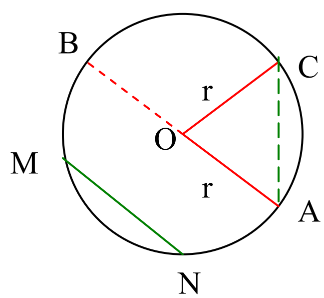
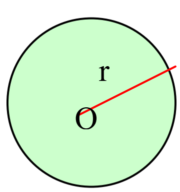
CERCUL

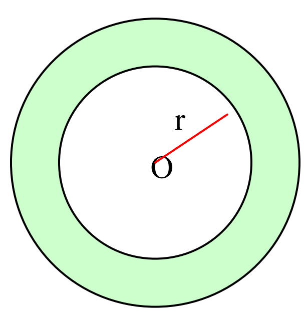
Prof. V Corcalciuc
Scoala nr. 146 I .G. Duca Bucuresti
(Lectie facuta dupa manualul de clasa a 7-a Prof.Radu)

Definitie: *Cercul cu centrul in O si de raza r este multimea tuturor punctelor din plan situate la distanta r fata de O. Se noteaza* $\mathcal{C}(O,r)$.



∗ Daca A este un punct al cercului, distanta dintre punctul A si O este ***raza*** cercului.
∗ Daca M si N sunt doua puncte ale unui cerc, segmentul $[MN]$ se numeste ***coarda.***
∗ O coarda ce contine centrul cercului se numeste ***diametru***.
In figura, $[AC]$, $[MN]$ sunt coarde, iar $[AB]$ este diametru.
∗ Cercurile care au raze egale se numesc cercuri congruente.
∗ Daca doua cercuri au acelasi centru si aceeasi raza, ele coincid.
∗ Cercurile care au acelasi centru se numesc cercuri concentrice.



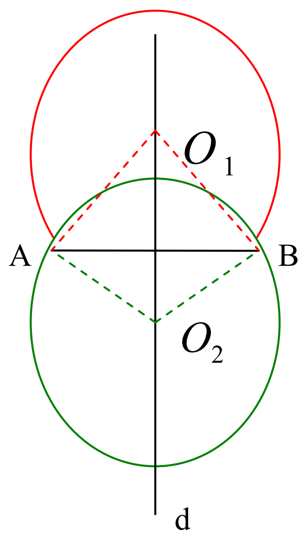


Fiind dat cercul $\mathcal{C}(O,r)$, multimea punctelor M din plan pentru care $OM < r$ se numeste *interiorul* cercului si se noteaza: Int$\mathcal{C}(O,r)$. Multimea punctelor N din plan pentru care $ON > r$, se numeste *exteriorul* cercului si se noteaza: Ext$\mathcal{C}(O,r)$.

Se numeste *disc* de centru O si raza r, r >0, multimea $\mathcal{C}$(O,r)$\cup$Int$\mathcal{C}$(O,r) si se noteaza D(O,r).

PROPOZITII.

1. *Fiind date doua puncte distincte A si B, exista o infinitate de cercuri ce contin punctele A si B .*



Fie d mediatoarea segmentului $[AB]$ Punctele mediatoarei **d** au proprietatea ca sunt egal departate de capetele segmentului $[AB]$. Atunci orice cerc care are centrul pe mediatoarea segmentului $[AB]$ contine punctele A si B.

2. *Oricare trei puncte distincte ale unui cerc sunt necoliniare.*
3. *Prin trei puncte necoliniare trece un cerc.*
4. *Daca A, B, C sunt trei puncte distincte ale unui cerc, atunci centrul cercului se afla la intersectia mediatoarelor triunghiului ABC.*
5. *Daca doua cercuri au trei puncte distincte comune, atunci ele coincid.*

EXERCITII

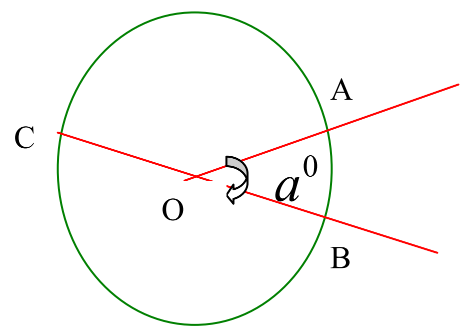
Sa se construiasca triunghiul ABC si apoi cercul circumscris triunghiului.

a) AB=7cm; AC=8cm; BC=9cm;
b) AB=AC=6cm; BC=10cm
c) AB=6cm; AC=8cm; $\angle$BAC=90^0
d) AB=AC=BC=8cm

Se dau punctele A si B asfel incat AB=5cm.

a) Exista cercuri de raza 2cm care sa contina punctele A si B? Dar de 2,5cm?
b) Cate cercuri de raza 4cm trec prin punctele A si B?

UNGHI LA CENTRU. ARCE DE CERC.



Un unghi care are varful in centrul cercului se numeste unghi la centru.

$*$ Multimea punctelor de pe cerc situate in interiorul unghiului $\angle$AOB reunite cu A si B se numeste *arc mic* si se noteaza $\overset{\frown}{AB}$.

$*$ Multimea punctelor de pe cerc situate in exteriorul unghiului $\angle$AOB, reunite cu A si B se numeste *arc mare* si noteaza $\overset{\frown}{ACB}$, unde $C \notin Int\angle AOB$.

$*$ Punctele A si B se numesc capetele arcelor.

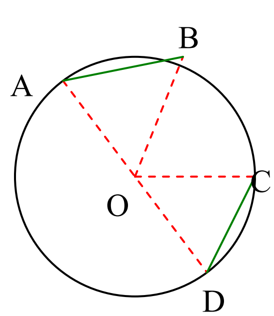
$*$ Daca A si B sunt capetele unui diametru, arcele se numesc *semicercuri*.

$*$ Masura arcului mic este egala cu a^0; masura arcului mare este egala cu $360^0 - a^0$; masura unui semicerc este 180^0.

$*$ doua arce sunt congruente daca au aceeasi masura.

TEOREMA 1.

La arce congruente corespund coarde congruente(in acelasi cerc sau in cercuri congruente).



Se dau arcele AB si CD congruente.

Triunghiurile $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ cazul

LUL $\begin{cases} [AO] \equiv [CO] \\ [BO] \equiv [DO] \\ \angle AOB \equiv \angle COD \end{cases}$

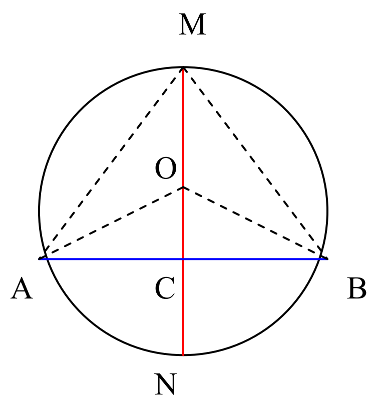
Rezulta ca $[AB] \equiv [CD]$

Reciproca.

La coarde congruente corespund arce mici congruente(in acelasi cerc sau in cercuri congruente)

TEOREMA 2.

Daca A si B sunt doua puncte distincte ale unui cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda AB imparte coarda si arcele in doua parti congruente.

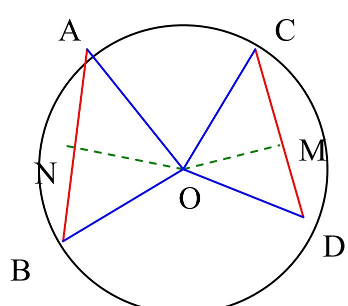


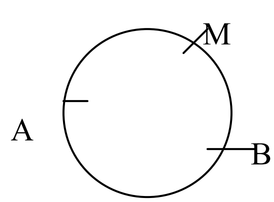
Diametrul $[MN]$ este perpendicular pe coarda $[AB]$.
ΔAOB este isoscel, $[OA]$ si $[OB]$ fiind raze.OC face parte din diametrul cercului, deci este inaltime in triunghi. Rezulta ca OC este si mediana, deci $[AC] \equiv [CB]$. Dar $[OC]$ este si bisectoare, deci $\angle AOC \equiv \angle COB$ de unde rezulta ca si arcele sunt egale.

TEOREMA 3.

Daca doua coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci distantele de la centru la coarde sunt egale.

Triunghiurile $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ avand toate laturile congruente , rezulta ca si inaltimile $[ON]$ si $[OM]$ sunt congruente.



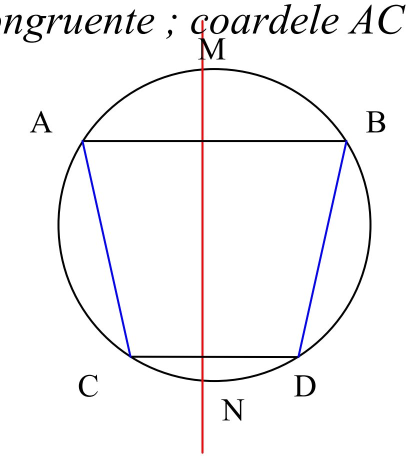


TEOREMA 4.

Daca A si B sunt doua puncte distincte ale unui cerc si punctul M apartine arcului determinat de ele, atunci masura arcului $\overset{\frown}{AB}$ *este egala cu masura arcului* $\overset{\frown}{AM}$ *plus masura arcului* $\overset{\frown}{MB}$.

TEOREMA 5.

Daca $[AB]$ si $[CD]$ sunt doua coarde paralele ale unui cerc, iar punctele A si C sunt situate de aceeasi parte a diametrului perpendicular pe coarde atunci: arcele mici AC si BD sunt congruente ; coardele AC si BD sunt congruente.



MN este diametrul perpendicular pe coardele $[AB]$ si $[CD]$ deci M este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$ iar N este mijlocul arcului $\overset{\frown}{CD}$. De aici rezulta ca arcele $\overset{\frown}{AC}$ si $\overset{\frown}{BD}$ sunt congruente ca fiind diferente de arce congruente. Arcele fiind congruente si coardele sunt congruente.

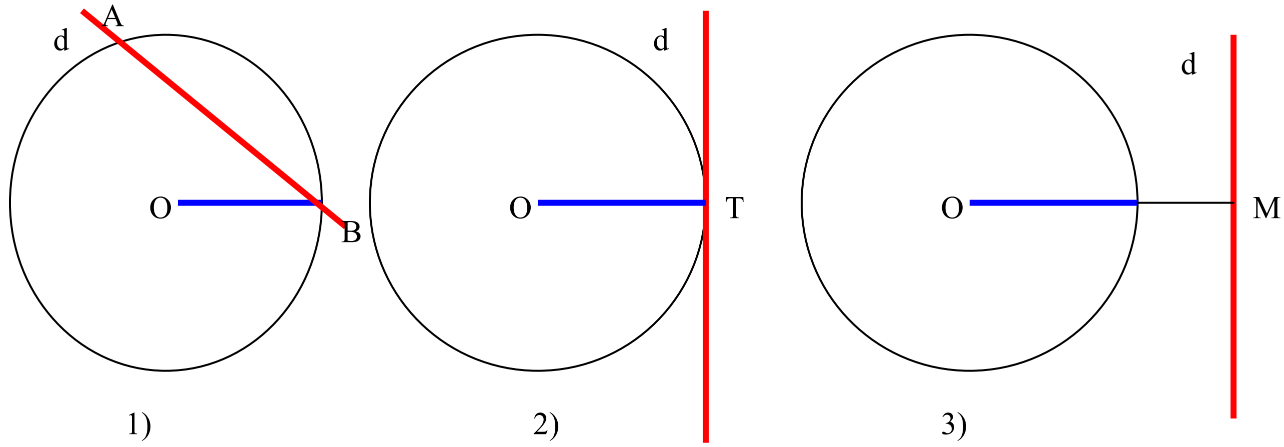
PROBLEME

1. Care este masura unghiului format de acele unui ceas la ora 9 si 25 de minute? Dar la ora 9 si 15 minute?
2. Se considera intr-un cerc o coarda $[AB]$ si diametrul $[MN]$ perpendicular pe ea.Unghiul AOB este de 55^0. Sa se afle masurile arcelor AM, AN, MB, BN.
3. Se da cercul cu raza de 6cm.Punctele A si B sunt pe cerc si determina arcul AB cu masura de 60^0.Sa se calculeze marimea coardei AB si distanta de la punctul B la OA.
4. Intr-un cerc se iau coardele paralele $[AB]$ si $[CD]$. Diametrul $[MN]$ le intersecteaza in punctele P si T astfel incat $[OT] \equiv [OP]$. Sa se arate ca :
   a) $[AB] \equiv [CD]$.
   b) Arcele AB si CD sunt congruente.
   c) Punctele C, O, si B sunt coliniare.
   d) ABDC este un dreptunghi.
5. Intr-un cerc de centru O coarda $[CD]$ intersecteaza diametrul $[AB]$ intr-un punct E astfel incat unghiul

$\angle CEB = 30^o$. Fie $[FG]$ diametrul perpendicular pe CD, punctul F fiind de aceeasi parte a lui CD ca si A. Daca AE=2cm si EB=6cm:

a) sa se calculeze distanta de la O la CD;
b) sa se calculeze masurile arcelor mici AF, FB si BG;
c) sa se demonstreze ca arcele mici FB si AG congruente;

POZITIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FATA DE UN CERC.



1) Dreapta *secanta* fata de un cerc este dreapta care are doua puncte comune cu cercul: A si B.
2) Dreapta *tangenta* la cerc este dreapta care are un singur punct comun cu cercul: T. Dreapta tangenta la cerc este perpendiculara pe raza in punctul de intersectie al ei cu cercul.
3) Dreapta *exterioara* cercului este dreapta care *nu* are puncte comune cu cercul.

PROBLEME

1. Fie ABC un triunghi echilateral cu latura de 6cm, iar *C* un cerc cu centrul in A si raza 2cm. Stabiliti pozitia dreptei BC fata de *C*(A,2cm).

2. Fie M, N doua puncte pe dreapta d astfel incat MN=8cm, iar O un punct exterior dreptei d astfel incat OM=10cm si $ON \perp d$. Stabiliti pozitia dreptei d fata de cercul *C*(O,r) daca r este egal cu: a) 6cm; b) 2cm; c)8cm; d) 3cm.

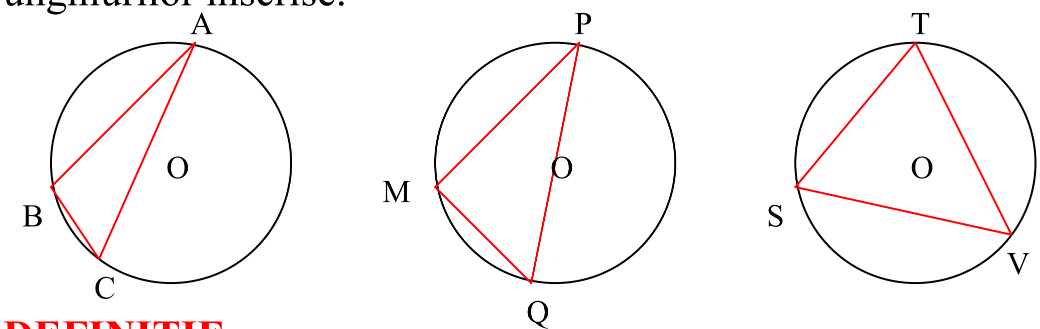
UNGHI INSCRIS IN CERC

DEFINITIE

Unghiul $\angle BAC$ se numeste unghi inscris in cercul C(o,r) daca A,B si C apartin cercului C(o,r).

Unghiurile BAC, MPQ si STV sunt unghiuri inscrise in cerc.

Arcele mici BC, MQ, respectiv SV sunt *arce cuprinse* intre laturile unghiurilor inscrise.



DEFINITIE

Spunem ca triunghiul ABC este *inscris* in cerc daca varfurile sale apartin cercului.

TEOREMA I

Masura unui unghi inscris in cerc este jumatate din masura arcului cuprins intre laturile sale.

In figurile de mai sus avem:

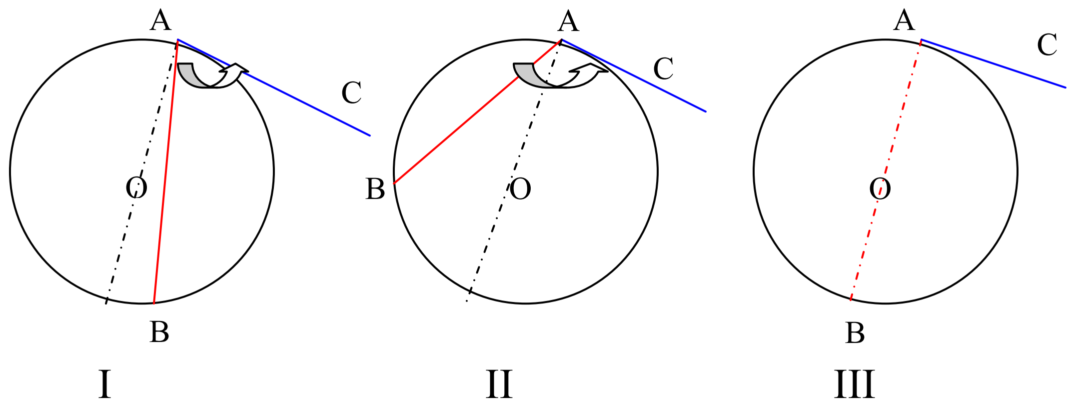
$$m(\angle BAC)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BC}\right)$$

$$m(\angle MPQ)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{MQ}\right)$$

$$m(\angle STV)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{SV}\right)$$

TEOREMA II

Masura unui unghi cu varful pe cerc, avand una din laturi secanta, iar cealalta latura tangenta cercului, este jumatate din masura arcului de cerc inclus in interiorul unghiului.

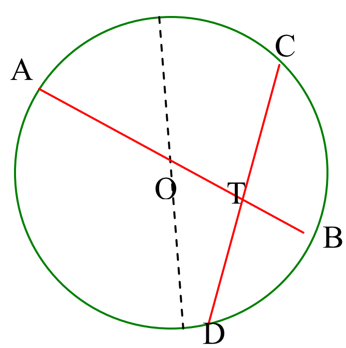


Cazul I: unghiul BAC este ascutit. $\angle BAC = \frac{arc B\widehat{A}}{2}$

Cazul II: unghiul BAC este obtuz. $\angle BAC = \frac{arc B\widehat{A}}{2}$

Cazul III: unghiul BAC este drept. $\angle BAC = \frac{arc B\widehat{A}}{2} = 90^0$

UNGHI CU VARFUL IN INTERIORUL CERCULUI



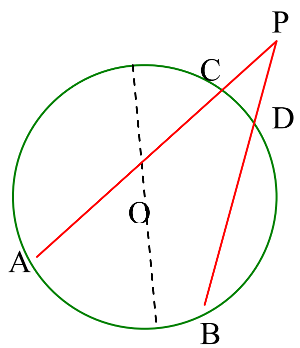
Unghiul cu varful in interiorul cercului $\angle ATC$ (care este congruent cu $\angle DTB$fiind unghiuri opuse la varf) are ca *masura jumatate din suma masurilor arcelor cuprinse intre laturile sale.*

$$\angle ATC = \frac{arc A\widehat{C} + arc D\widehat{B}}{2}$$

Avem aceeasi relatie pentru $\angle ATD \equiv \angle CTB$ (opuse la varf)

$$\angle ATD = \frac{arc A\widehat{D} + arc C\widehat{B}}{2}$$

UNGHI CU VARFUL IN EXTERIORUL CERCULUI



Unghiul cu varful in exteriorul cercului, $\angle$ APB are ca masura jumatate di diferenta arcelor cuprinse intre laturile sale.

$$\angle APB = \frac{arc\widehat{AB} - arc\widehat{CD}}{2}$$

PROBLEME

1. Punctele A,B,C,D,E se afla in aceasta ordine pe cercul C(O,r) astfel incat $m(arc\widehat{AB}) = m(arc\widehat{BC}) = m(arc\widehat{CD}) = 60^0$ iar $m(arc\widehat{ED}) = 50^0$.

    a) Calculati masurile unghiurilor $\angle AEB, \angle ADB, \angle ACB$

    b)Aratati ca (DB este bisectoarea $\angle ADC$.

    c)Aratati ca A, O, D sunt coliniare.

2. In triunghiul ABC $m(\angle A) = 100^0$ iar $m(\angle B) = 50^0$. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

    a) Calculati masurile arcelor mici AC,AB,BC.

    b) Aratati ca $O \notin Int\Delta ABC$.

    c) Calculati unghiurile triunghiului AOC.

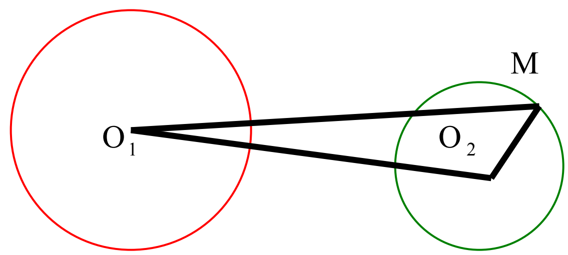
    d) Fie D un punct situate de aceeasi parte a dreptei BC ca si punctul A astfel incat $m(\angle DCA) = 50^0$. Demonstrati ca DC este tangenta la cerc.

3. In triunghiul ABC, $\angle A = 60^0$, $\angle B = 75^0$. Tangenta in A la cercul circumscris triunghiului intersecteaza BC in D. Calculati masurile unghiurilor triunghiurilui ADB.

POZITIILE RELATIVE A DOUA CERCURI.

Fie doua cercuri $C_1(O_1,R_1)$ si $C_2(O_2,R_2)$. Distanta dintre centrele celor doua cercuri este O_1O_2. Avem urmatoarele cazuri:

1.

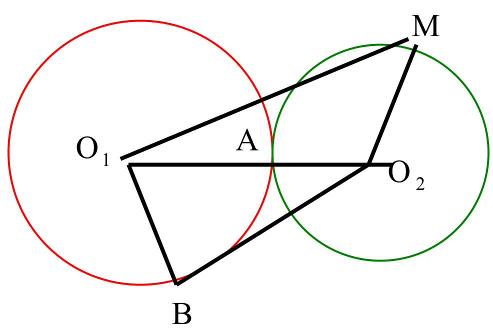


$O_1O_2 > R_1 + R_2$; fie $M \in C_2(O_2,R_2)$; $O_2M = R_2$:

Atunci $O_1M \geq O_1O_2 - O_2M > (R_1+R_2) - R_2 = R_1$

In acest caz cercurile se numesc *exterioare.*

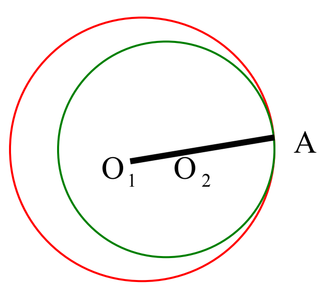
2.



$O_1O_2 = R_1 + R_2$; cercurile au un singur punct comun A. Daca ar mai avea un punct comun B, atunci : $O_1B + O_2B = R_1 + R_2$ si $B \notin O_1O_2$, insa $O_1B + O_2B > O_1O_2 = R_1 + R_2$, contradictie.

Cercurile se numesc *tangente exterior.*

3.

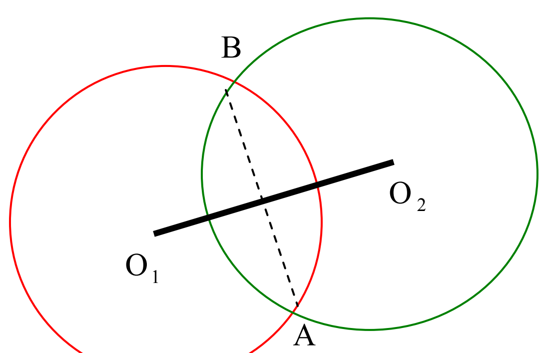


$O_1O_2 = R_1 - R_2$

In acest caz cercurile sunt tot tangente dar, sunt *tangente interior.*

Punctele O_1, O_2, A sunt coliniare.

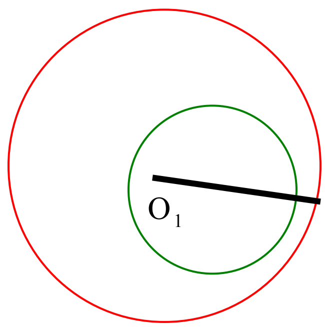
4.



$R_1 - R_2 < O_1 - O_2 < R_1 + R_2$

In acest caz cercurile au doua puncte comune si ele se numesc *secante.*

5.



$O_1O_2 < R_1 - R_2$

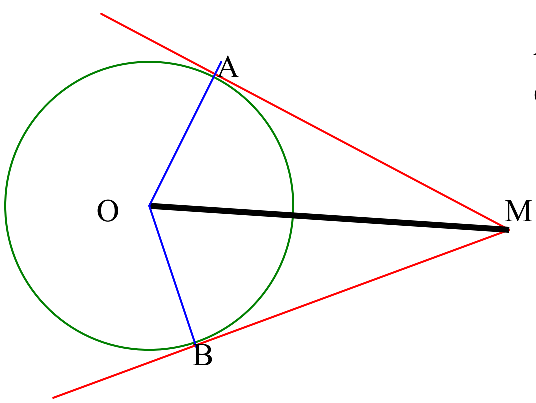
In acest caz cele doua cercuri nu au puncte comune. Ele se numesc *interioare.*

TEOREMA 1

Prin orice punct exterior unui cerc trec doua drepte tangente la cerc.

TEOREMA 2

Tangentele duse dintr-un punct exterior unui cerc sunt congruente.



AM si BM sunt tangentele duse din punctul M la cerc.

Triunghiurile OAM si OBM sunt dreptunghice in punctele A, respective B deoarece stim ca tangenta este perpendiculara pe raza.

Cele doua triunghiuri sunt congruente:

$$\Delta OAM \equiv \Delta OBM \begin{cases} OA \equiv OB \\ OM laturacomuna(ipotenuza) \end{cases}$$

De aici rezulta ca $AM \equiv BM$

PROBLEME

1. Doua cercuri secante de raze 2cm, respectiv 5cm, au distanta dintre centre egala cu 2x-1,cu x$\in$Z. Calculati x.
2. Doua cercuri sunt secante in punctele A si B.

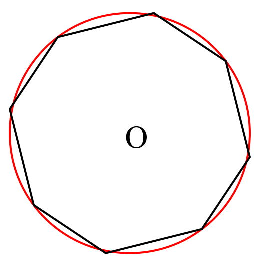
Sa se arate ca $AB \perp O_1O_2$ unde O_1 si O_2 sunt centrele cercurilor.
3. Fie A un punct exterior cercului *C(O,r)*. Sa se demonstreze ca (AO este bisectoarea unghiului determinat de tangentele duse din A la cerc.

POLIGOANE REGULATE

DEFINITIE

Un poligon convex cu toate laturile si toate unghiurile congruente se numeste poligon regulat.

(Exemple cunoscute patratul, triunghiul echilateral.)
Daca printr-un procedeu oarecare impartim cercul in n arce congruente, si unim succesiv punctele de diviziune, obtinem un poligon cu n laturi congruente.



Laturile sunt congruente deoarece subintind arce de cerc de aceeasi masura: $\frac{360^0}{n}$(masura unghiului la centru corespunzator)

Unghiurile poligonului sunt unghiuri inscrise in cerc care cuprind intre laturi arce de masura: $\frac{180^0}{n} \bullet (n-2)$.

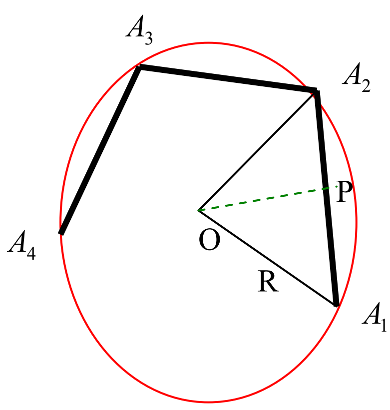
TEOREMA

Orice poligon regulat se poate inscrie intr-un cerc.

DEFINITIE

Segmentul dus din centrul cercului circumscris unui poligon regulat, perpendicular pe latura poligonului, se numeste apotema

CALCULUL ELEMENTELOR IN POLIGOANE REGULATE



Vom calcula latura l_n si apotema a_n in functie de raza R a cercului circumscris.

Unghiul la centru corespunzator fiecarei laturi este: $\frac{360^0}{n}$

Triunghiul OA_1A_2 este isoscel.

In triunghiul OPA_1 dreptunghic in P ($OP \perp A_1A_2$, OP apotema) avem:

$$\sin \angle POA_1 = \frac{PA_1}{OA_1} \Rightarrow PA_1 = OA_1 \sin \angle POA_1 \Rightarrow l_n = 2R \sin \frac{180^0}{n}$$

$$\cos \angle POA_1 = \frac{OP}{OA_1} \Rightarrow OP = OA_1 \cos \angle POA_1 \Rightarrow a_n = R \cos \frac{180^0}{n}$$

Aria poligonului este:

$$A_n = n \bullet A(\Delta A_1OA_2) = n \bullet \frac{OA_1 \bullet OA_2 \bullet \sin \angle A_1OA_2}{2} = n \bullet \frac{1}{2} \bullet R \bullet R \bullet \sin \frac{360^0}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^0}{n}$$

Deci :

$$l_n = 2R \sin \frac{180^0}{n}$$

$$a_n = R \cos \frac{180^0}{n}$$

$$A_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^0}{n}$$

	Latura	Apotema	Aria	Perimetrul
Triunghi echilateral	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$3R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3R\sqrt{3}$
Patrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	$4R\sqrt{2}$
Hexagon regulat	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$	$6R$

	Inaltimea	Apotema	Aria	Raza
Triunghi echilateral	$\frac{l\sqrt{3}}{2}$	$\frac{l\sqrt{3}}{6}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$
Patrat		$\frac{l}{2}$	l^2	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$
Hexagon regulat		$\frac{l\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$	l

PROBLEME

Sa se completeze tabelul urmator:

R	l_3	a_3	A_3	R	l_4	a_4	A_4	R	l_6	a_6	A_6
6				10				3			
	12				8				6		
		4				$5\sqrt{2}$				$2\sqrt{6}$	
			$3\sqrt{3}$				100				72

LUNGIMEA CERCULUI SI ARIA DISCULUI

1. LUNGIMEA CERCULUI. LUNGIMEA ARCULUI DE CERC.

Valoarea raportului dintre lungimea unui cerc si lungimea diametrului sau se noteaza cu π. Acesta este un numar irrational pe care il aproximam cu 3,14.

Deci: $\frac{L}{2R} = \pi$

Lungimea cercului este deci: $L = 2\pi R$

Pentru calculului lungimii unui arc de cerc se foloseste regula de trei simpla admitand ca lungimea arcului este direct proportionala cu masura arcului.

Masura arcului in grade   Lungimea arcului de cerc

$360^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\pi R$

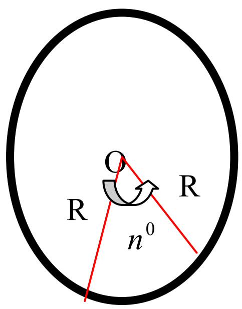
$1^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2\pi R}{360^0} = \frac{\pi R}{180^0}$

$n^0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \frac{\pi R}{180^0} \bullet n$

2.ARIA DISCULUI. ARIA SECTORULUI DE CERC.

Aria unui cerc de raza r se calculeaza cu formula:

$$A = \pi R^2$$



Se numeste sector de cerc o portiune din interiorul unui cerc cuprinsa intre doua raze.

Fiecarui sector de cerdc ii corespunde un arc pe cerc.

Pentru calculul ariei sectorului de cerc, de raza R, care corespunde unui arc de cerc de masura n^0, folosim regula de trei simpla, aria sectorului fiind proportionala cu masura arcului.

Masura arcului in grade   Aria sectorului de cerc

$360^0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \pi R^2$

$1^0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \frac{\pi R^2}{360^0} \bullet 1$

$n^0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \frac{\pi R^2}{360^0} \bullet n$

Aria sectorului de cerc de raza R se calculeaza cu formula

$$A = \frac{\pi R^2}{360^0} \bullet n$$

PROBLEME

1. Sa se afle lungimea unui cerc pentru fiecare caz in parte, daca AB este coarda si se cunosc:

a) $m(arcAB) = 45^0, lungimeaarculuiAB = 6\pi cm$

b) $m(arcAB) = 60^0, aria\sec torului, \det er\min atdecentrusicoardaAB = 216cm^2$

c) $m(arcAB) = 75^0, aria\sec torului = 30\pi cm^2$

2. Intr-un cerc de centru O se da coarda AB. Sa se afle masura arcului AB in fiecare caz in parte:

a) aria cercului de $256\pi cm^2 silungimeaarculuiABde8\pi cm$

b) lungimea cercului de $36\pi cm si aria \sec toruluicorespunzatorde 27\pi cm^2$