Laura Radu

Minime şi maxime în matematica elementară

Ploieşti
2013

MINIME ŞI MAXIME ÎN MATEMATICA ELEMENTARĂ

(EDITIE ONLINE, FORMAT PDF, 2013)

Autor: LAURA RADU

ISBN 978-973-0-14524-3

Site web: www.mateinfo.ro

CUPRINS

INTRODUCERE

„A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieşire dintr-o dificultate, înseamnă a găsi o cale de a ocoli un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul districtiv al speciei umane.”

(G. Polya)

Învăţarea matematicii exersează gândirea , antrenează capacitatea de organizare logică a ideilor , întăreşte atenţia şi măreşte puterea de concentrare în intensitate şi durată , antrenează memoria logică , dezvoltă un ascuţit simţ critic constructiv şi gustul pentru obiectivitate şi precizie .

Studiul matematicii urmăreşte să contribuie la formarea şi dezvoltarea capacităţii elevilor de a reflecta asupra lumii, de a formula şi rezolva probleme pe baza relaţionării cunoştinţelor din diferite domenii, precum şi la înzestrarea cu un set de competenţe menite să asigure o integrare profesională optimă .

Se ştie că nu se poate înţelege, învăţa şi consolida matematica numai prin însuşirea unor cunoştinţe teoretice, fără aplicaţii ale acestora. Teoria se fixează şi se aprofundează numai prin rezolvarea unui număr cât mai mare de exerciţii şi probleme . Aprofundarea cunoştinţelor de matematică presupune şi demonstraţii, folosirea teoremelor învăţate în soluţionarea unor probleme cu caracter practic.

Problemele de maxim şi minim geometric oferă soluţii practice în multe împrejurări: în construcţii, în legătură cu economiile de material şi de muncă, la reducerea costului lucrărilor, la trasări de drumuri, căi ferate, etc.

Lucrarea de față prezintă într-o manieră accesibilă, simplificată dar riguroasă din punct de vedere științific, diferite metode şi procedee prin care pot fi soluționate problemele de minim şi maxim. Lucrarea poate fi privită ca un material util elevilor deoarece adună laolaltă metode algebrice, de analiză şi de geometrie în găsirea unor soluții optime, cu aplicații în diferite domenii.

Trebuie remarcată forța metodelor analizei matematice la rezolvarea unor probleme de algebră şi geometrie, a căror rezolvare nu este întotdeauna posibilă dacă sunt aplicate doar metodele algebrei şi geometriei elementare.

Lucrarea este structurată pe trei capitole.

Capitolul I se referă la minime şi maxime în algebră şi cuprinde noțiuni despre intervale, mulțimi şi şiruri mărginite şi nemărginite, teoreme de mărginire ale acestora, inegalități remarcabile în algebră, valori extreme ale funcțiilor elementare şi câteva probleme rezolvate referitoare la aceste noțiuni. Cu ajutorul inegalităților remarcabile prezentate, se pot determina anumite valori minime sau maxime a unor expresii care depind de două sau mai multe variabile reale, sau se pot demonstra alte inegalități care la rândul lor prin particularizare ne oferă anumite valori extreme necesare.

Capitolul II abordează noțiunile de valori extreme în analiza matematică şi cuprinde proprietăți de bază ale derivatei, rolul derivatelor întâi şi a doua în studiul funcțiilor.

Capitolul III prezintă rezolvarea problemelor de minim şi maxim geometric cu ajutorul unor inegalități sau cu ajutorul derivatei, deci probleme de geometrie care se rezolvă algebric şi cu ajutorul analizei matematice.

Fiecare capitol se încheie cu un paragraf ce conține o serie de probleme rezolvate ce subliniază necesitatea studierii problemelor de minim şi maxim, probleme cu mare aplicabilitate în viața de zi cu zi.

„Problemele de maxim şi minim idealizează
o înclinație a naturii şi a noastră înşine de a obține
efecte optime cu eforturi, cheltuieli minime.”
(G. Polya)

CAPITOLUL I
MINIME ŞI MAXIME ÎN ALGEBRĂ

Mulțimea numerelor reale, notată cu *R*, are ca reprezentare geometrică o dreaptă numită axa numerelor reale. Deoarece între elementele lui *R* şi mulțimea punctelor de pe o dreaptă se poate stabili o corespondență bijectivă, mulțimea numerelor reale este numită dreapta reală, iar numerele reale se mai numesc puncte.

1.1. Intervale de numere reale

Dacă $a,b \in R$, $a < b$, atunci următoarele submulțimi de numere se numesc intervale:

$(a,b) = \{x \in R / a < x < b\}$ interval deschis;

$[a,b] = \{x \in R / a \le x \le b\}$ interval închis;

$[a,b) = \{x \in R / a \le x < b\}$ interval închis la stânga şi deschis la dreapta;

$(a,b] = \{x \in R / a < x \le b\}$ interval deschis la stânga şi închis la dreapta;

$(a,+\infty) = \{x \in R / x > a\}$ interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta;

$[a,+\infty) = \{x \in R / x \ge a\}$ interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta;

$(-\infty,a) = \{x \in R / x < a\}$ interval deschis la dreapta şi nemărginit la stânga;

$(-\infty,a] = \{x \in R / x \le a\}$ interval închis la dreapta şi nemărginit la stânga;

$(-\infty,+\infty) = R$ mulțimea numerelor reale;

$(a,a) = [a,a) = (a,a] = \varnothing$ şi $[a,a] = \{a\}$ intervale degenerate.

Intervalele (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ se numesc intervale mărginite; a şi b se numesc extremitățile intervalului, a extremitatea stângă iar b extremitatea dreaptă. Intervalul $[a,b]$ se numeşte compact (închis şi mărginit). Dreapta reală şi semidreptele sunt intervale nemărginite.

1.2. Mulțimi mărginite în R

Definiție:

Mulțimea nevidă $A \subset R$ se numeşte:

1) mărginită superior (majorată) dacă există $b \in R$ astfel încât $x \le b,\ \forall x \in A$; numărul b se numeşte majorant al mulțimii A; cel mai mic majorant M se numeşte marginea superioară a mulțimii A şi se notează sup$A$;
2) mărginită inferior (minorată) dacă există $a \in R$ astfel încât $a \le x,\ \forall x \in A$; numărul a se numeşte minorant al mulțimii A; cel mai mare minorant m se numeşte marginea inferioară a mulțimii A şi se notează inf$A$;
3) mărginită dacă este majorată şi minorată, adică există $a, b \in R$ astfel încât $a \le x \le b$, $\forall x \in A$.

Observații:

O mulțime este nemărginită dacă ea este nemărginită inferior sau este nemărginită superior.

Dacă un majorant al mulțimii A aparține mulțimii el se numeşte cel mai mare element şi se notează cu max$A$.

Dacă un minorant al mulțimii A aparține mulțimii el se numeşte cel mai mic element şi se notează cu min$A$.

Dacă o mulțime are un majorant, atunci ea are o infinitate de majoranți, având majoranți oricât de mari.

Dacă A nu admite majoranți, prin definiție $\sup A = +\infty$.

Dacă A nu admite minoranți, prin definiție $\inf A = -\infty$.

Mulțimea $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ se numeşte dreapta reală încheiată sau mulțimea extinsă a numerelor reale.

Axioma lui Cantor (axioma marginii superioare)

Orice submulțime nevidă majorată a lui R admite un cel mai mic majorant.

Exemple de mulţimi mărginite şi nemărginite:

1) Intervalul $(-\infty, 2)$ este o mulţime mărginită superior şi nemărginită inferior.

2) Mulţimea numerelor naturale este mărginită inferior (0 fiind minorant) şi nemărginită superior. Mulţimea numerelor întregi Z, nu admite $\inf Z$ şi $\sup Z$.

3) Orice mulţime finită este mărginită.

4) i) Dacă $A=(0,2]$ atunci $\sup A = 2$.

ii) Mulţimea $B=(0,+\infty)$ nu este mărginită superior, deci nu există $\sup B$.

iii) Dacă $C=\{1,2,3\}$, atunci $\sup C = \max C = 3$.

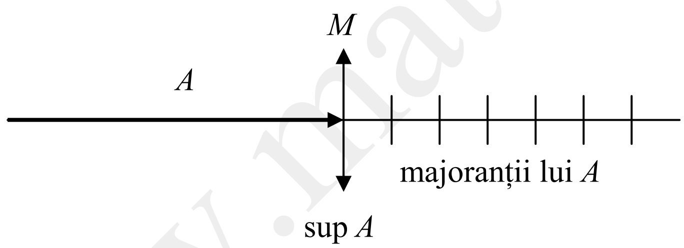
Observaţii:

1) Marginea superioară, dacă există, este unică.

Următoarea caracterizare a marginii superioare este utilă în rezolvarea unor situaţii şi anume: $M = \sup A$ dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile:

i) pentru orice $x \in A$, avem $x \le M$ (M este majorant);

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x$.

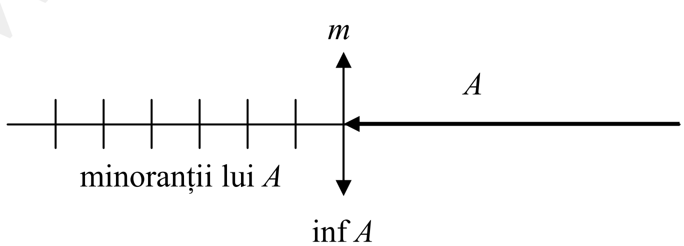


2) Marginea inferioară, dacă există, este unică.

Ea poate fi caracterizată şi prin condiţiile:

$m = \inf A \Leftrightarrow$ i) $\forall x \in A$, $x \ge m$ (m este minorant);

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ astfel încât $x < m + \varepsilon$.



3) Dacă există $\max A$ (respectiv $\min A$), atunci $\sup A = \max A$ (respectiv $\inf A = \min A$).

1.3. Şiruri mărginite

Definiție:

Se numeşte şir de numere reale orice funcție $f: N \rightarrow R,\ f(n) = x_n$.

Deci, un şir este o funcție de forma $n \rightarrow x_n$, unde $n \in N$, $x_n \in R$, care pune în corespondență fiecărui număr $n = 1,2,3,\ldots$ un număr real x_n.

Numărul n care însoțeşte termenul general x_n se numeşte rangul acestuia.

Exemple:

$(a_n)_{n\geq 0}$: a, a, a, ……. şir constant, are toți termenii egali cu a;

$(b_n)_{n\geq 0}$: $b_n = n$ şirul numerelor naturale;

$(f_n)_{n\geq 0}$, $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n+1}$, $n \geq 1$ şirul Fibonacci.

Definiție:

Un şir de numere $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior (majorat) dacă $(\exists) b \in R$ astfel încât $x_n \leq b$, $\forall n \in N^*$.

Observații:

1) Numărul b din definiție este un majorant pentru termenii şirului.

2) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior dacă şi numai dacă mulțimea $M_x = \{x_n | n \in N^*\}$ este mulțime majorată.

Definiție:

Un şir de numere $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior (minorat) dacă $(\exists) a \in R$ astfel încât $a \leq x_n$, $\forall n \in N^*$.

Observații:

1) Numărul a din definiție este un minorant pentru termenii şirului.

2) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior dacă şi numai dacă mulțimea $M_x = \{x_n | n \in N^*\}$ este mulțime minorată.

Definiție:

Un şir de numere $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă există numerele reale *a* şi *b* astfel încât $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in N^*$.

Observație:

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă şi numai dacă mulțimea $\mathrm{M_x} = \{\mathrm{x_n} | \mathrm{n} \in \mathrm{N}^*\}$ este mulțime mărginită.

Teoremă:

Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă şi numai dacă $(\exists)M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $\forall n \in N^*$.

Demonstrație:

„$\Rightarrow$" Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit atunci există $a, b \in R$ astfel încât $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in N^*$. Luăm $\mathrm{M} = \max\{|\mathrm{a}|, |\mathrm{b}|\} > 0$ şi atunci este clar că $|\mathrm{x_n}| \leq \mathrm{M}, (\forall)\mathrm{n} \geq 1$.

„$\Leftarrow$" Presupunem că $(\exists)M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $\forall n \in N^*$. Rezultă că $-M \leq x_n \leq M$, $\forall n \in N^*$ şi deci şirul este mărginit.

Definiție:

Un şir care nu este mărginit se numeşte şir nemărginit.

Observații:

1) Un şir este nemărginit dacă nu se poate găsi un interval de forma $[a,b]$ în care să se afle toți termenii şirului. Deci, conform teoremei, un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit dacă $(\forall)M > 0$, $(\exists)x_n$ astfel încât $|x_n| > M$.

2) Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este mărginit superior şi $(y_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu $y_n \leq x_n$, $\forall n$ $(\mathrm{sau}\ \mathrm{n} \geq \mathrm{n_0}, \mathrm{n_0}\ \mathrm{dat})$, atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea nemărginit superior.

Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este mărginit inferior şi $(y_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu $y_n \leq x_n$, $\forall n$ (sau $n \geq n_0$, pentru n_0 dat), atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea nemărginit inferior.

Exemple:

1) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $\mathrm{x_n} = \frac{1}{\mathrm{n}^2}$ este mărginit deoarece este descrescător, cu termeni pozitivi.

2) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \frac{n}{n+1} + \sin n$, $n \in N$, este mărginit, deoarece este suma a două şiruri mărginite.

3) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = 1 + (-1)^n$, $n \in N$, este mărginit deoarece mulţimea valorilor şirului este mărginită, aceasta fiind formată numai din elementele 2 şi 0 după cum *n* este par sau impar.

1.4. Inegalităţi remarcabile în matematica elementară

Inegalităţile prezentate în continuare sunt foarte des utilizate în aplicaţii la nivelul liceal. Cu ajutorul lor se pot determina valorile extreme ale unor expresii care depind de anumite variabile, se pot demonstra alte inegalităţi pornind de la acestea.

Inegalitatea lui Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} | a_i b_i | \leq \left(\sum_{i=1}^{n} | a_i |^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} | b_i |^q \right)^{1/q}, \quad (\forall)\ a_i, b_i \in \mathbf{R},\ \mathrm{i} = \overline{1,n},\ p,q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right), (\forall)\ a_i, b_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1,n}$$

Inegalitatea lui Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}, \ (\forall)\ a_i,\ b_i \in \mathbf{R},\ i=\overline{1,n},\ p\ge 1$$

Inegalitatea lui Jensen

Fie $I \subset \mathbf{R}$, interval şi $f\colon I \to \mathbf{R}$, convexă. Atunci $(\forall)\ a_i \in I$, $\lambda_i > 0$, $i=\overline{1,n}$ avem:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}.$$

Inegalitatea mediilor

$$\min(a_1,a_2,.....,a_n) \le m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le \max(a_1,a_2,.....,a_n)$$

sau

$$\min(a_1,a_2,.....,a_n) \le \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+.....+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2.....a_n} \le \frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+.....+a_n^2}{n}} \le \max(a_1,a_2,.....,a_n)$$

Inegalitatea lui Cebâşev

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{n} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i}{n},\ (\forall)\ a_i,\ b_i \in \mathbf{R},\ i=\overline{1,n},\ a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n,\ b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+x)^r \ge 1+rx, \quad (\forall)\ x,\ r \in R,\ \ x \ge -1,\ r \ge 0$$

1.5. Valori extreme ale funcțiilor elementare

Definiție:

Fie o funcție reală $f : E \to R$, $E \subset R$.

a) Funcția f se numeşte mărginită superior dacă mulțimea valorilor ei este majorată, adică dacă există un număr real *M*, astfel încât $f(x) \le M$ pentru orice $x \in E$.

b) Funcția f se numeşte mărginită inferior dacă mulțimea valorilor ei este minorată, adică dacă există un număr real *m*, astfel încât $f(x) \ge m$ pentru orice $x \in E$.

c) Funcția f se numeşte mărginită dacă este mărginită inferior şi superior, adică dacă există *m* şi *M* numere reale, astfel încât $m \le f(x) \le M$ pentru orice $x \in E$.

Se poate afirma că funcția f este mărginită dacă există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M$, $\forall x \in E$. Din punct de vedere grafic, funcția f este mărginită dacă şi numai dacă graficul acesteia este cuprins între două drepte paralele cu axa *Ox*, $y = a$ şi $y = b$ (Fig. 1).

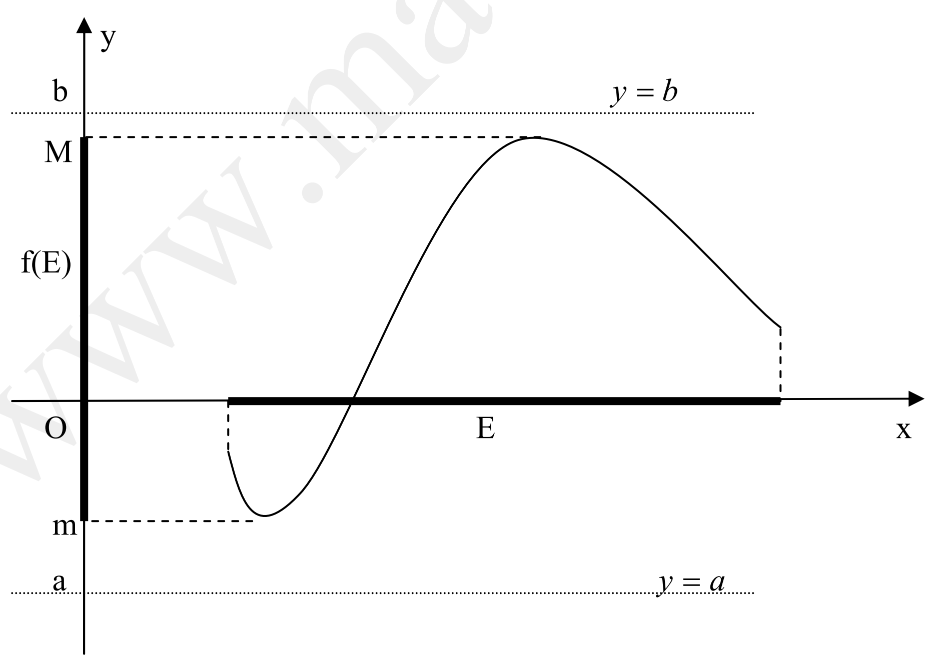


Fig. 1.1

Funcția de gradul I

Funcția $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$, $a \neq 0$ se numeşte funcție de gradul I. Graficul funcției de gradul întâi este o dreaptă (Fig. 2).

Ecuația dreptei este $y = ax + b$, $a \neq 0$.

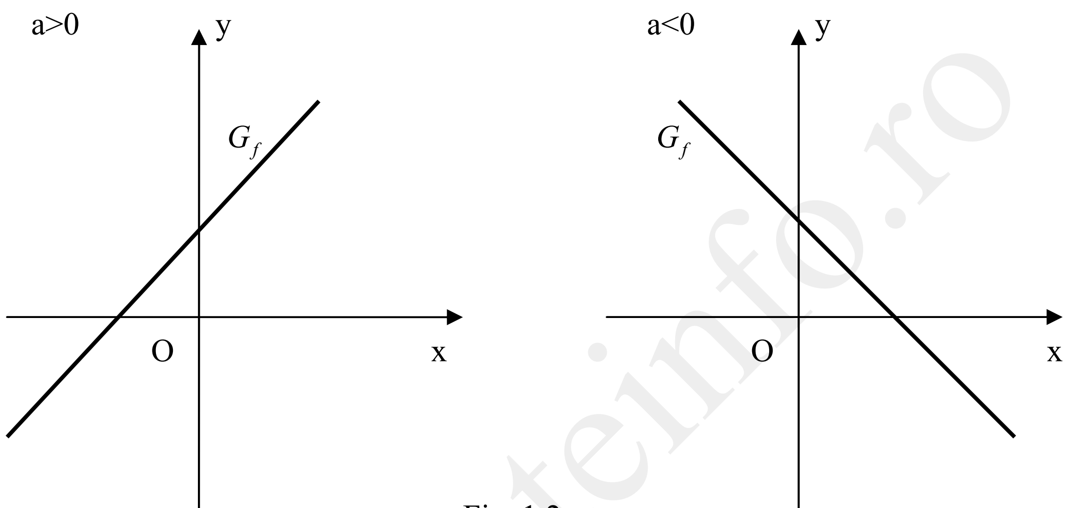
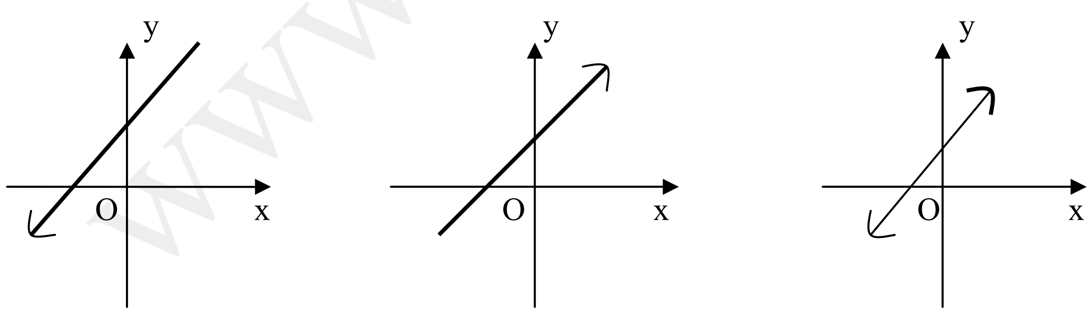


Fig. 1.2

Funcția de gradul întâi este mărginită dacă domeniul de definiție este o mulțime mărginită, iar în caz contrar funcția este nemărginită.



a) funcție mărginită inferior

b) funcție mărginită superior

c) funcție mărginită

Fig. 1.3

Funcția de gradul al II-lea

Funcția $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ se numeşte funcție de gradul al II-lea sau funcție pătratică.

Prin prelucrare, funcția de gradul al II-lea se poate aduce la forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, numită forma canonică. Se observă că punctul $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este un punct special al graficului. Graficul funcției este o parabolă (Fig. 4).

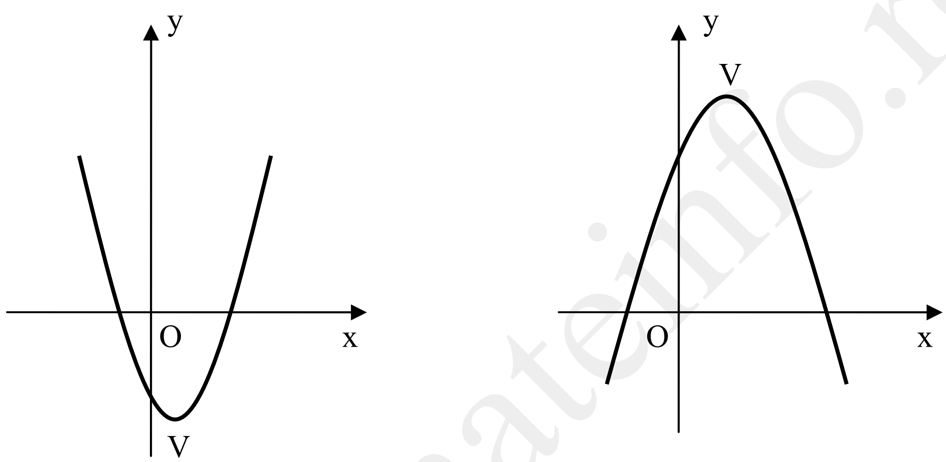


Fig. 1.4

În raport cu semnul lui *a*, avem două cazuri în studiul funcției:

- dacă $a > 0$, funcția *f* admite o valoare minimă $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, care se obține în punctul de minim $x = -\frac{b}{2a}$, deci funcția este mărginită inferior;

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

- dacă $a < 0$, funcția *f* admite o valoare maximă $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$, care se obține în punctul de maxim $x = -\frac{b}{2a}$, deci funcția este mărginită superior.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Dacă funcția este definită pe un interval mărginit, atunci funcția este mărginită.

Funcția putere cu exponent natural

Funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^n$, $n \in N^*$ se numeşte funcție putere de gradul n.
Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ se obțin funcțiile de gradul întâi şi respectiv de gradul al doilea. Acestea sunt cazuri particulare a funcției putere.

Dacă exponentul n este par atunci funcția este mărginită inferior de punctul $x = 0$ şi nemărginită superior.

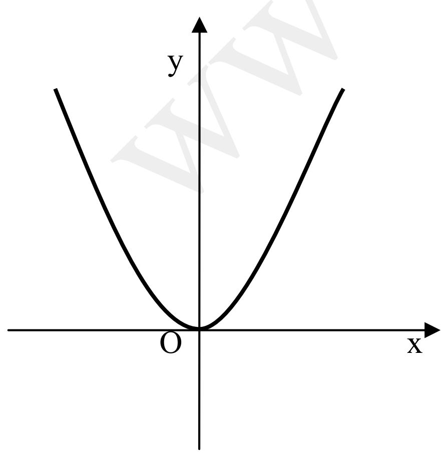
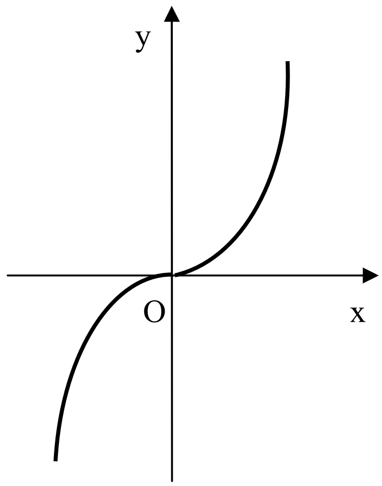


Fig. 1.5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dacă exponentul n este impar atunci funcția nu este mărginită.

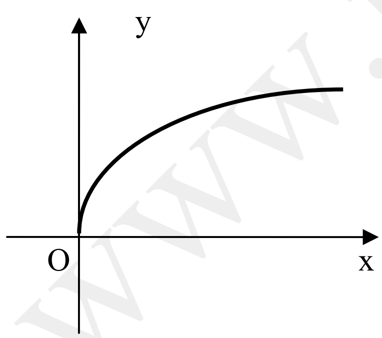


x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fig. 1.6

Funcția radical de ordin n

Funcția $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt[2n]{x}$ se numeşte funcție radical de ordin par. Această funcție este mărginită inferior de 0, dar este nemărginită superior.



x	0			$+\infty$
f(x)	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Fig. 1.7

Funcția radical de ordin impar $f:R\to R$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$, $n\in N^*$ nu este mărginită nici inferior şi nici superior.

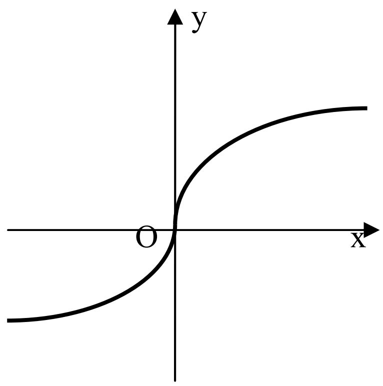


Fig. 1.8

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dacă funcția radical este definită pe un interval mărginit atunci funcția este mărginită.

Funcția exponențială

Funcția $f: R \to (0,+\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, se numeşte funcție exponențială de bază a.

Funcția exponențială definită pe R este mărginită inferior de 0 şi nemărginită superior, dar dacă este definită pe un interval mărginit, atunci ea este mărginită.

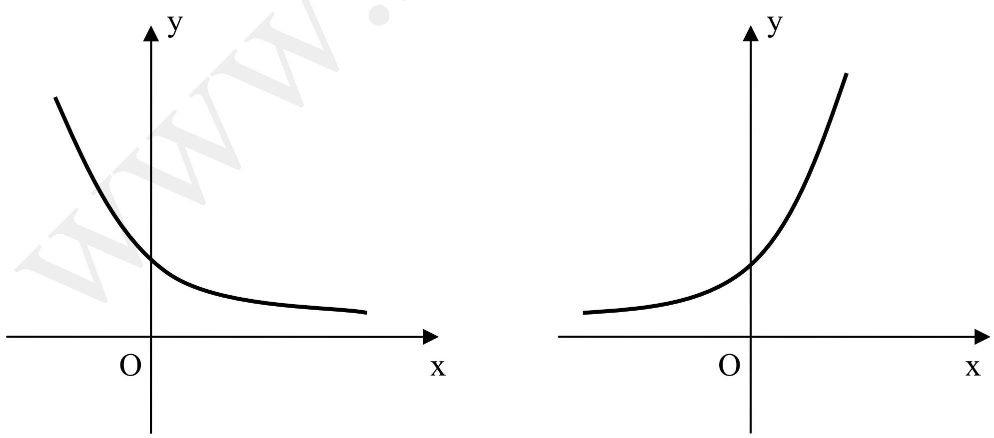


Fig. 1.9

Funcția logaritmică

O funcție de forma $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte funcție logaritmică de bază *a*.

Funcția logaritmică este nemărginită pe *R*, dar este mărginită pe orice interval închis şi mărginit.

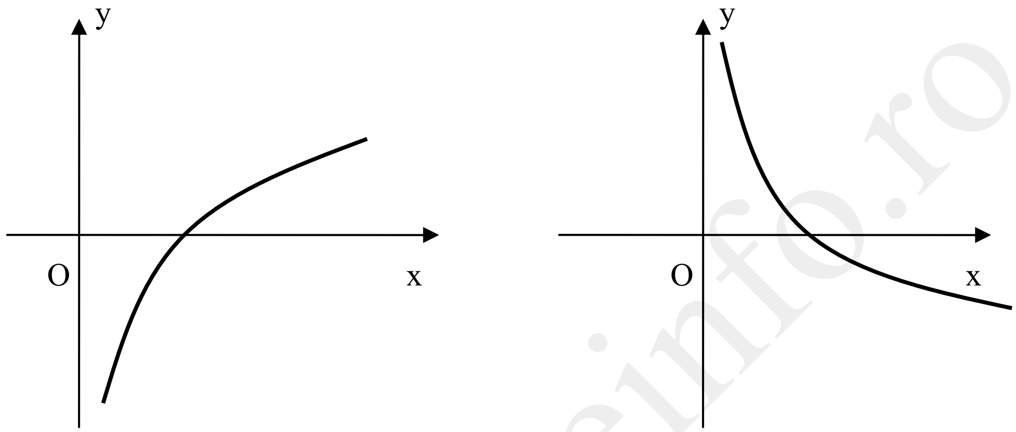


Fig. 1.10

Funcții trigonometrice

- Funcția $f:R\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ este mărginită pe orice interval.

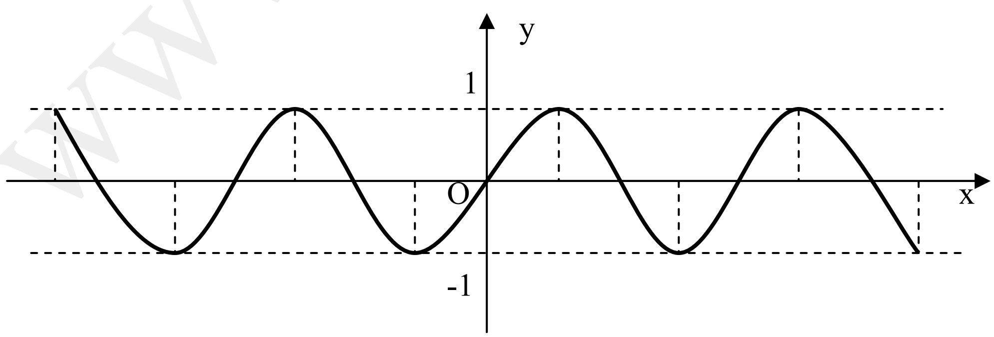


Fig. 1.11

$$\max f(x)=1=f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\quad \min f(x)=-1=f\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right),\quad k\in Z$$

➢ Funcția $f : R \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ este mărginită pe orice interval.

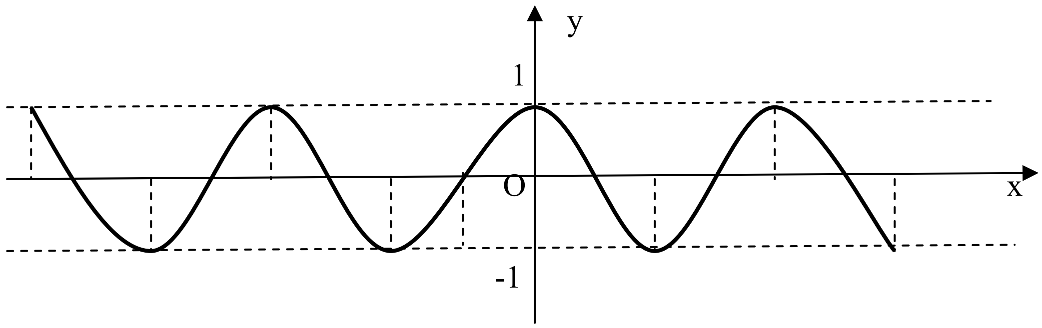


Fig. 1.12

$\max f(x) = 1 = f(2k\pi)$, $\min f(x) = -1 = f(\pi + 2k\pi)$, $k \in Z$

➢ Funcția $f : R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\} \to R$, $f(x) = tgx$ nu este mărginită pe domeniul de definiție, nu admite valori extreme.

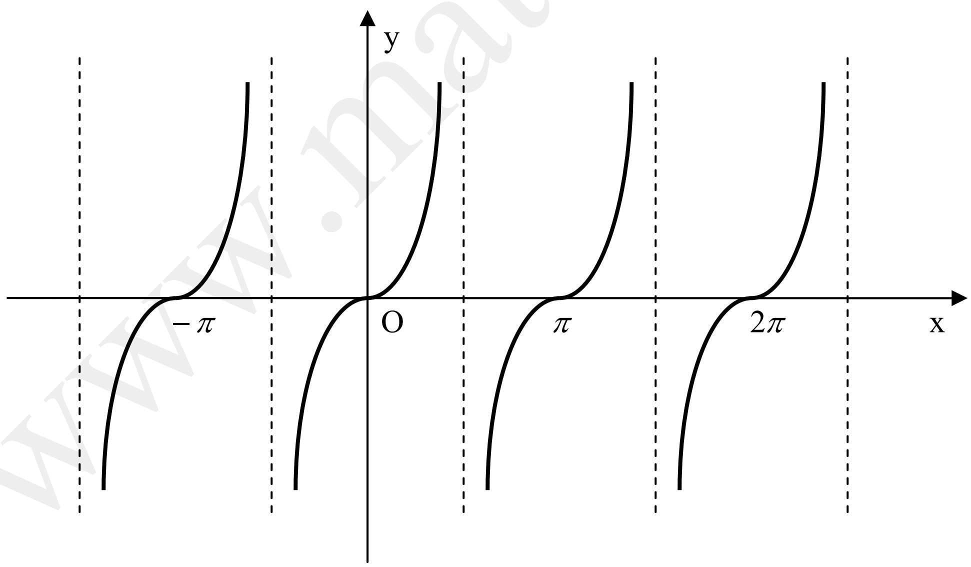


Fig. 1.13

➢ Funcția $f : R - \{k\pi; k \in Z\} \to R$, $f(x) = ctgx$, ca și funcția tangentă, nu este mărginită pe domeniul de definiție.

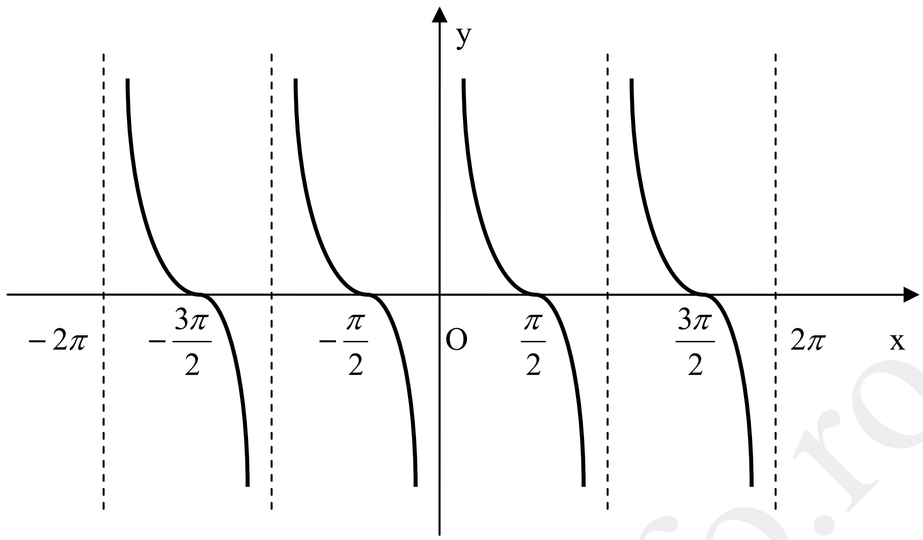


Fig. 1.14

1.6. Probleme rezolvate

Problema 1.

Se dă mulțimea $A = \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in N^* \right\}$. Să se determine, dacă există, min A, max A, inf A, sup A.

Soluție:

Se observă că $1 < \frac{n+1}{n} \le 2$, $\forall n \in N^*$, rezultă că A este mărginită.

Este evident că $2 \in A$, deci max A=sup A=2. Vom arăta că inf A=1 urmărind proprietatea de caracterizare a marginii inferioare:

i) $\frac{n+1}{n} > 1, \forall n \in N^* \Rightarrow$ 1 este minorant;

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$ astfel încât $1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Vom lua $n_0 = 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow$ 1 este cel mai mare minorant, deci inf A=1. Dar $1 \notin A$, rezultă că min A nu există.

Problema 2.

Să se studieze mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_0 = 0$ şi $x_n - x_{n-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $n \geq 1$, unde a este un număr real supraunitar fixat.

Soluție:

Din relația de recurență se determină forma termenului general plecând de la egalitățile:

$$x_n - x_{n-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$

....

$$x_2 - x_1 = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

Adunând membru cu membru aceste relații se obține:

$$x_n - x_1 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x_n = \left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n - 1}{\frac{1}{a} - 1} =$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n\right] < \frac{1}{a-1}, \quad \forall n \geq 1 \qquad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x_n < \frac{1}{a-1}, \quad \forall n \geq 1 \ ,$$

de unde rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Problema 3.

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$, este mărginit.

Soluție:

Este evident că $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$. Se observă că:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \Leftrightarrow$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \Leftrightarrow$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}.$$

Dar $\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2} < 1$, $\forall n \geq 1$, deci $\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2} < \frac{1}{4}$, de unde se deduce că $x_n < \frac{1}{4}$.

Am obținut că $0 < x_n < \frac{1}{4}$, $\forall n \geq 1$ şi rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Problema 4.

Să se studieze mărginirea şirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, unde

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}},\ n \geq 1,\ p \in N^*,\ p \geq 2.$$

Soluție:

Se observă că $\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+k}} > 0$, $\forall k = \overline{1,n}$, $n \geq 1$, $p \in N^*$, $p \geq 2$. Atunci şi $x_n > 0$ în aceleaşi condiții.

Arătăm că şirul este mărginit superior. Pentru aceasta, putem scrie:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} = \frac{n}{\sqrt[p]{n^p+1}} =$$

$$= \frac{n}{n \cdot \sqrt[p]{1 + \frac{1}{n^p}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{1}{n^p}}} < 1 .$$

Deci $x_n < 1$. Am arătat că şirul este mărginit inferior de 0 şi mărginit superior de 1. Deducem că şirul este mărginit.

Problema 5.

Arătaţi că următorul şir recurent

$$x_1 \in [1,2], \quad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \; n \geq 1,$$

este mărginit.

Soluție:

Calculăm $x_2 = x_1^2 - 2x_1 + 2 \Rightarrow x_2 = (x_1 - 1)^2 + 1$. Se observă că $x_2 \geq 1$ şi ştiind că $x_1 \in [1,2]$, avem :

$$x_1 - 1 \in [0,1] \Rightarrow (x_1 - 1)^2 \in [0.1] \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 1 \in [1,2] \Rightarrow x_2 \in [1,2].$$

Demonstrăm prin inducție matematică faptul că orice termen al şirului aparține intervalului [1,2]. Am demonstrat că $x_2 \in [1,2]$, adică propoziția este adevărată pentru $n = 1$. Presupunând că $x_k \in [1,2]$, trebuie să arătăm că $x_{k+1} \in [1,2]$. Avem:

$$x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k + 2 \Rightarrow x_{k+1} = (x_k - 1)^2 + 1,$$

cum $x_k \in [1,2] \Rightarrow x_k - 1 \in [0,1] \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 1 \in [1,2] \Rightarrow x_{k+1} \in [1,2]$.

Deci $x_{n+1} \in [1,2] \Leftrightarrow x_n \in [1,2], \forall n \geq 1$, de unde rezultă că şirul este mărginit.

Problema 6.

Să se demonstreze că pentru orice numere reale strict pozitive *a*, *b*, *c* este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1 .$$

Soluție:

Prelucrăm relația din enunț astfel:

$$\frac{2a}{2a+b}+\frac{2b}{2b+c}+\frac{2c}{2c+a}\le 2 \Leftrightarrow \quad \frac{2a+b-b}{2a+b}+\frac{2b+c-c}{2b+c}+\frac{2c+a-a}{2c+a}\le 2 \Leftrightarrow$$

$$3-\frac{b}{2a+b}-\frac{c}{2b+c}-\frac{a}{2c+a}\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\ge 1, \qquad (1)$$

relație ce trebuie demonstrată.

Amplificăm prima fracție cu *b,* a doua cu *c* şi a treia cu *a*:

$$\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ac+a^2}\ge 1,$$

relație ce trebuie demonstrată.

Înmulțim membrul stâng cu expresia $\left[(2ab+b^2)+(2bc+c^2)+(2ac+a^2)\right]$, care reprezintă un număr strict pozitiv şi aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz :

$$\left(\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ac+a^2}\right)\left[(2ab+b^2)+(2bc+c^2)+(2ac+a^2)\right]\ge$$

$$\ge (a+b+c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ac+a^2}\right)\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}=$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ac+a^2}\ge 1,$$

rezultă că relația (1) este adevărată, ceea ce implică faptul că relația de la care am plecat este adevărată, şi anume:

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\le 1.$$

Problema 7.

Arătați că dacă $a,b,c>0$, avem inegalitatea:

$$\frac{b+c}{2a+b+c}+\frac{c+a}{a+2b+c}+\frac{a+b}{a+b+2c}\ge \frac{3}{2}\ .$$

Soluție:

Notăm $b+c=x>0$, $c+a=y>0$, $a+b=z>0$ şi rezultă:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Amplificăm prima fracție cu *x*, a doua fracție cu *y* şi a treia fracție cu *z*:

$$\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\geq\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz putem scrie:

$$\left(\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\right)[(xy+xz)+(xy+yz)+(xz+yz)]\geq(x+y+z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\geq\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}{2(xy+yz+xz)}. \tag{2}$$

Dar ,

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2\geq 2xy \\ y^2+z^2\geq 2yz \\ z^2+x^2\geq 2zx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz,$$

atunci din relația (2) obținem:

$$\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\geq\frac{xy+yz+xz+2xy+2yz+2xz}{2(xy+yz+xz)}=$$

$$=\frac{3(xy+yz+xz)}{2(xy+yz+xz)}=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},$$

şi revenind la notațiile inițiale, avem:

$$\frac{b+c}{2a+b+c}+\frac{c+a}{a+2b+c}+\frac{a+b}{a+b+2c}\geq\frac{3}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 8.

Arătați că oricare ar fi numerele reale strict pozitive *x, y, z* are loc relația:

$$\frac{x^3y}{xz^3+y^2z^2}+\frac{y^3z}{yx^3+z^2x^2}+\frac{z^3x}{zy^3+x^2y^2}\geq\frac{3}{2}\ .$$

Soluție:

Amplificăm prima fracție cu *xy*, a doua cu *yz* şi a treia cu *zx* în vederea aplicării inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz:

$$\frac{x^4y^2}{x^2yz^3+xy^3z^2}+\frac{y^4z^2}{x^3y^2z+x^2yz^3}+\frac{z^4x^2}{xy^3z^2+x^3y^2z}\geq\frac{3}{2}.$$

Aplicăm inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz :

$$\left(\frac{x^4y^2}{x^2yz^3+xy^3z^2}+\frac{y^4z^2}{x^3y^2z+x^2yz^3}+\frac{z^4x^2}{xy^3z^2+x^3y^2z}\right)\cdot$$

$$\cdot[(x^2yz^3+xy^3z^2)+(x^3y^2z+x^2yz^3)+(xy^3z^2+x^3y^2z)]\geq$$

$$\geq(x^2y+y^2z+z^2x)^2\quad\Rightarrow$$

$$\frac{x^4y^2}{x^2yz^3+xy^3z^2}+\frac{y^4z^2}{x^3y^2z+x^2yz^3}+\frac{z^4x^2}{xy^3z^2+x^3y^2z}\geq$$

$$\geq\frac{(x^2y+y^2z+z^2x)^2}{xyz(xz^2+y^2z+x^2y+xz^2+y^2z+x^2y)}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{x^4y^2}{x^2yz^3+xy^3z^2}+\frac{y^4z^2}{x^3y^2z+x^2yz^3}+\frac{z^4x^2}{xy^3z^2+x^3y^2z}\geq\frac{(x^2y+y^2z+z^2x)^2}{2xyz(xz^2+y^2z+x^2y)}\Rightarrow$$

$$\frac{x^4y^2}{x^2yz^3+xy^3z^2}+\frac{y^4z^2}{x^3y^2z+x^2yz^3}+\frac{z^4x^2}{xy^3z^2+x^3y^2z}\geq$$

$$\geq\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{2xyz}\geq\frac{3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}}{2xyz}=\frac{3}{2},$$

rezultat obținut în urma aplicării inegalității mediilor: $m_a\geq m_g$.

Deci $$\frac{x^4y^2}{x^2yz^3+xy^3z^2}+\frac{y^4z^2}{x^3y^2z+x^2yz^3}+\frac{z^4x^2}{xy^3z^2+x^3y^2z}\geq\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3y}{xz^3+y^2z^2}+\frac{y^3z}{yx^3+z^2x^2}+\frac{z^3x}{zy^3+x^2y^2}\geq\frac{3}{2}\ .$$

Problema 9.

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{2\cdot 2^2-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4^2-1}{3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6^2-1}{5\cdot 6}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{2\cdot(2n)^2-1}{(2n-1)\cdot 2n}\geq 2^n\cdot\sqrt{2n+1},\ n\in N^*.$$

Soluție:

Fiecare factor al produsului se poate scrie astfel:

$$\frac{2\cdot 2^2-1}{1\cdot 2}=\frac{2^2+2^2-1}{1\cdot 2}=\frac{2^2+1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{2}{1}+\frac{3}{2}$$

$$\frac{2\cdot 4^2-1}{3\cdot 4}=\frac{4^2+4^2-1}{3\cdot 4}=\frac{4^2+3\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$$

$$\frac{2\cdot 6^2-1}{5\cdot 6}=\frac{6^2+6^2-1}{5\cdot 6}=\frac{6^2+5\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{6}{5}+\frac{7}{6}$$

....

$$\frac{2\cdot(2n)^2-1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{(2n)^2+(2n)^2-1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{(2n)^2+(2n-1)(2n+1)}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n+1}{2n}.$$

Atunci avem:

$$\frac{2\cdot 2^2-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4^2-1}{3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6^2-1}{5\cdot 6}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{2\cdot(2n)^2-1}{(2n-1)\cdot 2n}=$$

$$=\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{7}{6}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\left(\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n+1}{2n}\right).$$

Aplicând inegalitatea mediilor $m_a\geq m_g$ pentru fiecare paranteză, obținem:

$$\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{7}{6}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\left(\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n+1}{2n}\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{1}}\cdot 2\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot 2\sqrt{\frac{7}{5}}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot 2\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}=$$

$$=2^n\sqrt{2n+1}.$$

Deci

$$\frac{2\cdot 2^2-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4^2-1}{3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6^2-1}{5\cdot 6}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{2\cdot(2n)^2-1}{(2n-1)\cdot 2n}\geq 2^n\cdot\sqrt{2n+1},\ n\in N^*,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 10.

Fie mulțimile $A=\left\{\min\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \;/\; x+y=4,\, x,y\in R_+\right\}$ şi

$B=\left\{x\in Z \;/\; a=\sqrt{16x^4+32x^3+16x^2+49}\,,\, a \text{ minim}\right\}.$

Calculați aria patrulaterului determinat de elementele mulțimii $(A\cup\{2\})\times B$.

Soluție:

Determinăm elementele mulțimii *A*. Aplicăm inegalitatea mediilor pentru m_a şi m_h:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}=\frac{4}{4}=1$ şi obținem că $\min\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$.

Numărul *a* se poate scrie sub forma:

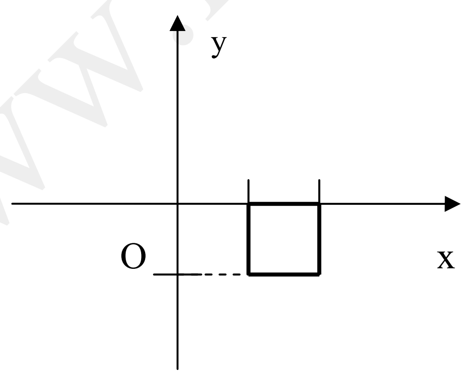
$$a=\sqrt{16x^2(x^2+2x+1)+49} \Rightarrow$$

$$a=\sqrt{16x^2(x+1)^2+49}.$$

Numărul a este minim dacă produsul $16x^2(x+1)^2$ este minim. Valoarea minimă a acestuia este 0. Rezultă că $x=-1$ sau $x=0$.

Elementele mulțimilor *A* şi *B* sunt: $A=\{1\}$, $B=\{-1,0\}$.

Atunci $(A\cup\{2\})\times B=\{1,2\}\times\{-1,0\}=\{(1,-1);(1,0);(2,-1);(2,0)\}$.



Patrulaterul determinat de cele patru puncte este un pătrat cu latura egală cu unitatea, $l=1\,u$, iar aria acestuia este egală cu 1 u^2.

Problema 11.

Să se determine funcția $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dacă $f(1) = \frac{3}{2}$ şi pentru $x = 2$ se obține valoarea extremă egală cu 1.

Soluție:

A determina funcția f înseamnă a-i preciza coeficienții *a,b,c*.

Din $f(1) = \frac{3}{2}$ rezultă ecuația $a + b + c = \frac{3}{2}$. Punctul de extrem pentru funcția de gradul doi este $x = -\frac{b}{2a}$ şi obținem ecuația $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$.

Ştim că valoarea extremă a funcției de gradul al doilea este egală cu $-\frac{\Delta}{4a}$.

Rezultă că $-\frac{\Delta}{4a} = 1 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = -4a$.

Deci avem de rezolvat sistemul :

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{3}{2} \\ b = -4a \\ b^2 - 4ac = -4a \end{cases}$$

Aplicând metoda substituției, se obține soluția $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 3$. Deci funcția căutată este $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

Problema 12.

Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m : R \to R$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2$, $m \neq -1$. Să se determine *m* astfel încât:

a) f să aibă o valoare minimă negativă;

b) f să aibă o valoare minimă pozitivă;

c) f să aibă o valoare maximă negativă;

d) f să aibă o valoare maximă pozitivă.

Soluție:

a) Funcția pătratică f are valoare minimă dacă $m+1>0$, adică $m>-1$, iar valoarea minimă se obține pentru $x_{\min}=-\dfrac{b}{2a}$, când

$$f_{\min}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4(m+2)^2-4(m+1)(m+2)}{4(m+1)}=-\frac{m+2}{m+1}.$$

Deci se impune condiția $-\dfrac{m+2}{m+1}<0$ şi obținem $m\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$.

Aşadar f are minim negativ dacă are loc sistemul de condiții:

$$\begin{cases} m+1>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty) \end{cases}.$$

Prin intersecția mulțimilor soluțiilor celor două inecuații se obține că $m\in(-1,+\infty)$.

b) Funcția f are valoare minimă pozitivă dacă are loc sistemul:

$$\begin{cases} m+1>0 \\ -\dfrac{m+2}{m+1}>0 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul rezultă $m\in\varnothing$, adică nu există m din R pentru care f să aibă valoare minimă pozitivă.

c) Sistemul de condiții este

$$\begin{cases} m+1<0 \\ -\dfrac{m+2}{m+1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \\ m\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty) \end{cases}.$$

Soluția sistemului este $m\in(-\infty,-2)$.

d) Se impune sistemul de condiții

$$\begin{cases} m+1<0 \\ -\dfrac{m+2}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \\ m\in(-2,-1) \end{cases}$$

şi găsim $m\in(-2,-1)$.

Problema 13.

Fie $x, y, z \in R$ astfel încât $x + y + z = 4$ şi $xy + yz + xz = 4$. Să se arate că $x, y, z \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

Soluție:

Se scrie sistemul de condiții sub forma:

$$\begin{cases} x + y = 4 - z \\ xy = 4 - z(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 - z \\ xy = 4 - 4z + z^2 \end{cases}.$$

Formăm ecuația de gradul doi în *t* cu rădăcinile *x* şi *y* şi avem :

$$t^2 - (4 - z)t + 4 - 4z + z^2 = 0.$$

Cum ecuația are rădăcinile reale, trebuie să punem condiția $\Delta_t \geq 0$, care conduce la $z \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$. Dar sistemul este simetric în *x, y, z* şi deci la fel se ajunge la $x, y \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

În concluzie $x, y, z \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

CAPITOLUL II
MINIME ŞI MAXIME ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

2.1. Extreme locale şi globale ale funcțiilor derivabile

Fie funcția $f : E \to R$, E interval sau reuniune de intervale.

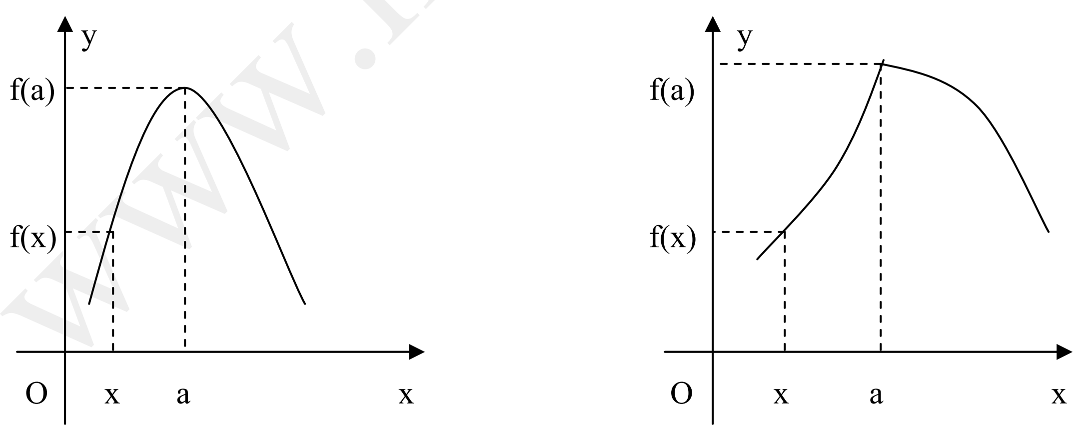
Definiție:

Un punct $a \in E$ se numeşte punct de maxim local al funcției f dacă există o vecinătate V a lui a, în care funcția are valori mai mici decât în a, adică

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in V \cap E.$$

Dacă a este un punct de maxim local al lui f, atunci numărul $f(a)$ se numeşte maxim al lui f, iar punctul $(a, f(a))$ de pe grafic se numeşte punct de maxim local al graficului.

În fig. 2.1 a), b) este ilustrat faptul că $x = a$ este punct de maxim local al funcției f.



a) b)

Fig. 2.1

Observație:

Utilizarea adjectivului "local" pentru un punct de maxim este motivată de faptul că inegalitatea $f(x) \leq f(a)$ are loc pe o anume vecinătate V a punctului a.

Definiție:

Un punct $b \in E$ se numeşte punct de minim local pentru funcția f dacă există o vecinătate V a lui b, în care funcția are valori mai mari decât în b, adică

$$f(b) \leq f(x), \quad \forall x \in V \cap E.$$

Dacă b este un punct de minim local al lui f, atunci numărul $f(b)$ se numeşte minim al lui f, iar punctul $(b, f(b))$ de pe grafic se numeşte punct de minim local al graficului.

În fig. 2.2. a),b) este ilustrat faptul că $x = b$ este punct de minim local al lui f.

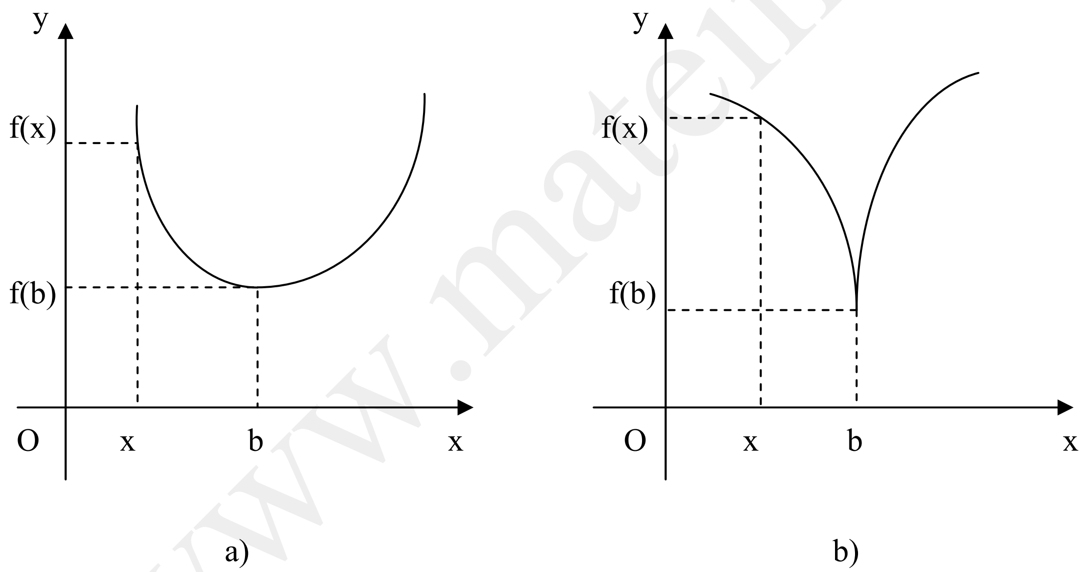


Fig. 2.2

Definiție:

Un punct de minim local sau maxim local pentru o funcție f se numeşte punct de extrem local al funcției. Valorile funcției în punctele sale de extrem, maximele şi minimele funcției, se numesc extremele locale ale funcției. Punctele de maxim şi de minim local ale graficului se numesc puncte de extrem local ale graficului.

Definiție:

Un punct $x_0 \in E$ se numeşte punct de maxim absolut al funcției f dacă

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in E.$$

Observații:

1) Punctul $x_0 \in E$ este punct de maxim absolut pentru f dacă valorile funcției pe domeniul de definiție sunt cel mult egale cu valoarea funcției în x_0.

2) Orice punct de maxim absolut este şi punct de maxim local dar, în general, nu şi reciproc.

3) O funcție poate avea mai multe puncte de maxim absolut (x_0 şi x_1 în fig. 2.3).

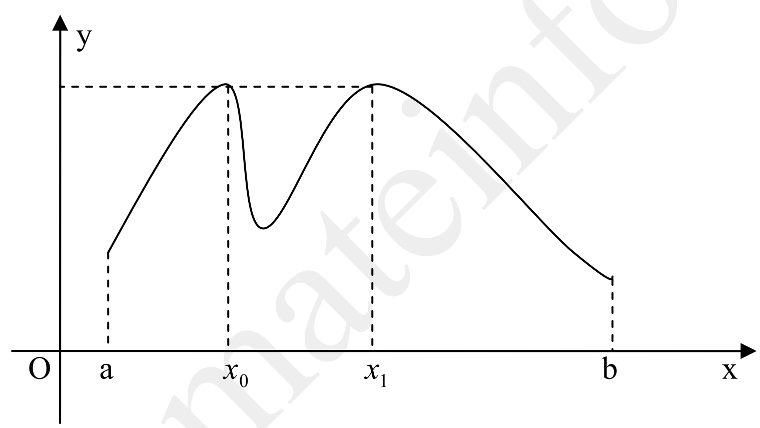


Fig. 2.3

Definiție: Un punct $x_0 \in E$ se numeşte punct de minim absolut al funcției f dacă

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in E.$$

Observații:

1) Un punct este minim absolut pentru f dacă valorile funcției pe domeniul de definiție sunt cel puțin egale cu valoarea funcției în x_0.

2) Orice punct de minim absolut este şi punct de minim local, dar, în general, nu şi reciproc.

3) O funcție poate avea mai multe puncte de minim absolut (x_0, x_1, x_2 în fig. 2.4).

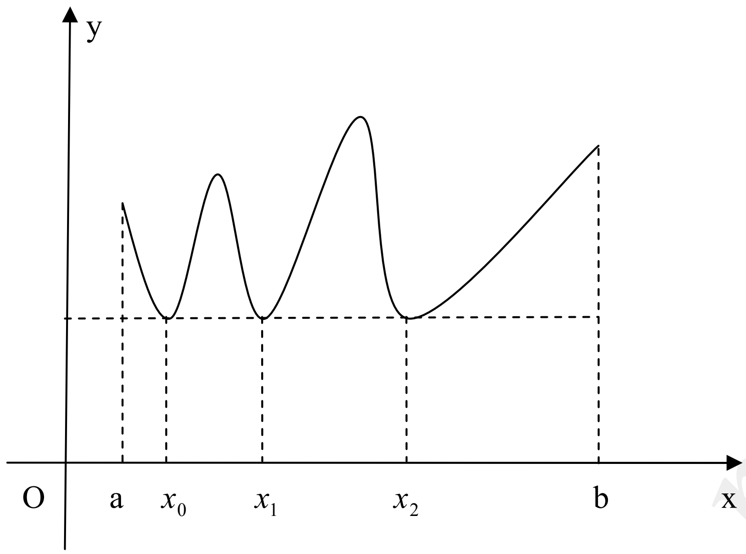


Fig. 2.4

Definiție: Un punct de maxim absolut sau de minim absolut se numeşte punct de extrem absolut.

Observație: O valoare maximă locală poate fi mai mică decât o valoare minimă locală.

2.2. Teoreme fundamentale ale analizei matematice

Teorema lui Fermat

Utilitatea derivatelor apare în mod evident în următorul rezultat:

Teorema lui Fermat

Fie $f: E \to R$, E interval iar x_0 un punct de extrem din interiorul intervalului. Dacă funcția f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație: Presupunem că x_0 este un punct de maxim local (în caz contrar înlocuim f cu $-f$). Prin urmare există o vecinătate $V \in V_{x_0}$ şi deci un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V \cap E$ pentru care $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Fie $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Atunci $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (deoarece $f(x) \leq f(x_0)$, $x < x_0$).

Cum f este derivabilă în x_0, există

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ şi în plus, } \quad f'(x_0) \geq 0. \tag{1}$$

Luăm acum $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ pentru care $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Raționând ca mai sus deducem că

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $f'(x_0) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Interpretare geometrică:

Din $f'(x_0) = 0$, rezultă că tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox (fig. 2.5).

Teorema lui Fermat spune că: graficul unei funcții derivabile are tangentă paralelă cu axa Ox în punctele sale de extrem (de maxim sau de minim) care nu coincid cu extremitățile graficului.

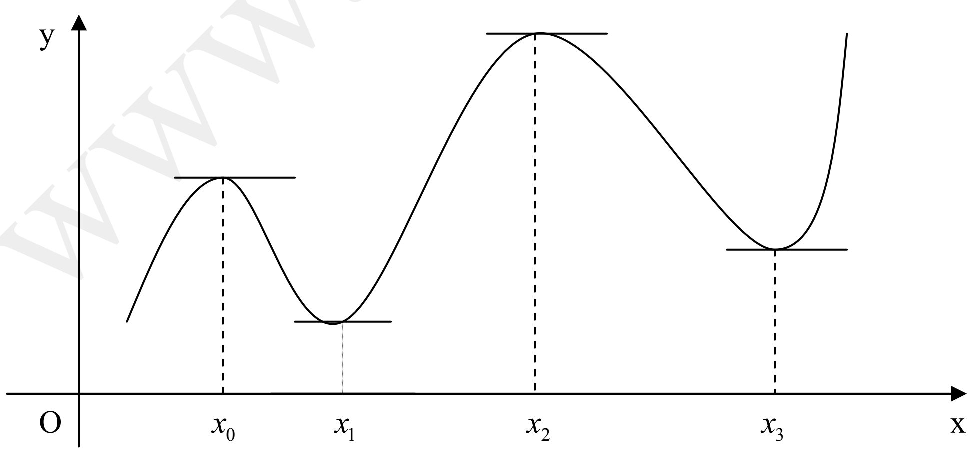


Fig. 2.5

Observații:

1) Teorema lui Fermat are un caracter local.

2) Dacă punctul $x_0 \in E = [a;b]$ n-ar fi din interiorul intervalului, atunci concluzia teoremei lui Fermat nu mai este adevărată pentru că $f(x)$ nu ar fi fost definită pentru $x < a$, respectiv pentru $x > b$.

3) Reciproca teoremei lui Fermat, în general, nu este adevărată, adică derivata unei funcții se poate anula într-un punct, fără ca acesta să fie punct de extrem. De exemplu funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ pentru care $f'(x) = 3x^2$ şi deci $f'(0) = 0$, dar $x_0 = 0$ nu este punct de extrem pentru f.

4) Un punct $x_0 \in E$ poate fi punct de extrem pentru f fără să existe $f'(x_0)$. Aşa este funcția $f : R \to R$, $f(x) = |x|$, pentru care $x_0 = 0$ este punct de minim, dar ştim că f nu este este derivabilă în $x_0 = 0$.

5) Dacă $f : E \to R$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis E, atunci zerourile derivatei f' sunt numite puncte critice ale lui f pe E.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcții derivabile f sunt printre punctele critice, adică punctele de extrem local ale lui f sunt printre soluțiile ecuației $f'(x) = 0$.

Exemplu:

Dacă $a, b > 0$, $a^x + b^x \geq 2$, $\forall x \in R$, atunci $ab = 1$.

Soluție:

Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = a^x + b^x$, pentru care $f(0) = 2$. Cum din ipoteză $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in R$ se deduce că $x_0 = 0$ este un punct de minim pentru f şi $0 \in R$. Conform teoremei lui Fermat rezultă $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$. Aşadar $\ln a + \ln b = 0$ sau $\ln(ab) = 0$, adică $ab = 1$.

Teorema lui Rolle

Fie o funcție $f:[a,b]\to R$, $a,b\in R$, $a<b$.

Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b);

3) f are valori egale la capetele intervalului , $f(a)=f(b)$,

atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a,b), $c\in(a,b)$, în care derivata se anulează, $f'(c)=0$.

Demonstrație: Se analizează cazurile:

1) Funcția f este constantă pe $[a,b]$. În acest caz $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$ şi deci orice punct $c\in(a,b)$ răspunde concluziei teoremei.

2) Funcția f nu este constantă. Cum f este continuă pe un compact $[a,b]$, atunci (Weierstrass) f este mărginită şi îşi atinge marginile pe compact, adică $(\exists)x_m, x_M \in[a,b]$ astfel încât $f(x_m)=m$, $f(x_M)=M$, unde $M=\sup f(x)$, $m=\inf f(x)$ sunt marginea superioară şi respectiv inferioară a lui f. Deoarece f nu este constantă rezultă $m<M$. Dacă punctul de minim x_m se află în interiorul intervalului $[a,b]$, atunci conform teoremei lui Fermat, $f'(x_m)=0$. Deci luând $c=x_m$ teorema este demonstrată.

Dacă $x_m\in\{a,b\}$, deci x_m coincide cu unul din capetele intervalului $[a,b]$, atunci $f(a)=f(b)=f(x_m)=m<M=f(x_M)$. În acest caz este clar că x_M, punctul de maxim al lui f, se află în interiorul intervalului $[a,b]$. Din nou aplicând teorema lui Fermat se deduce $f'(x_M)=0$. Deci $c=x_M$ şi teorema este complet demonstrată.

Corolar: Fie $f:[a.b]\to R$, continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $f(a)=f(b)=0$ (a,b sunt rădăcini pentru f). Atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$. Deci între două rădăcini ale funcției f se află cel puțin o rădăcină a derivatei f'.

Interpretarea geometrică:

Teorema lui Rolle are o interpretare geometrică simplă. Din $f'(c)=0$ rezultă că tangenta la graficul funcției f în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu axa Ox (fig. 2.6). Deci dacă cerințele teoremei lui Rolle sunt îndeplinite, atunci pe graficul funcției f există (cel puțin) un punct $(c, f(c))$ în care tangenta este paralelă cu axa Ox.

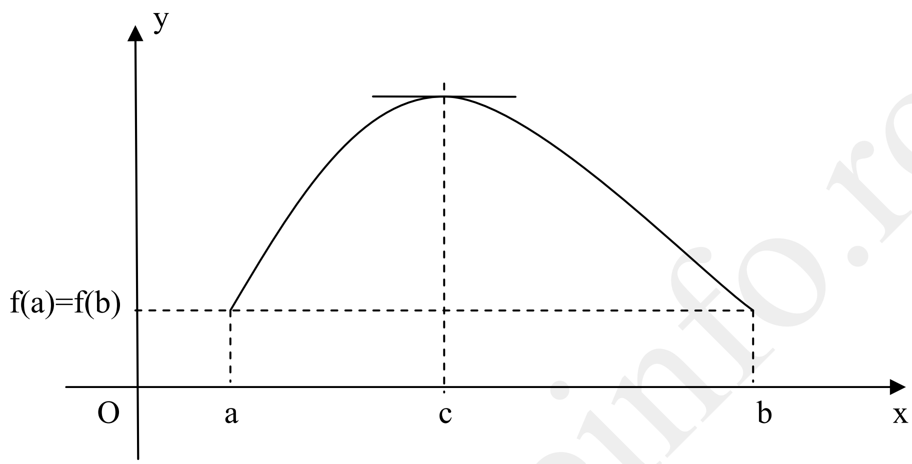


Fig. 2.6

Interpretarea fizică:

Presupunem că x este timpul şi $f(x)$ este coordonata unui punct, care se mişcă pe o dreaptă, la momentul x. La momentul $x=a$ punctul are coordonata $f(a)$, apoi se mişcă într-un anumit mod cu viteza $f'(x)$ şi se întoarce la punctul de plecare cu coordonata $f(a)$, la momentul $x=b$ $(f(a)=f(b))$. Este clar că pentru a se întoarce la punctul $f(a)$, el trebuie să oprească la un anumit moment, adică la un anumit moment $x=c$ viteza este zero $f'(c)=0$.

Observații:

1) Teorema lui Rolle este o teoremă de existență.

2) Toate cele trei cerințe din teorema lui Rolle sunt esențiale pentru ca teorema să fie adevărată. Dacă una din cele trei ipoteze nu se verifică, atunci concluzia teoremei nu mai are loc.

3) Nu trebuie să se tragă concluzia că derivata unei funcții nu se anulează în nici un punct dacă acea funcție nu satisface un din condițiile teoremei lui Rolle. De exemplu $f:[-2,2]\to R$, $f(x)=|x^2-1|$.

Teorema lui Lagrange

Această teoremă este o generalizare simplă a teoremei lui Rolle în care funcția f nu mai ia obligatoriu valori egale la capetele a şi b ale intervalului considerat.
Mai precis are loc următoarea:

Teorema lui Lagrange

Fie o funcție $f:[a,b]\to R$, $a,b\in R$, $a<b$.

Dacă: 1) f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b),

atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a,b), $c\in(a,b)$ pentru care

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Demonstrație: Egalitatea care apare în teoremă se numeşte formula lui Lagrange.

Se consideră funcția $g:[a,b]\to R$, $g(x)=f(x)-kx$, unde $k\in R$. Evident funcția g este continuă pe $[a,b]$ (diferență de funcții continue), este derivabilă pe (a,b) (diferență de funcții derivabile) şi $g'(x)=f'(x)-k$.

Se determină numărul real k din cerința $g(a)=g(b)$ şi obținem:

$$f(a)-ka=f(b)-kb \quad\Leftrightarrow\quad kb-ka=f(b)-f(a) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Atunci funcția g va avea forma:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Acum funcției g i se poate aplica teorema lui Rolle. Deci există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$, adică $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, relație echivalentă cu $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Interpretarea geometrică: Formula lui Lagrange scrisă sub forma $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, exprimă faptul că există pe graficul funcției f cel puțin un punct $(c, f(c))$, diferit de extremități, în care panta tangentei $(f'(c))$ să fie egală cu panta coardei determinată de punctele $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, ceea ce înseamnă că această tangentă este paralelă cu coarda AB (fig. 2.7).

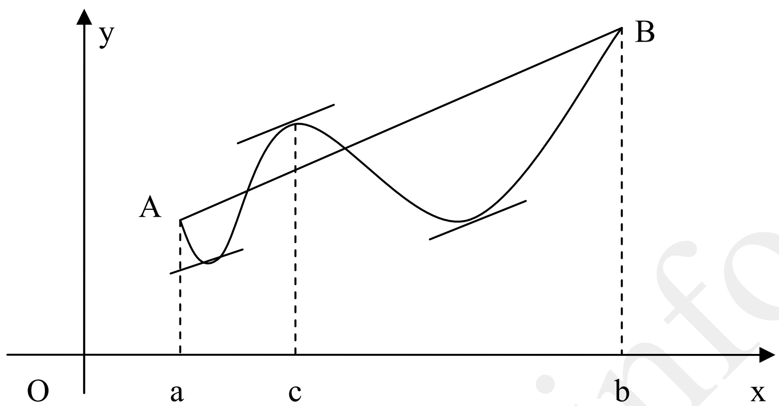


Fig. 2.7

Interpretarea fizică:

Presupunem că x este timpul şi $f(x)$ este coordonata unui punct, care se mişcă pe o dreaptă, la momentul x.

Expresia $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezintă viteza medie a mişcării punctului în intervalul de timp de la a la b. Formula lui Lagrange arată că există un moment $x = c$ în care viteza instantanee este egală cu viteza medie în intervalul de timp $[a, b]$.

Corolar : Fie o funcție definită într-o vecinătate V a punctului x_0, derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ şi continuă în x_0. Dacă există limita $\lambda = \lim_{x \to x_0} f'(x)$, atunci $f'(x_0)$ există şi $f'(x_0) = \lambda$. Dacă limita λ este finită, atunci f este derivabilă în x_0.

Teorema lui Cauchy

Fie $f, g : [a,b] \to R$, $a < b$ două funcții cu proprietățile:

1) f, g sunt continue pe intervalul închis $[a,b]$;

2) f, g sunt derivabile pe intervalul deschis (a,b);

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$,

atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât să avem:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ (formula lui Cauchy).}$$

Demonstrație: Probăm că $g(a) \neq g(b)$. Dacă prin absurd $g(a) = g(b)$, atunci g verifică pe $[a,b]$ condițiile teoremei lui Rolle şi deci există $c' \in (a,b)$ astfel încât $g'(c') = 0$, în contradicție cu ipoteza 3). Rămâne deci $g(a) \neq g(b)$.

Pentru demonstrarea formulei lui Cauchy se consideră funcția $h : [a,b] \to R$, $h(x) = f(x) - kg(x)$, $\forall x \in [a,b]$, unde k este o constantă reală, care se determină din cerința $h(a) = h(b)$ şi de unde se obține

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b),$$

iar de aici $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Acum funcția h verifică ipotezele teoremei lui Rolle. Aşadar există $c \in (a,b)$ pentru care $h'(c) = 0$. Deoarece $h'(x) = f'(x) - kg'(x)$ şi $h'(c) = f'(c) - kg'(c)$, rezultă că $f'(c) - kg'(c) = 0$ sau $k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ şi egalând cele două valori ale lui *k* se obține formula lui Cauchy.

Observație :

Formula lui Lagrange este caz particular al formulei lui Cauchy pentru $g(x) = x$ când $g'(x) = 1$.

Teorema lui Darboux

Dacă f este o funcție derivabilă pe un interval E, atunci derivata f' are proprietatea lui Darboux pe E, adică $\forall a,b \in E$, $a<b$ şi $\forall \lambda \in (f'(a), f'(b))$ sau $\forall \lambda \in (f'(b), f'(a))$, există $x_\lambda \in (a,b)$ astfel încât $f'(x_\lambda)=\lambda$.

Demonstrație : Fie funcția $g: E \to R$, $g(x)=f(x)-\lambda x$, care evident, este derivabilă pe E şi $g'(a)=f'(a)-\lambda<0$, $g'(b)=f'(b)-\lambda>0$. Vom arăta că există $\delta>0$ astfel încât $g(x)<g(a), \forall x \in (a, a+\delta)$. Într-adevăr, deoarece $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, funcția

$$h(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}, & x\neq a\\ g'(a), & x=a\end{cases}$$

este continuă în $x=a$.

Cum $h(a)=g'(a)<0$ se deduce că există $\delta>0$ astfel încât $h(x)<0$, $\forall x\in(a,a+\delta)$, adică $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0, \forall x\in(a,a+\delta)$ şi cum $x-a>0$ rezultă că $g(x)<g(a), \forall x\in(a,a+\delta)$. Deci funcția g nu-şi atinge minimul în $x=a$. Se demonstrează analog că g nu-şi atinge maximul în b.

Cum g este continuă pe compactul $[a,b]$, conform teoremei lui Weierstrass avem că există un punct $x_\lambda \in (a,b)$ în care funcția g îşi atinge minimul. Conform teoremei lui Fermat $g'(x_\lambda)=0$, adică $f'(x_\lambda)=\lambda$.

Consecință utilă pentru studiul semnului derivatei.

Corolar:

1) Fie $f: E\to R$ o funcție derivabilă. Dacă f' ia valori de semne contrare în două puncte a,b din E, atunci derivata f' se anulează cel puțin într-un punct cuprins între a şi b.

2) Dacă derivata f' a funcțieie f nu se anulează pe un interval $I\subseteq E$, atunci derivata f' păstrează acelaşi semn pe I.

Se poate aborda următoarea problemă: Dată fiind o funcție $f: E \to R$, E interval, există o funcție $F: E \to R$ cu proprietățile:

1). F derivabilă pe E şi

2). $F'(x) = f(x), \forall x \in E$?

Deci dacă este cunsocută o funcție f ca derivată a funcției F (F'), cum arată F? În orice caz pentru a putea vorbi de F, $f = F'$ trebuie să aibă proprietatea lui Darboux.

O astfel de funcție F în cazul în care există se numeşte primitivă a funcției f pe intervalul E. Procedeul de obținere a funcțiilor F se studiază în cadrul calculului integral.

2.3. Rolul primei derivate în studiul funcțiilor

Consecințe ale teoremei lui Lagrange

Consecința 1. Funcții cu derivata nulă

Dacă o funcție are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval.

Demonstrație: Fie $f: E \to R$, o funcție derivabilă în punctele din interiorul lui E şi continuă pe E, E interval şi $a \in E$ un element fixat. Dacă $x \in E$ este arbitrar, atunci conform teoremei lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[a, x]$ sau $[x, a]$, există un punct $c \in (a, x)$ sau $c \in (x, a)$ astfel încât $f(x) - f(a) = (x - a) f'(c)$.

Cum $f'(c) = 0$, avem $f(x) = f(a)$, $\forall x \in E$, ceea ce arată că f este constantă pe E.

Observații:

1) Afirmația reciprocă a consecinței 1 este clară. Dacă o funcție este constantă pe un interval, atunci derivata acesteia este nulă pe interval.

2) Consecința 1 dă un procedeu de lucru prin care se arată că o funcție definită pe un interval este constantă. Calculăm derivata acesteia şi dacă $f' = 0$, atunci există o constantă $k \in R$ astfel încât $f(x) = k$. Pentru determinarea constantei se alege o valoare particulară x_0 din

intervalul pentru care $f(x_0)$ are o formă cât mai simplă. Alteori dacă intervalul are forma (a,b), atunci pentru determinarea constantei se apelează la calculul $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$.

Consecința 2. Funcții cu derivate egale

Dacă două funcții au derivatele egale pe un interval, atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Demonstrație:

Fie $f,g:E\to R$, derivabile pe interiorul lui E şi continue pe E, E fiind interval cu $f'(x)=g'(x),\ \forall x\in E$.

Această condiție scrisă sub forma $(f-g)'(x)=0,\ \forall x\in E$ arată că se poate aplica consecința 1. Deci există o constantă $k\in R$ astfel încât $f(x)-g(x)=k$, $\forall x\in E$, altfel spus, cele două funcții diferă printr-o constantă pe intervalul E.

Observații:

1) Cerința ca E să fie interval este esențială. Următorul exemplu ilustrează acest fapt:

Fie $f,g:(-1,1)\cup(3,4)\to R$, $f(x)=\begin{cases}1,\ x\in(-1,1)\\ -1,\ x\in(3,4)\end{cases}, g(x)=1, \forall x\in E$. Evident $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in E$, fără ca diferența $f(x)-g(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-1,1)\\ -2,\ x\in(3,4)\end{cases}$ să fie o constantă. Dar $f-g$ este constantă pe fiecare interval $(-1,1)$, $(3,4)$ egală cu 0 şi respectiv -2. Deci $f-g$ diferă prin câte o constantă pe fiecare interval.

2) Formulele de la trigonometrie pot fi demonstrate utilizând această consecință. Spre exemplu să arătăm că $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\forall x\in R$.

Se consideră funcțiile $f,g:R\to R$, $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=2\sin x\cos x$ pentru care $f'(x)=2\cos 2x$ şi $g'(x)=2[\cos^2 x-\sin^2 x]=2\cos 2x$. Deci $f'(x)=g'(x),\ \forall x\in R$.

Aşadar există $k\in R$ astfel încât $f(x)-g(x)=k$, $\forall x\in R$. Luăm $x=0$ când $f(0)-g(0)=0$. Deci $k=0$ şi formula este stabilită.

Un alt rezultat important pentru o funcție derivabilă pe un interval este furnizat de semnul derivatei. Acesta va fi utilizat pentru determinarea intervalelor de monotonie. Mai precis are loc următoarea consecință:

Consecința 3. Intervale de monotonie

Fie $f : E \to R$, E interval, o funcție derivabilă.

1) Dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este crescătoare pe E.

2) Dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este descrescătoare pe E,

sau

1') Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict crescătoare pe E.

2') Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict descrescătoare pe E.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ şi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in E$. Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$.

Prin urmare există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0,$$

ceea ce arată că $f(x_1) \leq f(x_2)$, ceea ce demonstrează că f este crescătoare pe E.

Acum este clar că dacă $f' > 0$, atunci am fi obținut $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce conduce la f strict crescătoare pe E, adică 1').

Analog dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in E$ se obține că $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \leq 0$, adică $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Deci pentru $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in E$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$, ceea ce înseamnă că f este descrescătoare pe E.

Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$, atunci găsim $f(x_1) > f(x_2)$ şi prin urmare f este strict descrescătoare.

Observații:

1) Pentru a marca monotonia unei funcții utilizând semnul derivatei se utilizează tabele ca cele ce urmează

x	E
$f'(x)$	+ + + + + + + + + +
$f(x)$	$\nearrow$

x	E
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - -
$f(x)$	$\searrow$

unde în linia corespunzătoare lui f am indicat printr-o săgeată orientată în sus faptul că f este (strict) crescătoare pe E sau o săgeată orientată în jos pentru a marca faptul că f este (strict) descrescătoare pe E.

2) Pentru a determina intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile $f : E \to R$, E nu neapărat interval din R se procedează astfel:

a) se calculează derivata f' a funcției f;

b) se rezolvă (în R) ecuația $f'(x) = 0$, $x \in E$;

c) se determină intervalele în care f' păstrează acelaşi semn ;

d) se ține seama de consecința 3 şi se stabilesc intervalele de monotonie.

Următorul rezultat este important pentru că permite să decidem dacă o funcție este derivabilă într-un punct. Condiția suficientă ca acest lucru să se întâmple este dată de :

Consecința 4. Derivata unei funcții într-un punct

Fie $f : E \to R$, E interval şi $x_0 \in E$. Dacă:

1) f este continuă în x_0;

2) f este derivabilă pe $E - \{x_0\}$;

3) există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$,

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$.

Dacă $l \in R$, atunci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = l$.

Demonstrație: Se aplică teorema lui Lagrange funcției f pe un interval $[x, x_0]$, $x < x_0$ şi avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$, cu $x < c_x < x_0$.

De aici $f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = l$, deoarece $c_x \to x_0$ dacă $x \to x_0$, $x < x_0$. Analog $f'_d(x_0)$ există şi este egală cu l. Deci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$.

Observații:

1) Această consecință pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct, permite să calculăm derivatele laterale într-un punct.

2) Consecința 4 a teoremei lui Lagrange dă o condiție suficientă pentru existența derivatei unei funcții într-un punct. Condiția nu este şi necesară, după cum se poate vedea prin exemplul următor.

Fie $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, derivabilă în origine şi $f'(0) = 0$, dar nu există $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, unde $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, întrucât se ştie că nu există $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$.

3) Dacă una din condițiile consecinței nu-i verificată, concluzia nu este numaidecât adevărată. Spre exemplu funcția $f : [0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ este derivabilă pe $[0,1)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = 0$ şi totuşi f nu este derivabilă în $x = 1$, nefiind continuă în acest punct.

Dar nu este exclusă posibilitatea ca o funcție discontinuă într-un punct să aibă totuşi derivată în acest punct. De exemplu $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} arctg\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este discontinuă în $x = 0$ şi totuşi $f'(0) = \infty$, derivată calculată folosind definiția.

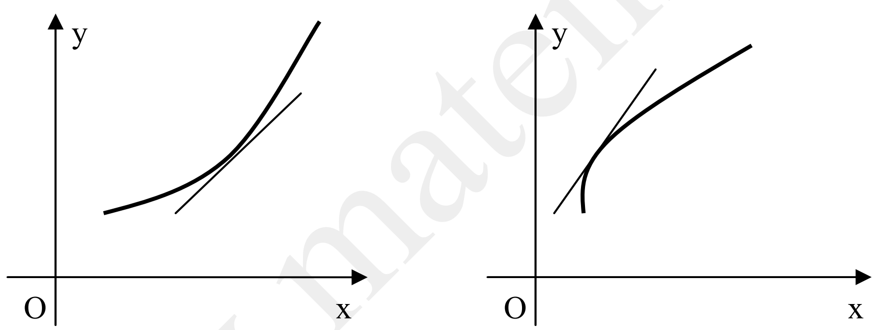
4) În condițiile consecinței 4, dacă f este derivabilă în x_0, va rezulta că f' este continuă în x_0.

2.4. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Convexitate şi concavitate

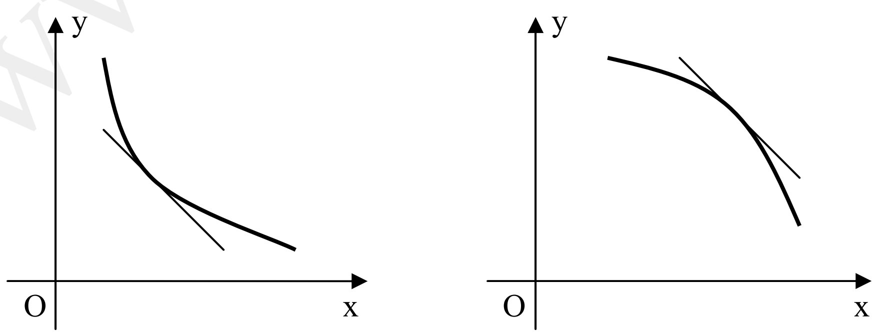
În paragraful 2.3. am văzut că semnul primei derivate dă informații asupra monotoniei funcției, iar zerourile primei derivate sunt eventuale puncte de extrem. Aceste informații şi altele se utilizează în trasarea graficului unei funcții, numai că , în destule cazuri, sunt necesare şi informații suplimentare, care să le întregească pe cele furnizate de prima derivată.

De exemplu o funcție derivabilă poate fi strict crescătoare în două moduri, după cum tangenta la grafic se află sub grafic (fig. 2.8.a)) sau deasupra graficului (fig. 2.8.b)). Analog, o funcție derivabilă poate fi strict descrescătoare în două moduri după poziția tangentei la grafic în raport cu acesta: sub grafic (fig. 2.9.a)) sau deasupra graficului (fig. 2.9.b)).



a) b)

Fig. 2.8



a) b)

Fig. 2.9

Definiție:

1) O funcție $f : E \to R$, $E \subseteq R$ interval, se numeşte convexă pe intervalul E dacă $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall t \in [0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

2) O funcție $f : E \to R$, $E \subseteq R$ interval, se numeşte concavă pe intervalul E dacă $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall t \in [0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Observații:

1) Dacă în definiția precedentă inegalitățile sunt stricte atunci spunem că funcția f este strict convexă şi respectiv strict concavă.

2) Este clar că funcția f este concavă pe E dacă $(-f)$ este conexă pe E.

Interpretare geometrică

Se consideră punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \ne x_2$ aparținând graficului funcției f şi punctul $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$, $t \in [0,1]$, care aparține segmentului de capete x_1, x_2 (se verifică imediat dubla inegalitate $x_1 \le x_t \le x_2$) (fig. 2.10).

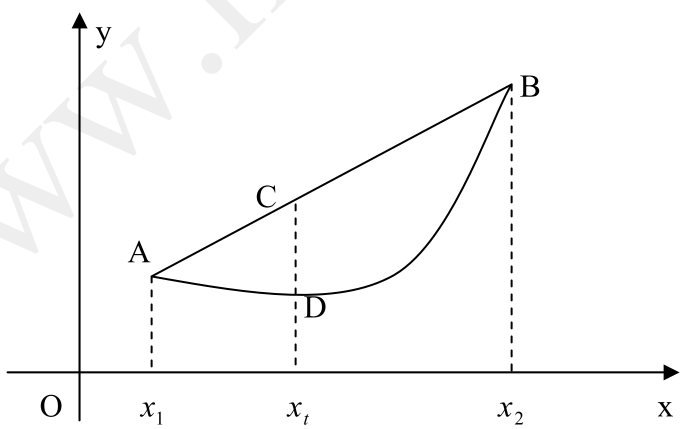


Fig. 2.10

Coarda AB are ecuația $y = f(x_2) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$ şi ordonata punctului C de abscisă x_t de pe această coardă va fi:

$$y_c = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_t - x_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Dacă f este convexă, atunci $f(x_t) \le y_c$.

Punctul D aparținând graficului are coordonatele $(x_t, f(x_t))$. Semnificația inegalității $f(x_t) \le y_c$, cazul funcției convexe , este aceea că graficul funcției f este situat sub orice coardă dacă unim două puncte situate pe graficul funcției, cu abscisele aparținând lui E . Analog, semnificația inegalității $f(x_t) \ge y_c$, cazul funcției concave, este că graficul funcției f este situat deasupra coardei determinate de orice două puncte situate pe graficul funcției, cu abscisele aparținând lui E . Dacă în fiecare punct graficul funcției admite o tangentă unică, atunci inegalitatea $f(x_t) \le y_c$ este echivalentă cu faptul că în fiecare punct $(x, f(x))$, $x \in [x_1, x_2]$ tangenta la graficul lui f este situată sub graficul lui f .

Pentru inegalitatea $f(x_t) \ge y_c$ interpretarea este analoagă.

<u>Condiție suficientă de convexitate (concavitate)</u>

Teoremă:

Fie $f:[a,b] \to R$, $a < b$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a,b]$.

1) Dacă $f''(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$, atunci funcția f este convexă pe intervalul $[a,b]$.

2) Dacă $f''(x) \le 0$, $\forall x \in (a,b)$, atunci funcția f este concavă pe intervalul $[a,b]$.

Demonstrație:

1) Fie $a \le x_1 < x_2 \le b$. Pentru fiecare punct $x \in (x_1, x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ și deci există $c_1 \in (x_1, x)$, $c_2 \in (x, x_2)$ astfel încât

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Cum $c_1 < c_2$ rezultă $f'(c_1) \le f'(c_2)$ (din enunț $f'' \ge 0$ arată că f' este crescătoare) adică

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Din $x \in (x_1, x_2)$, arbitrar, aceasta este echivalentă cu scrierea: $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $\forall t \in (0,1)$. Înlocuind pe x în inegalitatea de mai sus rezultă $f(x) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, ceea ce arată că f este convexă pe $[a,b]$.

2) Se demonstrează în mod analog.

Observație:

Este valabilă şi afirmația reciprocă a teoremei şi anume:

Dacă $f:[a,b] \to R$ este de două ori derivabilă pe $[a,b]$ şi este convexă (concavă), atunci $f'' \ge 0$ (≤ 0).

Interpretarea geometrică

Derivata a doua f'', fiind derivata primei derivate, din $f'' \ge 0$ se deduce că f' este o funcție crescătoare, ceea ce înseamnă că pentru un grafic convex, panta tangentei la grafic creşte când punctul de tangență se deplasează spre dreapta (fig. 2.11).

O interpretare analogă se poate da dacă $f'' \le 0$.

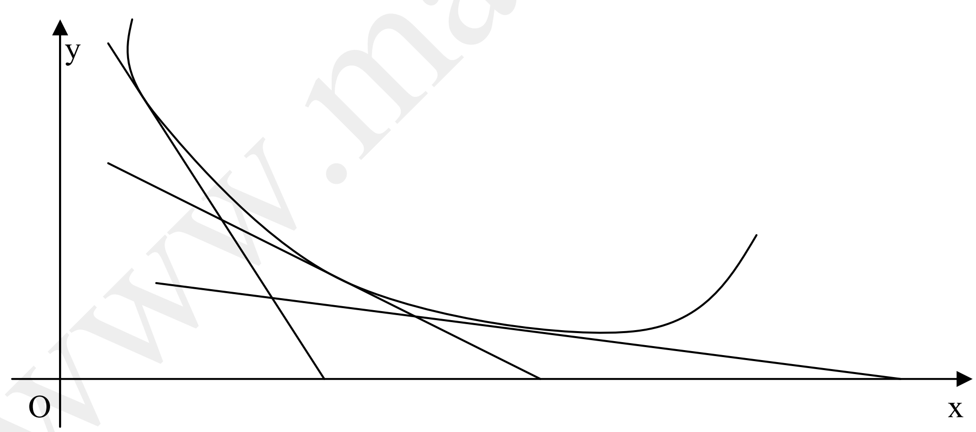


Fig. 2.11

Intervale de convexitate (concavitate)

Teorema anterioară afirmă că semnul celei de-a doua derivate ne permite să găsim intervalele de convexitate şi concavitate pentru o funcție.

Pentru determinarea intervalelor de convexitate (concavitate) se parcurg următoarele etape:

1) Se calculează f'';

2) Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$;

3) Cu ajutorul rădăcinilor derivatei a doua se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează acelaşi semn;

4) Dacă $f'' > 0$ pe un interval, atunci f este convexă pe acel interval , iar dacă $f'' < 0$ pe un interval, atunci f este concavă pe acel interval.

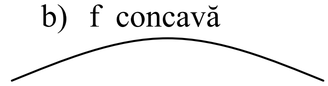
Faptul că pe un interval $[x_1, x_2]$, f este convexă sau concavă se marchează într-un tabel de forma:

x	x_1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ x_2
$f''(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	

a) f convexă

x	x_1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ x_2
$f''(x)$	- -
$f(x)$	

b) f concavă



Condiție suficientă pentru un punct de inflexiune

Teoremă:

Fie $f : E \to R$ şi x_0 un punct din intervalul E. Dacă f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 şi dacă există două numere $\alpha, \beta \in V$ astfel încât:

1) $\alpha < x_0 < \beta$;

2) $f''(x_0) = 0$;

3) ($f'' < 0$ pe (α, x_0) şi $f'' > 0$ pe (x_0, β)) sau ($f'' > 0$ pe (α, x_0) şi $f'' < 0$ pe (x_0, β)),

atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f.

Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte punct de inflexiune al graficului.

Observații:

1) Condiția $f''(x_0) = 0$ nu implică automat x_0 punct de inflexiune. Într-adevăr fie $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ pentru care $f'(x) = 4x^3$ şi $f''(x) = 12x^2$. Ecuația $f''(x_0) = 0$ are soluția $x_0 = 0$, care însă nu este punct de inflexiune pentru f deoarece $f''(x) > 0$, atât pentru $x < 0$ cât şi pentru $x > 0$.

2) Condiția ca f să fie continuă în x_0 este importantă.

Fie $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \le 0 \\ -\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ are $f''(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$,

ceea ce înseamnă că pe intervalul $(-\infty;0)$, $f'' < 0$, adică f este concavă, iar pe $(0;\infty)$, $f'' > 0$, adică f este convexă. Dar $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune, funcția nefiind continuă în acest punct.

3) De asemenea dacă f nu are derivată (finită sau infinită) în x_0, atunci x_0 nu este punct de inflexiune pentru f.

Fie $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$, atunci $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$ şi

$f''(x)=\begin{cases} 2, & x<0 \\ -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}, & x>0 \end{cases}$. Se constată că f este continuă în $x_0=0$ şi $f_s'(0)=0$, $f_d'(0)=\infty$.

Deci f nu are derivată în $x_0=0$. Acest punct este punct unghiular pentru f, deşi $f''>0$ dacă $x<0$ şi $f''<0$ pentru $x>0$.

4) Pentru ca x_0 să fie punct de inflexiune pentru funcția f (îndeplinind condițiile teoremei) trebuie să avem una din situațiile de mai jos:

x	x_0
$f''(x)$	+ + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - -
$f(x)$	$f(x_0)$

a)

x	x_0
$f''(x)$	- - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +
$f(x)$	$f(x_0)$

b)

De exemplu, fie funcția $f: R \to R$, $f(x)=x^3-x+2$. Avem $f'(x)=3x^2-1$ şi $f''(x)=6x$. Ecuația $f''(x)=0$ are soluția $x=0$. Cum $f''(x)<0$ dacă $x<0$ şi $f''(x)>0$ dacă $x>0$ rezultă că $x=0$ este punct de inflexiune pentru f, iar punctul $(0,2)$ este punct de inflexiune pentru graficul funcției.

Condiție suficientă pentru un punct de extrem

Studiind semnul derivatei întâi de o parte şi de alta a unui punct de extrem, se poate preciza dacă acesta este punct de maxim sau minim. Aceeaşi cocnluzie se poate trage din studiul semnului derivatei a doua într-un punct de extrem.

Teoremă:

Fie $f:(a,b)\to R$ o funcție de două ori derivabilă şi x_0 un punct de extrem pentru f.

1) Dacă $f''(x_0)>0$, atunci x_0 este punct de minim local pentru f.

2) Dacă $f''(x_0)<0$, atunci x_0 este punct de maxim local pentru f.

Demonstrație:

1) Din $f''(x_0)>0$, există $\delta>0$ astfel încât pe $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, f' este crescătoare. Dar din ipoteză $f'(x_0)=0$. Atunci $\forall x\in(x_0-\delta, x_0)$ avem $f'(x)\le f'(x_0)=0$, adică pe intervalul $(x_0-\delta, x_0)$ funcția f este descrescătoare. Analog dacă $x\in(x_0, x_0+\delta)$, atunci $0=f'(x_0)\le f'(x)$ şi prin urmare f este crescătoare pe intervalul $(x_0, x_0+\delta)$. De aici se deduce că x_0 este un punct de minim pentru f.

2) Analog cu demonstrația 1).

Observație: Dacă $f''(x_0)<0$, tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ se află deasupra graficului, iar dacă $f''(x_0)>0$ această tangentă este sub grafic.

2.5. Probleme rezolvate

Problema 1.

Dacă $a,b,c>0$, $a^x+b^x+c^x\geq 3$, $\forall x\in R$, atunci $abc=1$.

Soluție:

Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=a^x+b^x+c^x$, pentru care $f(0)=3$. Cum din ipoteză $f(x)\geq 3=f(0),(\forall)x\in R$, se deduce conform definiției unui punct de minim , că $x_0=0$ este punct de minim pentru f şi $0\in R$. Conform teoremei lui Fermat, derivata în acest punct este nulă, adică $f'(0)=0$.

Dar $f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c$, aşadar $\ln a+\ln b+\ln c=0$ sau $\ln(abc)=0$ de unde rezultă că $abc=1$.

Problema 2. (Generalizarea problemei 1.)

Dacă $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}a_i^x\geq\sum_{i=1}^{n}a_i$, $(\forall)x\in R$, atunci $\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}=1$.

Soluție.

Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x$. Este clar că $f(1)=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, atunci relația dată devine: $f(x)\geq f(1),(\forall)x\in R$, ceea ce arată că punctul $x=1$ este punct de minim pentru funcția f.

Conform teoremei lui Fermat, rezultă că $f'(1)=0$, unde:

$$f'(x)=a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\ldots+a_n^x\ln a_n$$

şi atunci

$$f'(1)=a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+\ldots+a_n\ln a_n=\ln a_1^{a_1}+\ln a_2^{a_2}+\ldots+\ln a_n^{a_n}\Rightarrow$$

$$f'(1)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\right)\Rightarrow\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\right)=0\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}=1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 3.

Să se arate că există un număr real a, $a > 0$ cu proprietatea : $a^x \geq x+1$, $(\forall)x \in R$.

Soluție:

Fie funcția $f : R \to R$ definită prin $f(x) = a^x - (x+1)$.

Din ipoteză avem $f(x) \geq 0, (\forall)x \in R$. Cum $f(0) = 0$ rezultă $f(x) \geq f(0)$ adică 0 este punct de minim al funcției f.

Aplicând teorema lui Fermat rezultă că $f'(0) = 0$, dar $f'(x) = a^x \ln a - 1$, deci $f'(0) = \ln a - 1 = 0 \Rightarrow a = e$.

În acest caz $f(x) = e^x - (x+1)$, derivata este $f'(x) = e^x - 1$ şi are rădăcina $x = 0$.

Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - 0 + + + + +
$f(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

Deci $x = 0$ este punct de minim pentru funcția dată, adică $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in R$, ceea ce înseamnă că $e^x \geq x+1, \forall x \in R$, de unde rezultă că $a = e$ verifică condițiile problemei.

Problema 4.

Aflați $a \in R$ astfel încât $\dfrac{ax}{1+x^2} \leq arctgx + \dfrac{1}{2}x^2, \ \forall x \in R.$

Soluție:

Fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = arctgx + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{ax}{1+x^2}$.

Evident că $f(x) \geq 0$ şi $f(0) = 0$ de unde rezultă că 0 este punct de minim pentru funcția f şi conform teoremei lui Fermat $f'(0) = 0$.

Dar $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + x - a \cdot \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, de unde rezultă că $f'(0) = 1 - a$ şi cum $f'(0) = 0$ obținem $a = 1$.

Demonstrăm acum că $\frac{x}{1+x^2} \le arctgx + \frac{1}{2}x^2, \forall x \in R$.

Fie $f: R \to R$, $f(x) = arctgx + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{1+x^2}$ şi studiem semnul acestei funcții.

Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + x - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = x\left[1 + \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right].$$

Aflăm rădăcinile derivatei întâi:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \; x \cdot \frac{1+2x^2+x^4+2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \;\; \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x^4 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 .$$

Se observă că ecuația $x^4 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 + x^2 + (x+1)^2 = 0$ nu admite soluții reale şi derivata întâi a funcției f admite o singură rădăcină $x = 0$.

Ținând cont că numitorul derivatei este un număr strict pozitiv oricare ar fi $x \in R$, atunci tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
x	- - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +
x^4+2x^2+2x+1	+ +
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	$\searrow$ $f(0)$ $\nearrow$

Din tabel se extrage concluzia că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi crescătoare pe $(0, +\infty)$ de unde rezultă că 0 este un punct de minim.

Atunci $f(x) \ge f(0)$, $\forall x \in R$, adică $\frac{x}{1+x^2} \le arctgx + \frac{1}{2}x^2, \forall x \in R$.

CAPITOLUL III
MINIME ŞI MAXIME GEOMETRICE

3.1. Aspecte teoretice şi practice

Problemele de minim şi maxim geometric oferă soluții practice în multe împrejurări: la construcții, în legătură cu economiile de material şi de muncă, la reducerea costului lucrărilor, la trasări de drumuri, căi ferate, etc.

Vreme îndelungată, pentru a evalua o suprafață cultivată, se măsura numai perimetrul, deoarece se credea că unui perimetru mai mare îi corespunde o arie mai mare. Geometrii au arătat de mult că această părere este cu totul greşită. Astfel:

„Un dreptunghi cu lungimea de 20 m şi lățimea de 4 m are perimetrul de 48 m şi aria de 80 m^2, un pătrat cu latura de 12 m are perimetrul tot de 48 m, însă aria lui este de 144 m^2.

Asemenea constatări au condus la studierea problemelor de aflare a figurilor care au aria cea mai mare dintre acelea care au acelaşi perimetru, şi invers, studierea problemelor de aflare a figurilor care au perimetrul cel mai mic dintre acelea care au aceeaşi arie.

Din cele spuse mai sus se desprinde următoarea idee: unor probleme de maxim sau de minim le corespund alte probleme, respectiv de minim sau de maxim, acestea fiind reciproce ale celor dintâi.

De exemplu:

∗ propoziția:

„*Pătratul este dreptunghiul care, cu un perimetru dat, are aria cea mai mare*”,

are reciproca:

„*Dintre dreptunghiurile echivalente, pătratul are perimetrul minim.*”;

∗ problemei directe de determinare a unui minim:

„*Dintre toate triunghiurile echivalente, care are perimetrul minim?*”

îi corespunde reciproca de determinare a unui maxim:

„*Dintre toate triunghiurile având acelaşi perimetru, care are aria maximă?*”.

Reciprocele se pot trata independent de propozițiile directe, însă ele pot fi şi deduse din acestea.

Rezolvarea problemelor de minim sau maxim se face prin transformarea acestora în probleme mai simple care să înlesnească găsirea soluției, sau care să conducă la o proprietate sau teoremă cunoscută, cum ar fi:

* Într-un triunghi unghiului mai mare i se opune latura mai mare şi invers, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.
* Distanța cea mai scurtă dintre două puncte oarecare luate pe două drepte paralele, este lungimea perpendicularei dintre cele două drepte.
* Dintre două coarde ale unui cerc, cea mai lungă este cea mai apropiată de centrul cercului.

Pentru rezolvarea problemelor de minim sau maxim, sunt utile şi teoreme cum ar fi:

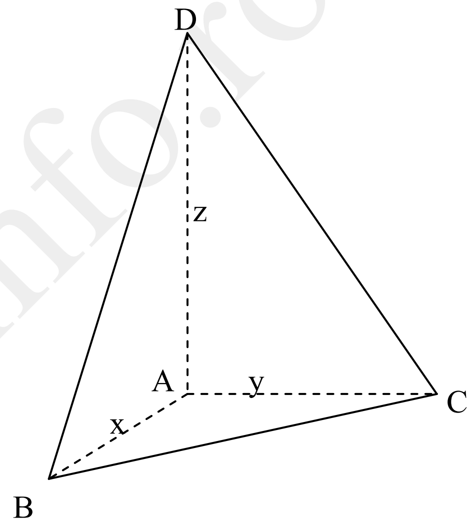
* Produsul a două variabile a căror sumă este constantă este maxim când factorii sunt egali, sau dacă ei nu pot fi egali, atunci când diferența lor este minimă.
* Suma a doi termeni al căror produs este constant, este minimă, când termenii sunt egali, sau dacă ei nu pot deveni egali, atunci când diferența lor este minimă.
* Dacă suma pătratelor a două cantități variabile este constantă, produsul celor două variabile este maxim când factorii sunt egali.
* Dacă produsul a două cantități variabile este constant, suma pătratelor factorilor este minimă când factorii sunt egali.

3.2. Probleme care se rezolvă cu ajutorul unor inegalități remarcabile

Problema 1.

Dacă suma lungimilor celor şase muchii ale unui tetraedru tridreptunghic ABCD, cu m(∢BAC)=m(∢CAD)=m(∢DAB)= 90^0 este *S*, să se determine volumul său maxim.

Soluție:



Notăm AB = x, AC = y, AD = z.

Avem $V_{ABCD} = \dfrac{A_{\Delta ABC} \cdot AD}{3} = \dfrac{xyz}{6}$.

Deoarece BC = $\sqrt{x^2+y^2}$, DC = $\sqrt{y^2+z^2}$,

BD = $\sqrt{z^2+x^2}$, este adevărată egalitatea

$S = x + y + z + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2}$.

Din inegalitatea mediilor $m_p \geq m_a \geq m_g$ deducem că:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow x+y+z \geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} \geq \sqrt{yz} \Rightarrow \sqrt{y^2+z^2} \geq \sqrt{2yz}$$

$$\sqrt{\frac{z^2+x^2}{2}} \geq \sqrt{zx} \Rightarrow \sqrt{z^2+x^2} \geq \sqrt{2zx}$$

şi obținem:

$$S \geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{2xy} + \sqrt{2yz} + \sqrt{2zx} .$$

Aplicăm din nou inegalitatea mediilor pentru $\sqrt{2xy}, \sqrt{2yz}, \sqrt{2zx}$ şi avem:

$$\frac{\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\sqrt{2zx}}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt{2xy}\sqrt{2yz}\sqrt{2zx}} \Rightarrow \sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\sqrt{2zx} \geq 3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{xyz} .$$

Deci :

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{xyz} \;\Rightarrow\; S \geq 3(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{xyz}$$

şi prin ridicare la cub avem $S^3 \geq 27 \cdot (7+5\sqrt{2})xyz$, de unde rezultă că:

$$xyz \leq \frac{S^3}{27 \cdot (7+5\sqrt{2})}.$$

Ținând cont de formula volumului, obținem:

$$V = \frac{xyz}{6} \leq \frac{S^3}{162 \cdot (7+5\sqrt{2})}.$$

Toate inegalitățile de mai sus devin egalități când $x = y = z$ şi în acest caz volumul îşi atinge valoarea maximă:

$$V_{\max} = \frac{S^3}{162 \cdot (7+5\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2}-7}{162} \cdot S^3.$$

Dacă luăm $x = y = z$ avem $S = 3x + 3\sqrt{2}x = 3 \cdot (1+\sqrt{2})x$ şi deci $x = y = z = \frac{\sqrt{2}-1}{3} \cdot S$.

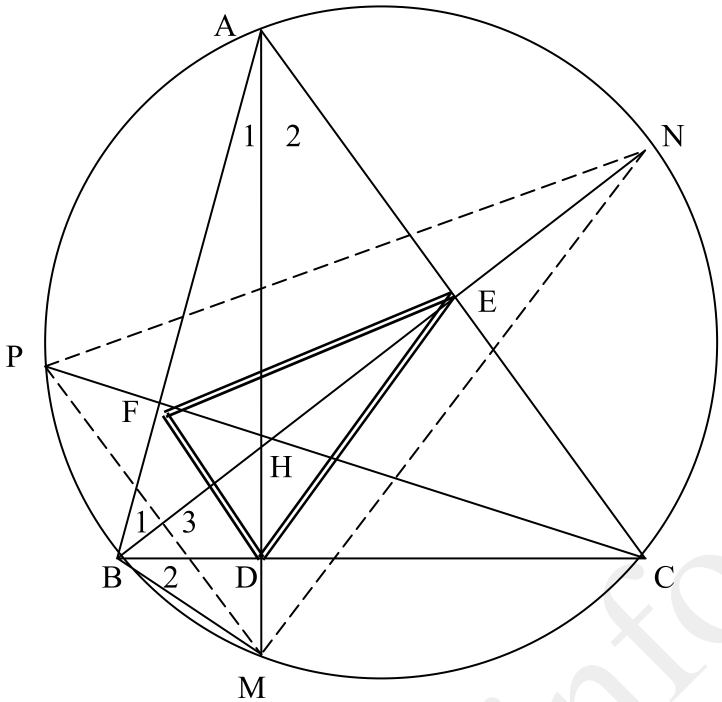
Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC în care se duc înălțimile AD, BE si CF . Acestea intersectează cercul circumscris triunghiului in M, N si P. Să se arate că este adevarată inegalitatea :

$$\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}\left(\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP}\right) \geq 9 .$$

Demonstrație:

Avem că $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle B_2$ deoarece subîntind acelaşi arc MC , dar $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle B_3$ având acelaşi complement C. Rezultă că $\sphericalangle B_2 \equiv \sphericalangle B_3$, de unde deducem că $\Delta BDM \equiv \Delta BDH$ şi de aici , MD=DH . Analog NE=EH şi PF=FH . Deci segmentele DE, EF şi FD sunt linii mijlocii în triunghiurile HMN, HNP şi respectiv HPM , ele sunt paralele cu bazele şi egale cu jumatatea bazelor.



Rezultă imediat că triunghiurile DEF şi MNP sunt asemenea şi au raportul de asemanare egal cu $\frac{1}{2}$. Rezultă că raportul ariilor este $\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$.

Avem:

$$\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} = \frac{AD}{AD + DM} + \frac{BE}{BE + EN} + \frac{CF}{CF + FP}.$$

Aplicând inegalitatea mediilor , $m_a \geq m_h$ obținem:

$$\frac{AD}{AD + DM} + \frac{BE}{BE + EN} + \frac{CF}{CF + FP} \geq 3 \cdot \frac{3}{1 + \frac{DM}{AD} + 1 + \frac{EN}{BE} + 1 + \frac{FP}{CF}} =$$

$$= \frac{9}{3 + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}} = \frac{9}{3 + \frac{HD \cdot BC}{AD \cdot BC} + \frac{HE \cdot AC}{BE \cdot AC} + \frac{HF \cdot AB}{CF \cdot AB}} = \frac{9}{3 + \frac{\sigma[ABC]}{\sigma[ABC]}} = \frac{9}{4}$$

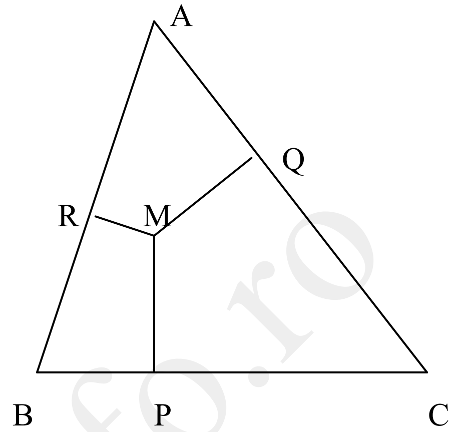
$$\Rightarrow \frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} \geq \frac{9}{4}.$$

Deci $\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}\left(\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP}\right) \geq 4 \cdot \frac{9}{4} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}\left(\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP}\right) \geq 9$,

ceea ce trebuia demonstrat .

Problema 3.

În interiorul unui triunghi oarecare ABC se consideră un punct M care se proiectează pe dreptele BC, CA, AB respectiv în P, Q, R. Să se precizeze poziția punctului M pentru care suma $\frac{BC}{MP}+\frac{CA}{MQ}+\frac{AB}{MR}$ să fie minimă.



Soluție:

Notând $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,

avem $a+b+c=2p$. (1)

Fie $MP=x$, $MQ=y$, $MR=z$.

Atunci:

$$\frac{BC}{MP}+\frac{CA}{MQ}+\frac{AB}{MR}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}.$$

Din $S=S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BMC}+S_{\Delta CMA}+S_{\Delta AMb}=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}\Rightarrow$

$$ax+by+cz=2S. \qquad (2)$$

Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz putem scrie:

$$(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geq(a+b+c)^2\Rightarrow$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{4p^2}{2S}.$$

Având în vedere că $S=pr\Rightarrow\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{2p}{r}$.

Prin urmare, $\min\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{2p}{r}$ când $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}}=\frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}}=\frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}}$, adică $x=y=z=r$

deoarece dacă înlocuim $x=y=z$ în (2) rezultă

$$\frac{(a+b+c)\cdot x}{2}=S\Rightarrow p\cdot x=S\Rightarrow x=\frac{S}{p}=r.$$

În concluzie, M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Problema 4.

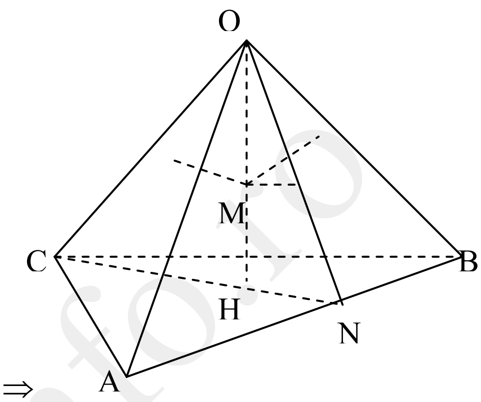
Fie OABC este un tetraedru pentru care $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ cu muchiile *OA, OB, OC* având lungimile *a, b, c* iar *OH* este înălțimea tetraedrului, $H \in (ABC)$. Fie M un punct situat la mijlocul lui *OH* şi d_1, d_2, d_3 distanțele de la *M* la fețele laterale *(OAB), (OBC), (OAC)*.

Arătați că:

a) $d_1ab + d_2bc + d_3ac = \dfrac{abc}{2}$;

b) $\dfrac{d_1d_2d_3}{abc} \le \left(\dfrac{1}{6}\right)^3$;

c) $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \ge \dfrac{OH^2}{4}$.



Soluție:

a) Scriem $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOAC} + V_{MABC} \Rightarrow$

$$V_{OABC} = \frac{S_{\Delta OAB} \cdot d_1}{3} + \frac{S_{\Delta OBC} \cdot d_2}{3} + \frac{S_{\Delta OAC} \cdot d_3}{3} + \frac{S_{\Delta ABC} \cdot MH}{3} \Rightarrow$$

$$V_{OABC} = \frac{abd_1}{6} + \frac{bcd_2}{6} + \frac{acd_3}{6} + \frac{S_{\Delta ABC} \cdot OH}{3 \cdot 2},$$

dar $\dfrac{S_{\Delta ABC} \cdot OH}{3} = V_{OABC}$, rezultă:

$$V_{OABC} - \frac{V_{OABC}}{2} = \frac{abd_1}{6} + \frac{bcd_2}{6} + \frac{acd_3}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{OABC}}{2} = \frac{abd_1}{6} + \frac{bcd_2}{6} + \frac{acd_3}{6} \Rightarrow \frac{abc}{12} = \frac{abd_1}{6} + \frac{bcd_2}{6} + \frac{acd_3}{6} \Rightarrow$$

$$d_1ab + d_2bc + d_3ac = \frac{abc}{2}.$$

b) Aplicând inegalitatea mediilor $m_a \ge m_g$, avem:

$$d_1ab + d_2bc + d_3ac \ge 3\sqrt[3]{d_1d_2d_3(abc)^2} \overset{a)}{\Rightarrow}$$

$$\left(\frac{abc}{2}\right)^3 \ge 27d_1d_2d_3(abc)^2 \Rightarrow \frac{d_1d_2d_3}{abc} \le \frac{1}{216} \Rightarrow \frac{d_1d_2d_3}{abc} \le \left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

c) Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz obținem:

$$(d_1ab + d_2bc + d_3ac)^2 \le \left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) \Rightarrow$$

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{(d_1 ab + d_2 bc + d_3 ac)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \stackrel{a)}{=} \frac{(abc)^2}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)}.$$

În ΔCON, dreptunghic în O, avem :

$$OH = \frac{OC \cdot \frac{OA \cdot OB}{AB}}{\sqrt{OC^2 + \frac{OA^2 \cdot OB^2}{AB^2}}} = \frac{c \cdot \frac{ab}{AB}}{\sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{AB^2}}} \Rightarrow$$

$$OH^2 = \frac{(abc)^2}{c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{(abc)^2}{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}.$$

Deci $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{OH^2}{4}$.

3.3. Probleme de geometrie care se rezolvă cu ajutorul derivatelor

Pentru a determina valoarea maximă sau minimă a unei mărimi, se exprimă valoarea acesteia (dacă e posibil) printr-o funcție şi apoi se studiază variația funcției obținute cu ajutorul derivatei.

Pentru a transpune rezolvarea problemei de maxim sau minim în limbajul matematic cu ajutorul unei funcții de o singura variabilă se foloseşte următorul algoritm:

1. Se alege un parametru convenabil, se notează de regulă cu x şi se exprimă mărimile din problemă în funcție de x;
2. Pentru mărimea ce trebuie să atingă valoarea maximă sau minimă, se determină o funcție de variabilă x;
3. Se stabileşte intervalul pe care funcția trebuie să atingă valoarea maximă sau minimă;
4. Cu ajutorul derivatei se determină punctele de maxim sau minim pe intervalul stabilit;
5. Se determină mărimea necunoscută din problemă şi dacă se cere şi valoarea maximă sau minimă.

Observații:

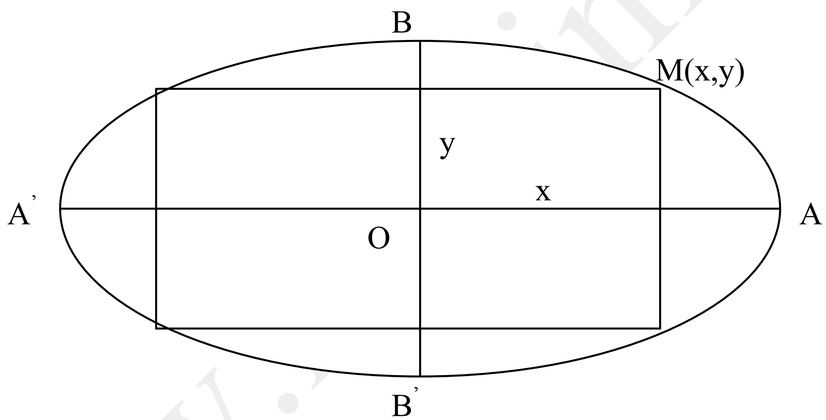
Dacă intervalul este deschis, $x \in (a,b)$ şi pe acest interval funcția are un număr finit de puncte de maxim sau minim, atunci valoarea cea mai mare sau cea mai mică a funcției va fi atinsă într-un punct de maxim sau de minim.

Nu întotdeauna este convenabil să se noteze cu x mărimea necunoscută a problemei. Se notează cu x acea mărime pentru care funcția obținută este uşor de cercetat cu ajutorul derivatei.

Problema 1.

Să se afle laturile dreptunghiului cu aria maximă, înscris în elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Soluție:



Fie M un punct al elipsei şi construim dreptunghiul care are un vârf în punctul M. Notăm abscisa lui M cu x şi calculăm ordonata astfel:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \iff y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

deci M are coordonatele $(x, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})$.

Aria dreptunghiului este:

$$S=L\cdot l \Rightarrow S(x)=2x\cdot 2y=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow$$

$$S(x)=4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Derivata functiei *S* este :

$$S'(x)=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Rightarrow\ S'(x)=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\ .$$

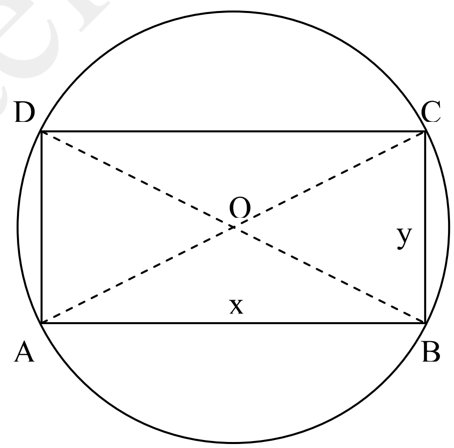
Rădăcinile derivatei sunt x = $\pm a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cum *S(x)* este pozitivă pentru $x\in\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ şi negativă pentru $x\in\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$, atunci $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ este un punct de maxim local. Deci $l=a\sqrt{2}$ şi $L=b\sqrt{2}$, iar $S_{\max}=2ab$.

Problema 2.

Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază *R*.

Soluție:

Se notează cu *x* şi *y* dimensiunile dreptunghiului *ABCD* înscris în cercul de centru *O* şi rază *R* ale cărui diagonale sunt diametre şi deci se intersectează în *O*.



Aria dreptunghiului este $S=xy$.

Se exprimă *y* în funcție de *x* şi în acest fel aria *S* devine o funcție de o singură variabilă.

În triunghiul dreptunghic *ABC*, aplicăm teorema lui Pitagora, $x^2+y^2=4R^2$, iar de aici, ținând cont că $y>0$, obținem $y=\sqrt{4R^2-x^2}$. Aşadar aria va fi $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $x\in(0,2R)$. Trebuie să determinăm pe *x* pentru care aria *S* să fie maximă. Derivata funcției S este $S'(x)=\frac{2(2R^2-x^2)}{\sqrt{4R^2-x^2}}$, iar ecuația $S'(x)=0$ are soluția $x=R\sqrt{2}$ $(x>0)$.

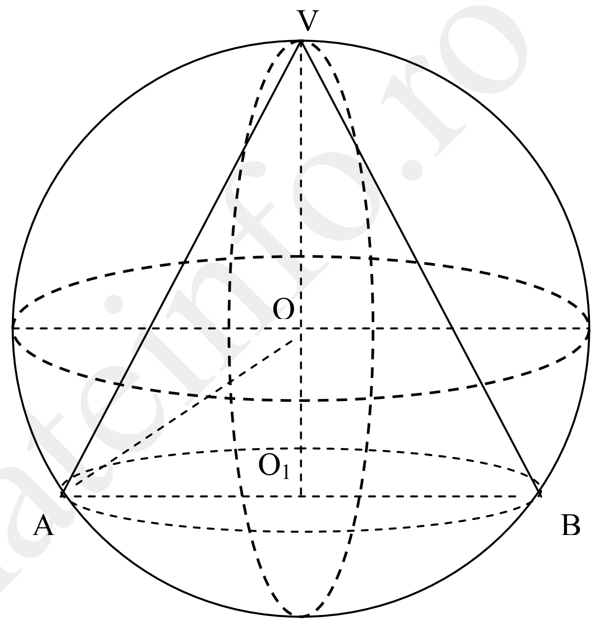
Deoarece $S'(x)>0$ pentru $x<R\sqrt{2}$ şi $S'(x)<0$ pentru $x>R\sqrt{2}$, deducem că $x=R\sqrt{2}$ este punct de maxim pentru *S*, iar $\max\limits_{x\in(0,2R)}S(x)=2R^2$. De aici obținem că

$y = R\sqrt{2}$. Aşadar dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul de rază *R* este pătratul de latură $R\sqrt{2}$.

Problema 3.

Să se determine înălțimea unui con înscris într-o sferă de rază *R*, astfel încât volumul conului să fie maxim.

Soluție:



Notăm $AO_1 = x$. Conform teoremei lui Pitagora în ΔAOO_1 rezultă că $OO_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ iar

$H_{con} = VO_1 = \sqrt{R^2 - x^2} + R$.

Atunci volumul conului va fi:

$$V_{con} = \frac{1}{3} A_b \cdot H_{con} \Rightarrow$$

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi x^2(\sqrt{R^2 - x^2} + R)$$

Am obținut funcția:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(\sqrt{R^2 - x^2} + R) \quad \text{unde } x \in (0,R).$$

Cercetăm funcția *V(x)* cu ajutorul derivatei:

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi\left(x^2\sqrt{R^2 - x^2} + x^2 R\right)' = \frac{1}{3}\pi\left(2x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} + 2xR\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2x\left(R^2 - x^2\right) - x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} + 2xR\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2xR^2 - 2x^3 - x^3 + 2xR\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2xR^2 - 3x^3 + 2xR\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\pi \cdot x \cdot \frac{2R^2 - 3x^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Rezolvăm ecuația $V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2R^2 - 3x^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2} = 0 \\ x^2 \neq R^2 \end{cases}$;

$$2R\sqrt{R^2 - x^2} = 3x^2 - 2R^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4R^2\left(R^2 - x^2\right) = \left(3x^2 - 2R^2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$4R^4 - 4R^2x^2 = 9x^4 - 12x^2R^2 + 4R^4 \quad \Leftrightarrow \quad 9x^4 - 8x^2R^2 = 0 \; \Leftrightarrow$$

$$x^2\left(9x^2 - 8R^2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{8R^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \; \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{2R\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Dar ținând cont de condiția că $x \in (0, R)$, rezultă că $x = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$ care este punct de maxim. Atunci $H = \sqrt{R^2 - \dfrac{8R^2}{9}} + R = \sqrt{\dfrac{R^2}{9}} + R = \dfrac{R}{3} + R = \dfrac{4}{3}R$.

Deci , volumul conului înscris în sfera de rază R este maxim dacă înălțimea conului este $H = \dfrac{4}{3}R$.

Bibliografie

1. L. Aramă, T. Morozan, *Probleme de calcul diferențial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978;

2. M. Burtea , G. Burtea , *Matematică - manual pentru clasa a IX-a*, Editura Carminis, Piteşti 2004;

3. J. Crînganu , *Analiză matematică*, Ed. Fundației Universitare „Dunărea de Jos”, Galați 2006;

4. I. C. Drăghicescu , V. Masgras , *Probleme de geometrie* , Ed. Tehnică , Bucureşti 1987;

5. M. Ganga , *Elemente de analiză matematică - manual pentru clasa a XI-a*, Editura Mathpress, Ploieşti 2004;

6. M. Ganga , M*atematică - manual pentru clasa a X-a*, Editura Mathpress, Ploieşti 2005;

7. L. Nicolescu , V. Boskoff , *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti 1990;

8. L. Olăraşu, *Probleme de extrem în matematică*, Editura Pim, Iaşi 2009;

9. I. Petrică , E. Constantinescu , D. Petre , C. Ştefan , *Exerciții şi probleme de analiză matematică, clasa a XI-a*, Editura Petrion, Bucureşti 2002;

10. I. F. Suvorov , *Curs de matematici superioare*, Editura Tehnică, Bucureşti 1955.