A_6\\ A_1A_5+A_2A_6\geq A_1A_2+A_5A_6\\ A_2A_4+A_3A_5\geq A_2A_3+A_4A_5\end{cases}$$

care adunate membru cu membru dau $2S_1 \geq 2P \Leftrightarrow (2) S_1 \geq P$

Prin adunarea relațiilor (1) și (2) ținând cont că $S = S_1 + S_2$ se obține relația de demonstrat.

Problemă pentru clasa a VI-a,

Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon oarecare (convex sau neconvex) cu 5 laturi.

Să se arate că $S \leq 2P$.

Publicată în RMT – nr. 4 / 2008 (O.VI.211)

Soluție.Să notăm cu A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 vârfurile poligonului.Poligonul are 5 diagonale: $A_1A_3, A_1A_4, A_2A_4, A_2A_5$ și A_3A_5.Să ne reamintim acum proprietatea bine cunoscută că o latură a unui poligon este cel mult egală cu suma ceorlalte laturi, egalitatea având loc dacă și numai dacă toate vârfurile sunt pe latura considerată (și nu pe prelungirile acestei laturi).În cazul nostru o diagonală subîntinde două laturi consecutive și o latură este subîntinsă de două diagonale.

Avem deci inegalitățile:

$$\begin{cases} A_1A_3 \leq A_1A_2 + A_2A_3 \\ A_1A_4 \leq A_1A_5 + A_5A_4 \\ A_2A_4 \leq A_2A_3 + A_3A_4 \\ A_2A_5 \leq A_2A_1 + A_1A_5 \\ A_3A_5 \leq A_3A_4 + A_4A_5 \end{cases};$$

o condiție necesară și suficientă ca să avem egalitate este ca, în afară de permutare circulară și de sens , punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 să fie pe o dreaptă în ordinea crescătoare a indecilor iar primele 2 puncte precum și ultimile 2 puncte să fie confundate.

Prin adunarea inegalităților de mai sus obținem $S \leq 2P$ și inegalitatea din enunț este demonstrată.

Problemă pentru clasa a VI-a,

Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon oarecare (convex sau neconvex) cu 6 laturi.

Să se arate că $S \leq \frac{7P}{2}$.

Soluție. . Soluție.Să notăm cu $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ vârfurile poligonului.Poligonul are 9 diagonale: $A_1A_3, A_1A_5, A_2A_4, A_2A_6, A_3A_5, A_4A_6$, și A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6. Să ne reamintim acum proprietatea bine cunoscută că o latură a unui poligon este cel mult egală cu suma ceorlalte laturi, egalitatea având loc dacă și numai dacă toate vârfurile sunt pe latura considerată (și nu pe prelungirile acestei laturi).În cazul nostru o diagonală subîntinde două sau trei laturi consecutive .

Vom nota cu:

$S_1 = A_1A_3 + A_1A_5 + A_2A_4 + A_2A_6 + A_3A_5 + A_4A_6$ și $S_2 = A_1A_4 + A_2A_5 + A_3A_6$.

Cu proprietatea de mai sus obținem:

$$\begin{cases} A_1A_3 \le A_1A_2 + A_2A_3 \\ A_1A_5 \le A_5A_6 + A_6A_1 \\ A_2A_4 \le A_2A_3 + A_3A_4 \\ A_2A_6 \le A_6A_1 + A_1A_2 \\ A_3A_5 \le A_3A_4 + A_4A_5 \\ A_4A_6 \le A_4A_5 + A_5A_6 \end{cases}$$; de unde rezultă prin adunare (1) $S_1 \le 2P$;

Analog se obțin:

$$\begin{cases} A_1A_4 \le A_1A_6 + A_6A_5 + A_5A_4 \\ A_1A_4 \le A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 \\ A_2A_5 \le A_2A_1 + A_1A_6 + A_6A_5 \\ A_2A_5 \le A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 \\ A_3A_6 \le A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 \\ A_3A_6 \le A_3A_2 + A_2A_1 + A_1A_6 \end{cases}$$

Care adunate membru cu membru dau $2S_2 \le 3P \Leftrightarrow (2) S_2 \le \frac{3P}{2}$; Prin adunarea relațiilor (1) şi (2) ținând cont că $S = S_1 + S_2$ se obține relația de demonstrate, cu egalitate ca, în afară de permutare circulară şi de sens , punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ să fie pe o dreaptă în ordinea crescătoare a indecilor iar primele 3 puncte precum şi ultimile 3 puncte să fie confundate.

Problemă pentru clasa a VI-a,

Dacă acele unui ceasornic arată ora 12^{00}, la ce oră minutarul şi orarul fac pentru prima dată unghiul de 33^0 ?

Dată la Concursul Interjudețean de Matematică “ Speranțe Rîmnicene”, clasa a VI-a, Rîmnicu Sărat, 2008

Soluție.Notăm cu S drumul parcurs de orar.Deoarece minutarul este de 12 ori mai rapid va parcurge drumul $12S$.De aici , unghiul dintre orar şi minutar este $(1)\alpha = 12S - S = 11S$.

Dar (2) $S = 30^0 t$, unde t este timpul măsurat în ore.Din (1) , (2) şi $\alpha = 33^0$ rezultă $t = 0{,}1$ ore =6 min, deci ora la care cele două ace fac pentru prima dată unghiul de 33^0 este 12^{06}.

Problemă pentru clasa a VI-a,

Dacă acele unui ceasornic arată ora 12^{00}, la ce oră minutarul şi secundarul fac pentru prima dată unghiul de 177^0 ?

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10122)

Soluție.Notăm cu S drumul parcurs de minutar.Deoarece secundarul este de 60 ori mai rapid va parcurge drumul $60S$.De aici , unghiul dintre secundar şi minutar este $(1)\alpha = 60S - S = 59S$.

Dar (2) $S = 6^0 t$, unde t este timpul măsurat în minute.Din (1) , (2) şi $\alpha = 177^0$ rezultă $t = 0{,}5$ min =30s, deci ora la care cele două ace fac pentru prima dată unghiul de 177^0 este $12^{00.30}$.

Problemã pentru clasa a VI –a

Se da triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$, $m(\angle A) = 20^0$ si

$D \in (AB)$ astfel incat $AD = BC$.

Se construieste $\Delta ADE \equiv \Delta BCA$ astfel incat AC separa

punctele D si E (D si E sunt de o parte si de alta a

dreptei AC sau sunt in semiplane diferite fata de dreapta AC).

Sa se determine $m(\angle CDE)$ si $m(\angle DCE)$.

Publicată în GM (suplimentul cu exerciții) – nr. 4 / 2008 (S:E08.17)& Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10127)

Soluție:

$$\begin{cases} \Delta ABC \text{ - isoscel} \\ \Delta ADE \equiv \Delta BCA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE = BA = AC = DE \\ m(\angle AED) = m(\angle BAC) = 20^0 \\ m(\angle DAE) = m(\angle CBA) = 80^0 \end{cases}$$

$m(\angle CAE) = m(\angle DAE) - m(\angle DAC) = 60^0$, $AE = AC$ si $m(\angle CAE) = 60^0 \Rightarrow$

ΔACE - echilatera $1 \Rightarrow AC = CE = EA \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = CE = EA \Rightarrow DE = CE \Rightarrow \Delta DEC$ - isoscel.

$m(\angle DEC) = m(\angle AEC) - m(\angle AED) = 60^0 - 20^0 = 40^0 \Rightarrow$

$$m(\angle DCE) = m(\angle CDE) = \frac{180^0 - 40^0}{2} = 70^0.$$

Problemã pentru clasa a VI –a

Se da triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ in care $m(\angle A) = 20^0$,

$D \in (AB)$ si $AD = BC$.

Fie $M \in (AB)$ cu $m(\angle BCM) = 20^0$ si $N \in (AC)$ cu $m(\angle NMC) = 60^0$.

Sa se determine $m(\angle CDN)$.

Solutie :

Fie $D' \in (AB)$ cu $m(\angle AND') = 20^0$.

$$\text{Se observa ca } \begin{cases} \Delta BCM \text{ - isoscel} \\ \Delta CMN \text{ - echilateral} \\ \Delta NAD' \text{ - isoscel} \\ \Delta MND' \text{ - isoscel} \end{cases} \Rightarrow BC = MC = MN = ND' = AD' \Rightarrow$$

$\Rightarrow BC = AD'$.Dar $BC = AD$, deci $AD = AD'$, adica $D = D'$

si din ΔNDC - isoscel $\Rightarrow m(\angle CDN) = 10^0$.

Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10312)

Problemã pentru clasa a VI –a

Se da triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$, $m(\angle A) = 20^0$, $D \in (AB)$ astfel incat $AD = BC$.

Se construieste triunghiul echilateral ADE astfel incat AB separa punctele C si E. Sa se arate ca CD este bisectoare a unghiului $\angle ACE$.

Solutie :

$$\begin{cases} AB = CA \\ m(\angle ABC) = m(\angle CAE) = 80^0 \\ BC = AE \end{cases} \Rightarrow (L.U.L)\ \Delta ABC = \Delta CAE \Rightarrow CE = AC$$

$ED = AD,\ EC = AC,\ DC = DC \Rightarrow (L.L.L)\quad \Delta DEC = \Delta DAC \Rightarrow$

$m(\angle DCE) = m(\angle DCA) \Rightarrow DC$ - bisectoare a $\angle ACE$.

Publicată în RMT – nr. 4 / 2007 (VI.234.) , dată la Concursul interjudețean „Cezar Ivănescu”, Tîrgovişte, jud. Dîmbovița, clasa a VI-a, 2008

Problemã pentru clasa a VI –a

Se da triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ in care $m(\angle A) = 20^0$,

$D \in (AB)$ si $AD = BC$.

Se construieste rombul ACEF, $E \in BC$ si AB separa punctele E si C.

Sa se determine $m(\angle EDC)$.

Solutie :

$$\begin{cases} AB = FA \\ m(\angle FAD) = m(\angle ABC) = 80^0 \\ AD = BC \end{cases} \Rightarrow \Delta FAD \equiv \Delta ABC \Rightarrow$$

$FA = FD = AC = AB = FE$

$m(\angle AFD) = 20^0$, $m(\angle DFE) = 60^0 \Rightarrow \Delta FDE$ - echilateral;

$ED = EC \Rightarrow \Delta DEC$ - isoscel

$m(\angle DEC) = m(\angle FEC) - m(\angle FED) = 100^0 - 60^0 = 40^0$

$$m(\angle EDC) = \frac{180^0 - 40^0}{2} = 70^0.$$

Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10314)

Problemã pentru clasa a VI –a

Se da triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ in care $m(\angle A) = 20^0$,

$D \in (AB)$ si $AD = BC$.

Se construieste BCE triunghi echilateral astfel incat BC nu separa punctele A si E.

Sa se determine $m(\angle EDC)$.

Solutie : Fie $F \in (AC)$, astfel incat EF paralela cu AB.

Din $m(\angle EFC) = m(\angle FCE) = 20^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta EFC$ - triunghi isoscel (EF = EC).

Deoarece AD paralela cu EF si AD = EF.

Asadar $m(\angle BDE) = 20^0$, adica ΔBDE - isoscel (DE = EB).

Rezulta DE = EC, adica ΔDEC - isoscel.

In concluzie, $m(\angle EDC) = 10^0$.

Publicată în RMT – 2 / 2008 (VI.245.)

Problemã clasa a VI-a

Aratati ca fractia

$$\frac{7n+5}{12n^2+17n+6}$$

este ireductibila $\forall n \in N$.

Publicată în RMT – nr. 1 / 2006 (VII.187.)

Soluție:

Descompunem numitorul fractiei :

$$12n^2+17n+6=12n^2+9n+8n+6=3n(4n+3)+2(4n+3)=$$
$$=(4n+3)(3n+2).$$

$$\text{Avem}\ \frac{7n+5}{12n^2+17n+6}=\frac{7n+5}{(4n+3)(3n+2)}$$

$$\mathit{Fie}\ d=(7n+5,4n+3)\Rightarrow\begin{cases} d/(7n+5)\Rightarrow d/4(7n+5)\\ d/(4n+3)\Rightarrow d/7(4n+3)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d/\left[7(4n+3)-4(7n+5)\right]\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$$

$$\Rightarrow (1)\ (7n+5,4n+3)=1$$

$$\text{Fie}\ (7n+5,3n+2)=d\Rightarrow\begin{cases} d/(7n+5)\Rightarrow d/3(7n+5)\\ d/(3n+2)\Rightarrow d/7(3n+2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d/\left[3(7n+5)-7(3n+2)\right]\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2)\ (7n+5,3n+2)=1.$$

Din (1) si (2) $\Rightarrow$ *fractia* este ireductibila.

Problemã clasa a VI-a

Arãtați cã fracția:

$$\frac{5n+7}{6n^2+17n+12}$$

este ireductibila $\forall n \in N$.

Soluție:

$6n^2+17n+12=6n^2+9n+8n+12=2n(3n+4)+3(3n+4)=$
$=(2n+3)(3n+4)$

$Avem\dfrac{5\text{n}+7}{6\text{n}^2+17n+12}=\dfrac{5n+7}{(2n+3)(3n+4)}$

$daca\;(5\text{n}+7{,}2\text{n}+3)=\text{d}\Rightarrow\begin{cases}d/(5n+7)\Rightarrow d/2(5n+7)\\ d/(2n+3)\Rightarrow d/5(2n+3)\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow d/[5(2n+3)-2(5n+7)]\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1\Rightarrow$

$\Rightarrow(1)\;(5\text{n}+7{,}3\text{n}+4)=1.$

$\text{Daca}\;(5\text{n}+7{,}3\text{n}+4)=\text{d}\Rightarrow\begin{cases}\text{d}/(5\text{n}+7)\Rightarrow\text{d}/3(5\text{n}+7)\\ \text{d}/(3\text{n}+4)\Rightarrow\text{d}/5(3\text{n}+4)\end{cases}\Rightarrow$

$d/[3(5n+7)-5(3n+4)]\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1\Rightarrow$

$\Rightarrow(2)\;(5\text{n}+7{,}3\text{n}+4)=1.$

Din (1) si (2) $\Rightarrow$ fractia este ireductibila.

Problemă pentru clasa a VI-a,

Să se determine mulțimea $A=\left\{(a,b,c)\in N^*\times N^*\times N^*\;\middle|\;\dfrac{5ab-1}{abc+1}\in N\right\}$.

Publicată în SM – nr. 1 / 2008 (G.12.) & Crux Mathematicorum – M399 (mai 2009)

Soluție.Din $\dfrac{5ab-1}{abc+1}\in N$, rezultă $5ab-1\ge abc+1\Leftrightarrow ab((5-c)\ge 2$, deci $c<5$.

Analizăm în continuare cazurile:

1) Dacă $c=1$, atunci notăm $x=ab$ şi obținem $\dfrac{5x-1}{x+1}\in N$ de unde rezultă:

$\begin{cases}x+1|5x-1\\ x+1|x+1\Rightarrow x+1|5x+5\end{cases}\Rightarrow x+1\in D_6\Rightarrow x\in\{1,2,5\}$.Din $x=ab\in N$ avem soluțiile:

$(a,b)\in\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,5),(5,1)\}$.

2)Dacă $c=2$, avem $\dfrac{5x-1}{2x+1}\in N$ de unde obținem că

$\begin{cases}2x+1|5x-1\Rightarrow 2x+1|10x-2\\ 2x+1|2x+1\Rightarrow 2x+1|10x+5\end{cases}\Rightarrow 2x+1\in D_7\Rightarrow x\in\{3\}\Rightarrow$.

$\Rightarrow(a,b)\in\{(1,3),(3,1)\}.$

3) Dacă $c=3$, procedăm analog şi se avem că $\dfrac{5x-1}{3x+1}\in N$.

Din $\begin{cases}3x+1|5x-1\Rightarrow 2x+1|15x-3\\ 3x+1|3x+1\Rightarrow 2x+1|15x+5\end{cases}\Rightarrow 3x+1\in D_8\Rightarrow x\in\{1\}\Rightarrow$.

$\Rightarrow(a,b)\in\{(1,1)\}.$

4)Dacă $c = 4$, atunci $\frac{5x-1}{4x+1} \in N$ și

$$\begin{cases} 4x+1 | 5x-1 \Rightarrow 2x+1 | 20x-4 \\ 4x+1 | 4x+1 \Rightarrow 2x+1 | 20x+5 \end{cases} \Rightarrow 3x+1 \in D_9 \Rightarrow x \in \{2\} \Rightarrow .$$

$\Rightarrow (a,b) \in \{(1,2),(2,1)\}$

Cu cele de mai sus se obține:

$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,1),(1,2,1),(2,1,1),(1,5,1),(5,1,1),(1,3,2), \\ (3,1,2),(1,1,3),(1,2,4),(2,1,4) \end{Bmatrix}.$$

Problemã pentru clasa a V-a sau a VI-a,

Fie ecuația $\frac{xy}{x+y} = 4$, $x \in N^*, y \in N^*$.

a) Arătați că x și y nu pot fi simultan mai mari ca opt.

b) Rezolvați ecuația.

Publicată în GM (suplimentul cu exerciții) – nr. 4 / 2008 (S:E08.8)

Soluție.

a) $\frac{xy}{x+y} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\begin{cases} x > 8 \\ y > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < \frac{1}{8} \\ \frac{1}{y} < \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$, ceea ce contrazice ipoteza.

b) De la punctul a) avem $x \le 8$.Înlocuim pe rând x cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și obținem soluțiile:

$(x, y) \in \{(5,20),(6,12),(8,8),(12,6),(20,5)\}$.

Problemã pentru clasa a V-a sau a VI-a,

Fie $A = \{1,2008^1,2008^2,2008^3,...,2008^{2009}\}$.Determinați numărul elementelor lui A care sunt simultan pătrate și cuburi perfecte.

Crux Mathematicorum – octombrie 2008 – M358

Soluție.

$2008 = 2^3 \cdot 251$.

Condiția ca 2008^n să fie pătrat perfect implică $n = 2k$.

Condiția ca 2008^n să fie cub perfect implică $n = 3p$.

Pentru ca 2008^n să fie simultan pătrat și cub perfect trebuie ca $n = 6t$.

Rezultă $0 \le 6t < 2009 \Leftrightarrow 0 \le t < 334{,}8...$ Se obțin astfel 335 de numere.

Problemã pentru clasa a V-a sau a VI-a,

Fie $A = \{1,2009^1,2009^2,2009^3,...,2009^{2009}\}$.Determinați numărul elementelor lui A care sunt simultan pătrate și cuburi perfecte.

Soluție.

$2009 = 7^2 \cdot 41$.

Condiția ca 2009^n să fie pătrat perfect implică $n = 2k$.

Condiția ca 2009^n să fie cub perfect implică $n = 3p$.

Pentru ca 2009^n să fie simultan pătrat şi cub perfect trebuie ca $n = 6t$.
Rezultă $0 \le 6t < 2009 \Leftrightarrow 0 \le t < 334{,}8...$ Se obțin astfel 335 de numere.

Problemă pentru clasa a VI-a,
Să se rezolve în $Z \times Z$ ecuația:
$2009 \cdot x - 2008 \cdot y = 2007$.

Soluție. Ecuațiile de tipul $ax + by = c$, unde $a, b, c \in Z, ab \ne 0$ se numesc *ecuații diofantice,* şi au soluții dacă şi numai dacă $d = (a,b)$ divide c.Soluția acestor ecuații este dată de:

$x = x_0 + \dfrac{tb}{d}$, $y = y_0 - \dfrac{ta}{d}$, unde x_0 şi y_0 sunt *soluții particulare*, iar, $t \in Z$.

În cazul nostru, se observă uşor că $d = (2009{,}2008) = 1$, deoarece $2008 = 2^3 \cdot 251$ şi $2009 = 7^2 \cdot 41$, deci ecuația are soluții, pentru că 1 divide 2007.Apoi $x_0 = 2007$ şi $y_0 = 2007$ este o soluție particulară.

Soluția generală este :
$x = 2007 - 2008 \cdot t$, $y = 2007 - 2009 \cdot t$, $t \in Z$.

Problemă pentru clasa a VI-a,
Să se rezolve în $Z \times Z$ ecuația:
$2009 \cdot x + 2008 \cdot y = 2011$.

Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluție. Ecuațiile de tipul $ax + by = c$, unde $a, b, c \in Z, ab \ne 0$ se numesc *ecuații diofantice,* şi au soluții dacă şi numai dacă $d = (a,b)$ divide c.Soluția acestor ecuații este dată de:

$x = x_0 + \dfrac{tb}{d}$, $y = y_0 - \dfrac{ta}{d}$, unde x_0 şi y_0 sunt *soluții particulare*, iar, $t \in Z$.

În cazul nostru, se observă uşor că $d = (2009{,}2008) = 1$, deoarece $2008 = 2^3 \cdot 251$ şi $2009 = 7^2 \cdot 41$, deci ecuația are soluții pentru că 1 divide 2011.Apoi, intuim $x_0 = 3$ şi $y_0 = -2$, soluții particulare.

Soluția generală este : $x = 3 + 2008 \cdot t$, $y = -2 - 2009 \cdot t$, $t \in Z$.

Problemă pentru clasa a VI - a,
Să se afle cel mai mic număr $N = 5^{3-n} \cdot 13^{5-n} + 5^{5-n} \cdot 13^{3-n}$, $n \in Z$, divizibil cu 250.

Publicată în RIM – nr. IX – 2005 (9175), şi SGMB – iunie / 2009 (S:E09.217)

Soluție. $N = 5^{3-n} \cdot 13^{5-n} + 5^{5-n} \cdot 13^{3-n} = 5^{3-n} \cdot 13^{3-n}(13^2 + 5^2) = 194 \cdot 65^{3-n}$.
Deoarece $194 = 2 \cdot 97$ şi $65 = 5 \cdot 13$, iar, $250 = 2 \cdot 5^3$, $\left(2, 5^3\right) = 1$, rezultă $3 - n \ge 3 \Leftrightarrow n \le 0$. Cel mai mic număr N se obține pentru $n = 0$.
Rezultă $N = 194 \cdot 65^3$.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Să se afle numerele naturale a şi b ştiind că $\dfrac{a}{b+5} = \dfrac{b}{a+9}$.

Publicată în G.M. – nr. 6 / 2007 (O.G.:460)

Soluție. Din enunț rezultă $(*)$ $a(a+9) = b(b+5)$.
Dacă $a \ge b \Rightarrow a^2 + 9a \ge b^2 + 9b > b^2 + 5b$, fals.
Deci (1) $a < b$.
Dacă $b \ge a + 2 \Rightarrow b^2 + 5b \ge (a+2)^2 + 5(a+2) = a^2 + 9a + 14 > a^2 + 9a$, fals.
Deci (2) $b < a + 2$.

Din (1) şi (2) $\Rightarrow a < b < a+2$, deci $b = a+1$, care înlocuite în relaţia $(*) \Rightarrow a = 3$ şi $b = 4$.

Numărul căutat este 34.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Să se determine mulţimea $A = \left\{ x \in Z \;\middle|\; \frac{x^2-9}{x+2} \in Z \right\}$.

Publicată în GM – nr. 6 / 2007 (E:13450) & dată la Concursul judeţean de matematică „Speranţe Rîmnicene”, clasa a VII –a , Rîmnicu Sărat, 2007 & dată la Concursul Taberei de Matematică Bisoca, clasa a VII –a, 2007.

Soluţie. Scriem $\frac{x^2-9}{x+2} = \frac{x^2-4-5}{x+2} = \frac{x^2-4}{x+2} - \frac{5}{x+2} = x-2-\frac{5}{x+2} \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x+2 \in D_5 = \{-5,-1,1,5\}$

Deci $A = \{-7,-3,-1,3\}$.

Problemã pentru clasa a VII-a şi a VIII-a,

Sã se rezolve în NxN ecuaţia:

$$\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = \frac{2001^2 + 2002^2 + 2003^2 + 2004^2 + 2005^2 + 2006^2 + 2007^2}{7}$$

Publicată în RMT – nr. 2 / 2007 (O.VII.191.)

Soluţie:

Se observã cã: 2001=2004-3, 2002=2004-2, 2003=2004-1, 2005=2004+1, 2006=2004+2 şi 2007=2004+3.

Atunci $2001^2 + 2002^2 + 2003^2 + 2004^2 + 2005^2 + 2006^2 + 2007^2 =$

$= (2004-3)^2 + (2004-2)^2 +$

$+ (2004-1)^2 + 2004^2 + (2004+1)^2 + (2004+2)^2 + (2004+3)^2 =$

$= 27 \cdot 2004^2 + 28 = 7\left(2004^2 + 4\right) = 7\left(2004^2 + 2^2\right)$.

Prin urmare soluţia ecuaţiei este :

$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \{(2004,2);(2,2004)\}$.

Problemã pentru clasa a VII-a şi a VIII-a,

Sã se rezolve în ZxZ ecuaţia:

$$\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = \frac{2001^2 + 2002^2 + 2003^2 + 2004^2 + 2005^2 + 2006^2 + 2007^2}{7}$$

Publicată în GM – nr. 1 / 2009 (E:13770)

Soluţie:

Probleme rezolvate

Se observã cã: 2001=2004-3, 2002=2004-2, 2003=2004-1, 2005=2004+1, 2006=2004+2 şi 2007=2004+3.

Atunci $2001^2+2002^2+2003^2+2004^2+2005^2+2006^2+2007^2=$

$=(2004-3)^2+(2004-2)^2++(2004-1)^2+2004^2+(2004+1)^2+$

$+(2004+2)^2+(2004+3)^2=27\cdot 2004^2+28=$

$=7\left(2004^2+4\right)=7\left(2004^2+2^2\right).$

Prin urmare soluția ecuației este :

$$(a,b)\in\left\{\begin{matrix}(-2,-2004);(-2,2004);(2,-2004);(2004,-2);\\(-2004,-2);(-2004,2);(2004,2);(2,2004)\end{matrix}\right\}.$$

Problemă pentru clasa a VII-a,

Fie numerele naturale b şi $a-1$ direct proporționale cu a şi $b+1$.

Să se arate că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă.

Publicată în RMT – nr. 4 / 2007 (O.VI.182.) & Publicată în GM (suplimentul cu exerciții) – nr. 4 / 2008 (S:E08.21); Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10324)

Soluție.

Din enunț rezultă $\frac{b}{a}=\frac{a-1}{b+1}$ deci,

$a^2-a=b^2+b\Leftrightarrow a^2-b^2-(a+b)=0\Leftrightarrow(a+b)(a-b-1)=0\Leftrightarrow a=-b$ (fals) sau $a-b-1=0\Rightarrow a=b+1$ şi obținem că fracția dată este ireductibilă.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Să se rezolve în Q^+ ecuația : $\left\{\frac{3x+5}{x+2}\right\}+\left[\frac{3x+2}{x+1}\right]=2,(7)$, unde $\{x\}$ respectiv $[x]$, reprezintă partea fracționară respectiv partea întreagă a numărului rațional pozitiv x.

Publicată în RMT – nr. 4 / 2007 (O.VII.199); G.M. – nr. 4 / 2008 (E:13641.); Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10323)

Soluție.Deoarece $\frac{3x+5}{x+2}=\frac{2(x+2)+x+1}{x+2}=2+\frac{x+1}{x+2}$, şi ținând seama că în Q^+ $0<\frac{x+1}{x+2}<1$, rezultă (1) $\left\{\frac{3x+5}{x+2}\right\}=\frac{x+1}{x+2}$.

Din $\frac{3x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)+x}{x+1}=2+\frac{x}{x+1}$ şi $0<\frac{x}{x+1}<1$ avem (2) $\left[\frac{3x+2}{x+1}\right]=2$.

Cu cele de mai sus ecuația devine: $\frac{x+1}{x+2}+2=2+\frac{7}{9}$ care are soluția $x=\frac{5}{2}$.

Problemã clasa a VII-a

Fie un triunghi dreptunghic AOC cu $m(\angle AOC)=90^0$ si $B\in(AC)$

astfel incat $m(\angle AOB)=30^0$. *Sa* se arate ca :

$OA\cdot(\frac{2}{OB}-\frac{1}{OC})=\sqrt{3}.$

Publicată în RMT – nr. 2 / 2006 (VII.195.)

Soluție:

$Avem: \text{Aria(OAB)} + \text{Aria(OBC)} = \text{Aria(OAC)} \Rightarrow$

$$\frac{OA \cdot OB \cdot \sin 30^0}{2} + \frac{OB \cdot OC \cdot \sin 60^0}{2} = \frac{OC \cdot OA \cdot \sin 90^0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA \cdot OB \cdot \frac{1}{2} + OB \cdot OC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = OA \cdot OC \,/:(OB \cdot OC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{2OC} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow OA \cdot \left(\frac{2}{OB} - \frac{1}{OC}\right) = \sqrt{3}.$$

Problemã pentru clasa a VII-a

Consideram un patrulater convex ABCD si punctele $M, N \in \text{Ext(ABCD)}$ asa incat: $m(\angle BAN) = m(\angle DCA), m(\angle ABN) = m(\angle CAD)$, $m(\angle MAD) = m(\angle BCA), m(\angle ADM) = m(\angle BAC)$.

Sa se arate ca $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ daca si numai daca ΔANM este isoscel.

Soluție:

Din $m(\angle BAN) = m(\angle DCA)$ si $m(\angle ABN) = m(\angle CAD) \Rightarrow$

$$\Delta ABN \approx \Delta CAD \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{NA}{DC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1)\, AN = \frac{AB \cdot CD}{AC}$$

Din $m(\angle MAD) = m(\angle BCA)$ si $m(\angle ADM) = m(\angle BAC) \Rightarrow$

$$\Delta ADM \approx \Delta CAB \Rightarrow \frac{AD}{CA} = \frac{MA}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2)\, AM = \frac{BC \cdot DA}{AC}$$

Necesitatea : $AB \cdot CD = BC \cdot DA \Rightarrow$ din (1) si (2) $AN = AM \Rightarrow$

ΔAMN este isoscel.

Suficienta : ΔAMN este isoscel $\Rightarrow AN = AM \Rightarrow$

din (1) si (2) $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

Problemã pentru clasa a VII-a

Fie $A, B, C, D \in C(O; R)$, astfel incat $m(\angle BAD) = m(\angle BCD) = 90^0$.

Daca AB = a, si BC = b sa se calculeze AC in functie de a, b si R.

Soluție:

din ipoteza $\Rightarrow$

$$(1)\begin{cases} BD = 2R \\ ABCD = \textit{patrulater}\text{ inscriptibil} \Rightarrow \begin{cases} \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BDC} \\ \angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BDA} \end{cases} \end{cases}$$

$$Fie\ M = \Pr_{AC} B \Rightarrow (2) AC = AM + MC$$

$$din\ (1) \Rightarrow (3)\begin{cases} AM = AB\cos\angle BAM = AB\cos\angle BDC = AB\cdot\dfrac{DC}{BD} \\ = a\cdot\dfrac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R} \\ MC = BC\cos\angle BCM = BC\cos\angle BDA = BC\cdot\dfrac{AD}{BD} \\ = b\cdot\dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R} \end{cases}$$

$$Din\ (2)\text{ si }(3) \Rightarrow AC = \frac{1}{2R}\left(a\sqrt{4R^2-b^2} + b\sqrt{4R^2-a^2}\right)$$

Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10326)

Problemã pentru clasa a VII-a

Se considerã poligonul convex ABCDE in care $m(\angle ABC) = m(\angle CED)$,
$m(\angle BCA) = m(\angle ECD)$
si $AB \cdot CE = AC \cdot BE$. Sã se arate ca ΔADE este isoscel.

Soluție:

Din $m(\angle ABC) = m(\angle CED)$ si $m(\angle BCA) = m(\angle ECD)$
avem $\Delta ABC \approx \Delta DEC \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1)\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow (2) ED = \frac{AB\cdot CE}{BC}$$

$$\begin{cases} m(\angle BCE) = m(\angle ACD) \\ (1) \Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CE}{CD} \end{cases} \Rightarrow \Delta BCE \approx \Delta ACD \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} = \frac{EB}{DA}$$

$$\Rightarrow (3) AD = \frac{AC\cdot BE}{BC}$$

$$Din\ (2)\text{ si }(3) \Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{AC\cdot BE}{BC}\cdot\frac{BC}{AB\cdot CE} = \frac{AC\cdot BE}{AB\cdot CE} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow AD = DE \Rightarrow \Delta ADE$ este isoscel.

Problemã pentru clasa a VII-a,

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle BAC) = 150^0$ şi M mijlocul lui AB.Să se arate că aria triunghiului ABC este egală cu aria pătratului AMPQ.

Soluție.Din datele problemei rezultă că $m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = 15^0$.Dacă AM=a atunci AB=AC=2a.Considerăm $D \in AB$ astfel încât $m(\angle CDB) = 90^0$ deci, $m(\angle CAD) = 30^0$ şi CD=a.Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul ADC şi obținem $AD = a\sqrt{3}$.În continuare calculăm

Aria(ABC)=Aria(BDC)-Aria(ADC)=$\dfrac{(2a + a\sqrt{3}) \cdot a}{2} - \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2} = a^2$=Aria(AMPQ).

Problemã pentru clasa a VII-a,

Se consideră dreptunghiul ABCD în care $m(\angle ADB) = 75^0$şi $\{O\} = AC \cap BD$.Să se arate că aria dreptunghiului ABCD este egală cu aria pătratului DOMN.

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10146),& GMB – 9/2008,E:13709

Soluție.

Construim $AE \perp BD$şi considerăm AE=a.Deoarece într-un triunghi dreptunghic care are un unghi de 15^0 înălțimea corespunzătoare unghiului drept este un sfert din ipotenuză, avem că $BD = 4a$.În continuare

(1) Aria(ABCD)=2Aria(BAD)=$2 \cdot \dfrac{BD \cdot AE}{2} = a \cdot 4a = 4a^2$

(2) Aria(DOMN)=$DO^2 = (2a)^2 = 4a^2$

Din relațiile (1) şi (2) rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Problemă pentru clasa a VII- a,

Să se calculeze perimetrul şi aria unui triunghi dreptunghic ale cărui laturi sunt numere naturale şi verifică relațiile: $\dfrac{\sqrt{c^2}}{ab} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$, şi $c^2 = a^2 + b^2$.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9971) & Crux Mathematicorum – aprilie 2009 (M390)

Soluție.Ecuația este echivalentă cu (1) $\sqrt{a^2 + b^2} + a + b = ab$.Din ipoteză avem:

(2) $\sqrt{a^2 + b^2} \in Z^+ \Leftrightarrow \begin{cases} a = x^2 - y^2, x^2 > y^2 \\ b = 2xy \\ x, y \in N \end{cases}$.

Din (1) şi (2)$\Rightarrow y(x - y) = 1 \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 1$ sau $x_2 = -2, y_2 = -1 \Rightarrow a = 3$ şi $b = 4$.Ipotenuza triunghiului este c=5 , deci perimetrul este $12u$. şi aria $6u^2$.

Observație. Analog se rezolvă şi următoarele probleme:

1. Să se calculeze laturile unui triunghi dreptunghic ştiind că sunt numere naturale şi aria este egală cu semiperimetrul.
2. Fie un triunghi dreptunghic cu $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{h} = 1$, unde a şi b sunt catete iar h este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.Să se afle laturile acestui triunghi ştiind că în plus sunt numere naturale.
3. Să se rezolve în $N \times N \times N$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a+b+c=ab \\ c=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Problemă pentru clasa a VII- a,
Să se arate că dacă laturile unui triunghi dreptunghic sunt numere naturale atunci aria şi semiperimetrul acestuia sunt numere naturale.
Publicată în RMT – nr. 1 / 2007 (VII.210.)

Soluție. Într-un triunghi dreptunghic avem : $b^2+c^2=a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2-2bc=a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2bc=(b+c)^2-a^2 \Leftrightarrow (*)bc=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}.$$

Însă produsul bc este număr natural , rezultă atunci că produsul $(b+c+a)(b+c-a)$ trebuie să fie divizibil cu 2, adică unul din factorii $(b+c+a)$, sau $(b+c-a)$ trebuie să fie par .Fie k un număr natural :

(1) Să presupunem că $b+c+a=2k \Rightarrow b+c-a=2(k-a)$, şi prin urmare din

$$(*) \Rightarrow bc=2k(k-a)=par \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{bc}{2}=k(k-a)\in N \\ p=\frac{a+b+c}{2}=k\in N \end{cases},$$

(2) Să presupunem că $b+c-a=2k \Rightarrow b+c+a=2(k+a)$, şi prin urmare din

$$(*) \Rightarrow bc=2k(k+a)=par \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{bc}{2}=k(k+a)\in N \\ p=\frac{a+b+c}{2}=k+a\in N \end{cases}$$

Din (1) şi (2) rezultă că în ambele cazuri aria şi semiperimetrul sunt numere naturale.

Problemă pentru clasa a VII- a,

Considerăm patrulaterul convex ABCD şi $\{O\}=AB\cap CD$.Prin punctele A, B, C, D şi O ducem $OO_1\|CC_1\|DD_1$, $OO_2\|AA_1\|DD_2$, $OO_3\|AA_2\|BB_1$, $OO_4\|CC_2\|BB_2$, unde $O_1\in CD, O_2\in AD$, $O_3\in AB$, $O_4\in CB$; $A_1,C_1\in OD$; $A_2,C_2\in OB$; $B_1,D_2\in OA$; $B_2,D_1\in OC$.
Să se arate că:

$$\frac{C_1D}{C_1O}\cdot\frac{D_1O}{D_1C}\cdot\frac{O_1C}{O_1D}\cdot\frac{A_1D}{A_1O}\cdot\frac{D_2O}{D_2A}\cdot\frac{O_2A}{O_2D}\cdot\frac{A_2B}{A_2O}\cdot\frac{B_1O}{B_1A}\cdot\frac{O_3A}{O_3B}\cdot$$
$$\frac{C_2B}{C_2O}\cdot\frac{B_2O}{B_2C}\cdot\frac{O_4B}{O_4C}=1$$

Soluție. Pentru rezolvarea problemei se aplică următoarea:

Lemă (Teorema lui Ceva cu punct impropriu) **.**Dacă prin vârfurile triunghiului ABC ducem $AA_0 \| BB_0 \| CC_0$, unde $A_0 \in BC, B_0 \in CA, C_0 \in AB$, atunci avem (*) $\frac{C_0A}{C_0B} \cdot \frac{A_0B}{A_0C} \cdot \frac{B_0C}{B_0A} = 1$.

Demonstrație.Avem $\Delta AA_0C \approx \Delta B_0BC \Rightarrow (1)$ $\frac{B_0C}{B_0A} = \frac{BC}{BA_0}$ şi $\Delta C_0CB \approx \Delta AA_0B \Rightarrow (2)$ $\frac{C_0A}{C_0B} = \frac{CA_0}{CB}$. Se observă că relațiile (1) şi (2) se pot obține mai uşor utilizând teorema lui Thales în triunghiurile BCB_0 şi BCC_0 cu paralela AA_0.
Prin înmulțirea relațiilor (1) şi (2) se obține relația de demonstrat.
Pentru rezolvarea problemei propuse se aplica această Lemă ΔDOC (cu $OO_1 \| CC_1 \| DD_1$), ΔDOA (cu $OO_2 \| AA_1 \| DD_2$), ΔBOA (cu $OO_3 \| AA_2 \| BB_1$) şi ΔBOC (cu $OO_4 \| CC_2 \| BB_2$).Rezultă relațiile:

$\frac{C_1D}{C_1O} \cdot \frac{D_1O}{D_1C} \cdot \frac{O_1C}{O_1D} = 1$, $\frac{A_1D}{A_1O} \cdot \frac{D_2O}{D_2A} \cdot \frac{O_2A}{O_2D} = 1$, $\frac{A_2B}{A_2O} \cdot \frac{B_1O}{B_1A} \cdot \frac{O_3A}{O_3B} = 1$ şi $\frac{C_2B}{C_2O} \cdot \frac{B_2O}{B_2C} \cdot \frac{O_4B}{O_4C} = 1$ care, prin înmulțire demonstrează relația din problemă.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Fie $a,b,c,d \in Q_+^*$ astfel încât a,b sunt invers proporționale cu c,d.
Să se arate că $m_a(a,b) \cdot m_g(c,d) - m_a(c,d) \cdot m_g(a,b) = 0$, unde prin $m_a(.,.)$ respectiv, $m_g(.,.)$ am notat media aritmetică respectiv, media geometrică a două numere din Q_+^*.

Soluție.Relația de demonstrat este echivalentă cu $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}$ care rezultă imediat luând $a = \frac{k}{c}$ şi $b = \frac{k}{d}$.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Se consideră dreptunghiul $ABCD$ şi punctele : M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturi CD, Q mijlocul lui DN, $\{R\} = AN \cap DB$, $\{S\} = DM \cap AQ$.Dacă $AB = 2a$ şi $AD = a\sqrt{2}$ să se arate că ΔARB este dreptunghic şi ΔASM este isoscel.

Soluție. Fie $\{O\} = AC \cap DB$.Se observă uşor că AN şi DO sunt mediane în triunghiul ADC, de unde avem că R este centrul de greutate al triunghiului ADC şi de aici $AR = \frac{2}{3} \cdot AN = \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{3}$, $RO = \frac{1}{3} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $RB = RO + OB = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.Deoarece $AR^2 + RB^2 = AB^2$ utilizând reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că ΔARB este dreptunghic.

Fie $\{O'\} = DM \cap AN$ şi Q mijlocul lui DN.Observăm că DO' şi AS sunt mediane în ΔADN, cu centrul de greutate S , de unde $AS = \frac{2}{3} \cdot AQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a$.Din $AS = AM = a$ rezultă că ΔASM este isoscel.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Să se calculeze $x + y$ dacă :

$x^4 = y^4 + 48$, $x^2 + y^2 = 12$ şi $x = y + 2$.

Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluţie. $x + y = \frac{x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)(x - y)} = \frac{48}{12 \cdot 2} = 2$.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Considerăm trapezul $ABCD$ cu laturile paralele AB şi CD de lungimi 15 şi 30 şi laturile AD şi BC de lungimi 9 şi 12.Determinaţi aria trapezului $ABCD$.

Dată la Concursul „Speranţe Rîmnicene" 2009

Soluţie1. Fie K mijlocul lui DC.Unim K cu A şi B.Atunci $AB = DK = KC$ =15.Din $AB = DK$ şi AB paralel cu DK avem AD şi BK sunt paralele şi egale, deci $BK = 9$. Din $AB = KC$ şi AB paralel KC avem AK şi BC sunt paralele şi egale, deci $AK = 12$.

Atunci, trapezul este împărţit în trei triunghiuri, fiecare cu laturile de lungimi 9, 12 şi 15.Un triunghi cu laturile 9, 12 şi 15 este dreptunghic ($9^2 + 12^2 = 15^2$) şi are aria $\frac{9 \cdot 12}{2} = 54$.Atunci aria trapezului este $3 \cdot 54 = 162$.

Soluţie 2. Fie BF paralel cu AD cu F pe CD.Atunci $ABFD$ este paralelogram cu $BF = AD = 9$ şi $DF = AB = 15$. Deoarece triunghiul BFC are lungimile laturilor 9, 12 şi 15 , din reciproca teoremei lui Pitagora avem că BFC este dreptunghic cu aria 54.

Deasemenea, deoarece BF este mediană în triunghiul DBC, aria triunghiului DBF este tot 54 şi este mai departe egală cu aria lui ABD.

$Aria(ABCD) = Aria(ABD) + Aria(BDK) + Aria(BKC) = 3 \cdot 54 = 162$.

Soluţia 3. Fie $AM \perp DC$, $BN \perp DC$ cu M şi N pe CD.Notăm $AM = h$ şi $DM = x$.

$x^2 + h^2 = 81, NC = 15 - x, (15 - x)^2 + h^2 = 144$.Rezultă $x = \frac{81}{15}$ şi $h = \frac{9 \cdot 12}{15}$.

Obţinem $Aria(ABCD) = \frac{(30 + 15)}{2} \cdot \frac{9 \cdot 12}{15} = 162$.

Soluţia 4. Fie $AP \perp DC$, $BQ \perp DC$ cu P şi Q pe CD.Înlăturăm dreptunghiul $ABPQ$ din trapez şi lipim triunghiurile ADP , respectiv BCQ pe linia AP respectiv BQ, astfel că $DC = 15$.Se obţine astfel triunghiul DEC cu $DE = DA = 9$ şi $CE = CB = 12$.Din reciproca teoremei lui Pitagora ($9^2 + 12^2 = 15^2$) triunghiul DEC este dreptunghic.

Apoi $\sin(\angle EDC) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ de unde înălţimea trapezului $ABCD$ este $d(E, DC) = ED \cdot \sin(\angle EDC) = 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{5}$.Rezultă $Aria(ABCD) = \frac{(30 + 15)}{2} \cdot \frac{9 \cdot 4}{5} = 162$.

Soluția 5. Fie $DA \cap BC = \{P\}$.Avem AB paralel cu CD, $\angle PAB = \angle PDC$, $\angle PBA = \angle PCD$, de unde triunghiurile PAB şi PDC sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.Se obține $PA = 9$ şi $PB = 12$.Din reciproca Teoremei lui Pitagora triunghiurile APB şi DPC sunt dreptunghice cu $Aria(PDC) = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$, respectiv $Aria(PAB) = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. $Aria(ABCD) = Aria(PDC) - Aria(PAB) = 162.$

Soluția 6. Fie $DA \cap BC = \{P\}$.Avem AB paralel cu CD, AB linie mijlocie în ΔPCD şi mai departe se continuă ca în soluția 5.

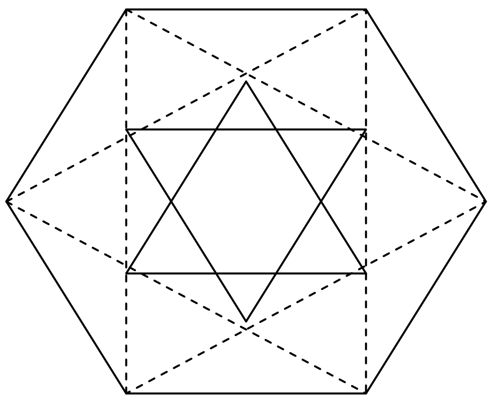
Problemă pentru clasa a VII-a,

Se consideră hexagonul regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ cu aria S.

$\Delta A_1A_3A_5 \cap \Delta A_2A_4A_6 = B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, $\Delta B_1B_3B_5 \cap \Delta B_2B_4B_6 = C_1C_2C_3C_4C_5C_6$.

Calculați aria hexagonului regulat $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$.

Soluție.



Toate hexagoanele regulate sunt figuri asemenea.Se demonstrează uşor că latura hexagonului $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ este $\frac{1}{\sqrt{3}}$ din latura hexagonului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ şi mai departe că latura hexagonului $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ este $\frac{1}{\sqrt{3}}$ din latura hexagonului $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$.Rezultă că latura hexagonului $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ este $\frac{1}{3}$ din latura hexagonului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.Acum utilizăm rezultatul că raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare şi obținem că aria hexagonului $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ este $\frac{S}{9}$.

Problemă pentru clasa a VII-a,

Fie $a = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 2008^2$ şi $b = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 2007^2$.

Arătați că $a - b = M_{2009}$.

Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluție. $a - b = (2008^2 - 2007^2) + (2006^2 - 2005^2) + (2004^2 - 2003^2) + ... + (2^2 - 1^2) =$

$(2008-2007)(2008+2007)+(2006-2005)(2006+2005)+(2004-2003)(2004+2003)$ $+\ldots+(2\text{-}1)(2+1)=1\cdot(2008+2007)+1\cdot(2006+2005)+1\cdot(2004+2003)+\ldots+1\cdot(2+1)=$ $=1+2+3+\ldots+2008=\dfrac{(1+2008)\cdot 2008}{2}=2009\cdot 1004=M_{2009}$.

Problemă pentru clasa a VII –a,

Fie punctele A,B,C,D aşezate în această ordine pe o dreaptă d şi punctele V respectiv, V' în exteriorul dreptei d, în acelaşi plan, astfel încât :

$m(\angle AVD)=60^0$, $m(\angle AVC)=30^0$ şi $m(\angle AVB)=15^0$ ($\sin 15^0=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$).

Se consideră în acelaşi plan dreptele d' şi d'' astfel încât : $d'\cap VA=A'$, $d'\cap VB=B'$, $d'\cap VC=C'$, $d'\cap VD=D'$, $d'\cap V'A=A''$, $d'\cap V'B=B''$, $d'\cap V'C=C''$, $d'\cap V'D=D''$. Calculaţi rapoartele $\dfrac{CA\cdot DB}{CB\cdot DA}$, $\dfrac{C'A'\cdot D'B'}{C'B'\cdot D'A'}$, $\dfrac{C''A''\cdot D''B''}{C''B''\cdot D''A''}$.

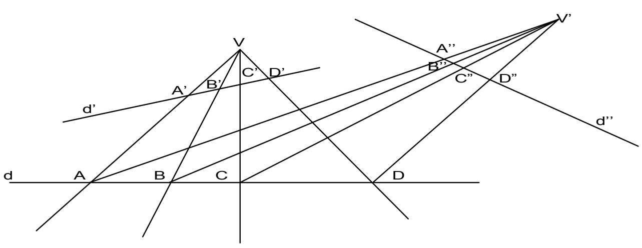
Soluţie. Notăm cu $S(XYZ)$ aria triunghiului de vârfuri X,Y şi Z, iar cu h distanţa de la vărful V la dreapta d.

Atunci $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{CA\cdot h}{CB\cdot h}=\dfrac{2\cdot S(CVA)}{2\cdot S(CVB)}=\dfrac{S(CVA)}{S(CVB)}=\dfrac{VC\cdot VA\cdot\sin(\angle CVA)}{VC\cdot VB\cdot\sin(\angle CVB)}$.

Analog $\dfrac{DB}{DA}=\dfrac{VD\cdot VB\cdot\sin(\angle DVB)}{VD\cdot VA\cdot\sin(DVA)}$. Obţinem $\dfrac{CA\cdot DB}{CB\cdot DA}=\dfrac{\sin(\angle CVA)\cdot\sin(\angle DVB)}{\sin(\angle CVB)\cdot\sin(\angle DVA)}=$

$=\dfrac{\sin 30^0\cdot\sin 45^0}{\sin 15^0\cdot\sin 60^0}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Procedăm ca mai sus şi rezultă $\dfrac{C'A'\cdot D'B'}{C'B'\cdot D'A'}=\dfrac{C''A''\cdot D''B''}{C''B''\cdot D''A''}=\dfrac{\sin 30^0\cdot\sin 45^0}{\sin 15^0\cdot\sin 60^0}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.



Problemã pentru clasa a VII-a (a VIII-a),

Rezolvaţi în $Z\times Z$ ecuaţia:

$a^2+b^2-2a+b=5$.

Publicată în GM (suplimentul cu exerciţii) – nr. 4 / 2008 (S:E08.24)

Soluţie. $a^2+b^2-2a+b=5\,|\cdot 4\Rightarrow 4a^2+4b^2-8a+4b=20\,|+5\Rightarrow$

$\Rightarrow 4a^2 + 4b^2 - 8a + 4b + 5 = 25 \quad \Rightarrow (4a^2 - 8a + 4) + (4b^2 + 4b + 1) = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2a-2)^2 + (2b+1)^2 = 25$.Avem cazurile:

$(1)\begin{cases} 2a-2 = \pm 4 \\ 2b+1 = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow (a,b) \in \{(-1,1);(-1,-2);(3,1);(3,-2)\}$;

$(2)\begin{cases} 2a-2 = \pm 3 \\ 2b+1 = \pm 4 \end{cases}$, nu are soluții în $Z \times Z$;

$(3)\begin{cases} 2a-2 = 0 \\ 2b+1 = \pm 5 \end{cases} \Rightarrow (a,b) \in \{(1,-3);(1,2)\}$;

$(4)\begin{cases} 2a-2 = \pm 5 \\ 2b+1 = 0 \end{cases}$, nu are soluții în $Z \times Z$.

Soluțiile ecuației sunt:
$(a,b) \in \{(-1,-2);(-1,1);(1,-3);(1,2);(3,-2);(3,1)\}$.

Problemã pentru clasa a VII-a (a VIII-a),
Rezolvați în $N \times N$ ecuația:
$a^2 - b^2 + 18a - 3b = 0$.

Soluție. $a^2 - b^2 + 18a - 3b = 0 \Leftrightarrow (*)\ a^2 + 18a = b^2 + 3b$

Dacă $a \geq b \Rightarrow a^2 + 18a \geq b^2 + 18b > b^2 + 3b$, deci (1) $a < b$.

Dacă $b \geq a + 8 \Rightarrow b^2 + 3b \geq (a+8)^2 + 3(a+8) = a^2 + 19a + 72 > a^2 + 18a$, deci (2) $b < a + 8$.

Din (1) şi (2) $\Rightarrow b \in \{a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6, a+7\}$.

Analizăm cele 7 cazuri:

$$\begin{cases} b = a+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} a \notin N \\ b = a+2 \overset{(*)}{\Rightarrow} a \notin N \\ b = a+3 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 2 \Rightarrow b = 5 \\ b = a+4 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 4 \Rightarrow b = 8 \\ b = a+5 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 8 \Rightarrow b = 13 \\ b = a+6 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 18 \Rightarrow b = 24 \\ b = a+7 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 70 \Rightarrow b = 77 \end{cases}$$

Soluțiile ecuației sunt:
$(a,b) \in \{(0,0);(2,5);(4,8);(8,13);(18,24);(70,77)\}$.

Notă. O altă metodă de soluționare a problemei face apel la ecuațiile de gradul II. (Relația din enunț este privită ca o ecuație de gradul II în a cu condiția $\Delta = k^2, k \in N$.).

Problemã pentru clasa a VIII-a
Sã se rezolve în R^3 ecuația :

$(x-y)^3(x-z)^3+(y-x)^3(y-z)^3+(z-x)^3(z-y)^3+m=0,$
unde $m\geq 0$.
Soluție:

Notam
$E(x,y,z)=(x-y)^3(x-z)^3+(y-x)^3(y-z)^3+(z-x)^3(z-y)^3.$
Dacã $x\leq y\leq z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem
$z-x=a+b, a\geq 0, b\geq 0.$
$E(x,y,z)=a^3(a+b)^3-a^3b^3+(a+b)^3b^3\geq 0$, care este evidentã.
Egalitatea are loc dacã a = b = 0.
Daca $m>0 \Rightarrow$ *ecuatia nu* are solutii.
Daca $m=0 \Rightarrow x=y=z$.

Problemã pentru clasa a VIII-a

Sã se rezolve în R^2 ecuația :

$(1-y)^3(1-z)^3+(y-1)^3(y-z)^3+(z-1)^3(z-y)^3=0$.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9983); Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10344)

Soluție:

Notam
$E(x,y,z)=(x-y)^3(x-z)^3+(y-x)^3(y-z)^3+(z-x)^3(z-y)^3.$
Dacã $x\leq y\leq z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem $z-x=a+b$,
$a\geq 0, b\geq 0.$
$E(x,y,z)=a^3(a+b)^3-a^3b^3+(a+b)^3b^3\geq 0,$
care este evidentã.
Egalitatea are loc dacã a = b = 0.
$E(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z$.In cazul nostru $x=1$
si avem solutia $y=z=1$.

Problemã pentru clasa a VIII-a

Sã se rezolve în R^2 ecuația :
$(2007-y)^3(2007-z)^3+(y-2007)^3(y-z)^3+$
$(z-2007)^3(z-y)^3=0.$
Soluție:

Notam $E(x,y,z)=(x-y)^3(x-z)^3+(y-x)^3(y-z)^3+$
$(z-x)^3(z-y)^3$.

Dacã $x \le y \le z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem $z-x=a+b$,
$a \ge 0, b \ge 0$.

$E(x,y,z)=a^3(a+b)^3-a^3b^3+(a+b)^3b^3 \ge 0$, care este evidentã .

Egalitatea are loc dacã a = b = 0.

$E(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z$.In cazul nostru $x=2007$
si avem solutia $y=z=2007$.

Problemã pentru clasa a VIII-a

Pe planul triunghiului ABC se ridica perpendicularele AA', BB'si
CC' astfel incat
$AA'=a, BB'=b, CC'=c\,; A'B'=x, B'C'=y, C'A'=z$ si
$\angle((ABC),(A'B'C'))=60^0$.

Sa se calculeze in functie de a, b, c, x, y, z
volumul corpului $ABCA'B'C'$.

Soluție:

Fie $\alpha=(ABC)$, $S=\text{Aria}(ABC)$, $S'=\text{Aria}(A'B'C')$ si $a=\min(a,b,c)$.

Sectionam prisma $ABCA'B'C'$ cu un plan α' paralel
cu planul α a.i $A'\in\alpha'$, $B_1=\alpha'\cap BB'$, $C_1=\alpha'\cap CC'$, $AD\perp B_1C_1$.

$$Vol(ABCA'B'C')=Vol(ABCA'B_1C_1)+Vol(A'B_1C_1C'B')=Sa+\frac{1}{3}\cdot AD\cdot\frac{B_1C_1(C'C_1+B'B_1)}{2}=$$

$$Sa+\frac{S(b+c-2a)}{3}=\frac{S(a+b+c)}{3}.$$

Dar $S=S'\cos60^0=\frac{S'}{2}$. Notam $p=\frac{x+y+z}{2}$ si determinam S' cu formula lui Heron $\cdot$

Volumul cerut este :

$$\text{Vol}(ABCA'B'C')=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\cdot\frac{a+b+c}{6}\cdot$$

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Să se determine resturile împărțirii numărului $3^{2^{2007}}$ la 2^{2008} respectiv la 2^{2009}.
Publicată în RMT – nr. 4 / 2007 (O.VIII.201)

Soluție.

Metoda 1.Scriem

$$\begin{aligned}3^{2^{2007}}&=(3^{2^{2007}}-1)+1=(3^{2\cdot2^{2006}}-1)+1=[(3^{2^{2006}})^2-1]+1=\\&=(3^{2^{2006}}+1)(3^{2^{2006}}-1)+1=\\&=\ldots=(3^{2^{2006}}+1)(3^{2^{2005}}+1)(3^{2^{2004}}+1)\ldots(3^{2^1}+1)(3^1+1)(3-1)+1=\\&=M_{2^{2009}}+1=M_{2^{2008}}+1.\end{aligned}$$

Deci resturile sunt egale cu 1.

Metoda 2. Folosim Teorema lui Euler : dacă $a,m\in Z$, $(a,m)=1\Rightarrow a^{\varphi(m)}\equiv1(\bmod m)$,
unde $\varphi(m)$= numărul numerelor naturale cel mult egale m, relativ prime cu m.

Se ştie că dacă $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$, atunci $\varphi(m) = m \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot ... (1 - \frac{1}{p_n})$.

Deoarece $(3, 2^{2008}) = 1 \Rightarrow 3^{\varphi(2^{2008})} \equiv 1 (\bmod 2^{2008})$, unde $\varphi(2^{2008}) = 2^{2008}(1 - \frac{1}{2}) = 2^{2007} \Rightarrow 3^{2^{2007}} \equiv 1 (\bmod 2^{2008})$

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Să se determine minimul expresiei $E(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 6x + 10}$,
(unde $x \in R$) şi pentru ce valoare a lui x se realizează.
Dată la Concursul Judeţean de Matematică, „Speranţe Rîmnicene”, clasa a VIII-a, Rîmnicu Sărat, 2007

Soluţie.Scriem $E(x) = \dfrac{(x+3)^2 - 1}{(x+3)^2 + 1} \Rightarrow \min E(x) = -1$ şi se realizează dacă $x = -3$.
Pentru $x < -3$ şi $x > -3 \Rightarrow E(x) > -1$.

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Să se rezolve în $N \times N \times N$ sistemul : $\dfrac{x(y+1)}{x-1} = \dfrac{y(z+1)}{y-1} = \dfrac{z(x+1)}{z-1} = 6$.

Soluţie.Ţinând seama de faptul că dacă $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. orice permutare circulară a numerelor x_0, y_0, z_0 este deasemenea o soluţie.Din cele trei ecuaţii obţinem:

$(1)\begin{cases} 6 = 1 + y + \dfrac{y+1}{x-1} \\ 6 = 1 + z + \dfrac{z+1}{y-1} \\ 6 = 1 + x + \dfrac{x+1}{z-1} \end{cases}$, deducem că numerele $(2)\begin{cases} a = \dfrac{y+1}{x-1} \\ b = \dfrac{z+1}{y-1} \\ c = \dfrac{x+1}{z-1} \end{cases}$ trebuie să fie naturale.

Observăm că : $a \cdot b \cdot c = \dfrac{x+1}{x-1} \cdot \dfrac{y+1}{y-1} \cdot \dfrac{z+1}{z-1} > 1$ de unde rezultă că cel puţin unul din numerele a, b, c este deci > 1.Să presupunem, pentru fixarea ideilor $\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \\ c \geq 2 \end{cases}$

Aceste inegalităţi se mai pot scrie $y \geq x - 2, z \geq y - 2, x \geq 2z - 3$
din care deducem $x \geq 2(y-2) - 3 = 2y - 7 \geq 2(x-2) - 7 = 2x - 11$ sau $x \leq 11$.
Rezultă apoi $11 \geq 2z - 3, z \leq 7, 7 \geq y - 2, y \leq 9$.Printr-un număr finit de încercări pentru $x \leq 11, y \leq 9, z \leq 7$ obţinem soluţiile: $(x, y, z) \in \{(2,2,2), (3,3,3)\}$.
Problemã pentru clasa a VIII-a,
Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b şi c care verifică relaţia:
$2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20$.
Arătaţi că triunghiul este dreptunghic.
Publicată în SM – nr. 3 / 2009 (G.105.)

Soluție.
Relația din enunț este echivalentă cu $(\sqrt{2a-2}-2)^2+(\sqrt{3b-3}-3)^2+(\sqrt{4c-4}-4)^2=0$.Se obține $a=3$, $b=4$ şi $c=5$.
Conform reciprocei Teoremei lui Pitagora triunghiul este dreptunghic.
Problemă pentru clasa a VIII-a (sau a IX-a),
Să se rezolve în R^* ecuația $\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]=4$, unde simbolul $[a]$ reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a .
Publicată în SM – nr. 2 / 2008 (L.31.)

Soluție.
I. Dacă $x<0$, atunci $\frac{1}{x}<0$, aşa că $\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}<0$ .Analog , $\left[\frac{3}{x}\right]<0$, deci nu putem avea $\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]=3$.Rezultă că $x>0$.

II. Dacă $x>0$, avem $\frac{1}{x}<\frac{3}{x}$, deci $\left[\frac{1}{x}\right]\le\left[\frac{3}{x}\right]$.Deoarece $\left[\frac{1}{x}\right]$ şi $\left[\frac{3}{x}\right]$sunt întregi avem două posibilități:

II.1.$\left[\frac{1}{x}\right]=0$ şi $\left[\frac{3}{x}\right]=4$.

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{x}\right]=0 \Leftrightarrow 0\le\frac{1}{x}<1 \Leftrightarrow x>1\\ \left[\frac{3}{x}\right]=4 \Leftrightarrow 4\le\frac{3}{x}<5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}<x\le\frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

II.2. $\left[\frac{1}{x}\right]=1$ şi $\left[\frac{3}{x}\right]=3$

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{x}\right]=1 \Leftrightarrow 1\le\frac{1}{x}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\le 1\\ \left[\frac{3}{x}\right]=3 \Leftrightarrow 3\le\frac{3}{x}<4 \Leftrightarrow \frac{3}{4}<x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{4},1\right]$$

Soluția ecuației este $x\in\left(\frac{3}{4},1\right]$.
Problemã pentru clasa a VIII-a, a X-a

Fie dreptele a,b,c din spatiu astfel incat $\mathrm{a}\cap\mathrm{b}\cap\mathrm{c}=\{\mathrm{O}\}$.
Consideram punctele $\mathrm{A}\in\mathrm{a},\mathrm{B}\in\mathrm{b},\mathrm{C}\in\mathrm{c}$
si $\mathrm{A}'\in(\mathrm{OA},\mathrm{B}'\in(\mathrm{OB},\mathrm{C}'\in(\mathrm{OC}$ astfel incat
$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OA}'\cdot\mathrm{OB}'\cdot\mathrm{OC}'$.
Sa se arate ca $\mathrm{vol}(\mathrm{OABC})=\mathrm{vol}(\mathrm{OA'B'C'})$.
Publicată în RIM – nr.X -2005 (9433)

Soluție:

Probleme rezolvate

Fie OABC si $OA'B'C'$ cele doua tetraedre si C_0, C'_0 proiectiile varfurilor C si C' pe planul OAB; A_0, A'_0 proiectiile varfurilor A si A' pe dreapta OB.

Avem $\text{Vol(OABC)} = \dfrac{OB \cdot AA_0 \cdot CC_0}{6}$ si

$\text{Vol}(OA'B'C') = \dfrac{OB' \cdot A'A'_0 \cdot C'C'_0}{6}$.

Din $\Delta OC_0C \approx \Delta OC'_0C'$ si $\Delta OAA_0 \approx \Delta OA'A'_0 \Rightarrow$

$\dfrac{CC_0}{C'C'_0} = \dfrac{OC}{OC'}$ si $\dfrac{AA_0}{A'A'_0} = \dfrac{OA}{OA'}$

Deci $\dfrac{\text{Vol(OABC)}}{\text{Vol}(OA'B'C')} = \dfrac{OB \cdot AA_0 \cdot CC_0}{OB' \cdot A'A'_0 \cdot C'C'_0} = \dfrac{OA \cdot OB \cdot OC}{OA' \cdot OB' \cdot OC'} = 1 \Rightarrow$

$Vol\ (OABC) = Vol\ (OA'B'C')$

Problemã pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Sã se rezolve în Z^3 sistemul :

$$\begin{cases} xy^2 + xy - x - y - 1 = 0 \\ xz - x^2 - x - z = 0 \end{cases}$$

Publicată în RIM – nr.XI -2006 (9629) ; Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9990)

Soluție:

A doua ecuatie se scrie $z(x-1) = x^2 + x \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2 + x}{x-1}$,

apoi scriem pe z sub forma $z = x + 2 + \dfrac{2}{x-1} \in Z$.

Rezulta x - 1/2, adica $x - 1 = \pm 1$ sau $x - 1 = \pm 2$.

Re*zulta* $x \in \{-1,0,2,3\}$.

1) $pt. x = -1 \Rightarrow z = 0$;

2) $pt. x = 0 \Rightarrow z = 0$;

3) $pt. x = 2 \Rightarrow z = 6$;

4) $pt. x = 3 \Rightarrow z = 6$.

Din prima ecuatie se obtine succesiv :

a) *pt*. $x = -1 \Rightarrow -y^2 - 2y = 0$ si y = o sau y = -2;

b)pt. $x = 0 \Rightarrow -y - 1 = 0$ si $y = -1$;

c)pt. $x = 2 \Rightarrow 2y^2 + y - 3 = 0$ *si* $y = 1$ sau $y = -\dfrac{3}{2} \notin Z$;

d) *pt*. $x = 3 \Rightarrow 3y^2 + 2y - 4 = 0$ si $y \notin Z$.

Avem deci solutiile :

$(x, y, z) \in \{(-1,0,0), (-1,-2,0), (0,-1,0), (2,1,6)\}$

Problemã pentru clasa a VIII-a

Demonstrați inegalitatea :

$$(x-y)^3(x-z)^3+(y-x)^3(y-z)^3+(z-x)^3(z-y)^3\geq 0,$$
$$\forall\, x,y,z\in R.$$

Publicată în RMT – nr. 2 / 2007 (O.VIII.192); Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9983)

Soluție:

Dacã $x\leq y\leq z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem $z-x=a+b$, $a\geq 0, b\geq 0.$

Inegalitatea devine $a^3(a+b)^3-a^3b^3+(a+b)^3b^3\geq 0$, care este evidentã .

Egalitatea are loc dacã a=b=0.

Problemã pentru clasa a VIII-a

Sã se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}<0{,}2$$

Soluție:

Notam $S=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}$

Conform identitati i Botez - Catalan :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}, \text{ avem :}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}=\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\ldots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}, \text{ rezulta :}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-S=\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\ldots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}\triangleright\frac{1003^2}{1004+1005+\ldots+2006}$$
$$=\frac{1003}{1505}$$

(s - a utilizat inegalitat ea mediilor

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2)$$

Deci $\frac{5}{6}-S\triangleright\frac{1003}{1505}\Rightarrow S\triangleleft\frac{1507}{6\cdot 1505}\triangleleft\frac{1}{5}=0{,}2.$

Problema pentru clasa a X-a (sau a VIII-a)

Probleme rezolvate

Rezolvati ecuatia ;

$\frac{(x+2)^7-x^7-128}{(x+2)^5-x^5-32}=\frac{21}{5}$, apoi simplificati fractia $\frac{29^5-25^5-4^5}{29^7-25^7-4^7}$.

Solutie;

Se utilizeaza formulele:

$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$

Luam y = 2 si ecuatia data devine $\frac{7\cdot x\cdot 2(x+2)(x^2+2x+4)^2}{5\cdot x\cdot 2(x+2)(x^2+2x+4)}=\frac{21}{5}$,

$x^2+2x+4=3, x^2+2x+1=0, x=-1.$

Pentru simplificarea fractiei se utilizeaza aceleasi formule ca mai sus,

respectiv luam $x=25$ si $y=4$ si obtinem $\frac{29^5-25^5-4^5}{29^7-25^7-4^7}=$

$=\frac{5\cdot 25\cdot 4\cdot(25+4)(25^2+25\cdot 4+4^2)}{7\cdot 25\cdot 4\cdot(25+4)(25^2+25\cdot 4+4^2)^2}=\frac{5}{5187}.$

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Să se determine maximul expresiei: $E(x)=\frac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$.

Dată la Concursul Interjudețean de Matematică, „Speranțe Rîmnicene”, clasa a VIII-a, Rîmnicu Sărat, 2008

Soluție.Expresia se mai scrie:

$E(x)=\frac{2(x^2-4x+7)+3}{x^2-4x+7}=2+\frac{3}{x^2-4x+7}=2+\frac{3}{(x-2)^2+3}$.

Deci $E(x)$ este maximă când $(x-2)^2+3$ este minimă şi aceasta se întâmplă când $x=2$ .Rezultă că maximul expresiei este 3.

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 0$ numărul $2^{2^{2n+1}}+2^{2^{2n}}+1$ nu este prim.

Soluție. Fie $x^2=2^{2^{2n}}$, deci $x^4=2^{2^{2n+1}}$.Atunci putem scrie :

$2^{2^{2n+1}}+2^{2^{2n}}+1=x^4+x^2+1=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

şi fiecare din cei doi factori este diferit de 1 (c.c.t.d).

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 0$ numărul $2^{6n}-2^{2n}+2^{n+1}-1$ nu este prim.

Soluție.Fie $x=2^n$.Atunci putem scrie:

$2^{6n}-2^{2n}+2^{n+1}-1=x^6-x^2+2x-1=x^6-(x-1)^2=(x^3+x-1)(x^3-x+1)$
şi fiecare din cei doi factori este diferit de 1 (c.c.t.d).

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Se consideră un cub pentru care volumul (în m^3) plus perimetrul bazei (în m) este egal cu aria laterală (în m^2).
Câţi m are lungimea diagonalei cubului dat?

Publicată în GM (suplimentul cu exerciţii) – nr. 4 / 2008 (S:E08.33.), Publicată în SM – nr.2 / 2008

Soluţie.Dacă latura cubului este a, atunci condiţia implică $a^3+4a=4a^2$, sau $a(a^2-4a+4)=a(a-2)^2=0$.Deci $a=2$, şi diagonala are lungimea $2\sqrt{3}\ m$.

Problemă pentru clasa a VIII-a (a IX-a),

Arătaţi că 2009 divide $1^{2007}+2^{2007}+...+2008^{2007}$.
Soluţie.Din identitatea $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...-xy^{n-2}+y^{n-1})$, valabilă pentru orice n impar avem că $x+y$ divide x^n+y^n.Acum, deoarece fiecare dintre numerele $1^{2007}+2008^{2007},2^{2007}+2007^{2007},...,1004^{2007}+1005^{2007}$ se divide cu 2009 rezultă concluzia.

Problemă pentru clasa a VIII-a ,

Arătaţi că 2009 divide $1^3+2^3+...+2008^3$.
Soluţie.Din identitatea $x^3+y^3=(x+y)(x^2-x\ y+y^2)$, avem că $x+y$ divide x^3+y^3.Acum, deoarece fiecare dintre numerele $1^3+2008^3,2^3+2007^3,...,1004^3+1005^3$ se divide cu 2009 rezultă concluzia.

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Rezolvaţi în N ecuaţia:
$2^x=x^2+x+1$.

Publicată în SM – nr. 3 / 2009 (G.110.)

Soluţie. $2^x=x^2+x+1 \Leftrightarrow 2^x-1=x(x+1)$.Cum $2|x(x+1)$ rezultă că $2|2^x-1$, deci $x=0$.

Problemă pentru clasa a VIII-a,

Rezolvaţi în N ecuaţia:
$3^x=x^3+3x^2+2x+1$.

Crux Mathematicorum – octombrie 2008 – M360.

Soluţie. $3^x=x^3+3x^2+2x+1 \Leftrightarrow 3^x-1=x(x+1)(x+2)$.Cum $3|x(x+1)(x+2)$ rezultă că $3|3^x-1$, deci $x=0$.

Problemă pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Fie $E(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$.Rezolvaţi ecuaţia:

$$E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})=\frac{x}{2}.$$

Soluție.Trebuie să observăm că $E(x)+E(1-x)=1$.Apoi

$$E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})=\sum_{k=1}^{2009}E(\frac{k}{2010})=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(\frac{2010-k}{2010})\right]+$$

$$E(\frac{1005}{2010})=$$

$$=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(1-\frac{k}{2010})\right]+E(\frac{1}{2})=1004+E(\frac{1}{2})=1004+\frac{2}{2+2}=\frac{2009}{2}.$$

Soluția ecuației este $x=2009$.

Problemă pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Fie $E(x)=\frac{16^x}{16^x+4}$.Calculați suma : S=$E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})$.

Soluție.Trebuie să observăm că $E(x)+E(1-x)=1$.Apoi

$$S=E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})=\sum_{k=1}^{2009}E(\frac{k}{2010})=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(\frac{2010-k}{2010})\right]+$$

$$E(\frac{1005}{2010})=$$

$$=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(1-\frac{k}{2010})\right]+E(\frac{1}{2})=1004+E(\frac{1}{2})=1004+\frac{4}{4+4}=\frac{2009}{2}.$$

Problemă pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Rezolvați în R ecuația:

$4x^2-8[x]-5=0$, unde $[x]\in Z$ şi $x\geq[x]>x-1$.

Soluție.Deoarece $[x]>x-1$, avem

$$4x^2-5=8[x]>8(x-1)\Leftrightarrow 4x^2-8x+3>0\Leftrightarrow(2x-1)(2x+3)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}\text{ sau } x>\frac{3}{2}$$

(1)

De asemenea din $x\geq[x]$, avem:

$$4x^2-5=8[x]\leq 8x\Leftrightarrow 4x^2-8x-5\leq 0\Leftrightarrow(2x-5)(2x+1)\leq 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$$

(2)

Din (1) şi (2) avem $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$ sau $\frac{3}{2}<x\leq\frac{5}{2}$.

Cazul 1. $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$.

Rezultă $[x]=-1\Rightarrow 4x^2=-3$, ecuația nu are soluții reale, sau

$[x]=0\Rightarrow 4x^2=5\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Deoarece $-\frac{3}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}<-1$ şi $1<\frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{3}{2}$ nu avem soluții.

Cazul 2. $\frac{3}{2}<x\leq\frac{5}{2}$.

Acum $[x]\in\{1,2,3\}$.

Dacă $[x]=1 \Rightarrow 4x^2 = 13$.Deoarece $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}<\frac{\sqrt{13}}{2}<\frac{\sqrt{16}}{2}=2$, rezultă soluția $x=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Dacă $[x]=2 \Rightarrow 4x^2 = 21$. Deoarece $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}<\frac{\sqrt{21}}{2}<\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}$, rezultă

soluția $x=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Dacă $[x]=3 \Rightarrow 4x^2 = 29$.Deoarece $\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{25}}{2}<\frac{\sqrt{29}}{2}<\frac{\sqrt{36}}{2}=\frac{6}{2}$, rezultă $x=\frac{\sqrt{29}}{2}$ nu este soluție.

Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{\frac{\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Problemă pentru clasa a VIII-a ,

Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a,b,c şi diagonala d .

Să se arate că dacă $d=\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$, atunci paralelipepedul este cub.

Dată la concursul național "Gh. Mihoc" - 2009

Soluție.Ridicăm la pătrat relația din ipoteză, apoi înlocuim $d^2 = a^2+b^2+c^2$ şi obținem:

$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$ .Q.E.D.

Problemă pentru clasa a IX-a ,

Să se arate că 23 divide $3^{22n+1}+5^{22m+1}+15^{22p+1}$, $\forall n,m,p \in N$.

Soluție.Se aplică Mica teoremă a lui Fermat: $\forall a \in Z, p = prim, p \neq a \Rightarrow a^{p-1} = M_p + 1$.

În cazul nostru avem

$3^{22n+1}+5^{22m+1}+15^{22p+1}=3\cdot 3^{22n}+5\cdot 5^{22m}+15\cdot 15^{22p}=$

$=3\cdot(M_{23}+1)^n+5\cdot(M_{23}+1)^m+15\cdot(M_{23}+1)^p =$

$=3\cdot(M_{23}+1)+5\cdot(M_{23}+1)+15\cdot(M_{23}+1)= = M_{23}+3+5+15=M_{23}$.

Problemã pentru clasa a IX-a

Sã se rezolve în R^3 ecuația :

$$(x-y)^{2007}(x-z)^{2007}+(y-x)^{2007}(y-z)^{2007}+$$
$$+(z-x)^{2007}(z-y)^{2007}+m=0, \text{unde } m \geq 0.$$

Publicată în RIM – nr.XII -2006 (9618)

Soluție:

Notam $E(x,y,z)=(x-y)^{2007}(x-z)^{2007}+(y-x)^{2007}(y-z)^{2007}+$
$(z-x)^{2007}(z-y)^{2007}$.

Dacã $x\le y\le z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem $z-x=a+b$,
$a\ge 0, b\ge 0$.

$E(x,y,z)=a^{2007}(a+b)^{2007}-a^{2007}b^{2007}+(a+b)^{2007}b^{2007}\ge 0$,
care este evidentã.

Egalitatea are loc dacã a = b = 0.

Daca $m>0 \Rightarrow$ *ecuatia nu* are solutii.

Daca $m=0 \Rightarrow x=y=z$.

Problemã pentru clasa a IX-a

Sã se rezolve în R^2 ecuația :

$(1-y)^{2007}(1-z)^{2007}+(y-1)^{2007}(y-z)^{2007}+$
$+(z-1)^{2007}(z-y)^{2007}=0$.

Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10355)

Soluție:

Notam $E(x,y,z)=(x-y)^{2007}(x-z)^{2007}+(y-x)^{2007}(y-z)^{2007}+$
$(z-x)^{2007}(z-y)^{2007}$.

Dacã $x\le y\le z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem $z-x=a+b$,
$a\ge 0, b\ge 0$.

$E(x,y,z)=a^{2007}(a+b)^{2007}-a^{2007}b^{2007}+(a+b)^{2007}b^{2007}\ge 0$,
care este evidentã.

$E(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z$.In cazul nostru $x=1$
si avem solutia $y=z=1$.

Problemã pentru clasa a IX-a

Sã se rezolve în R^2 ecuația :

$(2006-y)^{2007}(2006-z)^{2007}+(y-2006)^{2007}(y-z)^{2007}+$
$+(z-2006)^{2007}(z-y)^{2007}=0$.

Soluție:

Notam $E(x,y,z)=(x-y)^{2007}(x-z)^{2007}+(y-x)^{2007}(y-z)^{2007}+$
$+(z-x)^{2007}(z-y)^{2007}$.

Dacã $x\le y\le z$, notãm $a=y-x, b=z-y$ si avem $z-x=a+b$,
$a\ge 0, b\ge 0$.

$E(x,y,z)=a^{2007}(a+b)^{2007}-a^{2007}b^{2007}+(a+b)^{2007}b^{2007}\ge 0$,
care este evidentã.

Egalitatea are loc dacã a = b = 0.

$E(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z$.In cazul nostru $x=2006$
si avem solutia $y=z=2006$.

Problemã pentru clasa a IX-a,

Fie triunghiul ABC asemenea cu triunghiul $A'B'C'$ în care: $AB = c, BC = a, CA = b$, $A'B' = \sqrt{a+b}, B'C' = \sqrt{b+c}, C'A' = \sqrt{c+a}$ şi raportul de asemănare $\frac{1}{k}$.

Să se determine lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor celor două triunghiuri în funcție de k.

Soluție. Din enunț avem $\frac{\sqrt{a+b}}{c} = \frac{\sqrt{b+c}}{a} = \frac{\sqrt{c+a}}{b} = k.$

Rezultă sistemul $\begin{cases} \sqrt{a+b} = kc \\ \sqrt{b+c} = ka \\ \sqrt{c+a} = kb \end{cases}$

Datorită simetriei, putem presupune $a \le b \le c$.
Atunci $\sqrt{a+b} \le \sqrt{b+c} \Rightarrow kc \le ka$, deci $a = b = c$.

Prima ecuație devine: $\sqrt{2a} = ka \Rightarrow a = b = c = \frac{2}{k^2}$.Deci cele două triunghiuri sunt echilaterale primul cu latura $\frac{2}{k^2}$ iar celălalt cu latura $\frac{2}{k}$.

Problemă pentru clasa a IX-a,
Să se rezolve în N ecuația $x^m = x^n + a$, dacă $m, n, a \in N$ şi a impar .
Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10164)

Soluție.Este necesar ca $m > n$.Din $x^m - x^n = a$ avem $x^n(x^{m-n} - 1) = a$, apoi $x^n(x-1)(x^{m-n-1} + x^{m-n-2} + ... + 1) = a \Leftrightarrow x^{n-1} \cdot x \cdot (x-1)(x^{m-n-1} + x^{m-n-2} + ... + 1) = a$.
Deoarece $x \cdot (x-1)$ este un număr par şi a este un număr impar rezultă că ecuația nu are soluții.

Problemã pentru clasa a IX-a

Fie in planul euclidian punctele $O, M, A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ astfel incat $d(O,M) = d$, $m(\angle A_{i-1}OA_i) = i\alpha \in (0^0, 180^0)$, $i = \overline{1,n}$.
Consideram punctele $B_i = pr_{OA_i} M$, $i = \overline{0,n}$.

Sa se calculeze $\sum_{i=0}^{n-1} B_i B_{i+1}$.

Soluție:
Avem doua situatii:
1)M $\in$ *Int(*$\angle A_i OA_{i+1}$*);* 2)$M \in Ext(\angle A_i OA_{i+1})$

Deoarece $m(\angle OB_i M) + m(OB_{i+1}M) = 180^0 \Rightarrow OB_i MB_{i+1}$ este patrulater inscriptibil in cercul de diametru OM = d.Din teorema sinusurilor in triunghiurile $OB_i B_{i+1}$

$\Rightarrow \frac{B_i B_{i+1}}{\sin(i+1)\alpha} = 2R = OM = d \Rightarrow\Rightarrow B_i B_{i+1} = d\sin(i+1)\alpha..$

Avem $\sum_{i=0}^{n-1} B_i B_{i+1} = d\sum_{i=0}^{n-1} \sin(i+1)\alpha = d(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + ... + \sin n\alpha)$.

Tinand cont de egalitatea cunoscuta

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + ... + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$$

obtinem $\sum_{i=0}^{n-1} B_i B_{i+1} = d \cdot \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$

Problemă pentru clasa a IX-a,

Dacă $a, b, c, d \in R_+^*$, cu condiția $abcd = 1$ să se arate că:

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 24$.

Soluție.Aplicăm inegalitate medilor A-G de două ori şi obținem:

$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} \geq \sqrt[4]{a^2 b^2 c^2 d^2} = 1$, respectiv,

$\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6} \geq \sqrt[6]{a^3 b^3 c^3 d^3} = 1$.

Prin înmulțirea celor două inegalități se obține concluzia.

Problemă pentru clasa a IX-a,

Dacă $x_i \in R_+^*$, $i = \overline{1,n}$, cu $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$, să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Publicată în SM – nr. 1 / 2008 (L.4.)

Soluție. Aplicăm inegalitate medilor A-G de două ori şi obținem:

$\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 ... x_n^2} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n$,respectiv,

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{\frac{n(n-1)}{2}} \geq \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{(x_1 x_2 ... x_n)^{n-1}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

Prin adunarea celor două inegalități se obține concluzia.

Problemã pentru clasa a IX-a, a X-a

Se considerã în planul euclidian punctele: A(1,0),B(-1,2) şi C(2,-1).
Sã se scrie :

$a)$*ecuatiile translatiei* $t_{\overrightarrow{CB}}$;

$b)$*ecuatiile omotetiei* h_B^{-2};

$c)$*ecuatiile simetriei centrale* S_C;

$d)$*ecuatiile simetriei axiale* S_{BC};

$e)$*ecuatiile rotatiei* $R_A^{-\frac{\pi}{3}}$.

Publicată în RIM – nr.X -2005 (9434)

Soluție :

$a)$*ecuatiile* translatiei de vector $\vec{v}(a,b)$ sunt $(t_{\vec{v}}):\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Deoarece $\overrightarrow{CB}(-3,3) \Rightarrow (t_{\overrightarrow{CB}}):\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 3 \end{cases}$.

$b)$*ecuatiile* omotetiei sunt date de $(h_B^K):\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_B \\ y' = ky + (1-k)y_B \end{cases}$

In cazul nostru avem $(h_B^{-2}):\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$

$c)$*ecuatiile* simetriei centrale sunt date de $(S_C):\begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases}$

Re*zulta* $(S_C):\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -2 - y \end{cases}$

$d)$*daca* avem o drepta (d) de ecuatie ax + by + c = 0 atunci simetria axiala in raport cu dreapta (d) este data de ecuatiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2ac}{a^2 + b^2} \\ y' = -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}x + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Dreapta (BC) are ecuatia x + y - 1 = 0 $\Rightarrow (S_{BC}):\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$

$e)$*ecuatiile* rotatiei sunt date de $(R_A^{\theta})\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + x'_0 \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + y'_0 \end{cases}$

unde $\begin{cases} x'_0 = (x_A tg\dfrac{\theta}{2} + y_A)\sin\theta \\ y'_0 = (y_A tg\dfrac{\theta}{2} - x_A)\sin\theta \end{cases}$

In cazul nostru avem $\begin{cases} x'_0 = \dfrac{1}{2} \\ y'_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

de unde rezulta ecuatiile $(R_A^{-\frac{\pi}{3}})$: $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \\ y' = -\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Problemã pentru clasa a IX-a, a X-a
Se considerã în planul euclidian punctele: A(1,0),B(-1,2) şi C(2,-1).
Sã se calculeze centrul de greutate al triunghiului DEF,unde
$D = t_{\overrightarrow{CB}}(A), E = h_B^{-2}(C), F = S_C(B)\cdot$

$(t_{\vec{v}}$ = *translatia* de vector $\vec{v}; h_o^k$ = *omotetia* de centru O si raport k;

S_o = *simetria* de centru O)

Soluție :

$a)$*ecuatiile* translatiei de vector $\vec{v}(a,b)$ sunt $(t_{\vec{v}})$: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Deoarece $\overrightarrow{CB}(-3,3) \Rightarrow (t_{\overrightarrow{CB}}) : \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 3 \end{cases} \cdot \Rightarrow t_{\overrightarrow{CB}}(A) = D(-2,3)$

$b)$*ecuatiile* omotetiei sunt date de (h_B^K) : $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_B \\ y' = ky + (1-k)y_B \end{cases}$

In cazul nostru avem $(h_B^{-2}) : \begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases} \Rightarrow h_B^{-2}(C) = E(-7,8)$

$c)$*ecuatiile* simetriei centrale sunt date de (S_C) : $\begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases}$

Re*zulta* $(S_C) : \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -2 - y \end{cases} \Rightarrow S_C(B) = F(5,-4)$

Din a),b),c) rezultã coordonatele centrului de greutate sunt
$G(\dfrac{-2-7+5}{3}, \dfrac{3+8-4}{3}) \Rightarrow G(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{7}{3})$

Problemã clasa a IX-a

Sã se arate cã:

$$a)\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}}+\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}+\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}=0;$$

$$b)\frac{MA^2}{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}}+\frac{MB^2}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}+\frac{MC^2}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}=1,$$

unde A, B, C si M sunt puncte din spatiu.

Publicată în RIM – nr.X -2005 (9430)

Soluție:

Consideram un punct oarecare O din spatiu si notam cu

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ si $\vec{x}$ vectorii de pozitie ai punctelor A, B, C si M fata de O.

$$\text{a) }\frac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{CA}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{CB}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{MC}}}{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{BC}}=\frac{\vec{a}-\vec{x}}{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})}+\frac{\vec{b}-\vec{x}}{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})}+\frac{\vec{c}-\vec{x}}{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})}=$$

$$=\frac{1}{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})}\left[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{x}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{x}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{x}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{x}\right]=0;$$

$$b)\frac{MA^2}{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{CA}}+\frac{MB^2}{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{CB}}+\frac{MC^2}{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{BC}}=$$

$$=\frac{(\vec{a}-\vec{x})^2}{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})}+\frac{(\vec{b}-\vec{x})^2}{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})}+\frac{(\vec{c}-\vec{x})^2}{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})}=$$

$$\frac{1}{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})}\left[(a^2+x^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{c}-\vec{b})+(b^2+x^2-2\cdot\vec{b}\cdot\vec{x})(\vec{a}-\vec{c})+(c^2+x^2-2\cdot\vec{c}\cdot\vec{x})(\vec{b}-\vec{a})\right]=$$

$$=\frac{a^2(\vec{c}-\vec{b})+b^2(\vec{a}-\vec{c})+c^2(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})}=1.$$

(Am utilizat formula cunoscutã:
$a^2(\vec{c}-\vec{b})+b^2(\vec{a}-\vec{c})+c^2(\vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})$).

Problema clasa a IX-a

Sã se afle locul geometric al punctelor M din spațiu care verificã relația:

$$\frac{MA^2\cdot\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}}+\frac{MB^2\cdot\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}}+\frac{MC^2\cdot\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}=0,\ \forall \mathrm{A,B,C} \text{ din spatiu.}$$

Publicată în RIM – nr.X -2005 (9429)

Soluție:

Consideram un punct oarecare O din spatiu si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ si $\vec{x}$

vectorii de pozitie ai punctelor A, B, C si M.

$$E = \frac{MA^2 \cdot \overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}} + \frac{MB^2 \cdot \overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}} + \frac{MC^2 \cdot \overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}} = \frac{(\vec{a} - \vec{x})^3}{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})} + \frac{(\vec{b} - \vec{x})^3}{(\vec{b} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c})} + \frac{(\vec{c} - \vec{x})^3}{(\vec{c} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{b})}$$

Dupa aducerea la acelasi numitor si reducerea termenilor avem :

$$(1) E = \frac{1}{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})} \left\{ \vec{a}^3 (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b}^3 (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c}^3 (\vec{b} - \vec{a}) - 3\vec{x}\left[a^2 (\vec{c} - \vec{b}) + b^2 (\vec{a} - \vec{c}) + c^2 (\vec{b} - \vec{a})\right] \right\}$$

Avem relatiile : (2) $a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a) = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ si

(3) $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$, cunoscute de la algebra.

Din (1), (2) si (3) $\Rightarrow$

$$(4) E = \frac{1}{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})} \cdot \left[(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a}) - 3\vec{x}(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})\right] =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OM},$$

Din ipoteza $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM}$

Stim (5) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. *Deci* $M \equiv G$, centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problemã pentru clasa a IX-a, a X-a

Se considerã în planul euclidian punctele: A(1,0),B(-1,2) şi C(2,-1).

Sã se arate cã mijlocul segmentului DE se aflã pe prima bisectoare, unde

$D = R_A^{-\frac{\pi}{3}}(B)$ si $E = S_{BC}(A)$.

(R_o^θ = *rotatia* de centru O si de unghi θ; S_d = *simetria* axiala de axa d)

$a)$*daca* avem o drepta (d) de ecuatie $\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0$ atunci
simetria axiala
in raport cu dreapta (d) este data de ecuatiile

$$\begin{cases} \mathrm{x}'=\dfrac{\mathrm{b}^2-a^2}{a^2+b^2}x-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}y-\dfrac{2ac}{a^2+b^2} \\ \mathrm{y}'=-\dfrac{2\mathrm{ab}}{\mathrm{a}^2+b^2}x+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y-\dfrac{2bc}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Dreapta (BC) are ecuatia $\mathrm{x}+\mathrm{y}-1=0\Rightarrow$

$$(\mathrm{S}_{\mathrm{BC}}):\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=-x+1 \end{cases}\Rightarrow S_{BC}(A)=E(1,0)$$

$b)$*ecuatiile* rotatiei sunt date de $(\mathrm{R}_{\mathrm{A}}^{\theta})\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta+x_0' \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta+y_0' \end{cases}$

unde $\begin{cases} x_0'=(x_A tg\dfrac{\theta}{2}+y_A)\sin\theta \\ y_0'=(y_A tg\dfrac{\theta}{2}-x_A)\sin\theta \end{cases}$

In cazul nostru avem $\begin{cases} x_0'=\dfrac{1}{2} \\ \mathrm{y}_0'=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

de unde rezulta ecuatiile $(\mathrm{R}_{\mathrm{A}}^{-\frac{\pi}{3}}):\begin{cases} x'=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y'=-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\Rightarrow$

$R_A^{-\frac{\pi}{3}}(B)=D(\sqrt{3},\sqrt{3}+1)$

Din a) şi b) avem

$M(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\dfrac{\sqrt{3}+1}{2})$

Problemă pentru clasa a IX-a,

Să se arate că numărul $A=\overline{11}_x\cdot\overline{12}_x\cdot\overline{13}_x\cdot\overline{14}_x\cdot\overline{15}_x\cdot\overline{16}_x\cdot\overline{17}_x\cdot\overline{18}_x\cdot\overline{19}_x$ nu poate fi cub perfect oricare ar fi baza de numerație x.

Soluție.Numărul A se scrie $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)$.
Fără a restrânge generalitatea (A este produsul a nouă numere consecutive) luom
$A=(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, unde din $x\geq 10\Rightarrow n\geq 15$.
Deoarece numărul $A=(n^3-10n)^3-n(27n^4-180n^2-576)$, se observă uşor că pentru $\forall n>10$ scăzătorul este pozitiv $\Rightarrow (1) A<(n^3-10n)^3$;
În continuare avem
$A-(n^3-10n-1)^3=3n^6-27n^5-60n^4+177n^3+300n^2+606n+1>0,\ \forall n>10$
De unde $\Rightarrow (2)(n^3-10n-1)^3<A$.

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că A este cuprins între cuburile a două numere consecutive, deci el nu poate fi cub perfect.

Problemã pentru clasa a IX-a, a X-a

Se considerã în planul euclidian punctele: A(1,0),B(-1,2) şi C(2,-1).
Sã se arate cã mijlocul segmentului DE se aflã pe prima bisectoare, unde

$D = R_A^{-\frac{\pi}{3}}(B)$ si $E = S_{BC}(A)$.

($R_o^{\theta} = rotatia$ de centru O si de unghi θ; $S_d = simetria$ axiala de axa d)

Soluție :

$a)$*daca* avem o drepta (d) de ecuatie ax + by + c = 0 atunci
simetria axiala
in raport cu dreapta (d) este data de ecuatiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2ac}{a^2 + b^2} \\ y' = -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}x + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Dreapta (BC) are ecuatia x + y - 1 = 0 $\Rightarrow$

$$(S_{BC}) : \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow S_{BC}(A) = E(1,0)$$

$b)$*ecuatiile* rotatiei sunt date de $(R_A^{\theta})\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + x_0' \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + y_0' \end{cases}$

$$unde \begin{cases} x_0' = (x_A tg\dfrac{\theta}{2} + y_A)\sin\theta \\ y_0' = (y_A tg\dfrac{\theta}{2} - x_A)\sin\theta \end{cases}$$

In cazul nostru avem $\begin{cases} x_0' = \dfrac{1}{2} \\ y_0' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

de unde rezulta ecuatiile $(R_A^{-\frac{\pi}{3}}) : \begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \\ y' = -\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$R_A^{-\frac{\pi}{3}}(B) = D(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$

Din a) şi b) avem

$M(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2})$

Problemă pentru clasa a IX-a,

Să se calculeze suma : $S=\sum_{k=1}^{2007}\cos\frac{k\pi}{6}+\sum_{k=1}^{2008}\cos\frac{k\pi}{6}$.

Dată la Concursul Interjudețean de Matematică, „Speranțe Rîmnicene”, clasa a IX-a, Rîmnicu Sărat, 2008

Soluție.Deoarece funcția cos este periodică şi pentru că avem $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{6}+\ldots+\cos\frac{12\pi}{6}=0$ rezultă $\sum_{k=1}^{2007}\cos\frac{k\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (pt. că $2007=167\cdot 12+3$) şi $\sum_{k=1}^{2008}\cos\frac{k\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (pt. că $2008=167\cdot 12+4$).

Suma din enunț este $S=\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$.

Problemă pentru clasa a IX-a, octombrie

Să se calculeze suma : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{6}$.

Publicată în SM – 1 / 2008 (L.6.); G.M. – nr. 3 / 2008 (25971)

Soluție.Deoarece funcția cos este periodică şi pentru că avem $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{6}+\ldots+\cos\frac{12\pi}{6}=0$ rezultă că se obțin 12 valori pentru suma dată.

$$S=\begin{cases}0,\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}\\ \frac{\sqrt{3}}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+1\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+2\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+3\\ \frac{\sqrt{3}}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+4\\ 0,\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+5\\ -1,\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+6\\ -\frac{2+\sqrt{3}}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+7\\ -\frac{3+\sqrt{3}}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+8\\ -\frac{3+\sqrt{3}}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+9\\ -\frac{2+\sqrt{3}}{2},\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+10\\ -1,\text{ dacã n} = \mathrm{M}_{12}+11\end{cases}$$

Problemă pentru clasa a VII-a (a VIII-a,a IX-a),

Arătați că numărul $A=\dfrac{\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+...}}}}{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}}$ - $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+...}}}$ este întreg.

Soluție.Notăm $x=\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+...}}}$, apoi ridicăm la pătrat şi obținem $x^2=30+x$.

Rezolvăm ecuația $x^2-x-30=0$ şi se obțin soluțiile : $x_1=6$, $x_2=-5$.Convine doar soluția pozitivă $x=6$.Analog se procedează pentru calculul numărului $y=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}$ .Ecuația care se obține este $y^2-y-6=0$ cu soluția pozitivă $y=3$.Se procedează ca mai sus şi rezultă $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+...}}}$ =7.

Numărul din enunț este deci $A=\dfrac{6}{3}-7=-5\in Z$, c.c.t.d.

Notă. Exercițiul poate fi efectuat şi de elevii clasei a VII-a deoarece au de rezolvat o ecuație de tipul $x^2-x=a \Leftrightarrow x(x-1)=a$, produsul a două numere consecutive=natural şi prin încercări rezultă soluțiile.

Problemă pentru clasa a IX-a,

Fie $\alpha>0$, rădăcina ecuației $x^2-2207x+1=0$. Să se găsească numerele naturale a, b şi c diferite de zero astfel încât $\sqrt[8]{\alpha}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$.

Publicată în RMT – 1 / 2008 (IX.238.) & SM – 1 / 2008 (L.24.)

Soluție . Folosim următoarea lemă :"dacă α este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2-bx+1=0$, atunci $\sqrt{\alpha}$ este cea mai mare rădăcină a ecuației $x^2-x\sqrt{b+2}+1=0$ " (se demostrează uşor).Cu această lemă obținem că $\sqrt{\alpha}$ este cea mai mare rădăcină ecuației $x^2-47x+1=0$, mai departe $\sqrt[4]{\alpha}$ este cea mai mare rădăcină a ecuației $x^2-7x+1=0$, şi $\sqrt[8]{\alpha}$ este cea mai mare rădăcină a ecuației $x^2-3x+1=0$.

Obținem $\sqrt[8]{\alpha}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ şi valorile : $a=3, b=5$ şi $c=2$.

Problemă pentru clasa a IX-a,

Calculați : $\left[\dfrac{2008!+2005!}{2007!+2006!}\right]$,(unde $[x]$ reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x) apoi generalizați rezultatul.

Publicată în RMT – nr. 2 / 2008 (VII.241.)

Soluție. $\left[\dfrac{2008!+2005!}{2007!+2006!}\right]=\left[\dfrac{2006!(2007\cdot 2008+\frac{1}{2006})}{2006!(2007+1)}\right]=\left[\dfrac{2007\cdot 2008+\frac{1}{2006}}{2008}\right]=$

$=\left[2007+\dfrac{1}{2006\cdot 2008}\right]=2007$.

Generalizare. $\left[\dfrac{(n+3)!+n!}{(n+2)!+(n+1)!}\right]=n+2,\ \forall n\in N$.

Problemă pentru clasa a IX-a , a X-a, a XI-a,

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{y^2}+\dfrac{9}{z^2}=4\\ x^2+y^2+z^2=9\\ xyz=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Crux Mathematicorum, decembrie 2008, M 375

Soluție.Primele două ecuații ne sugerează considerarea următorilor vectori: $\vec{a}=(\frac{1}{x},\frac{2}{y},\frac{3}{z})$ şi $\vec{b}=(x,y,z)$ .Avem $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$, $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=3$ .Rezultă $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$, deci, unghiul vectorilor este nul, prin urmare vectorii sunt coliniari şi au coordonatele proporționale.

Obținem: $\dfrac{x^2}{1}=\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{z^2}{3}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{1+2+3}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$, de unde

$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}, y=\pm\sqrt{3}, z=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ținând cont de ecuația a treia, avem soluțiile:

$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Problemã clasa a X-a

Sã se afle rãdãcinile polinomului
$f=aX^3+bX^2+cX+d\in R^*[X]$, daca b + d = a + c.

Soluție:

$b+d=a+c\Rightarrow b+d-c=a/:(-a)\Rightarrow -\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{a}=-1\Rightarrow$

$\Rightarrow S_1+S_2+S_3+1=0\Rightarrow$

$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3+1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1(1+x_2+x_3+x_2x_3)+(1+x_2+x_3+x_2x_3)=0\Rightarrow$

$(1+x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+1)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)=0\Rightarrow x_1=x_2=x_3=-1.$

Problemã clasa a X-a

Fie $f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in R^*[X]$.
Sa se arate ca $bc = ad$ daca si numai daca f are o radacina egala cu opusul alteia.

Soluție:
$x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S_1S_2 = S_3 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = -\frac{d}{a} \Leftrightarrow bc = ad.$

Problemă pentru clasa a X-a,

Să se arate că :

$$\left| \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1} + (x+\sqrt{x^2-1})^{n-1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})^{n} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n}} \right| \forall x \in [-1,1].$$
$\leq 2,$

Soluție.Notăm $T_n(x) = (x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n$; facem substituția $x = \cos\alpha$, de unde :

$$T_n(x) = (\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - 1})^n + (\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - 1})^n =$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 2\cos n\alpha.$$

Analog $T_{n-1}(x) = 2\cos(n-1)\alpha$ şi $T_{n+1}(x) = 2\cos(n+1)\alpha$.
Calculăm

$$\frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{T_n(x)} = \frac{2\cos(n+1)\alpha + 2\cos(n-1)\alpha}{2\cos n\alpha} =$$
$$= \frac{2\cos\frac{(n+1)\alpha + (n-1)\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha - (n-1)\alpha}{2}}{\cos n\alpha} =$$
$$= \frac{2\cos n\alpha \cos\alpha}{\cos n\alpha} = 2\cos\alpha = 2\cos(\arccos x) = 2x.$$

Expresia din enunț devine: $\left|\frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{T_n(x)}\right| = |2x| = 2|x| \leq 2,$ deoarece $|x| \leq 1$.

Problemã pentru clasa a X-a
Sã se arate cã în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea:

$$\frac{\sin^n A + \sin^n B + \sin^n C}{3} \geq \left(\frac{p}{3R}\right)^n, \forall n \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty).$$

Soluție:

Folosim inegalitatea cunoscuta

$$\frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_m^n}{m} \geq (\frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m})^n,$$

unde $x_1, x_2, ..., x_m \triangleright 0$ si n $\in (-\infty.0] \cup [1, \infty)$.

Punand $x_1 = \sin A, x_2 = \sin B, x_3 = \sin C$, rezulta

$$\frac{\sin^n A + \sin^n B + \sin^n C}{3} \geq (\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3})^n$$

si tinand seama de identitatea $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$

obtinem inegalitatea din enunt.

Problemã pentru clasa a X-a

Sã se arate cã în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea:

$$\frac{\sin^n A + \sin^n B + \sin^n C}{3} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n \cos^n \frac{A}{2} \cos^n \frac{B}{2} \cos^n \frac{c}{2},$$

$\forall n \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9994)

Soluție:

Folosim inegalitatea cunoscuta

$$\frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_m^n}{m} \geq (\frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m})^n,$$

unde $x_1, x_2, ..., x_m \triangleright 0$ si n $\in (-\infty.0] \cup [1, \infty)$.

Punand $x_1 = \sin A, x_2 = \sin B, x_3 = \sin C$, rezulta

$$\frac{\sin^n A + \sin^n B + \sin^n C}{3} \geq (\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3})^n$$

si tinand seama de identitatea $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{c}{2}$

obtinem inegalitatea din enunt.

Problemă pentru clasa a X-a,

Să se arate că :

$$\left| \frac{\sum_{k\in N}^{2k\leq n+1} C_{n+1}^{2k} x^{n-2k+1}(x^2-1)^k + \sum_{k\in N}^{2k\leq n-1} C_{n-1}^{2k} x^{n-2k-1}(x^2-1)^k}{\sum_{k\in N}^{2k\leq n} C_n^{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k} \right| \leq 2, \ \forall x \in [-1,1].$$

Soluție.Notăm $T_n(x) = \sum_{k\in N}^{2k\leq n} C_n^{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k$.

Fie $C_n(x) = \cos(n \arccos x)$, unde $x \in [-1,1]$; dacă substituim $x = \cos\alpha$ atunci

$$C_n(x) = \cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - ..$$

$$. = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - ... =$$

$$= \sum_{k\in N}^{2k\leq n} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k = \sum_{k\in N}^{2k\leq n} C_n^{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k = T_n(x).$$

În continuare calculăm

$$\frac{T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)}{T_n(x)}=\frac{2\cos(n+1)\alpha+2\cos(n-1)\alpha}{2\cos n\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{(n+1)\alpha+(n-1)\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha-(n-1)\alpha}{2}}{\cos n\alpha}=\frac{2\cos n\alpha\cos\alpha}{\cos n\alpha}=$$

$$=2\cos\alpha=2\cos(\arccos x)=2x.$$

Expresia din enunț devine: $\left|\frac{T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)}{T_n(x)}\right|=|2x|=2|x|\le 2,$ deoarece $|x|\le 1$.

Problemă pentru clasa a X-a ,

Să se determine forma generală a şirurilor definite prin:

a) $x_{n+1}=-3x_n+2$, $\forall n\in N$, $x_0=1$. (recurență liniară de ordinul 1 cu coeficienți constanți);

b) $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n+\left(\frac{1}{3}\right)^n n$, $\forall n\in N$, $x_0=1$.(recurență liniară cu un coeficient variabil);

c) $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\forall n\in N$, $x_0=1$.(recurență liniară cu un coeficient variabil);

d) $x_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}x_n+\frac{1}{n}$, $\forall n\in N^*$, $x_1=0$.(recurență liniară cu ambii coeficienți variabili).

Soluție. a) Avem relațiile $\begin{cases} x_1=-3x_0+2 \,\big|\cdot(-3)^{n-1} \\ x_2=-3x_1+2 \,\big|\cdot(-3)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}=-3x_{n-2}+2 \,\big|\cdot(-3) \\ x_n=-3x_{n-1}+2 \end{cases}$ iar prin adunarea lor obținem

$x_n=\frac{(-3)^n+1}{2}$. *Forma generală a şirului* $x_{n+1}=a\ x_n+b$,$\forall\in N$ *este*
$x_n=a^n x_0+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1)$.

b) soluția generală a relației de recurență (x_n) este suma dintre soluția relației omogene (y_n) şi o soluție particulară a relației neomogene (z_n).

Considerăm $y_n=c\left(\frac{3}{2}\right)^n$, $c\in R$ este o constantă ce se va determina ulterior.

Soluția particulară o căutăm de tipul $z_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n Q(n)$, unde $Q(n)$ este un polinom de grad 1 , care, înlocuită în relația de recurență dă $\frac{1}{3}Q(n+1)-\frac{3}{2}Q(n)=n$ .Dacă
$Q(n)=\alpha n+\beta$
obținem $\alpha=-\frac{6}{7}$ şi $\beta=-\frac{12}{49}$.Atunci soluția particulară este $z_n=-\frac{6}{49}\left(\frac{1}{3}\right)^n(7n-2)$.

Deci $x_n = c\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{6}{49}\left(\frac{1}{3}\right)^n (7n-2)$, dând lui n valoarea 0 obținem $c = \frac{37}{49}$ şi se obține:

$$x_n = \frac{37}{49}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{6}{49}\left(\frac{1}{3}\right)^n (7n-2).$$

c) se procedează ca la punctual b) sau ca la punctual a) şi se obține

$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} n$. *Forma generală a şirului* $x_{n+1} = a\ x_n + f(n), \forall \in N$ *este*

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) a^{n-k-1}.$$

d) Se utilizează procedeul iterării directe, ca la punctul a).*Forma generală a şirului*

$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \forall \in N$ *este:* $x_{n+1} = a_0 a_1 ... a_n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{k+1} a_{k+2} ... a_n\right) + b_n$.

În cazul nostru $x_{n+1} = a_1 ... a_n x_1 + b_1 a_2 ... a_n + b_2 a_3 ... a_n + b_{n-1} a_n + b_n$ şi

obținem: $x_{n+1} = \frac{1}{n+2}\left(\frac{3}{1} + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + ... + \frac{n+1}{n-1}\right)$.

Problemă pentru clasa a X –a,

Să se determine forma generală a şirurilor (recurențe liniare de ordinul 2 cu coeficienți constanți) definite prin:

a) $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n$, $\forall n \in N$, $x_0 = 1, x_1 = 2$;

b) $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$, $\forall n \in N$, $x_0 = x_1 = 1$;

c) $x_{n+2} = \sqrt{3}x_{n+1} - x_n, \forall n \in N, x_0 = x_1 = 1$.

Soluție.a) termenul general este de forma $x_n = c_1 r_1^{\ n} + c_2 r_2^{\ n}$, unde r_1 şi r_2 sunt rădăcinile reale şi distincte ale ecuației reciproce ataşate, $r^2 - 7r + 12 = 0$, iar, c_1 şi c_2 sunt constante care se determină din condițiile inițiale.Avem $r_1 = 3, r_2 = 4$, iar, din sistemul $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$ rezultă $c_1 = 2, c_2 = -1$. Rezultă $x_n = 2 \cdot 3^n - 4^n$.

b) ecuația caracteristică asociată relației de recurență este $r^2 - 6r + 9 = 0$ şi are rădăcina dublă $r_1 = r_2 \overset{not.}{=} \alpha = 3$.Termenul general este de forma $x_n = c_1 \alpha^n + c_2 n \alpha^n$, deci $x_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n$.Din condițiile inițiale rezultă $c_1 = 1$ şi $c_2 = -\frac{2}{3}$, apoi obținem $x_n = 3^{n-1} \cdot (3 - 2n)$.

c) ecuația caracteristică, $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$, are rădăcinile complexe $r_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \pm i \sin\frac{\pi}{6} = \cos t + i \sin t$.Termenul general este de tipul $x_n = r^n (c_1 \cos nt + i \sin nt)$, unde $r = |r_{1,2}|$.Din condițiile inițiale obținem $c_1 = 1$ şi $c_2 = 2 - \sqrt{3}$.Rezultă $x_n = \cos\frac{n\pi}{6} + (2 - \sqrt{3}) \sin\frac{n\pi}{6}$.

Problemă pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Fie $E(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$.Rezolvați ecuația:

$$E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})=\frac{x}{2}.$$

Soluție.Trebuie să observăm că $E(x)+E(1-x)=1$.Apoi

$$E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})=\sum_{k=1}^{2009}E(\frac{k}{2010})=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(\frac{2010-k}{2010})\right]+$$

$$E(\frac{1005}{2010})=$$

$$=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(1-\frac{k}{2010})\right]+E(\frac{1}{2})=1004+E(\frac{1}{2})=1004+\frac{2}{2+2}=\frac{2009}{2}.$$

Soluția ecuației este $x=2009$.

Problemă pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Fie $E(x)=\dfrac{16^x}{16^x+4}$.Calculați suma : S=$E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})$.

Soluție.Trebuie să observăm că $E(x)+E(1-x)=1$.Apoi

$$S=E(\frac{1}{2010})+E(\frac{2}{2010})+...+E(\frac{2009}{2010})=\sum_{k=1}^{2009}E(\frac{k}{2010})=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(\frac{2010-k}{2010})\right]+$$

$$E(\frac{1005}{2010})=$$

$$=\sum_{k=1}^{1004}\left[E(\frac{k}{2010})+E(1-\frac{k}{2010})\right]+E(\frac{1}{2})=1004+E(\frac{1}{2})=1004+\frac{4}{4+4}=\frac{2009}{2}.$$

Problemă pentru clasa a VIII-a sau a IX-a,

Rezolvați în R ecuația:

$4x^2-8[x]-5=0$, unde $[x]\in Z$ și $x\geq[x]>x-1$.

Soluție.Deoarece $[x]>x-1$, avem

$$4x^2-5=8[x]>8(x-1)\Leftrightarrow 4x^2-8x+3>0\Leftrightarrow(2x-1)(2x+3)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}\text{ sau }x>\frac{3}{2}$$

(1)

De asemenea din $x\geq[x]$, avem:

$4x^2-5=8[x]\le 8x \Leftrightarrow 4x^2-8x-5\le 0 \Leftrightarrow (2x-5)(2x+1)\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le \frac{5}{2}$

(2)

Din (1) şi (2) avem $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$ sau $\frac{3}{2}<x\le\frac{5}{2}$.

Cazul 1. $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$.

Rezultă $[x]=-1\Rightarrow 4x^2=-3$, ecuația nu are soluții reale, sau

$[x]=0\Rightarrow 4x^2=5\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Deoarece $-\frac{3}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}<-1$ şi $1<\frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{3}{2}$ nu avem soluții.

Cazul 2. $\frac{3}{2}<x\le\frac{5}{2}$.

Acum $[x]\in\{1,2,3\}$.

Dacă $[x]=1\Rightarrow 4x^2=13$.Deoarece $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}<\frac{\sqrt{13}}{2}<\frac{\sqrt{16}}{2}=2$, rezultă soluția $x=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Dacă $[x]=2\Rightarrow 4x^2=21$. Deoarece $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}<\frac{\sqrt{21}}{2}<\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}$, rezultă

soluția $x=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Dacă $[x]=3\Rightarrow 4x^2=29$.Deoarece $\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{25}}{2}<\frac{\sqrt{29}}{2}<\frac{\sqrt{36}}{2}=\frac{6}{2}$, rezultă $x=\frac{\sqrt{29}}{2}$ nu este soluție.

Soluțiile ecuației sunt $x\in\left\{\frac{\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Problemă pentru clasa a VIII-a ,

Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a,b,c şi diagonala d.

Să se arate că dacă $d=\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$, atunci paralelipepedul este cub.

Soluție.Ridicăm la pătrat relația din ipoteză, apoi înlocuim $d^2=a^2+b^2+c^2$ şi obținem:

$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$ .Q.E.D.

Problemă pentru gimnaziu sau clasa a XII-a ,

Fie $N=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2008-1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2007$ .Arătați că 2009 divide pe N .

Publicată în GMB – 4 / 2009 (C.O.: 5019)

Soluție 1. (clasa a XII-a)

$2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2008 \equiv \left[(-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot ...\cdot(-3)\cdot(-1)\right]\mathrm{mod}(2009)$
$\equiv \left(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2007\right)\mathrm{mod}(2009)$.
Rezultă $N \equiv 0\,\mathrm{mod}(2009)$.Q.E.D.

Soluție 2.(gimnaziu).Generalizare.
Notăm $A = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)$, $B = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2k)$, $C = 2k+1$.
Observăm că
$A = (C-2k)(C-(2k-2))\cdot ...\cdot(C-2) = M_C + \left(-1\right)^k \cdot 2\cdot 4\cdot ...\cdot(2k) = M_C + (-1)^k \cdot B$.
Rezultă $N = -M_C + (1+(-1)^{k+1})\cdot B$.
Acum luom $k = 1004$ şi rezultă $2009|N$.Q.E.D.

Problemă pentru gimnaziu sau clasa a XII-a ,

Fie $N = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2010 + 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2009$.Arătați că 2011 divide pe N.

Soluție 1. (clasa a XII-a)

$2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2010 \equiv \left[(-2009)\cdot(-2007)\cdot(-2005)\cdot ...\cdot(-3)\cdot(-1)\right]\mathrm{mod}(2011)$
$\equiv -\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2009\right)\mathrm{mod}(2011)$.
Rezultă $N \equiv 0\,\mathrm{mod}(2011)$.Q.E.D.

Soluție 2.(gimnaziu).Generalizare.
Notăm $A = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)$, $B = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2k)$, $C = 2k+1$.
Observăm că
$A = (C-2k)(C-(2k-2))\cdot ...\cdot(C-2) = M_C + \left(-1\right)^k \cdot 2\cdot 4\cdot ...\cdot(2k) = M_C + (-1)^k \cdot B$.
Rezultă $N = M_C + (1+(-1)^k)\cdot B$.
Acum luom $k = 1005$ şi rezultă $2011|N$.Q.E.D.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Să se rezolve în $M_2(C)$ ecuația : $A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $n \in N^*$.

Soluție.Observăm că $\det(A^4) = 0$.De aici $\left(\det A\right)^4 = 0$, de unde $\det A = 0$.Utilizând relația Cayley-Hamilton obținem $A^4 = \left(TrA\right)^3 \cdot A$.Considerăm $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ şi obținem

$(TrA)^3 \cdot A = B$, în care egalând urmele, obținem $(TrA)^3 \cdot TrA = TrB$, deci
$(TrA)^4 = TrB = 10 \Rightarrow TrA \in \{\pm\sqrt[4]{10}, \pm i\sqrt[4]{10}\}$.

În continuare, din cele de mai sus avem $A = \dfrac{B}{(TrA)^3} = \dfrac{B}{\frac{TrB}{TrA}} = \dfrac{TrA}{TrB} \cdot B$.

Soluțiile ecuației sunt: $A \in \left\{\pm\dfrac{\sqrt[4]{10}}{10} \cdot B, \pm i\dfrac{\sqrt[4]{10}}{10} \cdot B\right\}$, unde $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Problemă pentru clasa a X-a,

Rezolvați în R^+ ecuația : $\left(4^{\log_7 x} + 3\right)^{\log_7 4} = x - 3$.

Dată la Concursul Speranțe Rîmnicene 2009

Soluție.
Deoarece $(*)\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \forall a, c > 0, b \neq 1$,atunci avem
$\forall u \in R, \left(4^u + 3\right)^{\log_7 4} = 4^{\log_7 \left(4^u + 3\right)}$(valabilă şi în cazul particular $u = \log_7 x$).

Fie $f(x) = 4^{\log_7 x} + 3, \forall x > 0$ .Atunci $f(x) \overset{(*)}{=} x^{\log_7 4} + 3$ şi ecuația de rezolvat devine
$f(f(x)) = x$.

Funcția $f(x)$ este crescătoare .Dacă $f(x) < x$, atunci $f(f(x)) < f(x)$, iar, dacă
$f(x) > x$, atunci $f(f(x)) > f(x)$ .Deci, pentru a avea $f(f(x)) = x$, trebuie ca
$f(x) = x$.

Cum $u = \log_7 x$, avem $4^u + 3 = 7^u \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{7}\right)^u + 3 \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^u = 1$.Deoarece, membrul stâng
este o funcție strict descrescătoare, deci injectivă, rezultă că unica soluție este
$u = 1 \Leftrightarrow x = 7$.

Problemă pentru clasa a X-a,

Rezolvați în R^+ ecuația : $\left(a^{\log_{a+b} x} + b\right)^{\log_{a+b} a} = x - b,\ \forall a, b > 1$.

Soluție.
Deoarece $(*)\ x^{\log_y z} = z^{\log_y x}, \forall x, z > 0, y \neq 1$,atunci avem
$\forall u \in R, \left(a^u + b\right)^{\log_{a+b} a} = a^{\log_{a+b}\left(a^u + b\right)}$(valabilă şi în cazul particular $u = \log_{a+b} x$).

Fie $f(x) = a^{\log_{a+b} x} + b, \forall x > 0$ .Atunci $f(x) \overset{(*)}{=} x^{\log_{a+b} a} + b$ şi ecuația de rezolvat devine
$f(f(x)) = x$.

Probleme rezolvate

Funcția $f(x)$ este crescătoare .Dacă $f(x) < x$, atunci $f(f(x)) < f(x)$, iar, dacă $f(x) > x$, atunci $f(f(x)) > f(x)$.Deci, pentru a avea $f(f(x)) = x$, trebuie ca $f(x) = x$.

Cum $u = \log_{a+b} x$, avem $a^u + b = (a+b)^u \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b}\right)^u + b\cdot\left(\frac{1}{a+b}\right)^u = 1$.Deoarece, membrul stâng este o funcție strict descrescătoare, deci injectivă, rezultă că unica soluție este $u = 1 \Leftrightarrow x = a+b$.

Problemă pentru clasa a X-a

Rezolvați în Z ecuația: $(4-x)^{4-x} + (3-x)^{3-x} + 20 = 4^x + 3^x$.

Soluție.Dacă $x < 0$, membrul stâng este număr natural mai mare ca 20, iar, membrul drept nu este număr natural şi este mai mic ca 1.
Dacă $x > 4$, membrul drept este număr natural , iar membrul stâng nu este număr natural .
Analizând valorile $x \in (0,4) \cap Z$, obținem soluția $x = 2$.

Problemă pentru clasa a IX-a,

Rezolvați în R^+ ecuația: $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+x}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+x}}} = x$.

Publicată în GMB – 4 / 2009 (26137)

Soluție.Ecuația este echivalentă cu $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} = x\sqrt{2}$.

Din $2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}} \ge 0$, rezultă $0 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{2} \le 1$.Deoarece există $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\forall\ 0 \le \frac{x}{2} \le 1$, a.î. $\cos a = \frac{x}{2}$ vom folosi substituția $x = 2\cos a$.

Vom utiliza de asemenea şi formulele: $\sqrt{2+2\cos t} = 2\cos\frac{t}{2}$ şi $\sqrt{2-2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2}$.

Avem

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos a}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{a}{2}}}} =$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{a}{2}}} =$$

$=\sqrt{2+2\cos\frac{a}{4}}=2\cos\frac{a}{8}$.

Analog $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}=2\sin\frac{a}{8}$.

Ecuația devine :

$$2\cos\frac{a}{8}+2\sin\frac{a}{8}=2\sqrt{2}\cos a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{a}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{a}{8}=\cos a \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{8}\right)=\cos a.$$

Din $a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{8}=a \Leftrightarrow a=\frac{2\pi}{9}$.

Soluția este $x=2\cos a=2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Problemă pentru clasa a IX-a

Rezolvați în R^+ ecuația: $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{2^7}+x}}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{2^7}+x}}}}=x$.

Soluție.Ecuația este echivalentă cu

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=x\sqrt{2}.$$

Din $2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}\geq 0$, rezultă $0\leq x\leq 2 \Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{2}\leq 1$.Deoarece există $a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall\ 0\leq\frac{x}{2}\leq 1$, a.î. $\cos a=\frac{x}{2}$, vom folosi substituția $x=2\cos a$.Vom utiliza de asemenea şi formulele: $\sqrt{2+2\cos t}=2\cos\frac{t}{2}$ şi $\sqrt{2-2\cos t}=2\sin\frac{t}{2}$.

Avem

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos a}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{a}{2}}}}}=$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{a}{2}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{a}{4}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{a}{8}}=2\cos\frac{a}{16}.$$

Analog $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=2\sin\frac{a}{16}$.

Ecuația devine :

$$2\cos\frac{a}{16}+2\sin\frac{a}{16}=2\sqrt{2}\cos a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{a}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{a}{16}=\cos a$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{16}\right)=\cos a.$$

Din $a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{16}=a \Leftrightarrow a=\frac{4\pi}{17}$.

Soluția este $x = 2\cos a = 2\cos\frac{4\pi}{17}$.

Problemă pentru clasa a X-a,

Arătați că $\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(97+56\sqrt{3}\right)^n + \left(7+4\sqrt{3}\right)\left(97-56\sqrt{3}\right)^n + 2$, este pătrat perfect (pătratul unui număr natural).

Soluție.Observăm că :
$\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2 = 7\pm 4\sqrt{3}$; $\left(2\pm\sqrt{3}\right)^4 = \left(7\pm 4\sqrt{3}\right)^2 = 97\pm 56\sqrt{3}$; $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$.
Expresia dată devine:

$$\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(97+56\sqrt{3}\right)^n + \left(7+4\sqrt{3}\right)\left(97-56\sqrt{3}\right)^n + 2 =$$
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{4n-2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{4n-2} + 2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^{2n-1} =$$
$$=\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-1}\right]^2.$$

Din $\left(2\pm\sqrt{3}\right)^{2n-1} = 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k}\cdot 2^k \pm \sqrt{3}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k+1}\cdot 2^k$, rezultă :

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k}\cdot 2^{k+2}.$$

Obținem că numărul dat este egal cu $\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k}\cdot 2^{k+2}\right]^2$ .Q.E.D.

Problemă pentru clasa a VII-a sau a VIII-a,

Rezolvați în R ecuația:
$\sqrt{2+4x-2x^2} + \sqrt{6+6x-3x^2} = x^2 - 2x + 6$.

Publicată în Crux Mathematicorum – martie 2009

Soluție. Avem: $\sqrt{2+4x-2x^2} + \sqrt{6+6x-3x^2} = \sqrt{4-2(x-1)^2} + \sqrt{9-3(x-1)^2} \le$

$\le \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \le 5 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 6$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x-1=0$.
Soluția ecuației este $x=1$.

Problemă pentru clasa a VII-a sau a VIII-a

Rezolvați în R ecuația:
$\sqrt{1+6x-3x^2}+\sqrt{7+4x-2x^2}=4x^2-8x+9$.

Publicată in SGMB – mai/2009 (S:E09.201)

Soluție. Avem: $\sqrt{1+6x-3x^2}+\sqrt{7+4x-2x^2}=\sqrt{4-3(x-1)^2}+\sqrt{9-2(x-1)^2}\le$

$\le\sqrt{4}+\sqrt{9}=5\le 5+4(x-1)^2=4x^2-8x+9$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x-1=0$.
Soluția ecuației este $x=1$.

Problemã clasa a XI-a

Fie $x_0 \in R$, solutie pentru ecuatiile: $ax^2 + bx + c = 0, dx^2 + ex + f = 0,$

$2ax + b = 0$ si $2dx + e = 0.$

Sa se calculeze:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{ax^2 + bx + c}{m}\left[\frac{k}{dx^2 + ex + f}\right]$$

unde $[.]$ este partea intrega iar $k, m \in R^*$.

Soluție:

$$Avem: (1) \frac{k}{dx^2 + ex + f} - 1 \triangleleft \left[\frac{k}{dx^2 + ex + f}\right] \leq \frac{k}{dx^2 + ex + f};$$

(din definitia partii intregi). Inmultim relatia (1) cu $\frac{ax^2 + bx + c}{m}$ si obtinem:

$$\frac{k}{m} \cdot \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} - \frac{ax^2 + bx + c}{m} \triangleleft \frac{ax^2 + bx + c}{m}\left[\frac{k}{dx^2 + ex + f}\right] \leq$$

$$\leq \frac{k}{m} \cdot \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f};$$

Tinand cont ca $\frac{ax^2 + bx + c}{m} \to 0$, din teorema clestelui,

conditiile din enunt si teorema lui l - Hospital

avem $l = \lim_{x \to x_0} \frac{k}{m} \cdot \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} = \lim_{x \to x_0} \frac{k}{m} \cdot \frac{2ax + b}{2dx + e} = \frac{ak}{md}.$

Problemã pentru clasa a XI-a

Sã se scrie ecuația dreptei perpendicularei comune dreptelor :

$d_1 : x - 1 = y - 2 = z - 3$, *si* $d_2 : -x - 1 = -y + 2 = z$

Publicată în RIM – nr.XI -2006 (9639) ; Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (10000)

Soluție:

Din ecuatia dreptei $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$, *rezulta* :

vectorul director al dreptei d_1 , $\overrightarrow{v_1}(1,1,1)$ si un punct curent pe dreapta d_1 ,
$M_1(1,2,3)$.

Analog $\overrightarrow{v_2} = (-1,-1,1)$ si $M_2(-1,2,0)$ sunt vectorul director respectiv,
punctul curent al dreptei d_2 .

Rezulta vectorul director al dreptei perpendiculare comuna $d_{p.c}$ este

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Fie P_1, *planul* determinat de dreapta d_1 si $d_{p.c}$ respectiv P_2
planul determinat de dreapta d_2 si $d_{p.c}$.

Atunci cele doua plane au ecuatiile :

$$P_1 : (\vec{r} - \vec{r_1}, \vec{v_1}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z + 3 = 0$$

$$P_2 : (\vec{r} - \vec{r_2}, \overrightarrow{v_2}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0.$$

Ecuatia perpendicularei comune este $d_{p.c} : \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Problemã pentru clasa a X-a sau a XI-a

Sã se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul A(1,-1,1) şi se sprijinã pe
$d_1 : x - 2 = y - 1 = z$ si $d_2 : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Publicată în G.M –nr. 2 / 2006 (25490); Publicată în RIM – nr.XII -2006 (9834); Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (10001)

Soluție:

Probleme rezolvate

Se scriu fascicolele de plane ce contin dreptele d_1 si d_2, *apoi* se intersecteaza si se obtine multimea tuturor dreptelor din spatiu ce se sprijina pe d_1 si d_2, dupa care
se extrage din fascicol dreapta ce contine punctul A.

$P_\lambda : x - y - 1 + \lambda(x - z - 2) = 0$, *fascicolul* de plane ce contine pe d_1

$P\mu : x + y + 1 + \mu(x + z) = 0$, *fascicolul* de plane ce contine pe d_2,

$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - y - 1 + \lambda(x - z - 2) = 0 \\ x + y + 1 + \mu(x + z) = 0 \end{cases}$, *multimea* tuturor dreptelor din spatiu ce se sprijina pe d_1 si pe d_2.

Din $A \in d_{\lambda,\mu} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 1 - 1 + \lambda(1 - 1 - 2) = 0 \\ 1 - 1 + 1 + \mu(1 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}.$

inlocuind pe λ si μ in $d_{\lambda,\mu}$ obtinem ecuatia dreptei cautate

$d : \begin{cases} 3x - 2y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}.$

Problemã pentru clasa a X-a sau a XI-a

Sã se scrie ecuația dreptei d' ,ce se sprijinã pe dreptele $d_1 : \begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}$ si $d_2 : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = 3x + 1 \end{cases}$ si este paralela cu dreapta $d : \frac{x - 3}{2} = \frac{y + 5}{3} = \frac{z - 1}{1}$

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10167) ; Publicată în RIM – nr.XII -2006 (9835)

Solutie:

$\forall M \in d_1 \Rightarrow M(t, 2t, t - 1)$

$\forall P \in d_2 \Rightarrow P(s, s + 1, 3s + 1)$

rezulta $\overrightarrow{MP} = (s - t, s - 2t + 1, 3s - t + 2)$. *Din* enunt $\overrightarrow{MP}$ este coliniar cu $\vec{v}(2,3,1)$

$\Rightarrow \frac{s - t}{2} = \frac{s - 2t + 1}{3} = \frac{3s - t + 2}{1} \Rightarrow s = -\frac{1}{3}$ si $t = \frac{7}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) \Rightarrow d' : \frac{x + \frac{1}{3}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{3} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d' : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x - 6z + 1 = 0 \end{cases}$

Problemã pentru clasa a X-a sau a XI-a

Sã se determine ecuația dreptei ce trece prin proiecția punctului A(1,0,0) pe dreapta $d: x=y=z$ si se sprijina pe dreptele

$$d_1:\begin{cases} x-y-z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases} \text{ si } d_2:\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10168)

Soluție:

Proiecția punctului A pe dreaptã o aflãm intersectând dreapta d: cu planul P:care conține punctul A și este perpendicular pe dreapta d.

$$\Pr_A d = A_0, A_0 = d \cap P, d: x=y=z \Rightarrow \vec{v}(1,1,1)$$

$$P:\left[A(1,0,0);\vec{N}=\vec{v}\right] \Rightarrow P:(x-1)+y+z=0 \Rightarrow \{A_0\}:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x=y=z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y=z=\frac{1}{3} \Rightarrow A_0(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

In continuare consideram fascicolele de plane P_λ si P_μ care contin dreptele d_1 respectiv d_2.

$P_\lambda: x-y-z+\lambda(y-z+1)=0$, $P_\mu: 2x-y+\mu(x-z+1)=0$. Re*zulta* $d_{\lambda,\mu}$ multimea tuturor dreptelor care se sprijina pe d_1 si d_2

$$d_{\lambda,\mu}:\begin{cases} x-y-z+\lambda(y-z-1)=0 \\ 2x-y+\mu(x-z+1)=0 \end{cases} \text{din } A_0 \in d_{\lambda,\mu} \Rightarrow \lambda=-1, \mu=\frac{1}{3} \Rightarrow \text{Ecuatia dreptei cautate este}$$

$$d_{-1,\frac{1}{3}}:\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 7x-3y-z+1=0 \end{cases}.$$

Problemă pentru clasa a XI-a ,

Să se arate că ecuația $a^x = bx^2 + cx + d$ are cel mult trei rădăcini reale $\forall a \succ 1$,b$\in R^+$;c,d$\in R$.

Publicată în G.M. – nr. 6 / 2007 (C: 3180); Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10366)

Soluție.Ne folosim de proprietatea:Între două rădăcini ale funcției avem cel puțin o rădăcină a derivatei.

Fie $f: R \to R$, $f(x)=a^x-bx^2-cx-d$ și presupunem prin reducere la absurd că are 4 rădăcini deci $f''(x)=o$ are cel puțin 2 rădăcini.Dar cum $f''(x)=a^x\ln^2 a-2b=0 \Leftrightarrow a^x=\dfrac{2b}{\ln^2 a}$ are o singură soluție, rezultă că f are cel mult 3 rădăcini.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Se consideră dreptele $:(d): bcx = cay = abz$ $(e): cax = aby = bcz$ şi $(f): abx = bcy = caz.$

Să se demonstreze egalităţile:

$(i): \sin\angle(d,e) = \sin\angle(e,f) = \sin\angle(f,d),$ unde am notat cu $\angle(d,e)$ unghiul dintre dreptele (d) şi (e), respectiv analoagele;

$(ii): \sin\angle((d,e),(e,f)) = \sin\angle((e,f),(f,d)) = \sin\angle((f,d),(d,e))$, unde am notat $\angle((d,e),(e,f))$ unghiul diedru determinat de planele (d,e) şi (e,f), respectiv analoagele.

Soluţie.Observăm că ecuaţiile dreptelor din enunţ pot fi puse sub forma:

$(d): \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},\ (e): \frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{a}$ şi $(f): \frac{x}{c} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$.

Dacă avem dreptele $(d_1): \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ şi $(d_2): \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ unghiul φ format de acestea este dat de formula:

$(1) \cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\varepsilon\sqrt{l_1^{\,2} + m_1^{\,2} + n_1^{\,2}} \cdot \sqrt{l_2^{\,2} + m_2^{\,2} + n_2^{\,2}}}$ unde $\varepsilon \in \{-1,1\}$; semnul ε se datorează faptului că cele două drepte fac între ele patru unghiuri, două ascuţite şi două obtuze(congruente între ele), este deci utilizat pentru a caracteriza toate cele patru unghiuri care sunt formate de două drepte neparalele.Utilizăm formula (1) şi obţinem unghiul $\angle(d,e)$ format de dreptele (d) şi (e) dat de $\cos\angle(d,e) = \frac{ab+bc+ca}{\varepsilon(a^2+b^2+c^2)}$.

Analog se obţine $\cos\angle(e,f) = \frac{ab+bc+ca}{\varepsilon(a^2+b^2+c^2)}$ şi $\cos\angle(f,d) = \frac{ab+bc+ca}{\varepsilon(a^2+b^2+c^2)}$.În continuare se utilizează formula $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ şi rezultă relaţiile (i).

Dacă avem planele $(P_1): A_1x + B_1y + C_1Z + D_1 = 0$ şi $(P_2): A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 = 0$, atunci cosinusurile unghiurilor dintre ele sunt date de formula :

(2) $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\varepsilon\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}$,unde $\varepsilon \in \{-1,1\}$şi este utilizat pentru caracterizarea celor patru unghiuri diedre formate de cele două plane.

Determinăm ecuaţiile celor trei plane date în enunţ:

$(d,e): (ab-c^2)x + (bc-a^2)y + (ac-b^2)z = 0$;

$(e,f): (bc-a^2)x + (ac-b^2)y + (ab-c^2)z = 0$;

$(f,d): (ac-b^2)x + (ab-c^2)y + (bc-a^2)z = 0$.

Notăm: $A = ab-c^2, B = bc-a^2$ şi $C = ac-b^2$ .Folosim formula (2) şi aflăm

$\cos\angle((d,e),(e,f)) = \frac{AB+BC+CA}{\varepsilon(A^2+B^2+C^2)}$, $\cos\angle((e,f),(f,d)) = \frac{AB+BC+CA}{\varepsilon(A^2+B^2+C^2)}$,

$\cos\angle((f,d),(d,e)) = \frac{AB+BC+CA}{\varepsilon(A^2+B^2+C^2)}$ de unde cu formula $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ obţinem relaţiile (2).

Problemã pentru clasa a XI-a

Sa se calculeze:

$$\max_{1\le k\le n} 3^k(n-k+1), unde\ n \in N$$

Publicată în SM – 1 / 2008 (L.27.); Publicată în RIM – nr.XI -2006 (9641) ; Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (9998)

Soluție:

Consideram functia $f(x) = 3^x(n-x+1)\cdot$

Derivata $f'(x) = 3^x\left[(n-x+1)\ln 3 - 1\right]$ se anuleaza in

$x_0 = n+1-\frac{1}{\ln 3}\cdot$ *Avem* $1 < \ln 3 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\ln 3} < 1 \Rightarrow$

$n < x_0 < n+\frac{1}{2} < n+1.$ Re*zulta* urmatorul tabel de variatie :

X	1 n x_0 n+(1/2) n+1
f^l	+++++++++++++++++0---
f	Crescãtoare descrescãtoare

Deoarece $f(n) = 3^n \Rightarrow \max_{1\le k\le n} 3^k(n-k+1) = 3^n\cdot$

Problemã pentru clasa a XI-a

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -b \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot$

Sa se calculeze $A^n\cdot$

Publicată în RMT – nr. 3 / 2005 (XI.174.); Publicată în RIM – nr.XI -2006 (9640) ; Publicată în RIM – nr.XV -2008 (10363)

Soluție:

scriem $A = I_3 + B,$ *unde* $B = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Constatam ca $B^3 = O \Rightarrow B^k = O,$ pentru k ≥ 3.

Folosim formula binomului lui Newton si obtinem :

$A^n = I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2\cdot$

Efectuam calculele si obtinem $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & -b^2 \\ 0 & a^2 & -ab \end{pmatrix}$

si

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & -nb \\ nb & 1+\dfrac{n(n-1)ab}{2} & -\dfrac{n(n-1)b^2}{2} \\ na & \dfrac{n(n-1)a^2}{2} & 1-\dfrac{n(n-1)ab}{2} \end{pmatrix}$$

Problemã pentru clasa a XI-a

Sa se rezolve ecuatia :

$a^x + (a+3)^x = (a+1)^x + (a+2)^x, unde\ a \geq 2\ dat.$

Solutie:

Ecuatia este echivalenta cu $(a+3)^x - (a+2)^x = (a+1)^x - a^x$

Aplicam teorema lui Lagrange functiei

$f(y) = y^x$ pe $[a+2, a+3]$ si pe $[a, a+1]$

si avem : $\exists \theta \in (a+2, a+3)$ a.i $f(a+3) - f(a+2) = f'(\theta) = x\theta^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1)(a+3)^x - (a+2)^x = x\theta^{x-1}$;

$\exists \xi \in (a, a+1)$ a.i $f(a+1) - f(a) = f'(\xi) = x\xi^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2)(a+1)^x - a^x = x\xi^{x-1}$;

Din (1) si (2) ecuatia devine $x\theta^{x-1} = x\xi^{x-1} \Leftrightarrow x(\theta^{x-1} - \xi^{x-1}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$sau\ \theta^{x-1} - \xi^{x-1} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\theta}{\xi}\right)^{x-1} = 1, \dfrac{\theta}{\xi} \rhd 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1.$

Solutiile sunt $x \in \{0,1\}$.

Problemã pentru clasa a XI-a

Sa se rezolve ecuatia :

$(a + a_{n-1})^x + (a + a_{n+2})^x = (a + a_n)^x + (a + a_{n+1})^x, unde\ a > 0\ dat$ si sirul (a_n) este o progresie aritmetica cu termeni pozitivi.

Solutie:

Ecuatia este echivalenta cu

$(\mathrm{a}+\mathrm{a}_{n+2})^{x}-(a+a_n)^x=(a+a_{n+1})^x-(a+a_{n-1})^x$

Aplicam teorema lui Lagrange functiei

$f(y)=y^x$ pe $[\mathrm{a}+a_n,\mathrm{a}+a_{n+2}]$ si pe $[\mathrm{a}+\mathrm{a}_{n-1},\mathrm{a}+a_{n+1}]$

si avem : $\exists\theta\in(\mathrm{a}+\mathrm{a}_n,\mathrm{a}+a_{n+2})$ a.i

$\mathrm{f}(\mathrm{a}+a_{n+2})-\mathrm{f}(\mathrm{a}+\mathrm{a}_n)=(a_{n+2}-\mathrm{a}_n)\mathrm{f}'(\theta)=(a_{n+2}-\mathrm{a}_n)\mathrm{x}\theta^{\mathrm{x-1}}\Rightarrow$

$\Rightarrow(1)(a+a_{n+2})^x-(a+a_n)^x=(a_{n+2}-a_n)x\theta^{x-1};$

$\exists\xi\in(a+a_{n-1},a+a_{n+1})$ a.i

$\mathrm{f}(\mathrm{a}+a_{n+1})-\mathrm{f}(\mathrm{a}+\mathrm{a}_{n-1})=(a_{n+1}-\mathrm{a}_{n-1})\mathrm{f}'(\xi)=(a_{n+1}-\mathrm{a}_{n-1})\mathrm{x}\xi^{\mathrm{x-1}}\Rightarrow$

$\Rightarrow(2)(a+a_{n+1})^x-(a+a_{n-1})^x=(a_{n+1}-a_{n-1})x\xi^{x-1};$

deoarece a_n = *progresie* aritmetica $\Rightarrow$

$\Rightarrow(3)a_{n+2}-a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

Din (1), (2) si (3) ecuatia devine $x\theta^{x-1}=x\xi^{x-1}\Leftrightarrow$

$x(\theta^{x-1}-\xi^{x-1})=0\Leftrightarrow x=0$

sau $\theta^{\mathrm{x-1}}-\xi^{x-1}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{\theta}{\xi}\right)^{x-1}=1,\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Solutiile sunt $x\in\{0,1\}$.

Problemã clasa a XI-a

Fie C(0;1) cercul unitate si $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$
un poligon regulat inscris in C(0;1).

Daca $\mathrm{P}\in$ C(0;1) sa se calculeze : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2}{\min(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|PA_i|^2})}$

Publicată în RIM – nr.X -2005 (9438)

Soluție:

(I) P este unul din varfurile poligonului $A_1A_2\cdots A_n$.

Presupunem $P = A_1$. Se stie ca $|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\cdots+|A_1A_n|^2 = 2nR^2$.

Cum $P = A_1$ si $R = 1 \Rightarrow (1)\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2 = \sum_{k=2}^{n}|A_1A_k|^2 = 2n.$

Din inegalitatea mediilor avem:

$$(|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\cdots+|A_1A_n|^2)\left(\frac{1}{|A_1A_2|^2}+\frac{1}{|A_1A_3|^2}+\cdots+\frac{1}{|A_1A_n|^2}\right)\geq (n-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|A_1A_2|^2}+\frac{1}{|A_1A_3|^2}+\cdots+\frac{1}{|A_1A_n|^2}\geq\frac{(n-1)^2}{2n}\Rightarrow$$

$$(2)\ \min\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|PA_i|^2}\right)=\min\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{|A_1A_k|^2}\right)=\frac{(n-1)^2}{2n}\cdot \text{Din (1) si (2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2}{\min\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|PA_i|^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\frac{(n-1)^2}{2n}}=4.$$

(II) $P\neq A_i, i=\overline{1,n}.$

Se stie ca $(3)\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2 = 2nR^2$. *Cum* $P\in C(0;1)\Rightarrow (4)\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2 = 2n.$

Din inegalitatea mediilor avem:

$$(|PA_1|^2+|PA_2|^2+\cdots+|PA_n|^2)\left(\frac{1}{|PA_1|^2}+\frac{1}{|PA_2|^2}+\cdots+\frac{1}{|PA_n|^2}\right)\geq n^2\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|PA_i|^2}\geq\frac{n^2}{2n}\Rightarrow (5)\ \min\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|PA_i|^2}\right)=\frac{n}{2}$$

$$\textit{Din (4) si (5)}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2}{\min\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|PA_i|^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\frac{n}{2}}=4.$$

Deci $\forall P\in C(0;1)$ limita cautata este egala cu 4.

Problemã clasa a XI-a

Fie $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$. Aratati ca A^n are forma $\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\b_n&d_n&b_n\\c_n&b_n&a_n\end{pmatrix}$, $\forall n\in N^*$ si calculati:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot b_n}{c_n\cdot d_n}.$$

Publicată în GM – nr. 12 / 2006 (25687.) & dată la Olimpada de Matematică Faza Locală – clasa a XI – a , Bucureşti, 2008

Soluție:

Se aplica urmatoarea lema :

Lema : Fie I un inel unitar necomutativ ce contine ca subinel corpul comutativ algebric inchis K.

Fie $\alpha \in$ I un element cu proprietatea ca verifica un polinom $\mathrm{f} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ de grad $\mathrm{p} \geq 1$,

polinom care are in corpul K radacinile $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$

distincte doua cate doua.In aceste conditii exista si sunt unic determinate

elementele $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p \in I$ cu proprietatea $\alpha^{\mathrm{n}} = \lambda_1^{\ n}\beta_1 + \lambda_2^{\ n}\beta_2 + ... + \lambda_p^{\ n}\beta_p$.

Cu notatiile din lema consideram $\mathrm{I} = \mathrm{M}_3(C), K = \{aI_3 | a \in C\}, I_3$ fiind matricea unitate si

$\mathrm{f} = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3)$, *polinomul caracteristic* al matricii A.

Conform Teoremei lui Hamilton - Cayley, matricea A verifica polinomul f.

$$\mathrm{f} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36.$$ Rezolvam ecuatia $\mathrm{f} = 0$ si

obtinem valorile proprii : $\lambda = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2.$

Determinam matricile $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \in M_3(C)$ care sa verifice un sistem de tipul :

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 + A_2 + A_3 = I_3 \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = A \\ \lambda_1^{\ 2} A_1 + \lambda_2^{\ 2} A_2 + \lambda_3^{\ 2} A_3 = A^2 \end{cases}$$. Re*zolvand* sistemul obtinem :

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conform rezultatului lemei vom avea : $\mathrm{A}^{\mathrm{n}} = \lambda_1^{\ n} A_1 + \lambda_2^{\ n} A_2 + \lambda_3^{\ n} A_3 =$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n 2^{n-1} + 3^{n-1} + 6^{n-1} & 3^{n-1}(2^n - 1) & 3^{n-1} + 6^{n-1} - 2^{n-1}(-1)^n \\ 3^{n-1}(2^n - 1) & 3^{n-1} + 3^{n-1}2^{n+1} & 3^{n-1}(2^n - 1) \\ -(-1)^n 2^{n-1} + 3^{n-1} + 6^{n-1} & 3^{n-1}(2^n - 1) & (-1)^n 2^{n-1} + 3^{n-1} + 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

Avem $\mathrm{a}_{\mathrm{n}} = (-1)^n 2^{n-1} + 3^{n-1} + 6^{n-1}, b_n = 3^{n-1}(2^n - 1),$

$c_n = 3^{n-1} + 6^{n-1} - 2^{n-1}(-1)^n, d_n = 3^{n-1} + 3^{n-1}2^{n+1}.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{c_n d_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{6^{n-1}\left[1 + (\frac{3}{6})^{n-1} + (\frac{2}{6})^{n-1}(-1)^n\right]}{6^{n-1}\left[1 + (\frac{3}{6})^{n-1} - (\frac{2}{6})^{n-1}(-1)^n\right]} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}(2^n - 1)}{3^{n-1}(1 + 2^n \cdot 2)} = \frac{1}{2}\cdot$$

Problemã clasa a XI-a

$$Fie \text{ matricea } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 1 & ... & 1 & i \\ i & 1 & i & -1 & -i & ... & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i & -1 & ... & -1 & -i \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ i & -1 & -i & 1 & i & ... & i & 1 \end{pmatrix} \in M_{2006}(C).$$

Sa se calculeze detA.

Soluție:

Probleme rezolvate

Lema1

$$O \text{ matrice de forma } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \text{ se numeste circulant si}$$

$\det A = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2\varepsilon_k + \dots + a_n \varepsilon_k^{n-1})$, unde $\varepsilon_k, k = \overline{0, n-1}$ sunt radacinile de ordinul n ale unitatii.

Demonstrația lemei 1:

Fie ε_k o radacina de ordinul n a unitatii si notam

$\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + \dots + a_n\varepsilon_k^{n-1}$.*Observam* ca

$$\begin{cases} \lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + \dots + a_n\varepsilon_k^{n-1} \\ \varepsilon_k\lambda_k = a_n + a_1\varepsilon_k + \dots + a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_k^{n-1}\lambda_k = a_2 + a_3\varepsilon_k + \dots + a_1\varepsilon_k^{n-1} \end{cases}$$, de aceea λ_k este o valoare proprie

iar $(1, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_k^{n-1})^t$ este vectorul propriu corespunzator.

Deoarece $u^n = 1$ are n radacini distincte obtinem n vectori proprii

distincti si n valori proprii distincte.Rezulta $\det A = \lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + \dots + a_n\varepsilon_k^{n-1})$.

Lema 2

$$\textit{Daca } A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ atunci}$$

$\det A = (1 - x^n)^{n-1}$.

Demonstrația lemei 2:

$$\textit{Din} \text{ lema } 1 \Rightarrow \det A = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + x\varepsilon_k + \dots + x^{n-1}\varepsilon_k^{n-1})$$

Pe de alta parte, observam ca, daca $u^n = 1$, atunci

$$1 + xu + \dots + (xu)^{n-1} = \frac{(xu)^n - 1}{xu - 1} = \frac{x^n - 1}{xu - 1}$$

$$\textit{Astfel } \det A = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^n - 1}{x\varepsilon_k - 1} = \frac{(x^n - 1)^n}{(-1)^n (1 - x^n)} = (1 - x^n)^{n-1}.$$

Soluția problemei

Deoarece A este de forma $\begin{pmatrix} 1 & i & i^2 & i^3 & i^4 & ... & i^{2005} \\ i^{2005} & 1 & i & i^2 & i^3 & ... & i^{2004} \\ i^{2004} & i^{2005} & 1 & i & i^2 & ... & i^{2003} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ i & i^2 & i^3 & i^4 & i^5 & ... & 1 \end{pmatrix}$

Re*zulta*, din Lema 2 pentru $x = i$, $\det A = (1 - i^{2006})^{2005} = 2^{2005}$.

Problemã pentru clasa a XI-a

Sa se determine $a, b \in R$ astfel incat planele

$(P_1): x - y + z - 1 = 0; (P_2): x + y + z + a = 0; (P_3): x + by + az + 1 = 0$

a)*sa aiba* in comun un punct;

b)sa treaca printr - o aceeasi dreapta;

c)sa se intersecteze dupa trei drepte paralele distincte.

Soluție:

a)*Pentru* ca cele trei plane sa aiba in comun un singur punct

este necesar si suficient ca sistemul format cu cele trei ecuatii ale

planelor sa fie compatibil determinat.Prin urmare,

este necesar si suficient

ca determinantul sistemului sa fie diferit de zero.Deci :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = 2a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1, b \in R$$

b)*Pentru* ca cele trei plane sa treaca prin aceeasi dreapta

este necesar si suficient

ca sistemul de ecuatii $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ sa fie

compatibil simplu nedeterminat .

Punand conditia ca rangul matricei acestui sistem

sa fie egal cu rangul matricei extinse

si egal cu doi, obtinem solutiile :

$a = 1$ si $b = 1$.

c)*In* acest caz trebuie ca rangul sistemului $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ sa

fie doi , iar rangul matricei extinse a sistemului sa fie trei.

Astfel fiecare doua dintre plane

se intersecteaza dupa o dreapta care este paralela cu al treilea plan.

Din aceste conditii obtinem

$a = 1$ si $b \neq 1$.

Problemã pentru clasa a XI-a

$$Fie\ A = \begin{pmatrix} 1 & m & -m \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sa se calculeze A^n.

Generalizatã în RMT – nr. 3 / 2005 (XI.174.); G.M. nr. 2 /2006 (25489)

Soluție:

$$Scriem\ A = I_3 + B, unde\ B = \begin{pmatrix} 0 & m & -m \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Constatam ca $B^3 = O \Rightarrow B^k = O,$ pentru k ≥ 3.

Folosim formula binomului lui Newton si obtinem :

$A^n = I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2$.

Efectuam calculele si obtinem $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & -m^2 \\ 0 & m^2 & -m^2 \end{pmatrix}$ si

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & nm & -nm \\ nm & 1 + \frac{n(n-1)m^2}{2} & -\frac{n(n-1)m^2}{2} \\ na & \frac{n(n-1)m^2}{2} & 1 - \frac{n(n-1)m^2}{2} \end{pmatrix}$$

Problemă pentru clasa a XI-a,

Se consideră dreptele $:(a): a_2a_3(x-x_0) = a_3a_1(y-y_0) = a_1a_2(z-z_0),$
$(b): b_2b_3(x-x_0) = b_3b_1(y-y_0) = b_1b_2(z-z_0),$ şi
$(c): c_2c_3(x-x_0) = c_3c_1(y-y_0) = c_1c_2(z-z_0),.$

Să se demonstreze egalitățile: $\frac{\sin\angle((a,b),(b,c))}{\sin\angle(a,c)} = \frac{\sin\angle((b,c),(c,a))}{\sin\angle(a,b)} = \frac{\sin\angle((c,a),(a,b))}{\sin\angle(c,b)}$, unde unde am notat cu $\angle(a,b)$ unghiul dintre dreptele (a) şi (b), şi cu $\angle((a,b),(b,c))$ unghiul diedru determinat de planele (a,b) şi (b,c), respectiv analoagele prin permutări circulare.

Soluție.Ecuațiile celor trei drepte sunt echivalente cu următoarele:
$(a): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3},$ $(b): \frac{x-x_0}{b_1} = \frac{y-y_0}{b_2} = \frac{z-z_0}{b_3}$, şi
$(c): \frac{x-x_0}{c_1} = \frac{y-y_0}{c_2} = \frac{z-z_0}{c_3}.$

Aceste drepte trec prin punctul $O(x_0, y_0, z_0)$.

Metoda 1. (sintetic).Fie $A \in a$ şi $AD \perp (b,c), D \in (b,c), DB \perp b, DC \perp c \xrightarrow{T_{3\perp}} AB \perp b, DC \perp c$.

Avem

$$\begin{cases} \sin \angle B = \sin \angle((a,b),(b,c)) = \dfrac{AD}{AB} \\ \sin \angle C = \sin \angle((a,c),(c,b)) = \dfrac{AD}{AC} \end{cases} \Rightarrow AB \sin \angle((a,b),(b,c)) = AC \sin \angle((a,c),(c,b))$$

$$\Rightarrow OA \sin \angle(a,b) \sin \angle((a,b),(b,c)) = OA \sin \angle(a,c) \sin \angle((a,c),(c,b)) \Rightarrow$$

$\dfrac{\sin \angle((a,b),(b,c))}{\sin \angle(a,c)} = \dfrac{\sin \angle((b,c),(c,a))}{\sin \angle(a,b)}$ şi prin permutări circulare rezultă $\dfrac{\sin \angle((a,b),(b,c))}{\sin \angle(a,c)} = \dfrac{\sin \angle((b,c),(c,a))}{\sin \angle(a,b)} = \dfrac{\sin \angle((c,a),(a,b))}{\sin \angle(c,b)}$.

Metoda 2. (analitic).Se determină uşor ecuaţiile planelor din enunţ, apoi se calculează unghiurile dintre dreptele date şi unghiurile diedre folosind următoarele:

- Dacă avem un plan (P) şi $M(x_0, y_0, z_0) \in (P), \overrightarrow{v_1} = (l_1, m_1, n_1), \overrightarrow{v_2} = (l_2, m_2, n_2)$ vectorii directori ai dreptelor (d_1) şi (d_2) concurente conţinute în planul (P) atunci ecuaţia planului determinat de punctul M şi dreptele (d_1) şi (d_2) este dată de : $(P): \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$
- Dacă avem dreptele $(d_1): \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ şi $(d_2): \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ unghiul φ format de acestea este dat de formula: (1) $\cos \varphi = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\varepsilon \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ unde $\varepsilon \in \{-1,1\}$; semnul ε se datorează faptului că cele două drepte fac între ele patru unghiuri, două ascuţite şi două obtuze(congruente între ele), este deci utilizat pentru a caracteriza toate cele patru unghiuri care sunt formate de două drepte neparalele.
- Dacă avem planele $(P_1): A_1 x + B_1 y + C_1 Z + D_1 = 0$ şi $(P_2): A_2 x + B_2 y + C_2 Z + D_2 = 0$, atunci cosinusurile unghiurilor dintre ele sunt date de formula :

(2) $\cos \varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\varepsilon \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$,unde $\varepsilon \in \{-1,1\}$şi este utilizat pentru caracterizarea celor patru unghiuri diedre formate de cele două plane.

În continuare prin calcul direct se obţine:

$$\frac{\sin \angle((a,b),(b,c))}{\sin \angle(a,c)} = \frac{\sin \angle((b,c),(c,a))}{\sin \angle(a,b)} = \frac{\sin \angle((c,a),(a,b))}{\sin \angle(c,b)}$$

Problemă pentru clasa a XI-a,

Să se calculeze : $\sqrt[4]{527 - \dfrac{1}{527 - \dfrac{1}{527 - \ldots}}}$.

Soluție.Expresia $527-\cfrac{1}{527-\cfrac{1}{527-\ldots}}$ este o fracție continuă infinită şi se defineşte ca limita şirului $x_0=527$, $x_{n+1}=527-\frac{1}{x_n}$.Observăm că şirul este strict descrescător (prin inducție) şi dacă notăm cu x limita sa aceasta satisface $x=527-\frac{1}{x}$, sau rescriind, $x^2-527x+1=0$.Mai mult x este rădăcina pozitivă a ecuației.
Acum cum se calculează radicalul de ordin 4 al rădăcinei x?
Folosim următoarea lemă :"dacă α este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2-bx+1=0$, atunci $\sqrt{\alpha}$ este cea mai mare rădăcină a ecuației $x^2-x\sqrt{b+2}+1=0$ " (se demostrează uşor).Cu această lemă obținem că $\sqrt{x}$ este cea mai mare rădăcină ecuației $x^2-23x+1=0$ şi mai departe $\sqrt{\sqrt{x}}$ este cea mai mare rădăcină a ecuației $x^2-5x+1=0$, adică $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie funcțiile $f,g,h:R\to R$, derivabile cu $f(x_0)=a, g(x_0)=b, h(x_0)=c$ şi $(fg)'(x_0)=c_1$, $(gh)'(x_0)=a_1$, $(hf)'(x_0)=b_1$.Să se calculeze $(fgh)'(x_0)$.

Soluție.Avem $(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'=\frac{(fg)'h+(gh)'f+(hf)'g}{2}$.

Deci $(fgh)'(x_0)=\frac{aa_1+bb_1+cc_1}{2}$.

Publicată în RMT – nr. 1 / 2008 (XI.238.) & SM – 1 / 2008 (L.16.).
Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie $OABC$ un tetraedru tridreptunghic $(OA\perp OB, OB\perp OC, OC\perp OA, OA=OB=OC=1)$.
Considerăm punctele M şi N mijloacele muchiilor AB respectiv BC.Calculați distanța dintre dreptele ON şi CM.Generalizați pentru $OA=OA=OC=a$.
(În legătură cu articolul "Cinci metode pentru determinarea distanței dintre două drepte necoplanare" din G.M nr. 8 / 2007)

Soluție. Alegem reperul Oxyz şi $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.Avem $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ şi $N\ (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.Dreptele ON şi CM sunt necoplanare , iar pentru calculul distanței dintre ele utilizăm relația $d((d_1),(d_2))=\frac{\left|(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{M_1M_2})\right|}{\left\|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right\|}$, unde vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt vectorii directori a dreptelor necoplanare iar punctele M_1 şi M_2 sunt puncte curente pe cele două drepte.În cazul nostru luom $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{ON}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{CM}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ .Se calculează produsul mixt $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}$ şi produsul vectorial

$$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}),\ \left\|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right\|=\frac{\sqrt{11}}{4}.$$

Distanța căutată este $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Pentru $OA=OA=OC=a$ se procedează ca mai sus şi se obține distanța $\frac{a\sqrt{11}}{11}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care O este centrul feței $ABCD$ şi O' este centrul feței $BCC'B'$.Calculați distanța dintre dreptele $B'O$ şi BO'.
(În legătură cu articolul "Cinci metode pentru determinarea distanței dintre două drepte necoplanare" din G.M nr. 8 / 2007)

Soluție. Notăm cu a latura cubului şi alegem reperul Bxyz şi $A(a,0,0)$, $C(0,a,0)$, $B'(0,0,a)$ .Avem $O(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$ şi O' $(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.Dreptele $B'O$ şi BO' sunt necoplanare , iar pentru calculul distanței dintre ele utilizăm relația $d(B'O,BO'))=\frac{\left|(\overrightarrow{B'O},\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{BO})\right|}{\left\|\overrightarrow{B'O}\times\overrightarrow{BO'}\right\|}$.Avem $\overrightarrow{BO'}=(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{B'O}=(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-a)$ şi $\overrightarrow{BO}=(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$.Se calculează produsul mixt $(\overrightarrow{B'O},\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{BO})=\begin{vmatrix}0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -a\\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0\end{vmatrix}=-\frac{a^3}{4}$ şi

produsul vectorial $\overrightarrow{B'O}\times\overrightarrow{BO'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -a\\ 0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2}\end{vmatrix}=(\frac{3a^2}{4},-\frac{a^2}{4},\frac{a^2}{4})$, $\left\|\overrightarrow{B'O}\times\overrightarrow{BO'}\right\|=\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

Distanța căutată este $\frac{a\sqrt{11}}{11}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = a, BC = b, AA' = c$ în care O este centrul feței $ABCD$ și O' este centrul feței $BCC'B'$.Calculați distanța dintre dreptele $B'O$ și BO'.

(În legătură cu articolul "Cinci metode pentru determinarea distanței dintre două drepte necoplanare" din G.M nr. 8 / 2007)

Soluție. Alegem reperul Bxyz și $A(a,0,0)$, $C(0,b,0)$, $B'(0,0,c)$.Avem $O(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)$ și $O'(0,\frac{b}{2},\frac{c}{2})$.Dreptele $B'O$ și BO' sunt necoplanare , iar pentru calculul distanței dintre ele utilizăm relația $d(B'O,BO')) = \frac{\left|(\overrightarrow{B'O},\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{BO})\right|}{\left\|\overrightarrow{B'O}\times\overrightarrow{BO'}\right\|}$.Avem $\overrightarrow{BO'}=(0,\frac{b}{2},\frac{c}{2})$, $\overrightarrow{B'O}=(\frac{a}{2},\frac{b}{2},-c)$ și $\overrightarrow{BO}=(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)$.Se calculează produsul mixt $(\overrightarrow{B'O},\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{BO}) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & -c \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{abc}{4}$ și produsul vectorial

$$\overrightarrow{B'O}\times\overrightarrow{BO'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -a \\ 0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{vmatrix} = (\frac{3bc}{4},-\frac{ac}{4},\frac{ab}{4}),\ \left\|\overrightarrow{B'O}\times\overrightarrow{BO'}\right\| = \frac{\sqrt{9b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{4}.$$

Distanța căutată este $\frac{abc}{\sqrt{9b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2005 & 2006 & 2007 & 2008 \\ 2008 & 2005 & 2006 & 2007 \\ 2007 & 2008 & 2005 & 2006 \\ 2006 & 2007 & 2008 & 2005 \end{pmatrix} \in M_4(R)$.

Calculați $\det A$.

Soluție.O matrice de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ se numeşte *circulant* .Determinantul acestei matrici se calculează mai uşor cu relația (1) $\det A = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot .. \cdot \lambda_{n-1}$, unde λ_k, $k = \overline{0, n-1}$ sunt *valorile proprii* ale matricei A.Dacă notăm cu ε_k, $k = \overline{0, n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unității, atunci, se demonstrează că valorile proprii sunt de tipul (2) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + ... + a_n\varepsilon_k^{n-1}$.

Se obține din (1) şi (2) $\det A = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + ...a_n\varepsilon_k^{n-1})$.

În cazul nostru luom (3) $a_1 = 2005, a_2 = 2006, a_3 = 2007, a_4 = 2008$ şi ε_k, $k = \overline{0,3}$ sunt rădăcinile de ordinul 4 ale unității, respectiv avem (4) $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = -i$.

Din (2),(3) şi (4) rezultă $\det A = -128416$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix} \in M_4(R)$.

Calculați $\det A$.

Soluție.O matrice de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ se numeşte *circulant* .Determinantul acestei matrici se calculează mai uşor cu relația (1) $\det A = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot .. \cdot \lambda_{n-1}$, unde λ_k, $k = \overline{0, n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A.Dacă notăm cu ε_k, $k = \overline{0, n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unității, atunci, se demonstrează că valorile proprii sunt de tipul (2) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + ... + a_n\varepsilon_k^{n-1}$.Se obține din (1) şi (2) $\det A = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + ...a_n\varepsilon_k^{n-1})$.

În cazul nostru luom (3) $a_1 = 1, a_2 = i, a_3 = -1, a_4 = -i$ şi ε_k, $k = \overline{0,3}$ sunt rădăcinile de ordinul 4 ale unității, respectiv avem (4) $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = -i$.

Din (2),(3) şi (4) rezultă $\det A = 0$.

Metoda 2. Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & ... & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x & x^2 & x^3 & ... & 1 \end{pmatrix}$, atunci folosind faptul că

$\det A=\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot..\cdot\lambda_{n-1}=\prod_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+...a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$, şi pe de altă parte , observăm că deoarece $u^n=1$, atunci avem:

$1+xu+...+(xu)^{n-1}=\dfrac{(xu)^n-1}{xu-1}=\dfrac{x^n-1}{xu-1}$ rezultă

$(5)\det A=\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^n-1}{x\varepsilon_k-1}=\dfrac{(x^n-1)^n}{(-1)^n(1-x^n)}=(1-x^n)^{n-1}.$

În cazul nostru $x=i$ şi $n=4$, iar din (5) avem $\det A=(1-i^4)^3$=0.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2008 \\ 2008 & 1 & 2 & ... & 2007 \\ 2007 & 2008 & 1 & ... & 2006 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 3 & 4 & ... & 1 \end{pmatrix}\in M_{2008}(R)$.

Calculaţi $\det A$. **Publicată în SM – nr.2 / 2008**

Soluţie.O matrice de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & ... & a_{n-2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}$ se numeşte circulant .Determinantul acestei matrici se calculează mai uşor cu relaţia $(1)\det A=\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot..\cdot\lambda_{n-1}$, unde λ_k, $k=\overline{0,n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A.Dacă notăm cu ε_k, $k=\overline{0,n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unităţii, atunci, se demonstrează că valorile proprii sunt de tipul $(2)\lambda_k=a_1+a_2\varepsilon_k+...+a_n{\varepsilon_k}^{n-1}$.

Se obţine din (1) şi (2) $\det A=\prod_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+...a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$.

În cazul nostru luom $(3)\,a_1=1,a_2=2,...,a_{2008}=2008$ şi ε_k, $k=\overline{0,2007}$ sunt rădăcinile de ordinul 2008 ale unităţii.Rezultă $\det A=\prod_{k=0}^{2007}(1+2\varepsilon_k+3{\varepsilon_k}^2+...+2008{\varepsilon_k}^{2007})$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 1 & ... & -i \\ -i & 1 & i & -1 & -i & ... & -1 \\ -1 & -i & 1 & i & -1 & ... & i \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ i & -1 & -i & 1 & ... & -i & 1 \end{pmatrix} \in M_{2008}(C)$.

Calculați $\det A$.

Publicată în RIM – nr. IX – 2005 (9248)

Soluție.O matrice de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & ... & a_{n-2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}$ se numeşte circulant .Determinantul acestei matrici se calculează mai uşor cu relația (1) $\det A = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot .. \cdot \lambda_{n-1}$, unde λ_k, $k = \overline{0, n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A.Dacă notăm cu ε_k, $k = \overline{0, n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unității, atunci, se demonstrează că valorile proprii sunt de tipul (2) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + ... + a_n{\varepsilon_k}^{n-1}$.

Se obține din (1) şi (2) $\det A = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + ... a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$.În cazul nostru $\det A = 0$.

Metoda 2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & ... & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x & x^2 & x^3 & ... & 1 \end{pmatrix}$, atunci folosind faptul că $\det A = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot .. \cdot \lambda_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + ... a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$, şi pe de altă parte , observăm că deoarece $u^n = 1$, atunci avem:

$1 + xu + ... + (xu)^{n-1} = \frac{(xu)^n - 1}{xu - 1} = \frac{x^n - 1}{xu - 1}$ rezultă

(5) $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^n - 1}{x\varepsilon_k - 1} = \frac{(x^n - 1)^n}{(-1)^n(1 - x^n)} = (1 - x^n)^{n-1}$.

În cazul nostru $x = i$ şi $n = 2008$, iar din (5) avem $\det A = (1 - i^{2008})^{2007}$=0.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & ... & 2^{2007} \\ 2^{2007} & 1 & 2 & ... & 2^{2006} \\ 2^{2006} & 2^{2007} & 1 & ... & 2^{2005} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2^2 & 2^3 & ... & 1 \end{pmatrix} \in M_{2008}(R)$.

Calculați $\det A$. **Publicată în SM – nr.2 / 2008**

Soluție.O matrice de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & ... & a_{n-2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}$ se numeşte circulant .Determinantul acestei matrici se calculează mai uşor cu relația (1) $\det A = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot .. \cdot \lambda_{n-1}$, unde λ_k, $k = \overline{0, n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A.Dacă notăm cu ε_k, $k = \overline{0, n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unității, atunci, se demonstrează că valorile proprii sunt de tipul (2) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + ... + a_n {\varepsilon_k}^{n-1}$.

Se obține din (1) şi (2) $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2\varepsilon_k + ...a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & ... & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x & x^2 & x^3 & ... & 1 \end{pmatrix}$, atunci folosind faptul că

$\det A = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot .. \cdot \lambda_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2\varepsilon_k + ...a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$, şi pe de altă parte , observăm că deoarece $u^n = 1$, atunci avem:

$1 + xu + ... + (xu)^{n-1} = \frac{(xu)^n - 1}{xu - 1} = \frac{x^n - 1}{xu - 1}$ rezultă

(5) $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^n - 1}{x\varepsilon_k - 1} = \frac{(x^n - 1)^n}{(-1)^n (1 - x^n)} = (1 - x^n)^{n-1}$.

În cazul nostru $x = 2$ şi $n = 2008$, iar din (5) avem $\det A = (1 - 2^{2008})^{2007}$.

Problemă pentru clasa a XI- a,

Fie $K = R$ sau $K = C$ şi $A \in M_n(K)$, o matrice de ordinul n cu elemente din K.
Dacă $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ şi $P(0) \neq 0$, unde $\lambda \in K$ şi I este matricea unitate de ordinul n, să se arate că :

$a)$ A este inversabilă;

$b)$ $\det(A^{-1} - \lambda I) = \dfrac{(-1)^n \lambda^n P(\frac{1}{\lambda})}{P(0)}$.

Soluție.

a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, deci $P(0) = \det A$.Din ipoteză $P(0) \neq 0$ şi atunci $\det A \neq 0$, rezultă A este inversabilă.

b) Observăm că : (1) $A(A^{-1} - \lambda I) = I - \lambda A = -\lambda(A - \frac{1}{\lambda} I)$;

(2) $\det(A(A^{-1} - \lambda I)) = \det A \det(A^{-1} - \lambda I) = P(0)\det(A^{-1} - \lambda I)$.

Pe de altă parte din (1) avem (3) $\det(A(A^{-1} - \lambda I)) = \det(-\lambda(A - \frac{1}{\lambda} I)) = (-\lambda)^n P(\frac{1}{\lambda})$.

Din (2) şi (3) rezultă $P(0)\det(A^{-1}-\lambda I)=(-\lambda)^n P(\frac{1}{\lambda})$, deci

$$\det(A^{-1}-\lambda I)=\frac{(-1)^n\lambda^n P(\frac{1}{\lambda})}{P(0)}.$$

XII. Fie $f:R^3\to R^2$ si $g:R^2\to R^3$ care in bazele canonice au matricile:

$$F=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

a)sa se scrie ecuatiile aplicatiilor liniare f si g;

b)sa se arate ca f este surjectiva ;

c)sa se arate ca g este injectiva;

d)sa se determine o baza in Imf;

e)sa se determine o baza in kerg.

solutie :

a)Y = FX $\Rightarrow$ *ecuatiile* lui f sunt: $\begin{cases}y_1=-2x_1+3x_2-x_3\\ y_2=3x_1-2x_2+3x_3\end{cases}$

$Y=GX\Rightarrow$ *ecuatiile* lui g sunt : $\begin{cases}y_1=3x_1-2x_2\\ y_2=2x_1-x_2\\ y_3=-x_1+x_2\end{cases}$

b) $f:V\to W$ este surjectiva $\Leftrightarrow$ f(V) = W $\Leftrightarrow$ Imf = W

$\Leftrightarrow$ dimImf = dimW, dar :

dimImf = rangf = rangF = 2 iar dimW = dimR^2 = 2 deci f este surjectiva.

c)g este injectiva $\Leftrightarrow$ Kerg = $\{\vec{0}\}$

$\dim Kerg+\dim \operatorname{Im} g=\dim g;\dim\operatorname{Im} g=rangg=rangG=2;$

$\dim g=\dim R^2=2$

rezulta dimKerg = 0, deci Kerg = $\{\vec{0}\}$si g este injectiva.

deci g este injectiva.

d) $\operatorname{Im} f=\{\vec{y}\in R^2:\exists\vec{x}\in R^3 \text{ a.i. f(x) = y}\}=\{(y_1,y_2)=(-2x_1+3x_2-x_3, 3x_1-2x_2+3x_3\},$

pentru obtinerea uei baze in Imf dam valori lui x_1,x_2,x_3.*Pentru* $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,1)$ si $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)$

avem $(y_1,y_2)=(-1,3)$ si $(y_1,y_2)=(3,-2)$

rezulta o baza in Imf este $A=\{(-1,3),(3,-2)\}$

e) $\dim(Kerg)=0$, deci nu avem vectori liniari independenti, rezulta ca nu avem baza.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (10003)

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie funcția $f : D \subset R \to R$, $f(x) = \dfrac{3-x}{5-3x}$, unde x este ales astfel încât să aibă sens $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{de\, n\, ori})(x)$, $\forall n \in N^*$.Să se determine $f_n(x)$.

Soluție.Funcția din enunț este o funcție omografică.Se ştie că prin compunerea unei funcții omografice cu ea însăşi de n ori, se obține tot o funcție omografică.Dacă $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, a,b,c,d \in R$, atunci $f_n(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, problema revine la a calcula A^n, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.În continuare considerăm $A^n = \lambda_1^{\ n} \cdot B + \lambda_1^{\ n} \cdot n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n=1$ şi $n=2$.
Obținem sistemul:
$\begin{cases} 2B + C = A \\ 4B + 4C = A^2 \end{cases}$, care rezolvat dă $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Deci $A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$, adică $f_n(x) = \dfrac{(2-3n)\cdot x + 3n}{-3n \cdot x + 3n + 2}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie şirul $(x_n)_{n \ge 0}$ definit prin $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{4x_n + 1}{2x_n + 3}$, $\forall n \in N^*$.Să se determine termenul general x_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție.Şirul dat este un şir omografic.Se ştie că forma generală este $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 5$. În continuare considerăm $A^n = \lambda_1^{\ n} \cdot B + \lambda_2^{\ n} \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n=1$ şi $n=2$.Se rezolvă sistemul şi se obține $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.Rezultă

$A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2\cdot 5^n & -2^n + 5^n \\ -2^{n+1} + 2\cdot 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix}$, apoi $x_n = \dfrac{(2^n + 2\cdot 5^n)x_0 + (5^n - 2^n)}{(2\cdot 5^n - 2^{n+1})x_0 + (2^{n+1} + 5^n)}$.

De aici se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0},(y_n)_{n\geq 0}$, date prin sistemul de recurenţe:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 5y_n \end{cases}, \ \forall n \geq 0 \text{ cu } x_0 = 2, y_0 = 1.$$

Să se determine termenii generali ai şirurilor $(x_n)_{n\geq 0},(y_n)_{n\geq 0}$.

Soluţie. Sistemul de relaţii de recurenţă se scrie sub formă matricială astfel

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.Dacă dăm lui n valorile $0,1,2,...,n-1$ obţinem:

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Problema revine la a calcula A^n, unde

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.Ecuaţia caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.În continuare considerăm

$A^n = \lambda_1{}^n \cdot B + \lambda_1{}^n \cdot n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$.

Obţinem sistemul:

$\begin{cases} 2B + C = A \\ 4B + 4C = A^2 \end{cases}$, care rezolvat dă $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Deci $A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Termenii generali sunt: $x_n = 2^{n-1}(4-3n)$ şi $y_n = 2^{n-1}(2-3n)$, $\forall n \geq 0$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{-x_n + 3}{-3x_n + 5}$, $\forall n \in N^*$.Să se determine termenul general x_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie.Şirul dat este un şir omografic.Se ştie că forma generală este $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$,

unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^n$.Ecuaţia

caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 2$. În continuare considerăm $A^n = \lambda_1{}^n \cdot B + \lambda_2{}^n \cdot n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$ .Se rezolvă sistemul şi se obţine $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.Rezultă $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$, apoi $x_n = \dfrac{(2-3n)x_0 + 3n}{(-3n)x_0 + 3n + 2}$.

De aici se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie funcția $f : D \subset R \to R$, $f(x) = \dfrac{1+4x}{3+2x}$, unde x este ales astfel încât să aibă sens $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{de\, n\, ori})(x)$, $\forall n \in N^*$.Să se determine $f_n(x)$.

Soluție.Funcția din enunț este o funcție omografică.Se știe că prin compunerea unei funcții omografice cu ea însăşi de n ori, se obține tot o funcție omografică.Dacă $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, a,b,c,d \in R$, atunci $f_n(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, problema revine la a calcula A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.În continuare considerăm $A^n = \lambda_1{}^n \cdot B + \lambda_1{}^n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$.

Se rezolvă sistemul, care dă $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Deci $A^n = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2^n + 2 \cdot 5^n & -2^n + 5^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix}$, adică $f_n(x) = \dfrac{(2^n + 2\cdot 5^n)\cdot x + (5^n - 2^n)}{(2\cdot 5^n - 2^{n+1})\cdot x + (2^{n+1} + 5^n)}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuația : $A^n = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $n \in N^*$.

Soluție.Observăm că $\det(A^n) = 0$.De aici $(\det A)^n = 0$, de unde $\det A = 0$.Utilizând relația Cayley-Hamilton obținem $A^n = (TrA)^{n-1} \cdot A$.Considerăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi obținem sistemul:

$$\begin{cases} (a+d)^{n-1} a = 4 \\ (a+d)^{n-1} b = 8 \\ (a+d)^{n-1} c = 3 \\ (a+d)^{n-1} d = 6 \end{cases}$$

Adunând prima şi ultima ecuație rezultă $(a+d)^n = 10$, de unde $a + d = 10^{\frac{1}{n}}$, iar $(a+d)^{n-1} = 10^{\frac{n-1}{n}}$, apoi înlocuind în sistemul de mai sus obținem:

$$a = \frac{4}{10^{\frac{n-1}{n}}}, b = \frac{8}{10^{\frac{n-1}{n}}}, c = \frac{3}{10^{\frac{n-1}{n}}}, d = \frac{6}{10^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Soluția ecuației este matricea $A = 10^{\frac{1-n}{n}} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.Să se determine şirurile $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$

şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

Soluție.Folosim metoda inducției matematice.
Pentru $n=1$ obținem $x_1 = 1, y_1 = 0$.
Pentru $n=2$,cum $A^2 - TrA \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$, rezultă
$x_2 = TrA = 5, y_2 = -\det A = -4$.
Presupunem acum că $\forall n \geq 1, n \in N \ \exists \ x_n, y_n$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$.Atunci,
obținem $A^{n+1} = A^n A = (x_n A + y_n I_2)A = x_n A^2 + y_n A = = x_n(x_2 A + y_2 I_2) + y_n A =$
$(x_2 x_n + y_n)A + x_n y_2 I_2 = x_{n+1}A + y_{n+1}I_2$,deci
$x_{n+1} = x_2 x_n + y_n = (TrA)x_n + y_n$
(1)
şi $y_{n+1} = y_2 x_n = (-\det A)x_n$
(2)
Rezultă $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 \ \forall n \geq 1, n \in N$.
Din relațiile (1) şi (2) rezultă x_n şi y_n.
Astfel, din (2) rezultă $y_n = -\det A \cdot x_{n-1}$, care înlocuit în (1),
obținem $x_{n+1} - TrA \cdot x_n + \det A \cdot x_{n-1} = 0$ care are ecuația caracteristică
$\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$.
În cazul nostru avem $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ cu radăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.
Şirul x_n este de forma $x_n = \alpha\lambda_1{}^n + \beta\lambda_2{}^n$, unde constantele α şi β se determină din
condițiile $x_1 = 1, x_2 = 5$ .Se rezolvă sistemul şi se obține $\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{3}$.Rezultă
$x_n = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 4^n$, care înlocuit în $y_n = -\det A \cdot x_{n-1}$, ne dă $y_n = \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 4^n$.

În continuare rezultă uşor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -1$.

Problemă pentru clasa a XI-a

Fie funcția $f : D \subset R \to R$, $f(x) = \frac{3-x}{5-3x}$, unde x este ales astfel încât să aibă sens
$f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{de\, n\, ori})(x)$, $\forall n \in N^*$.Să se determine $f_n(x)$.
Soluție.Funcția din enunț este o funcție omografică.Se ştie că prin compunerea unei funcții omografice cu ea însăşi de n ori, se obține tot o funcție omografică.Dacă

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, a,b,c,d\in R$, atunci $f_n(x)=\dfrac{a_n x+b_n}{c_n x+d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, problema revine la a calcula A^n, unde $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2-TrA\cdot\lambda+\det A=0$, adică $\lambda^2-4\lambda+4=0$, cu rădăcinile $\lambda_1=\lambda_2=2$.În continuare considerăm $A^n=\lambda_1{}^n\cdot B+\lambda_1{}^n\cdot n\cdot C$, unde $B,C\in M_2(C)$ se determină pentru $n=1$ şi $n=2$.
Obținem sistemul:
$\begin{cases} 2B+C=A \\ 4B+4C=A^2 \end{cases}$, care rezolvat dă $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Deci $A^n=2^{n-1}\cdot\begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$, adică $f_n(x)=\dfrac{(2-3n)\cdot x+3n}{-3n\cdot x+3n+2}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0=a>0$ şi $x_{n+1}=\dfrac{4x_n+1}{2x_n+3}$, $\forall n\in N^*$.Să se determine termenul general x_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție.Şirul dat este un şir omografic.Se ştie că forma generală este $x_n=\dfrac{a_n x_0+b_n}{c_n x_0+d_n}$,

unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2-7\lambda+10=0$ cu rădăcinile $\lambda_1=2$ şi $\lambda_2=5$. În continuare considerăm $A^n=\lambda_1{}^n\cdot B+\lambda_2{}^n\cdot C$, unde $B,C\in M_2(C)$ se determină pentru $n=1$ şi $n=2$.Se rezolvă sistemul şi se obține $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.Rezultă

$A^n=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2\cdot 5^n & -2^n+5^n \\ -2^{n+1}+2\cdot 5^n & 2^{n+1}+5^n \end{pmatrix}$, apoi $x_n=\dfrac{\left(2^n+2\cdot 5^n\right)x_0+\left(5^n-2^n\right)}{\left(2\cdot 5^n-2^{n+1}\right)x_0+(2^{n+1}+5^n)}$.
De aici se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{-x_n + 3}{-3x_n + 5}$, $\forall n \in N^*$.Să se determine termenul general x_n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție.Şirul dat este un şir omografic.Se ştie că forma generală este $x_n = \dfrac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$,

unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^n$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 2$. În continuare considerăm $A^n = \lambda_1{}^n \cdot B + \lambda_2{}^n \cdot n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$.Se rezolvă sistemul şi se obține $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.Rezultă $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$, apoi $x_n = \dfrac{(2-3n)x_0 + 3n}{(-3n)x_0 + 3n + 2}$.

De aici se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie funcția $f : D \subset R \to R$, $f(x) = \dfrac{1+4x}{3+2x}$, unde x este ales astfel încât să aibă sens $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{de\, n\, ori})(x)$, $\forall n \in N^*$.Să se determine $f_n(x)$.

Soluție.Funcția din enunț este o funcție omografică.Se ştie că prin compunerea unei funcții omografice cu ea însăşi de n ori, se obține tot o funcție omografică.Dacă $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in R$, atunci $f_n(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, problema revine la a calcula A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.În continuare considerăm $A^n = \lambda_1{}^n \cdot B + \lambda_1{}^n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$.

Se rezolvă sistemul, care dă $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Deci $A^n = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2^n + 2 \cdot 5^n & -2^n + 5^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix}$, adică $f_n(x) = \dfrac{(2^n + 2 \cdot 5^n) \cdot x + (5^n - 2^n)}{(2 \cdot 5^n - 2^{n+1}) \cdot x + (2^{n+1} + 5^n)}$.

Problemă pentru clasa a XI-a

Fie şirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$, date prin sistemul de recurențe:

$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 5y_n \end{cases}$, $\forall n \geq 0$ cu $x_0 = 2, y_0 = 1$.

Să se determine termenii generali ai şirurilor $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$.

Soluție. Sistemul de relații de recurență se scrie sub formă matricială astfel
$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.Dacă dăm lui n valorile $0,1,2,...,n-1$ obținem:
$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Problema revine la a calcula A^n, unde
$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică
$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.În continuare considerăm
$A^n = \lambda_1^{\ n} \cdot B + \lambda_1^{\ n} \cdot n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$.
Obținem sistemul:

$\begin{cases} 2B + C = A \\ 4B + 4C = A^2 \end{cases}$, care rezolvat dă $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Deci $A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Termenii generali sunt: $x_n = 2^{n-1}(4-3n)$ şi $y_n = 2^{n-1}(2-3n), \forall n \geq 0$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.Să se determine şirurile $(x_n)_{n\geq 1},(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$

şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$.

Soluție.Folosim metoda inducției matematice.
Pentru $n=1$ obținem $x_1=1, y_1=0$.
Pentru $n=2$,cum $A^2 - TrA\cdot A + \det A\cdot I_2 = O_2$, rezultă
$x_2 = TrA = 5, y_2 = -\det A = -4$.
Presupunem acum că $\forall n\geq 1, n\in N\ \exists\ x_n, y_n$ astfel încât $A^n = x_n\cdot A + y_n\cdot I_2$.Atunci,
obținem $A^{n+1} = A^n A = (x_n A + y_n I_2)A = x_n A^2 + y_n A = = x_n(x_2 A + y_2 I_2) + y_n A =$
$(x_2 x_n + y_n)A + x_n y_2 I_2 = x_{n+1}A + y_{n+1}I_2$,deci
$x_{n+1} = x_2 x_n + y_n = (TrA)x_n + y_n$
(1)
şi $y_{n+1} = y_2 x_n = (-\det A)x_n$
(2)
Rezultă $A^n = x_n\cdot A + y_n\cdot I_2\ \forall n\geq 1, n\in N$.
Din relațiile (1) şi (2) rezultă x_n şi y_n.
Astfel, din (2) rezultă $y_n = -\det A\cdot x_{n-1}$, care înlocuit în (1),
obținem $x_{n+1} - TrA\cdot x_n + \det A\cdot x_{n-1} = 0$ care are ecuația caracteristică
$\lambda^2 - TrA\cdot\lambda + \det A = 0$.
În cazul nostru avem $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ cu radăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.
Şirul x_n este de forma $x_n = \alpha\lambda_1{}^n + \beta\lambda_2{}^n$, unde constantele α şi β se determină din
condițiile $x_1 = 1, x_2 = 5$ .Se rezolvă sistemul şi se obține $\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{3}$.Rezultă
$x_n = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 4^n$, care înlocuit în $y_n = -\det A\cdot x_{n-1}$, ne dă $y_n = \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 4^n$.

În continuare rezultă uşor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = -1$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuația : $A^n = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $n \in N^*$.

Soluție.Observăm că $\det(A^n) = 0$.De aici $(\det A)^n = 0$, de unde $\det A = 0$.Utilizând relația Cayley-Hamilton obținem $A^n = (TrA)^{n-1} \cdot A$.Considerăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi obținem sistemul:

$$\begin{cases} (a+d)^{n-1} a = 4 \\ (a+d)^{n-1} b = 8 \\ (a+d)^{n-1} c = 3 \\ (a+d)^{n-1} d = 6 \end{cases}$$

Adunând prima şi ultima ecuație rezultă $(a+d)^n = 10$, de unde $a + d = 10^{\frac{1}{n}}$, iar $(a+d)^{n-1} = 10^{\frac{n-1}{n}}$, apoi înlocuind în sistemul de mai sus obținem:

$$a = \frac{4}{10^{\frac{n-1}{n}}}, b = \frac{8}{10^{\frac{n-1}{n}}}, c = \frac{3}{10^{\frac{n-1}{n}}}, d = \frac{6}{10^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Soluția ecuației este matricea $A = 10^{\frac{1-n}{n}} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Problemă pentru clasa a XI-a,

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine şirurile $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A + z_n \cdot I_3, \forall n \in N^*$.

Soluție.Procedăm prin inducție : pentru $n=1$, relația este adevărată
($x_1=0, y_1=1, z_1=0$);
pentru $n=2$, relația este de asemenea adevărată($x_2=1, y_2=0, z_2=0$);
pentru $n=3$, ținând seama de ecuația caracteristică
$A^3-\sigma_1 A^2+\sigma_2 A-\sigma_3 I_3=O_3$
(1)
($\sigma_1=TrA, \sigma_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \sigma_3=\det A$), avem
$x_3=1, y_3=1, z_3=-1$.
Presupunem că $A^k=x_k\cdot A^2+y_k\cdot A+z_k\cdot I_3$ este adevărată pentru $k\geq 3$ .Atunci avem:
$A^{k+1}=A^kA=(x_k\cdot A^2+y_k\cdot A+z_k\cdot I_3)A=(x_3x_k+y_k)A^2+(y_3x_k+z_k)A+z_3x_kI_3$.

Notăm $\begin{cases} x_{k+1}=x_3x_k+y_k \\ y_{k+1}=y_3x_k+z_k \\ z_{k+1}=z_3x_k \end{cases}$,
(2)
şi obţinem $A^{k+1}=x_{k+1}\cdot A^2+y_{k+1}\cdot A+z_{k+1}\cdot I_3$, deci relația este adevărată $\forall n\in N^*$.Din (2) rezultă relația de recurență $x_{n+1}=x_3x_n+y_3x_{n-1}+z_3x_{n-2}, n\geq 3$, căreia i se asociază ecuația caracteristică $r^3=x_3r^2+y_3r+z_3$, care este totuna cu ecuația caracteristică
$\lambda^3-\sigma_1\lambda^2+\sigma_2\lambda-\sigma_3=0$.

În cazul nostru avem $r^3=r^2+r-1$, de unde $r_1=1, r_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ şi
$x_n=c_1{}^n r_1{}^n+c_2{}^n r_2{}^n+c_3{}^n r_3{}^n$.
Din condițiile inițiale $x_1=0, x_2=1, x_3=1$ se determină constantele
$c_1=0, c_2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}, c_3=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

de unde $x_n=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Din relațiile (2) rezultă imediat $y_n=\dfrac{3\sqrt{5}-5}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\dfrac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$,

respectiv $z_n=\dfrac{\sqrt{5}-5}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{\sqrt{5}+5}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

Problema pentru clasa a XII-a

Se considera functia $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\{x\}+1}{x}, \{x\}\le \dfrac{1}{3+n}\\ \dfrac{1-\{x\}}{x}, \{x\}>\dfrac{1}{3+n}\end{cases}$

unde $\{x\}$ este partea fractionara a numarului real x si $n\in N$.

Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{5+n}}^{\frac{1}{2+n}} f(x)dx$.

Soluție:

Este suficient sa consideram $x\in\left[\dfrac{1}{5+n},\dfrac{1}{2+n}\right]$.

In acest caz avem $\{x\}=x$ si deci

pentru $x\in\left[\dfrac{1}{5+n},\dfrac{1}{3+n}\right], f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

Pentru $x\in(\dfrac{1}{3+n},1)$ avem $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$ si deci

$$\int_{\frac{1}{5+n}}^{\frac{1}{2+n}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{5+n}}^{\frac{1}{3+n}}\frac{x+1}{x}dx+\int_{\frac{1}{3+n}}^{\frac{1}{2+n}}\frac{1-x}{x}dx=\frac{n-1}{(n+2)(n+3)(n+5)}+\ln\frac{n+5}{n+2}\cdot$$

Deci limita cautata este zero.

XII.Se considera functia $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\begin{cases}\frac{\{x\}-1}{x}, \{x\}\le\frac{1}{3n}\\ \frac{\{x\}+1}{x}, \{x\}\rhd\frac{1}{3n}\end{cases}$

unde $\{x\}$ este partea fractionara a numarului real x si $n\in N^*$.

Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{5n}}^{\frac{1}{2n}} f(x)dx\right)$.

Publicată în RIM – nr.XI -2006 (9646) ; Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (10002)

Soluție:

Este suficient sa consideram $x\in\left[\frac{1}{5n},\frac{1}{2n}\right]$.

In acest caz avem $\{x\}=x$ si deci

pentru $x\in\left[\frac{1}{5n},\frac{1}{3n}\right], f(x)=\frac{x-1}{x}$.

Pentru $x\in(\frac{1}{3n},1)$ avem $f(x)=\frac{x+1}{x}$ si deci

$$\int_{\frac{1}{5n}}^{\frac{1}{2n}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{5n}}^{\frac{1}{3n}}\frac{x-1}{x}dx+\int_{\frac{1}{3n}}^{\frac{1}{2n}}\frac{x+1}{x}dx=\frac{3}{10n}+\ln\frac{9}{10}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{5n}}^{\frac{1}{2n}} f(x)dx\right)=\ln\frac{9}{10}\cdot$$

Problema pentru clasa a XII-a

Sã se calculeze :

$$\int_1^{2006} arctg\left[\frac{2007-x-arctg(2007-x)}{x-arctgx}\right]dx$$
.

Publicată în RIM – nr.XIII -2007 (10004)

Soluție;

Facem schimbarea de variabila 2007 - $x=t$

$$(1) I=\int_1^{2006} arctg\left[\frac{2007-x-arctg(2007-x)}{x-arctgx}\right]dx=$$

$$=-\int_{2006}^{1}\left[\frac{t-arctg}{2007-t-arctg(2007-t)}\right]dt=$$

$$= \int_1^{2006} arctg\left[\frac{x - arctgx}{2007 - x - arctg(2007 - x)}\right]dx.$$

$Notam \dfrac{2007 - x - arctg(2007 - x)}{x - arctgx} = y$ si $f(x) = x - arctgx.$

Cum $f(0) = 0$ si $f'(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2} \triangleright 0, rezulta$ ca $f(x) \triangleright 0\ \forall x \triangleright 0.$

Prin urmare $x - arctgx \triangleright 0$ si $2007 - x - arctg(2007 - x) \triangleright 0,$
$\forall x \in [1,2006].$

Deci $y \triangleright 0, cum\ arctgy + arctg\dfrac{1}{y} = \dfrac{\pi}{2}, \forall y \triangleright 0$

si integrand pe $[1,2006]$ avem:

$$(2) \int_1^{2006} arctgydx + \int_1^{2006} arctg\frac{1}{y}dx = \int_1^{2006} \frac{\pi}{2}dx.$$

Din (1) si (2) avem: $2I = \dfrac{\pi}{2} \cdot 2005 \Rightarrow I = \dfrac{2005\pi}{4}.$

Problemã pentru clasa a XII-a,

Sã se calculeze:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{(1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 2x)}dx$$

Publicată în G.M. – seria A – 4 / 2007 (pg. 316); G.M. – seria B – nr. 4 / 2007 (25775); Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10176)

Soluție:

(1) Functia $f:[a-r,a+r]\to R$ se numeste a - para,

daca $f(a+x)=f(a-x), \forall x\in R$ cu $|x|\le r$;

respectiv a - impara, daca $f(a+x)=-f(a-x)\ \forall x\in R$ cu $|x|\le r$.

(2)Daca f este continua, atunci

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx=\begin{cases}2\cdot\int_a^{a+r} f(x)dx, \text{ daca } f \text{ este } a-para\\ 0, \text{ daca } f \text{ este a - impara}\end{cases}$$

(3) Produsul(catul) a doua functii de a - paritati diferite este o functie a - impara si produsul(catul) a doua functii de aceeasi a - paritate este o functie a - para.

Fie $f,g:[0,2\pi]\to \mathrm{R}, f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x}, \mathrm{g}(x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$.

Se observa ca $f(\pi-x)=f(\pi+x)$, adica este π - para

si $g(\pi-x)=-g(\pi+x)$ adica este π - impara.

Functia $h:[0,2\pi]\to R, h(x)=f(x)\cdot g(x)$ este conform (3) π - impara si conform (2) avem:

$$\int_0^{2\pi} h(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot\cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)}dx=0.$$

Problemã pentru clasa a XII-a,

Sã se calculeze:

$$\int_{-2007}^{2007}\frac{x^{2008}}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x}+1}dx$$

Publicată în RMT – nr. 1 / 2007 (XII.211.); Publicată în G.M. – seria A – 4 / 2007 (pg. 316); Publicată în RIM – nr.XIV -2007 (10175)

soluție:

Notam (1) $f(x)=x^{2008}$, $g(x)=\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x$ si $h(x)=\frac{1}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x}+1}$.

Se observa imediat ca (2) f este continua si para, g este continua si impara iar $h(x)+h(-x)=1$.

Rezulta (3) $I\overset{(not)}{=}\int_{-2007}^{2007}\frac{x^{2008}}{e^{\sum_{k=1}^{n} sh^{2k-1}x}+1}dx\overset{(1)}{=}\int_{-2007}^{2007} f(x)h(x)dx$

Se stie $(*)\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, daca\ f \text{ este impara}\\ 2\int_0^a f(x)dx, daca\ f \text{ este para}\end{cases}$

si ca o functie arbitrara(care nu este nici para nici impara) se poate scrie ca o suma de doua functii una para si alta impara;

astfel (4) $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\mathrm{h}_1(x)+h_2(x)$, unde $\mathrm{h}_1(x)=\frac{h(x)+h(-x)}{2}=para$

si $\mathrm{h}_2(x)=\frac{h(x)-h(-x)}{2}=impara$

În continuare utilizãm faptul cã produsul(câtul) a douã funcții de aceeşi paritate este o funcție parã şi respectiv produsul(câtul) a douã funcții de paritãți diferite este o funcție imparã şi obținem:

$$(5)\mathrm{I} = \int_{-2007}^{2007} f(x)(h_1(x)+h_2(x))dx \overset{(*)}{=} \int_{-2007}^{2007} f(x)h_1(x)dx \overset{(*)\,\mathrm{si}\,(2)}{=}$$

$$= \int_{0}^{2007} f(x)dx = \frac{2007^{2009}}{2009}$$

Problemă pentru clasa a XII-a,

Să se calculeze : $\int_{a}^{a+2} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(a+2-x)}}dx$, unde $a \in N^*$ fixat.

Publicată în SM – 1 / 2008 (L.22.)

Soluție.Funcția $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(a+2-x)}}$ este nemărginită în punctele $x = a$ şi $x = a+2$.

Atunci avem

$$\int_{a}^{a+2} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(a+2-x)}}dx = \int_{a}^{a+2} \frac{1}{\sqrt{1-(x-a-1)^2}}dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \int_{a+\varepsilon}^{a+2-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-(x-a-1)^2}}dx =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \arcsin(x-a-1)\Big|_{a+\varepsilon}^{a+2-\delta} == \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}} \left[\arcsin(1-\delta) - \arcsin(\varepsilon-1)\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Problemă pentru clasa a XII-a,

Calculați : $\int_{-1}^{1} \frac{2x^{1004} + x^{3014} + x^{2008}\sin x^{2007}}{1+x^{2010}}dx$.

Publicată în SM – nr. 1 / 2008 (L.29.)

Soluție. Termenul $\frac{x^{2008}\sin x^{2007}}{1+x^{2010}}$ este impar în x, aşa că $\int_{-1}^{1} \frac{x^{2008}\sin x^{2007}}{1+x^{2010}}dx = 0$.

Mai departe facem substituția $x^{1005} = y \Rightarrow 1005x^{1004}dx = dy$ şi calculăm

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x^{1004}+x^{3014}}{1+x^{2010}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^{1004}(2+x^{2010})}{1+x^{2010}}dx = \frac{1}{1005}\int_{-1}^{1} \frac{2+y^2}{1+y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{1005}\int_{-1}^{1}(1+\frac{1}{1+y^2})dy = \frac{2}{1005}\int_{0}^{1}(1+\frac{1}{1+y^2})dy =$$

$$= \frac{2}{1005}(1+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+y^2}dy) = \frac{2}{1005}(1+arctg1) = \frac{2}{1005}(1+\frac{\pi}{4}).$$

Vezi G.M. nr. 1 / 2005 (O.G: 403); G.M. nr. 4 / 2003 (24892)

Problemă pentru gimnaziu sau clasa a XII-a ,

Fie $N = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2008 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2007$ .Arătaţi că 2009 divide pe N .

Publicată în GMB – 4 / 2009 (C.O:5019)

Soluţie 1. (clasa a XII-a)

$2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2008 \equiv \left[(-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot ...\cdot(-3)\cdot(-1)\right]\mathrm{mod}(2009)$
$\equiv \left(1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2007\right)\mathrm{mod}(2009)$.
Rezultă $N \equiv 0\,\mathrm{mod}(2009)$ .Q.E.D.

Soluţie 2.(gimnaziu).Generalizare.
Notăm $A = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)$, $B = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2k)$, $C = 2k+1$.
Observăm că
$A = (C-2k)(C-(2k-2))\cdot ...\cdot(C-2) = M_C + \left(-1\right)^k \cdot 2\cdot 4\cdot ...\cdot(2k) = M_C + (-1)^k\cdot B$.
Rezultă $N = -M_C + (1+(-1)^{k+1})\cdot B$.
Acum luom $k = 1004$ şi rezultă $2009 | N$ .Q.E.D.

Mayhem Solutions

M 345. *Proposed by John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB.*

The area of isosceles ΔABC is $q\sqrt{15}$ .Given that $AB = 2BC,$ express the perimeter of ΔABC in terms of q .

Solution by Neculai Stanciu, High School "Saint Sava", Berca, Romania.

Obviously $q > 0$.
We have two cases.

1. **Case.** $AB = AC > BC$ **.**

$AB = AC = 2a,\ \ BC = a$**, and the perimeter is** $P = 5a$ **.**

With Heron's formula we have $S = \sqrt{\frac{5a}{2}\cdot(\frac{a}{2})\cdot(\frac{a}{2})\cdot(\frac{3a}{2})} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4} \overset{thehypothesis}{=} q\sqrt{15}$ **.**

Results $a = 2\sqrt{q}$ **and the perimeter** $P = 10\sqrt{q}$ **.**

2. **Case.** $AC = BC = a < AB = 2a$ **.**

We do in the same way as 1. Case, and obtain $P = 4a,$
$S = \sqrt{2a\cdot(a)\cdot(a)\cdot(0)} = 0 \overset{thehypothesis}{=} q\sqrt{15}$ **.False.**

In conclusion we have the solutions $P = 10\sqrt{q}$

M 349. *Proposed by the Mayhem Staff.*

(a) Find all ordered pairs of integers (x,y) with $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$.

(b) How many ordered pairs of integers (x,y) are there with $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1200}$?

Solution by Neculai Stanciu, High School "Saint Sava", Berca, Romania

(a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5y+5x=xy \Leftrightarrow 5y=x(y-5) \Leftrightarrow x=\frac{5y}{y-5}$

$$x=\frac{5y}{y-5}\in Z \Rightarrow \begin{cases} y-5 \mid 5y \\ y-5 \mid y-5 \overset{\times(-5)}{\Rightarrow} y-5 \mid -5y+25 \end{cases} \Rightarrow y-5 \mid 5y-5y+25 \Rightarrow y-5 \mid 25$$

$\Rightarrow y-5\in D_{25}=\{\pm 1,\pm 5,\pm 25\} \Rightarrow (1)\, y\in\{6,10,30,4,0,-20\}$.

$x=\frac{5y}{y-5} \Rightarrow (y,x)\in\{(6,30),(10,10),(30,6),(4,-20),(0,0),(-20,4)\}$.

The pair $(0,0)$ is not a solution.So he have 5(five) solutions $(y,x)\in\{(6,30),(10,10),(30,6),(4,-20),(-20,4)\}$.

(b) We do in the same way as (a) point .

We get $y-1200 \mid (1200)^2$. $(1200)^2=2^8\cdot 3^2\cdot 5^4$, so he have (8+1)(2+1)(4+1)=$9\cdot 3\cdot 5$ naturals divisors and $2\cdot(9\cdot 3\cdot 5)=270$ integers divisors of $(1200)^2$.

If you eliminate the solution (0,0) there are so, 269 pairs of integers (x,y) are there with $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1200}$.

Mayhem Solutions

M 357. *Proposed by Mayhem Staff.*

Determine all real numnbers x that satisfay $3^{2x+2}+3=3^x+3^{x+3}$.

Solution by Neculai Stanciu, High School "Saint Sava", Berca, Romania.

$3^{2x+2}+3=3^x+3^{x+3} \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2\cdot 9+3=3^x+3^x\cdot 27$, we denoted by $3^x=t$, and results $9t^2-28t+3=0$.

$\Delta=28^2-4\cdot 3\cdot 9=676$, $t_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{676}}{18}=\frac{28\pm 26}{18}$, $t_1=3$, $t_2=\frac{1}{9}$.

We return to the substitution and obtain $x_1=3,\ x_2=-2$.

$x\in\{-2,3\}$.

Mayhem Solutions

M 357. *Proposed by George Tsapakides, Agrinio, Greece.*
Let a, b and c be positive real numbers.Prove that
$ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ca(c+a-b)\geq 3abc.$

Solution by Neculai Stanciu, High School "Saint Sava", Berca, Romania.
We use the Theorem: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, $\forall x, y \geq 0$.

Proof. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ .Q.E.D.
We divide the equation $ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ca(c+a-b)\geq 3abc$, with abc,
and obtain $\frac{a+b-c}{c}+\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}\geq 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1\geq 2+2+2-3=3$ .Q.E.D.

Mayhem Solutions

M 357. *Proposed by Mayhem Staff.*
Solution by Neculai Stanciu, High School "Saint Sava", Berca, Romania.

We denoted by: $C =$ circle,
$DE \cap C = P, EF \cap C = N, FG \cap C = M, GD \cap C = Q, GQ = GM = x$,
$H = \Pr_{GF} D$, $GH = x-1, GD = x+1, DH = 4$.
$GH^2 + DH^2 = GD^2 \Rightarrow x = 4$.
$EF = 2 \cdot radius = 4$.
$GF = GH + HF = 6$
Area $DEFG = \frac{(DE+GF)\cdot EF}{2} = 18$

Neculai STANCIU (CV)
Director
Profesor de matematicã

Studii
Master în management educațional şi comunicare instituționalã, SNSPA, Bucureşti (2005 – 2007)
Licențiat în matematicã, Universitatea Bucureşti (1992 – 1998)
Licențiat al Facultãții de Tehnologia Construcțiilor de Maşini, Universitatea Tehnicã ''Gh. Asachi'' Iaşi (1987 – 1992)
Cursuri Postuniversitare pentru profesionalizarea pedagogicã a absolvenților de învãțãmânt superior, Universitatea Politehnicã Bucureşti, (1994)

Experiență profesională
Titular la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzãu
Lider de sindicat la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzãu (2004 –2005)
Director adjunct la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzãu (2005)
Director la Grupul Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava '' , Berca, Buzãu (2005 - 2008)

Lucrări publicate

Reflecții Metodice şi Psihopedagogice, Editura Casa Corpului Didactic ''I. Gh. Dumitraşcu'', Buzău, 2005 (coautor)
Matematicã de vacanțã, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2006 (coautor)
Monografie Zona – Berca – Buzău, Editura Casa Corpului Didactic ''I. Gh. Dumitraşcu'', Buzău, 2006 (coautor)
Matematică gimnaziu & liceu, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2007
Elemente de Management Educațional, Editura ''Rafet'', Rm. Sãrat, 2007 (coautor)
Peste 100 de probleme şi comunicãri ştiințifice
Peste 30 de articole de pedagogie şi metodicã

Altele

Membru în Biroul de conducere al Societãții de Ştiințe Matematice din România, filiala Râmnicu Sãrat
Directorul revistei de cultură matematică pentu tineret „Sclipirea Minții”

CUPRINS

Moto:

„Conştiinţa datoriei împlinite prelungeşte viaţa”