PROBLEME PROPUSE PENTRU OLIMPIADA LOCALA DIN 24 IANUARIE 2009

CLASA a V-a

1. Ma gandesc la un numar de patru cifre scris in baza 2. Daca il trec in baza zece obtin un patrat perfect. La ce numar m-am gandit?

CLASA a VII-a

1. Fie ABCD trapez dreptunghic cu AB||CD si AB<CD; AC$\perp$BD si $m\angle(BDC)=60°$.

Demonstrati ca:

a) CD=3AB;

b) Fie O intersectia diagonalelor trapezului. Daca P este simetricul lui D fata de O si S este mijlocul segmentului AC, atunci dreapta PS imparte Δ BOC in doua suprafete de arii egale.

(Problema a fost data la etapa locala -24.01.2009)

CLASA a IX-a

1. Sa se demonsteze inegalitatea:

$$\frac{2\cdot 2^2-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4^2-1}{3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6^2-1}{5\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 2008^2-1}{2007\cdot 2008}\geq 2^{1004}\cdot\sqrt{2009}$$

SOLUTII

CLASA a V-a

1. $abcd_{(2)} = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2^1 + d\cdot 2^0$

$= 8a+4b+2c+d;$

$a,b,c,d=\{0,1\};$

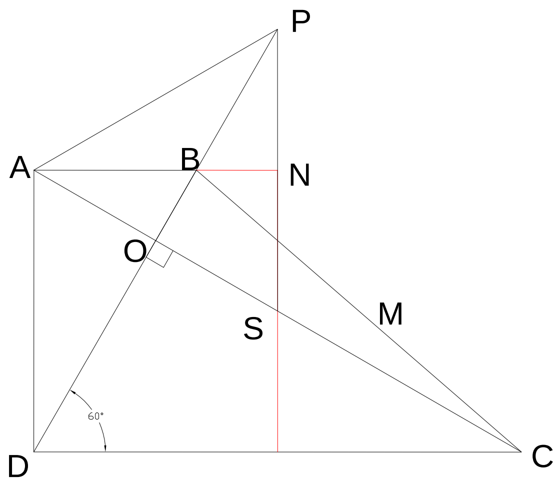
$a\neq 0$ atunci $a=1 \Rightarrow 8+4b+2c+d=k^2$

$4b+2c+d=k^2-8 \Rightarrow k\geq 3.$

Cum $b,c,d=\{0,1\} \Rightarrow$ valoarea maxima pe care o poate lua $4b+2c+d$ este 7. Pentru $k\geq 4$, $k^2-8\geq 8 \Rightarrow k=3$

Atunci: $4b+2c+d=1 \Rightarrow b=0$, $c=0$, $d=1$, iar numarul cautat este $1001_{(2)}$.

CLASA a VII-a



CLASA a IX-a

1. Din inegalitatea mediilor pentru numerele: $\frac{1}{2}$ si $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ si $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$ si $\frac{6}{7}$;... $\frac{2007}{2008}$ si $\frac{2008}{2009}$;

$m_h \leq m_g$;

$$\frac{2}{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2}{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}} \leq \sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}$$

$$\frac{2}{\frac{6}{5}+\frac{7}{6}} \leq \sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}}$$

.

.

.

$$\frac{2}{\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}} \leq \sqrt{\frac{2007}{2008}\cdot\frac{2008}{2009}} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}}\cdot\frac{2}{\frac{6}{5}+\frac{7}{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}\cdot\frac{2008}{2009}} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}}\cdot\frac{2}{\frac{6}{5}+\frac{7}{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}} \leq \sqrt{\frac{1}{2009}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{7}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}\right) \geq 2^{2008}\cdot\sqrt{2009}$$

$$\frac{n}{n-1}+\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+n^2-1}{n\cdot(n-1)}=\frac{2\cdot n^2-1}{n\cdot(n-1)}$$

Pentru n=2, 4, 6,….2008 se obtine inegalitatea ceruta.

Prof. Elena Simona Tudor,
Scoala "George Enescu", Sinaia