„ **Este mai important cum gândeşti, decât ce gândeşti”**

J. W. Goethe

1. *Istoria matematicii*

Newton versus Leibniz

de prof. Adrian Stan

Demonstrarea riguroasă a multor descoperiri în matematică, fizică, astronomie are la bază calculul diferenţial şi integral ai căror autori sunt consemnaţi astăzi matematicienii **Isaac Newton** (25.12.1642 – 20.03.1727) şi **Gottfried Leibniz** (21.06.1646 – 14.11.1716). Cu mai mult de trei secole în urmă, lucrurile nu stăteau atât de clar, existenţa unui conflict între cei doi s-a datorat controversei asupra întâietăţii descoperirilor legate de calculul diferenţial şi integral.

Încă din 1758, cercetările de istorie matematică ale lui E. Montucla, s-au aplecat asupra acestui conflict iar mai târziu în 1846, matematicianul englez Augustus de Morgan publica în „Philosophical Magazine”, un articol ce analiza cearta dintre Keil şi Leibniz cu privire la recunoaşterea întâietăţii asupra metodei fluxiunilor aşa cum denumise Newton, calculul integral, şi concluzionează că Leibniz are meritul de a sta alături de Newton în istoria matematicii la capitolul introducerii calculului diferenţial şi integral. Era o reparaţie morală târzie, dar astfel Leibniz a fost repus în drepturi şi i s-a recunoscut meritul pe care l-a avut la dezvoltarea matematicii.

Ca să înţelegem natura evenimentelor ce-au stat la baza conflictului început în anul 1700, ne vom întoarcem la perioada de început a celor doi matematicieni.

La 19 ani, în 1661, Newton se înscria ca elev la Trinity College din Cambridge fiind nevoit ca pentru a-şi plăti studiile să execute diverse munci în favoarea şcolii sau studenţilor. Luat sub aripa protectoare a marelui profesor Isaac Barrow, Newton îşi etalează numaidecât propriile porniri de geniu, stabilind o generalizare asupra formulei binomului $(a+b)^n$ pentru un exponent „n” raţional, pozitiv sau negativ. Deşi formula pentru n număr întreg era cunoscută cu mult timp înaintea sa, astăzi aceasta poartă denumirea lui, „binomul lui Newton”. Tot în acea perioadă s-a ocupat cu studiul proprietăţilor luminii descoperind teoria corpusculară a luminii prin explicarea fenomenelor luminoase şi dând modelul de descompunere a luminii şi cel mai important lucru, a intuit legea gravitaţiei universale comparând forţa de greutate a Pământului cu aceea care ţine Luna pe orbita ei. Folosindu-se de Legile lui Kepler a dedus că forţele care ţin planetele pe orbite trebuie să fie invers proporţionale cu pătratele distanţelor lor la centrul în jurul cărora se învârt.

Din 1669, Newton luă locul lui Barrow la catedra de matematică şi începu studiul la seriile infinite pe care le publică în 1704 ca o anexă la lucrarea sa „ Optiks” (Optica).

Tot în această perioadă, în 1672, a fost numit membru al Societăţii Regale din Londra întrucât construise primul telescop cu reflexie cu care studia sateliţii lui Jupiter pentru a-şi verifica legea atracţiei universale la care lucra încă.

Datorită divergenţelor apărute între el şi Huygens şi Robert Hooke cu privire la teoria sa corpusculară a luminii faţă de teoria ondulatorie susţinută de cei doi, Newton se hotărî să nu mai publice nimic, devenind astfel „ sclavul descoperirilor sale” ca să le poată apăra, după cum mărturisea singur în 1676 lui Oldenburg secretarul Societăţii Regale. Edmund Halley marele astronom şi matematician a fost cel care după 11 ani l-a determinat să-şi publice întreaga teorie legată de mecanica cerească.

Calculul infinitezimal sau cum îl numea el, calculul fluxiunilor avea meritul de a lucra cu mărimi infinit de mici şi cu procesul de trecere la limită. Imaginat încă din 1665 de către Newton el a fost cunoscut de către ceilalţi matematicieni doar atunci când Newton şi-a publicat cartea „ Philosophiae naturalis principia mathematica”(Principiile matematice de filozofie naturală) în 1687, lucrare prin care şi-a câştigat locul printre cei mai mari matematicieni şi fizicieni din toate timpurile. Acesta datorită faptului că în principiu, descoperirile sale în matematica constituiau doar fundamentul pentru cercetarea fenomenelor naturii şi nu reprezenta un scop în sine. Lucrarea era plină de rigoare şi se arăta cum se calculează masa Soarelui sau a planetelor, punea bazele teoriei perturbaţiilor produse în mersul planetelor de atracţia exercitată asupra lor de Soare sau alte planete, explica fenomenul mareelor şi mersul cometelor, toate având la bază un calcul diferenţial şi integral descoperite de el într-o formă mai greoaie dar care i-au facilitat explicarea descoperirilor sale.

Gotfried Wilhelm Leibniz născut în 1646 aşadar cu patru ani mai tânăr decât Newton, după ce a studiat matematica la Jena, îşi dă doctoratul la Universitatea din Altdorf obţinându-l la vârsta de 20 de ani. Din această perioadă datează şi lucrarea sa „ Dissertatio de Arte Combinatoria”(1666). În 1673 este ales membru al Societăţii Regale din Londra în urma construirii unei maşini de calcul. Întrat în contact cu scrierile lui Pascal, Leibniz întrezăreşte conceptul de calcul diferenţial, cuvânt introdus de el, alături de notaţiile corespunzătoare acestui termen, dx, $\frac{df}{dx}, \int$ pentru a nota acele mărimi infinit de mici precum şi cele de calcul integral.

În 1684, publică în revista Acta Eruditorum un articol „ Nova methodus pro maximis” prin care prezenta calculul diferenţial iar în 1686 prin lucrarea „ Analysis infinitorum” prezenta calculul sumatoriu numit mai târziu integral chiar de către Leibniz la sugestia lui Jacob Bernoulli, un matematician care şi-a adus şi el o contribuţie foarte mare la dezvoltarea calculului diferenţial alături de fratele său Ioan Bernoulli. Tot în această perioadă şi L’Hospital îşi publică o sinteză a cunoştinţelor preluate de la Ioan Bernoulli şi prelucrate într-un mod uşor şi elegant.

La momentul în care Newton îşi publică studiul de mecanică cerească (1687), cunoştinţele de calcul diferenţial ale lui Leibniz începuseră să fie cunoscute de cât mai mulţi matematicieni, fapt ce nu l-a nemulţumit pe Newton; din contră, se ştie că Leibniz a colaborat cu Newton în dezvoltarea cunoştinţelor sale prin intermediul scrisorilor, dar aşa cum se proceda la acea vreme, matematicieni nu îşi expuneau decât rezultatele nu si modul cum se ajungea la ele. Newton avea să constate în 1726 că descoperirile lui Leibniz nu se deosebesc de ale sale decât ca formă nu şi ca fond.

Până atunci însă, în 1703 Newton e ales secretarul Societăţii regale din Londra şi odată cu mutarea la Londra devine unul din personajele cele mai importante ale lumii ştiinţifice şi de aici probabil şi orgoliul său cu privire la întâietatea descoperirii calculului integral.

Conflictul care a apărut între Newton şi Leibniz pe tema întâietăţii descoperirii calculului diferenţial a început cu matematicianul elveţian Fatio de Duillier care a propus o problemă de cercetare a proprietăţilor brahistocronei, problemă de care s-a ocupat si Leibniz cu trei ani înainte.

După şase luni, primul care a rezolvat-o deoarece a aflat de ea din întâmplare a fost Newton. Faptul acesta l-a determinat pe Fatio să-i atribuie lui Newton descoperirea calculului diferenţial iar pe Leibniz să-l acuze de plagiat. Deşi a încercat să se apere de acuzaţii menţionând că însuşi Newton îi recunoaşte independenţa descoperirii sale, ceea ce s-a întâmplat este că Newton nu a sărit în apărarea lui şi nu a comentat în nici un fel ca şi cum n-ar fi ştiut de acuzaţiile care i se aduc lui Leibniz deşi în 1703 , el devine secretarul Societăţii Regale şi nu are cum să nu fi ştiut de ceea ce se petrecea . Bătălia între cei doi s-a dat prin intermediul discipolilor lor.

John Keil, discipolul lui **Newton** scria în 1710 că **„toate acestea decurg din metoda fluxiunilor, atât de celebră astăzi, care a fost inventată pentru prima oară, fără îndoială, de Sir Isaac Newton, lucru despre care se poate convinge cu uşurinţă orişicine ar citi scrisorile sale, publicate de Wallis. Acelaşi calcul a fost dat publicităţii mai târziu de Leibniz în Acta Eruditorum, în care el a modificat numai denumirea, forma şi modul de a însemna”.**

Făcând plângere către Societatea Regală faţă de cele scrise de Keil, Leibniz primeşte în 1712 raportul comisiei de anchetă care-i transmite că „ **există o identitate între ambele metode, dar descoperirea lui Newton este anterioară**” ceea ce îl disculpă pe Keil şi îl nedreptăţeşte pe Leibniz care mai suferă şi din pricina concepţiei generale care începe să apară în lucrările multor matematicieni cum că Newton este fondatorul Analizei matematice şi că Leibniz a avut la baza cunoştinţelor sale, ideile lui Newton.

Deşi nedreptăţit şi neînţeles, Leibniz a continuat să-şi susţină ideile şi să lucreze neobosit, contribuind la dezvoltarea aritmeticii binare, fiind unul din precursorii logicii matematice, a introdus formula de diferenţiere sub semnul integralei, a făcut distincţia dintre funcţiile algebrice şi funcţiile transcendente, a propus denumirile de abcisă, coordonată, funcţie, derivată, diferenţială , ecuaţie diferenţială , a dat legea conservării energiei cinetice. Ales preşedinte al Academiei de Ştiinţe din Berlin lui datorându-i-se şi înfiinţarea ei în 1700, Leibniz lasă urmaşilor o operă impresionantă.

Bibliografie:

[1] Florica T. Câmpan. (1972). A doua carte cu probleme celebre. Bucureşti: Editura Albatros.
[2] Vasile Bobancu. (2001). Caleidoscop Matematic. Bucureşti: Editura Niculescu.
[3] Nicolaie Mihăileanu. (1981). Istoria matematicii. Bucureşti: Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică.

Prof., Şcoala Potoceni

2. Articole şi note matematice

Rezolvarea problemelor de concurenţă şi coliniaritate utilizând proprietăţile fasciculelor anarmonice
(I)

de Neculai Stanciu

Abstract. This article is devoted to the study of two fundamental and reciprocal questions: when do three given points lie on a single line, and when do three given lines pass through a single point? The techniques we describe in this article will be augmented by more sophisticated approaches, such as the Papus's theorems, the Desargues's theorems, the Pascal's theorem, the Brianchon's theorem and the Newton's theorem.

The formalism of projective geometry makes a discussion of such properties possible, and exposes some remarkable facts, such as the duality of points and lines.While technique "cross-ratio" of four points, and in the light of duality the cross-ratio of four lines can be useful on contest problems, much of the material here is considered "too advanced" for primary and secondary school education.This is a pity, as some of the most beautiful classical geometry appears only in the projective geometry.

Key words: cross-ratio, bivalent range, harmonic range, harmonic conjugate, concurrence and collinearity .

AMS Classification. 51-xx,51Axx, 51A05.

Scopul principal al rezultatelor de mai jos este familiarizarea cititorilor cu *noi metode de rezolvare a problemelor de concurenţă şi coliniaritate şi anume cu tehnicile oferite de proprietăţile fasciculelor anarmonice.*

onsiderăm fig.1 unde $S(a,b,c,d)$ sau $S(A,B,C,D)$ reprezintă un *fascicul convergent*, cu punctul S *propriu* de raze a,b,c,d sau SA, SB, SC, SD şi fig.2 în care $S(a,b,c,d)$ este un *fascicul paralel* de raze a,b,c,d sau SA, SB, SC, SD cu punctul S *impropriu*.

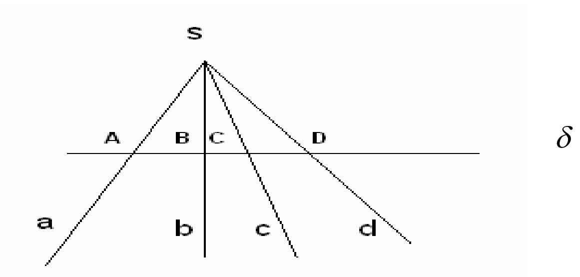


Fig. 1

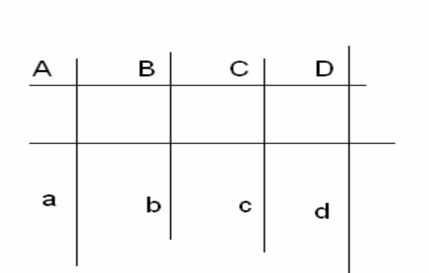


Fig. 2

Dacă diviziunea $(ABCD) \overset{def}{=} \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$ este ***diviziune armonică*** ($\left(ABCD\right) = -1$) atunci fasciculul ataşat $S(ABCD)$ se numeşte ***fascicul armonic***.

Biraportul ataşat unui fascicul convergent.

Fie fasciculul $S(abcd)$ tăiat de secanta δ (vezi fig.1) în punctele

$A = \delta \cap a, B = \delta \cap b, C = \delta \cap c, D = \delta \cap d$ .Dacă $S(XYZ) \overset{not}{=}$ aria triunghiului de vârfuri X, Y şi Z , $\widehat{XY} \overset{not}{=} \widehat{XSY}$, $h = d(S,\delta)$, atunci $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CA \cdot h}{CB \cdot h} = \dfrac{2 \cdot S(CSA)}{2 \cdot S(CSB)} = \dfrac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{S(CSA)}{S(CSB)} : \frac{S(DSA)}{S(DSB)} = \frac{SC \cdot SA \cdot \sin(\widehat{ca})}{SC \cdot SB \cdot \sin(\widehat{cb})} : \frac{SD \cdot SA \cdot \sin(\widehat{da})}{SD \cdot SB \cdot \sin(\widehat{db})} =$$

$= \dfrac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})} : \dfrac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$. Dacă $S(abcd) \overset{not}{=} \dfrac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})} : \dfrac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$, atunci rezultă $(ABCD) = S(abcd)$.

Teoreme de invarianţă

Teorema 1. Fiind date pe dreapta δ , punctele fixe A, B, C, D .Pentru orice $S \notin \delta$, notăm $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$ .Biraportul ataşat fasciculului $S(abcd)$ este *invariant.*

Demonstraţie. Fie $S, S' \notin \delta$, ca în fig.3.

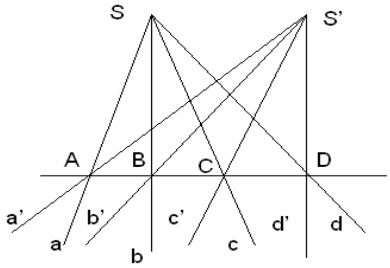


Fig. 3

Din $S(abcd) = (ABCD)$ şi $S'(a'b'c'd') = (ABCD)$ rezultă $S(abcd) = S'(a'b'c'd')$.(q.e.d).

Teorema 2. Fiind dat fasciculul fix de vârf S şi raze a, b, c, d .Pentru orice secantă δ care intersectează razele fasciculului în $A = a \cap \delta, B = b \cap \delta, C = c \cap \delta,$ şi $D = d \cap \delta$, *biraportul* ataşat diviziunii $(ABCD)$ este *invariant.*

Demonstraţie. Fie δ şi δ' două secante oarecare (fig.4), care intersectează razele fasciculului în punctele A, B, C, D şi A', B', C', D'.

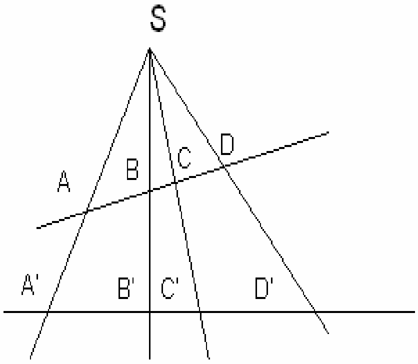


Fig. 4

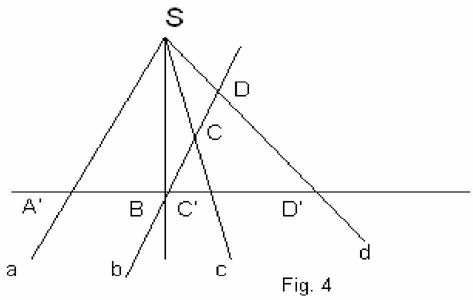


Fig. 4

δ'

Avem $(ABCD) = S(abcd)$ şi $(A'B'C'D') = S(abcd)$ .Rezultă $(ABCD) = (A'B'C'D')$.(q.e.d.).

Fasciculul tăiat de o secantă paralelă cu una din raze.

Fie fasciculul $S(abcd)$ şi $\delta \parallel a$ (fig.5).

(1) $S(abcd) = (A'BC'D') = \dfrac{C'A'}{C'B} : \dfrac{D'A'}{D'B}$,(2) $\Delta C'A'S \approx \Delta C'BC \Rightarrow \dfrac{C'A'}{C'B} = \dfrac{SA'}{CB}$,

(3) $\Delta D'A'S \approx \Delta D'BD \Rightarrow \dfrac{D'A'}{D'B} = \dfrac{SA'}{DB}$.Din (1),(2) şi (3) rezultă $S(abcd) = \dfrac{SA'}{CB} : \dfrac{SA'}{DB} = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB} = (A'BC'D')$.

Avem următoarea *regulă mnemotehnică* pentru scrierea valorii biraportului $\dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB}$.

Deoarece $\delta \parallel a$ scriem $\delta \cap a = A_i$ (*punctul impropriu* pe direcţia paralelelor $\delta \parallel a$),

$S(abcd) = \dfrac{CA_i}{CB} : \dfrac{DA_i}{DB}$ şi luom $CA_i : DA_i = 1$ (trecerea la limită $A' \to A_i$). $S(abcd) = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB}$.

Consecinţă. Fie B, C, D puncte fixe pe dreapta δ , $a \parallel \delta, S \in a$, $SB = b, SC = c, SD = d$.

Atunci $\forall S \in a, S(abcd)$ este invariant.

Demonstraţie. Fie $A_i = \delta \cap a$. $S(abcd) = (A_iBCD) = \dfrac{CA_i}{CB} : \dfrac{DA_i}{DB} = \dfrac{1}{CB} : \dfrac{1}{DB}$ =constant.

Bibliografie

[1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
[2] Mihăileanu, N. N., Complemente de geometrie sintetică, E.D.P., Bucureşti, 1965.

Profesor,
Grup Şcolar Tehnic, "Sf. Mc. Sava", Berca, Buzău

O metodă de rezolvare a problemelor de programare liniară

de Prof. Gheorghe Manea

Metoda prezentată în continuare se înscrie în cadrul problemelor de programare liniară şi foloseşte tehnica *Solver* sub *Excel.* Prin această tehnică se pot efectua optimizări şi simulări complexe asupra informaţiei conţinută în programul liniar (sau neliniar) avându-se în vedere restricţiile impuse.

Ca principiu o problemă de optimizare tratată prin tehnica *Solver* vizează automatizarea aplicaţiei de programare liniară (algoritmul Simplex), probleme de extrem neliniar, alte probleme de extrem, pentru a obţine soluţia optimă (sau aproape de optim) în sensul maximizării unui profit, minimizării unui efort, atingerea unei valori scop. Optimul se realizează prin modificarea automată a unor parametri ce conduc la atingerea scopului în condiţiile precizării unor restricţii impuse modelului, astfel încât situaţia optimală să ia în considerare aceste constrângeri. Pentru transpunerea unei probleme de programare liniară într-un model apt a fi rezolvat prin tehnica *Solver*-ului se consideră forma generală a unui program liniar :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n <= b_1 \text{ (sau>= ,resp. > . <)} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n<=b_2,\text{(sau >=)} \quad (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ x_1+a_{m\,2}x_2+a_{m\,3}x_3+\ldots+a_{m\,n}x_n<=b_m \text{ (sau>=)}, \end{cases}$$

iar funcţia de optimizat este: $f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+x_n$ = maxim (resp. minim) unde a_{ij}, b_i, c_i sunt numere reale pozitive.

În cadrul acestei scurte prezentări luăm un exemplu de optimizare rezolvată prin tehnica *Solver*.

Problema se află în manualele de liceu rezolvată prin poligonul soluţiilor folosind separarea planului în regiuni.

EXEMPLU. (Constantin Udrişte "Geometrie analitică" –manual clasa a XI a ediţia 1993 pag 43 ex 32)

O intreprindere de construcţii trebuie să realizeze un complex de locuinţe însumînd cel puţin 900 garsoniere, 2100 apartamente cu 2 camere şi 1400 apartamente cu 3 camere. Se preconizează 2 tipuri de blocuri :

-primul tip cuprinde 40 apartamente cu 3 camere, 30 de apartamente cu 2 camere şi 10 garsoniere

Un astfel de bloc costă4.000.000 u.m

- al doilea tip este format din 20 apartamente cu 3 camere, 50 apartamente cu 2 camere şi 30 garsoniere, avînd costul de 5.000.000 u.m . Să se stabilească câte blocuri din fiecare tip trebuie construite astfel încât cheltuielile să fie minime

REZOLVARE. Notăm x_1=nr. blocuri de primul tip; x_2=nr. blocuri de tipul al doilea.

Programul liniar(P.L) este :

$f(x_1 ,x_2)=4.000.000*x_1+5.000.000*x_2=min$ (1)

$40*x_1+20*x_2>=1400$ (=nr.apart.cu 3 camere) (2)

$30*x_1+50*x_2>=1200$ (=nr.apart. cu 2 camere) (3)

$10*x_1+30*x_2>=900$; (=nr. garsoniere) (4)

$x_1>=0$; $x_2>=0$: x_1 x_2 întregi (5)

Pentru optimizarea programului liniar (P.L) folosind tehnica *SOLVER* parcurgem etapele:

1.Deschidem o foaie de calcul *Excel.*

2.Scriem datele programului astfel :

-în celula B3 scriem x_1

-în celula B4 scriem x_2

-în B5scriem $f(x_1,x_2)=4.000.000\ x_1+5.000.000\ x_2$ (conţinutul relaţiei(1))

-în B6 scriem conţinutul relaţiei(2)

-în B7scriem conţinutul relaţiei (3)

-în B8 scriem conţinutul relaţiei (4

-în B9 scriem x_1, x_2 întregi. Acest pas 2 poate lipsi după mai multe exemple rezolvate.

3.Introducem formulele programului liniar :

-în D5 scriem formula de calcul =4.000.000*D3+5.000.000*D4 (este formula de calcul pentru funcţia obiectiv(1), în D3,D4 pot exista valori iniţiale pentru x_1 x_2)

-în D6 introducem =40*D3+20*D4 (este restricţia din (2) calculată)

-în D7 introducem =30*D3+50*D4 (restricţia (3) calculată)

-în D8 introducem =10*D3+30*D4 (restricţia (4) calculată)

4. Din *Tools* activăm *Solver* (rezolvitor) şi apare caseta de dialog *Solver Parameters* (fig1). Dacă sistemul de operare nu are instalată tehnica Solver, aceasta se instalează din acelaşi meniu activând *Add Ins* (adăugare instrumente), urmând calea cerută şi eventual C.D de instalare Office.

a) În rubrica *Set Target Cel*(setare celula țintă) trecem celula care conține formula funcției obiectiv D5 prin scriere directă sau prin selectare (de preferat). Scrierea este D5.

b) Trecem cu *Tab* sau poziționând cursorul în rubrica *Equal To* (sensul optimizării) și selectăm în cazul exemplului Min

c) Cu Tab sau prin cursor trecem la *By Changing Cells*(celule modificabile) și scriem

Fig.1

D3;D4direct sau prin selectarea acestora (în *aceste celule se afla x_1, x_2 inițiale).*

d) Trecem la rubrica Subject to Constraints(se supune restricțiilor) care solicită restricțiile programului. Prin butonul *Add(*adăugare) se deschide caseta de dialog din figura 2

Fig.2

În partea stangă (referința celulă) trecem celula restricției (2) adică D6 de la tastatură sau prin selectare.

Cu Tab trecem la cerința din mijloc din care se selectează sensul restricției (<,>,<=,>=,=,int). În cazul exemplului selectăm>= și trecem la rubrica *restricție* unde se trece partea dreapta din restricția (2) adică 1400. Se validează întregistrarea cu butonul *Add*, trecând la înregistrarea restricțiilor (3), (4), (5),urmând aceleași etape. Se inchide această casetă prin *Ok*, revenind automat în *Solver Parameters*

e)Avem posibilitatea să alegem scrierea rezultatului de optimizare direct sau să vedem unele soluții parțiale apropiate de cea optimă. Pentru aceasta selectăm din caseta deschisă butonul *Optiuni*. În caseta care se deschide selectăm *se propune modelul liniar*(fig 3)apoi selectăm *toate iterțiile* și validăm cu *OK*, revenind în *Solver Parameters*

Fig.3

f).Până acum am dat instrucțiunile de rezolvare ale programului liniar. Închidem caseta selectând *Solve*. Apare o primă aproximare a optimizării ca în figura 4.

Fig.4

Prin *continue* vedem toate iterațiile programului (soluții de încercare)pană la soluția optimă .
În exemplul rezolvat se obțin: <u>x_1=20 blocuri ,x_2=30 blocuri</u>
<u>Cheltueli minime =230 mil</u>.

<u>Observații</u> : 1. Rezultatul obținut poate fi înregistrat în *Manager Scenario* pentru a fi comparat cu alte rezultate obținute prin modificarea funcției obiectiv sau restricțiile programului(fig 5,6)

Fig.6

Această metodă se aplică și pentru programe cu n>=3 variabile care depășeste manualul și programa școlară, dar metoda arătată odată înțeleasă prin exerciții poate fi utilizată pentru automatizarea oricărui program.

<u>Exerciții propuse</u>: Să se rezolve folosind tehnica *Solver*, următoarele programe care provin din modelarea unor probleme economice, tehnice.

1) f=1,2x+1,6y=max	2) f=5x+3y=max	3) f=x-2y=min	4) f=x=y=max	5) f=6x+3y+2z+t= max
x/25+y/30<=1	x/2+y/3<=1	x+y-1<=0	2x-y>=2	2x+3y+5z+3t=11
x/20+y/25<=1	x+y/7<=1	x+2y-2<=0	x-2y<=2	5x+7y+12z+4t=20
x/35+y/25<=1	x/5+y<=1	x; y >=0	x+y=5 ; x,y>=0	x; y; z;t >=0
x; y >=0	x; y >=0			

<u>Bibliografie</u>

1)Bogdan Ionescu, Adrian Pană; Birotica sub Windows. Edit.Sofiteh A.S.E București 2000
2)Cerchez Micu, Teodor Dănet; Probleme pentru aplicarea matematicii în practică.
3)Ștefan Mirică, Inocențiu Drăghicescu; Matematica M1- manual pentru clasa a XI a Edit.Aramis 2003

Prof.,Colegiul Economic Buzău

3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ SCLIPIREA MINŢII”

EDIŢIA a III-a ,
22 NOIEMBRIE 2008, BERCA

Clasa a V-a

1. a) Calculaţi: $A=[(\underbrace{2^5+2^5+...+2^5}_{16\ termeni}):4^4+(\underbrace{3^7+3^7+....+3^7}_{81\ termeni}):9^5]^{15}:25^7$.

b) Fie şirul de numere: 1,3,7,15,31,....
i) Completaţi şirul cu doi termeni;
ii) Dacă S este suma primilor 16 termeni, aflaţi (S+2) : (2^{13}-1).

Prof. Marius Giurgiu, G. M nr. 5-6/2008

2. Se dă numărul $A=[3^{112}+27^{30}\cdot 3^{21}-(3^{81}:3^{26})^2]:9^{55}$.
a) Să se calculeze A;
b) Să se determine ultima cifră a numărului $2008^{\mathbf{A}}$.
c) Să se scrie numărul $5^{\mathbf{A}}$ ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Prof. Adrian Stan

3. Un bunic are doi nepoţi. Vârsta sa se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră exprimând vârsta unui nepot, astfel că vârsta bunicului este de şapte ori mai mare decât suma vârstelor celor doi nepoţi. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste şapte ani, suma vârstelor celor trei este de 93 de ani.

Prof. Adrian Stan

4. Să se determine numărul natural n din egalitatea: $2^{6n+2}+8^{2n+2}-64^{n+1}=4^{n+5}$

Prof. Neculai Stanciu

Clasa a VI-a

1. Într-o şcoală, în luna mai 2008, raportul fete:băieţi era de 2:3.În prezent, raportul este 1:2, numărul băieţilor a rămas neschimbat, iar numărul fetelor este cu 10 mai mic.Să se afle câte fete şi câţi băieţi erau în şcoală în luna mai 2008.

Prof. Neculai Stanciu

2. a) Să se arate că pentru orice numere naturale a,b,c, prime şi mai mari ca 1, care verifică relaţia $3^a+27b^2+4\cdot(c+2)=738,$ numărul $a^2+b^2+c^2$ este divizibil cu 83.

b)Să se afle numărul natural n din egalitatea: $8^{(n-4)(n+4)}-8=7\cdot(8+8^2+8^3+....+8^{2008})$.

Prof. Adrian Stan

3. Arătaţi că numărul a= $25^{n+2}\cdot 3^n-3^{n+2}\cdot 5^{2n+2}+5^n\cdot 15^n$ este divizibil cu 2005, pentru orice $n\in N*$.

Prof. Lucica Speciac, G.M.nr. 9/2008

4. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ştiind că $m(B\hat{I}C)=2m(\hat{A})$ şi $m(A\hat{I}C)=3m(\hat{B})$, unde I este centrul cercului înscris în triunghi.

***Prof.* Constantin Apostol**

Clasa a VII-a

1. a) Să se arate că numărul A=$\sqrt{(1+3+5+...+2009)^2-2008}$ este iraţional.

b) Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ astfel încât $\sqrt{(x_1-1)^2}+\sqrt{(x_2-1)^2}+...+\sqrt{(x_n-2008)^2} \le 0$.

Calculaţi $x_1+x_2+x_3+.....+x_n$.

Prof. Adrian Stan

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $2x+xy-y^2=13$.

Teodora Niţă, G.M.nr. 5-6/2008

3. Să se afle numărul real x din egalitatea: $\dfrac{3-\sqrt{3,24}}{0,1(3)}=\dfrac{\sqrt{\left(8\sqrt{2}-11\right)^2}+\left|1-\sqrt{2}\right|+12}{2:\sqrt{\dfrac{2}{2+\dfrac{x}{2}}}}$.

Prof. Adrian Stan

4. Se dă dreptunghiul ABCD şi fie E punctul de intersecţie a perpendicularei din A pe BD cu paralela prin C la BD. Să se arate că [BC]=[BE].

Prof. **Constantin Apostol**

„ Înțelepciunea nu se împrumută cu carul ci se câştigă cu bobul”
Nicolaie Iorga

„ Un profesor bun e cel care te face ca lucrurile mai grele să ți se pară ușoare”
Grigore C. Moisil

4. *Probleme rezolvate*

Clasa a III-a

P:33. Aflaţi suma tuturor numerelor de trei cifre care se pot scrie cu cifrele 1, 2, 3 luate o singură dată.
Inst. **Anton Maria**

Rezolvare:
Numerele de trei cifre distincte sunt: 123 ; 231; 321; 132 ; 213 ; 312 .Atunci
123 + 132 + 231 + 213 + 321 + 312 = 1332

P:34. Completaţi şirul cu încă trei numere:
2048 ; 512 ; 128;....;.......;.........
Înv. **Lupşan Constantin**

Rezolvare:
2048 512 128 32 8 2
(numerele se obţin prin împărţirea precedentului la 4)

P:35. Calculează suma numerelor a + b + c ştiind că:
3 a + 2 b + c = 5234
a + 2 b + 3 c = 2110
Înv. **Lupşan Ion**

Rezolvare:
- adunăm cele 2 relaţii şi obţinem:
3 a + 2 b + c + a + 2 b + 3 c = 5234 + 2110
4 a + 4 b + 4 c = 7344
4 (a + b + c) = 7344 Rezultă: a + b + c = 7344 : 4 a + b + c = 1836

P:36. Andra scrie în ordine descrescătoare numerele de la 0 la 20, inclusiv 20, şi pune între ele semnul „+”. Ea observă că, dacă în locul unui semn „+” pune semnul „=” se stabileşte o egalitate adevărată. Între care numere a pus Andra semnul „=” ?
Inst **Lupşan Nicoleta Gabriela**

Rezolvare:
20 + 19 + 18 + 17 + 16+ 15 = 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0

Clasa a IV-a

P:37. Trei prieteni au strâns împreună 920 de frunze. După ce primul copil a folosit pentru un colaj 123 de frunze, al doilea 126 de frunze, iar al treilea 344 de frunze, ei au decis să împartă în mod egal frunzele rămase. Câte frunze a avut fiecare copil?
Inst. **Anton Maria**

Rezolvare:
1. Câte frunze au folosit copiii pentru colaje? 123 + 126 + 344 = 593 (frunze)
2. Câte frunze au rămas? 920 - 593 = 327 (frunze)
3. Câte frunze a primit fiecare copil? 327 : 3 = 109 (frunze)
4. Câte frunze a avut primul copil? 123 + 109 = 232 (frunze)

5. Câte frunze a avut al doilea copil? 126 + 109 = 235 (frunze)
6. Câte frunze a avut al treilea copil? 344 + 109 = 453 (frunze)

P:38. Trei veveriţe se pregătesc pentru iarnă: Riţa, Miţa şi Codiţa. Riţa împreună cu Miţa au adunat 145 de alune, Miţa împreună cu Codiţa au adunat 143 de alune, iar Riţa împreună cu Codiţa au adunat 144. Câte alune a adunat fiecare?

Elev **Neacşu Teodor, cls a IV-a**
Înv. **Avrigeanu Felicia**

Rezolvare:

Notăm cu: a - numărul de alune adunate de Riţa, cu b - numărul de alune adunate de Miţa, şi cu c- numărul de alune adunate de Codiţa;

a + b = 145	b + c = 143	a + c = 144
a = 145 - b	c = 143 - b	(145 -b) + (143 - b) = 144
a = 145 - 72	c = 143 - 72	288 - 2 b = 144
a = 73	c = 71	288 - 144 = 2 b
		144 = 2 b Rezultă, b=72

Răspuns: Riţa a adunat 73 de alune, Miţa a cules 72, iar Codiţa 71 de alune.

P:39. Determinaţi numerele naturale a, b, c ştiind că:
a + b = 123
b + c = 234
c + a = 345

Înv. **Lupşan Ion**

Rezolvare:
- adunăm cele 3 relaţii şi obţinem:

a + b + b + c + c + a = 123 + 234 + 345	a + $\underline{b + c}$ = 351
2 a + 2 b + 2 c = 702	b + c = 234
2 (a + b + c) = 702	a + 234 = 351
a + b + c = 702 : 2	a = 351 - 234
a + b + c = 351	a = 117
a + b + c = 351	$\underline{a}$ + b $\underline{+ c}$ = 351
a + b = 123	c + a = 345
123 + c = 351	345 + b = 351
c = 351- 123	b = 351 - 345
c = 228	b = 6

Verificare: 228 + 117 + 6 = 351

P:40. Un număr format din 5 cifre are suma cifrelor 37. Succesorul său are suma cifrelor 2. Care sunt cele 2 numere?

Inst. **Lupşan Nicoleta Gabriela**

Rezolvare:
Numărul de 5 cifre care are suma cifrelor 37 este 19999 (1 + 9 + 9 + 9 +9 = 37) astfel încât succesorul numărului este 20000 (2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2).

Inst. LUPŞAN NICOLETA - GABRIELA, Berca - Buzău

Clasa a V-a

G:1. Să se determine toate perechile de numere naturale, ştiind că împărţindu-l pe primul la al doilea şi apoi pe al doilea la primul, obţinem de fiecare dată, aceeaşi sumă dintre cât şi rest, aceasta fiind egală cu 3.

Prof. **Constantin Apostol**

Rezolvare:

Fie a şi b cele două numere. Putem presupune că $a\rangle b$. Rezultă $a = b\cdot c_1 + r_1, r_1\langle b$ şi $c_1+r_1=3$. De asemenea, $b = a\cdot 0 + r_2, r_2\langle a$ şi $0+r_2=3$. De aici deducem că $r_2=3$ şi b=3.

Aşadar, $a = 3\cdot c_1 + r_1, r_1\langle 3$ şi $c_1+r_1=3$. Pentru $r_1 \in \{0,1,2\} \Rightarrow (a,b)\in\{(9,3),(7,3),(5,3)\}$.

G:3. a)Să se determine cifra x astfel încât numărul $\overline{1x0520}$ să se dividă cu 2008.

b)Să se arate că suma $S = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n + 12n^2 + 11n$ este divizibilă cu 33.

Prof. **Adrian Stan**

Rezolvare:

a) $\overline{1x0520} = 100520 + 10000x = 1\cdot 100000 + x\cdot 10000 + 5\cdot 100 + 2\cdot 10$

$= 2008\cdot 50 + \overline{x0120} \vdots 2008 \Leftrightarrow x = 3.$

b)

Vom scădea şi aduna numărul n după cum urmează, la fiecare putere a lui 10 se va scădea numărul 1 iar la 11n vom adăuga un n. Rezultă $S = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^n - 1 + 12n^2 + 12n$

$= 9 + 99 + 999 + ... + 99...99 + 12n(n+1) = 9(1 + 11 + 111 + ... + 11.....1) =$

$= 9\cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 12n(n+1) = 3[3\dfrac{n(n+1)}{2} + 4n(n+1)] = 3\cdot \dfrac{11n^2 + 11n}{2} \vdots 33$

Pentru ca numărul să fie divizibil cu 33 trebuie să fie divizibil cu 3 şi cu 11 în acelaşi timp.

G:4. Arătaţi că diferenţa $\overline{aaa} - \overline{bbb}$ este divizibilă cu 3.

Prof. **Lupşan Rodica**

Rezolvare:

$\overline{aaa} - \overline{bbb} = 100a + 10a + a - 100b - 10b - b = 100(a-b) + 10(a-b) + a - b = (a-b)\cdot 111 \vdots 3$, deoarece 111 este divizibil cu 3.

G:6. Suma a trei numere naturale este 270. Dacă din fiecare se scade acelaşi număr se obţin numerele 10, 55 şi respectiv 154. Aflaţi numerele.

Prof. **Lupşan Rodica**

Rezolvare:

(10+x)+(55+x)+(154+x) =270, rezultă 3x=270-219, 3x= 51, x= 17 atunci numerele sunt 27, 72, 171.

G:7. Să se arate că numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 2008 care nu sunt divizibile cu 3, nici cu 5 , nici cu 7, este multiplu de 17.

Prof. **Neculai Stanciu**

Rezolvare.Fie A - mulţimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008 divizibile cu 3, B - mulţimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008 divizibile cu 5, iar C - mulţimea numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008 divizibile cu 7. Atunci $cardA = \left[\dfrac{2008}{3}\right] = 669$, $cardB = \left[\dfrac{2008}{5}\right] = 401$,

$cardC = \left[\frac{2008}{7}\right] = 286$, $card(A \cap B) = \left[\frac{2008}{15}\right] = 133$, $card(B \cap C) = \left[\frac{2008}{35}\right] = 57$,

$card(A \cap C) = \left[\frac{2008}{21}\right] = 95$, $card(A \cap B \cap C) = \left[\frac{2008}{105}\right] = 19$.

Din $card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(B \cap C) -$
$- card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)$ =1090.

Acum putem afla numărul numerelor naturale mai mici sau egali cu 2008 care nu sunt divizibile cu 3, nici cu 5, nici cu 7. Acestea sunt în număr de 2008-1090=918= M_{17}.

G:8. Determinaţi baza de numeraţie x în care are loc egalitatea: 2 ·14_x =33_x .

***Prof.* Ana Panaitescu**

Obligatoriu, x>4, 2 · (x + 4)= 3x +3 , 3x-2x=8-3, x=5.

Clasa a VI-a

G:9. Se dă proporţia $\frac{x-2y+3z}{4x-3y+2z} = \frac{2}{3}$**. Ştiind că** $y \neq 2z$ **, să se arate că:**

$$\left(\frac{x-2y+3z}{4x-3y+2z}\right)^2 = \frac{7x-4y+z}{7x-9y+11z}.$$

***Prof.* Constantin Apostol**

Rezolvare:

Din proporţia dată, aplicând proprietatea fundamentală a proporţiilor se obţine:

3x-6y+9z=8x-6y+4z $\Leftrightarrow$ 5x=5z $\Leftrightarrow$ x=z. Astfel,

$$\frac{7x-4y+z}{7x-9y+11z} = \frac{7z-4y+z}{7z-9y+11z} = \frac{8z-4y}{18z-9y} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{x-2y+3z}{4x-3y+2z}\right)^2.$$

G:11. Să se determine numerele $x \in Q, y \in N$ **, ştiind că** $x \rangle 2 \quad si \quad \frac{x}{11} = \frac{3x+1}{11y+2}$**.**

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare:

Relaţia dată este echivalentă cu x(11y-31)=11, y natural şi 11y-31 diferit de zero.

Din $x = \frac{11}{11y-31} \Rightarrow y \in \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow x = \frac{11}{2}, y = 3$.

G:12. Să se determine mulţimea $A = \left\{(a,b,c) \in N^* \times N^* \times N^* \middle| \frac{3ab-1}{abc+1} \in N\right\}$ **.**

***Prof.* Neculai Stanciu**

Soluție.Din $\frac{3ab-1}{abc+1} \in N$, rezultă $3ab - 1 \geq abc + 1 \Leftrightarrow ab(3-c) \geq 2$, deci $c < 3$.

Analizăm în continuare cazurile:

1) Dacă $c = 1$, atunci notăm $x = ab$ şi obţinem $\frac{3x-1}{x+1} \in N$ de unde rezultă:

$$\begin{cases} x+1 \mid 3x-1 \\ x+1 \mid x+1 \Rightarrow x+1 \mid 3x+3 \end{cases} \Rightarrow x+1 \in D_4 \Rightarrow x \in \{1,3\}$$.Din $x = ab \in N$ avem soluţiile:

$(a,b) \in \{(1,1),(1,3),(3,1)\}$.

2)Dacă $c = 2$, avem $\frac{3x-1}{2x+1} \in N$ de unde obţinem că

$$\begin{cases} 2x+1 \mid 3x-1 \Rightarrow 2x+1 \mid 6x-2 \\ 2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid 6x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x+1 \in D_5 \Rightarrow x \in \{2\} \Rightarrow (a,b) \in \{(1,2),(2,1)\}.$$

Cu cele de mai sus se obţine: $A = \{(1,1,1),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2)\}$

G:13. Să se găsească cu cât se modifica produsul a 4 numere dacă primul se măreşte cu jumătatea lui, al doilea se măreşte cu a treia parte din el,al treilea se micşorează cu a patra parte din el,iar al patrulea se micşorează cu a treia parte din el.

***Prof*. Ana Panaitescut**

Rezolvare:

Produsul prin simplificare dă $\frac{3a \cdot 4b \cdot 3c \cdot 2d}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3} = abcd$, aşadar rămâne constant.

G:14.Determinaţi numerele x, y, z ştiind ca :x+y+z=45; $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$ **.**

***Prof*. Ana Panaitescu**

Rezolvare: Relaţia dată este echivalentă cu $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$. Rezultă x=10, y=15, z=20.

Clasa a VII-a

G:15. Să se determine numerele întregi a, astfel încât numărul $a^2 + 7a + 10$ **să fie pătratul unui alt număr întreg.**

***Prof*. Adrian Stan**

Rezolvare:

Fie k$\in Z, a.i, a^2 + 7a + 10 = k^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 28a + 40 = 4k^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 28a + 49 - 9 = 4k^2$

$\Leftrightarrow (2a+7)^2 - (2k)^2 = 3^2 \Rightarrow (2a+7-2k) \cdot (2a+7+2k) = 9 \Rightarrow$

Cum divizorii lui 9 sunt $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \Rightarrow a \in \{-6,-5,-2,-1\}$.

G:16. În triunghiul ABC, măsurile unghiurilor A, B şi, respectiv C, sunt direct proporţionale cu numerele 3, 7 şi 2. Să se arate că unghiul dintre AB şi înălţimea din A este congruent cu unghiul dintre AC şi mediana din A.

***Prof.* Constantin Apostol**

Rezolvare: Din relaţia de proporţionalitate a măsurilor unghiurilor se obţine:

$m(\hat{A}) = 45^0; m(\hat{B}) = 105^0; m(\hat{C}) = 30^0$. Se construieşte înălţimea din A: $AD \perp BC \quad (D \in BC)$.

Din triunghiul dreptunghic ADC cu $m(A\hat{D}C) = 90^0, si \ m(A\hat{C}D) = 30^0 \Rightarrow m(D\hat{A}C) = 60^0$.

De aici rezultă, $m(D\hat{A}B) = 60^0 - 45^0 = 15^0$. (1) Se construieşte $BE \perp AC \quad (E \in AC)$, şi se uneşte E cu mijlocul M al laturii BC. Rezultă, AE=BE=EM=BM=MC. De asemenea $m(A\hat{E}M) = m(A\hat{E}B) + m(B\hat{E}M) = 90^0 + 60^0 = 150^0$. Cum triunghiul AEM este isoscel, rezultă $m(E\hat{M}A) = m(E\hat{A}M) = 15^0$. (2). Din (1) şi (2) rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

G:18.Fie ABCD un pătrat, AB=a, M$\in$(BC) şi N$\in$(CD) astfel ca BM=DN=$\frac{a}{4}$ şi $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$. Calculaţi sinusul măsurii unghiului MAN.

***Prof.* Tuţă Luca**

Rezolvare:

Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABM, ADN, MCN, APM se obţine:

$AM = AN = \frac{a\sqrt{17}}{4}, MN = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, AP = \frac{5a\sqrt{2}}{8}$, după care se exprimă aria triunghiului AMN în două moduri, rezultând: $\sin(M\hat{A}N) = \frac{15a^2}{32} \cdot \frac{32}{17a^2} = \frac{15}{17}$.

G:19. ABCD este un trapez dreptunghic (m($\widehat{A}$)=m($\widehat{D}$)=90^0 şi DC||AB) în care [AD]$\equiv$[DC] şi [AB]$\equiv$[AC]. Ştiind că [CM este bisectoarea unghiului $\widehat{ACD}$ arătaţi că:

1. **CM $\perp$ CB**
2. **[CM]$\equiv$[CB]**
3. **$\frac{AD}{MA} - \frac{AN}{AB}$ =1**

***Prof.* Tuţă Luca**

Rezolvare:

1. Se arată că $m(M\hat{C}B) = 90^0$;

CM bisectoare$\Rightarrow m(\hat{C}_1) = m(\hat{C}_2) = 22^0 30'$; Se construieşte CN perpendiculară pe AB, de unde rezultă că ADCN este pătrat. $\Rightarrow m(\hat{A}_1) = m(\hat{C}_3) = 45^0$; În continuare se arată că , $m(M\hat{C}B) = 90^0 \Rightarrow CM \perp CB$ deoarece $m(M\hat{C}B) = m(\hat{C}_2) + m(\hat{C}_3) + m(\hat{C}_4) = 90^0$;

2. Rezultă din congruenţa triunghiurilor CDM si CNB;

3. Se aplică teorema bisectoarei în triunghiul CAD şi faptul că $AC \equiv AB, \ DC \equiv AN$.

G:20. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt direct proporţionale cu numerele 5, 3 respectiv 4. Înălţimea AD =$10\sqrt{3}$ cm şi intersectează bisectoarea CM în punctul N; ($D \in BC, M \in AB$). Din M ducem perpendiculara MP pe latura BC;($P \in BC$). Aflaţi :

a) **perimetrul triunghiului ABC;**
b) **perimetrul patrulaterului MPDN;**
c) **aria triunghiului ANC.**

***Prof.* Ana Panaitescu**

Rezolvare:

$m(\hat{A}) = 75^0;\ m(\hat{B}) = 45^0;\ m(\hat{C}) = 60^0$. ΔDAB dreptunghic isoscel $\Rightarrow BD = AD = 10\sqrt{3},\ AB = 10\sqrt{6}$

$P_{ABC} = 10(3+\sqrt{6}+\sqrt{3})$ cm. $PMPDN = 10 + 10(\sqrt{3}-1) + 10\frac{\sqrt{3}}{3} + 20(3-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{10}{3}(2\sqrt{3}+6)$ cm.

$P_{ABC} = 100\frac{\sqrt{3}}{3}cm^2$

Clasa a VIII-a

G.21. Să se determine funcţiile cu proprietatea: (x+1)f(x-1)-xf(x+2)=-4x+3 şi să se determine n natural astfel încât f(1)+f(2)+f(3)+....+f(n)=2010;

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare:

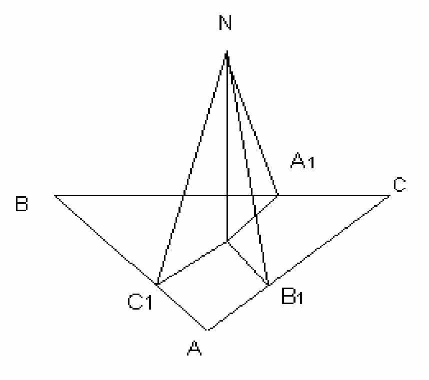
Fie f:R→R, f(x)=ax+b, $a,b \in R$, (x+1)(ax-a+b)-x(ax+2a+b)= -4x+3

-2ax-a+b=-4x+3, de unde rezultă, a=2; b=5, rezultă f(x)=2x+5.

f(1)+f(2)+f(3)+....+f(n)=2010 $\Leftrightarrow n(2n+7) = 2008 \Rightarrow n = 30$.

G.22. Prin centrul triunghiului echilateral ABC ducem paralela la BC pe care luăm, în interiorul triunghiului, punctul M. În M ridicăm perpendiculara pe planul (ABC) pe care luăm un punct N şi fie A_1, B_1 şi C_1 picioarele perpendicularelor din N pe BC, pe AC şi, respectiv pe AB. Să se arate că dacă NA_1^2 este media aritmetică a numerelor NB_1^2 şi NC_1^2, atunci M coincide cu centrul triunghiului.

***Prof.* Constantin Apostol**



Rezolvare:

Triunghiul AEF echilateral implică $MB_1+MC_1=AO$ (AO este înălţimea triunghiului AEF). $AO=2MA_1$.

Din faptul că M se află pe paralela EF la BC dusă prin centrul triunghiului, rezultă $MA_1 = \frac{MB_1 + MC_1}{2}$. (1)

Din ΔNMA_1 dreptunghic in M, se obţine:

$$NM^2 + MA_1^2 = \frac{MN^2 + MB_1^2 + MN^2 + MC_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow MA_1 = \sqrt{\frac{MB_1^2 + MC_1^2}{2}}. (2).$$

(media pătratică a numerelor MB_1 şi MC_1)

Din (1) şi (2) rezultă că media aritmetică este egală cu media pătratică a numerelor MB_1 şi MC_1, rezultă că $MA_1=MB_1=MC_1$ adică M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

G:23. Ştiind că $x, y \in R_+^*$ **şi** $x < y$, **să se compare numerele:** $a = \frac{y^3}{x}$ **şi** $b = 2x^2 + xy + y^2$.

***Prof.* Constantin Apostol**

Rezolvare:

O relaţie de comparare între a şi b (şi fie aceasta□) duce la următoarele echivalenţe:

$\frac{y^3}{x}$ □ $(2x^2 + xy + y^2)| \cdot x \Leftrightarrow$ y-x□x $\Leftrightarrow$ y□2x.

Dacă $\begin{cases} y\langle 2x \\ x\langle y \end{cases} \Leftrightarrow 2x\rangle y\rangle x, \Rightarrow a\langle b;$ Dacă y=2x, $\Rightarrow$a=b; Dacă y$\rangle$ 2x, $\Rightarrow$a$\rangle$ b.

LICEU

Clasa a IX-a

L:1.Demonstraţi că volumul unui tetraedru este mai mic sau egal cu a 162-a parte din cubul sumei muchiilor care pornesc din acelaşi vârf.

***Prof.* Constantin Apostol**

Rezolvare:
Fie VABC un tetraedru cu înălţimea VO.

Avem $V_{VABC} = \frac{S_{ABC} \cdot VO}{3}$ şi cum $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin(A\hat{C}B)}{2} \le \frac{AC \cdot BC}{2}$, egalitatea având loc pentru $AC \perp BC$. Aşadar, $V_{VABC} \le \frac{AC \cdot BC \cdot VO}{6}$ (1). Cum $VO \le CV \Rightarrow$

$V_{VABC} \le \frac{AC \cdot BC \cdot CV}{6}$ (2). De asemenea, întrucât media geometrică este mai mică decât media aritmetică, putem scrie: $BC \cdot AC \cdot CV \le \left(\frac{BC + AC + CV}{3}\right)^3$, egalitatea având loc pentru BC=AC=VC.

Aşadar, relaţia (2) devine: $V_{VABC} \le \frac{1}{6}\left(\frac{AC + BC + CV}{3}\right)^3 = \frac{(AC + BC + CV)^3}{162}$, egalitatea are loc dacă : $AC \perp BC, AC \perp CV, BC \perp CV$ şi AC=BC=CV.

L:2. Aflaţi numerele reale a **şi** b **astfel încât ecuaţia:**
$|x^4 + bx + a| + |x^2 - 3x + 2| = 0$ **să aibă un număr maxim de soluţii.**

***Prof.* Constantin Rusu**

Rezolvare: Punem condiţia ca ecuaţia să aibă soluţiile $x_1 = 1, x_2 = 2$ şi obţinem $a = -15, b = 14$.

L:3. Ştiind că x,y,z,u reprezintă numere întregi şi pozitive diferite, scrise în ordinea

$1\langle x\langle y\langle z\langle u$, **să se arate că:** $xyz + xyu + xzu + yzu \le \frac{31}{24} xyzu - 1$

***Prof*. Daniela Chiricioiu**

Rezolvare:
Inegalitatea se mai poate scrie:

$$\frac{xyz+xyu+xzu+yzu+1}{xyzu}\le\frac{31}{24}\Rightarrow\frac{1}{xyzu}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}\le\frac{31}{24}$$

$Notam\ f(x,y,z,u)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{xyzu}$ şi cum $1\langle x\langle y\langle z\langle u,$ atunci f are un maxim pentru x=2, y=3, z=4, u=5, adică $\frac{31}{24}\Rightarrow f(x,y,z,u)\le\frac{31}{24}$.

L:4. Dacă $x_i\in R_+^*$ **,** $i=\overline{1,n}$**, cu** $\prod_{i=1}^{n}x_i=1$**, să se arate că:** $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\ge\frac{n(n+1)}{2}$**.**

Prof. **Neculai Stanciu**

Rezolvare: Aplicăm inegalitate mediilor de două ori şi obţinem:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}\ge\sqrt[n]{x_1^2x_2^2...x_n^2}=1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge n$$,respectiv,

$$\frac{\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j}{\frac{n(n-1)}{2}}\ge\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{(x_1x_2...x_n)^{n-1}}=1\Leftrightarrow\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\ge\frac{n(n-1)}{2}$$

Prin adunarea celor două inegalităţi se obţine concluzia.

L:5. Să se arate că:

$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le 3,\forall a,b,c\in R,$ *astfel încât* $a+b+c=2$ *si* $ab+ac+bc=2$.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Se aplică Inegalitatea Cauchy- Buniakowski –Schwarz:

$$(\sqrt{a^2+1}^2+\sqrt{b^2+1}^2+\sqrt{c^2+1}^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1})^2,\forall a,b,c\in R$$

Cum $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$,

$$\Rightarrow(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1})^2\le 9,\forall a,b,c\in R,\Rightarrow c.c.t.d.$$

L:7. Se dă numărul $n\in N^*$**, care poate fi scris ca produs de** k **numere naturale consecutive. Să se arate că** n **poate fi scris ca sumă de** k **numere naturale consecutive, când** k **este impar şi nu poate fi scris, când** k **este par.**

***Prof.* Constantin Apostol**

Deoarece dintre oricare k numere naturale consecutive, un ul este divizibil cu k, deducem că n este multiplu de k, aşadar $n=k\cdot m,\ m\in N*$.

Presupunem că n se poate scrie ca sumă de k numere naturale consecutive de forma:

$n=k\cdot m=y+(y+1)+(y+2)+...+(y+k-1)=k\cdot y+\frac{(k-1)\cdot k}{2}$. Mai departe se face discuţie după paritatea lui k

Clasa a X-a

L:8. Să se arate că $\frac{n-k}{n+k}C_{n+k}^{k}$ **este număr întreg.**

***Prof.* Răducan Maria**

Rezolvare : $\frac{n-k}{n+k}C_{n+k}^{k}$ =(n-k)$\frac{(n+k-1)!}{k!n!}$=

=n$\frac{(n+k-1)!}{k!n!}$-k$\frac{(n+k-1)!}{k!n!}$=C_{n-1}^{k}-C_{n}^{k-1} şi prin definiţie- numarul submultimilor de câte k elemente care pot fi formate cu n≥k elemente- diferenţa acestor combinări este număr întreg.

L:9. Să se afle volumul tetraedrului $MABC$, **ştiind că înălţimea din** M **este de 1 cm şi are piciorul în mijlocul laturii** (BC), $m(\angle BAC)=90^0$ **şi măsurile unghiurilor** $\angle AMB, \angle AMC,$ **şi** $\angle BMC$ **sunt proporţionale, respectiv cu 2, 3, 4.**

***Prof.* Constantin Apostol, Rm. Sărat**

Rezolvare:
Din relaţia de proporţionalitate

$\frac{m(A\hat{M}B)}{2}=\frac{m(A\hat{M}C)}{3}=\frac{m(B\hat{M}C)}{4}=\alpha \Rightarrow m(A\hat{M}B)=2\alpha, m(A\hat{M}C)=3\alpha, m(B\hat{M}C)=4\alpha$.

Se arată că MA=MB=MC=a, iar cu teorema cosinusului aplicată în triunghiurile MAB, MAC, MBC se obţine că $AB^2=2a^2(1-\cos 2\alpha),\ AC^2=2a^2(1-\cos 3\alpha)\ si\ BC^2=2a^2(1-\cos 4\alpha)$. Cum

$\Delta ABC\ este\ dreptunghic \Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow 1-\cos 4\alpha=1-\cos 2\alpha+1-\cos 3\alpha$.

După înlocuirea formulelor şi rezolvarea ecuaţiei

$(\cos\alpha-1)(2\cos\alpha+1)(2\cos\alpha-\sqrt{3})(2\cos\alpha+\sqrt{3})=0.$

rezultă singura valoare acceptată pentru α este

$\alpha=30^0, \Rightarrow m(A\hat{M}B)=60^0, m(A\hat{M}C)=90^0, m(B\hat{M}C)=120^0.$ Imediat se găsesc lungimile a=2, AB=2; $AC=2\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}cm^2\ \ si\ V=\frac{2\sqrt{2}}{3}cm^3$.

L:10. Rezolvaţi inecuaţia:

$(\sqrt{x}-1)\sqrt{1+x+x^2+...+x^{n-1}} \leq (\sqrt{x})^{n^2-n}-1,\ x\geq 0, n\in N, n\geq 2$

***Prof.* Constantin Rusu**

Rezolvare**:** Pentru $x=1$, inecuaţia se verifică. În continuare se foloseşte inegalitatea $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}, a\geq 0, b\geq 0$ şi se demonstrează că $\forall x>1$ este soluţie. Rezultă că inecuaţia are soluţia $[1,\infty)$.

L:11. Se consideră suma: $S_n=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)$**. Să se arate că** $\frac{n^4}{4}\leq S_n\leq\frac{(n+3)^4}{4}$.

***Prof.* Constantin Rusu**

Rezolvare: $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ şi atunci avem:

$\frac{n\cdot n\cdot n\cdot n}{4}\leq S_n\leq\frac{(n+3)(n+3)(n+3)(n+3)}{4}$, care demonstrează concluzia.

L:12.**Să se arate că** $\frac{5}{9}\langle\frac{\lg 6}{\lg 17}\langle\frac{13}{20}$ ***Prof*. Daniela Chiricioiu**

Rezolvare:

$\frac{\lg 6}{\lg 17}=\log_{17}6=\log_{17}2+\log_{17}3$. Deoarece $2^8\langle 17^2\langle 2^9$ *si* $3^5\langle 17^2\langle 3^6 \Rightarrow$

$8\log_{17}2\langle 2\langle 9\log_{17}2$ *si* $5\log_{17}3\langle 2\langle 6\log_{17}3$. De aici prin adunarea inegalităţilor şi ţinând cont de monotonia funcţiei logaritmice se obţine ceea ce trebuia demonstrat: $\frac{5}{9}\langle\log_{17}2+\log_{17}3\langle\frac{13}{20}$

Clasa a XI-a

L:13. Se consideră funcţia $f: R-\{1,2\}\rightarrow R$, $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

Calculaţi $\sum_{k=3}^{n} f^{(n)}(k)$ **unde** $f^{(n)}(x)$ **semnifică derivata de ordinul** n **a funcţiei** $f(x)$.

***Prof*. Constantin Rusu**

Rezolvare:

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n![\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}]$ Atunci, $\sum_{k=3}^{n} f^{(n)}(k)=(-1)^n\cdot n!(1-\frac{1}{(n-1)^{n+1}})$.

L:15. Să se calculeze (n∈ ℕ): $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+....+n(n+3)}{C_{n+3}^{n}}$

***Prof*. Daniela Chiricioiu**

Rezolvare:

$1\cdot 4+2\cdot 5+.....+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$

Rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+....+n(n+3)}{C_{n+3}^{n}}=2$.

L:16. Fie funcţiile $f,g,h:R\rightarrow R$, **derivabile cu** $f(x_0)=a, g(x_0)=b, h(x_0)=c$ **şi** $(fg)'(x_0)=c_1$, $(gh)'(x_0)=a_1$, $(hf)'(x_0)=b_1$.**Să se calculeze** $(fgh)'(x_0)$.

***Prof*. Neculai Stanciu**

Rezolvare: .Avem $(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'=\frac{(fg)'h+(gh)'f+(hf)'g}{2}$.

Deci $(fgh)'(x_0)=\frac{aa_1+bb_1+cc_1}{2}$.

Clasa a XII-a

L:17. Să se calculeze: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(x-\sin x)\cos^{n-2}x}{x^2\sin^n x}dx$, $n\in N$.

***Prof*. Constantin Rusu**

Rezolvare. Cu substituţia $t=\frac{tgx}{x}$, obţinem $I=\begin{cases}\ln\frac{3}{2};n=1\\ \frac{\pi^{n-1}(3^{n-1}-2^{n-1})}{(n-1)(6\sqrt{3})^{n-1}};n\in N-\{1\}\end{cases}$.

L:18. Să se arate că funcţia următoare nu are primitive pe R: $f(x)=\begin{cases}e^{x}+x-1,x\le 1\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}},x\rangle 1\end{cases}$

***Prof.* Daniela Chiricioiu**

Rezolvare:
O primitivă a funcţiei f, dacă există ar fi următoarea, după ce se impune condiţia de continuitate:

$$F(x)=\begin{cases}e^{x}+\frac{x^2}{2}-x-e+\frac{1}{2}+k,x\le 1\\ 2\sqrt{x-1}+k,x\rangle 1\end{cases},$$

Rezultă că f nu este derivabilă pe R, deci nu admite primitive pe R.

L:19. Fie f:R→R, o funcţie impară cu proprietatea: f(x)+3f(x-3)=x-4; Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Notăm f(x)=u, f(3-x)=v,şi f impară, rezultă f(x-3)=-f(-x+3). Rezultă u-3v=x-4
După care se face transformarea x→3-x, rezultă, f(3-x)-3f(x)=3-x-4
u+3v=x-4
-3u+v=-x-1 Rezultă $u=\frac{16x-79}{10}$, $v=\frac{2x-13}{10}$.

L:20. *Fie* $a_0,a_1,a_2,....,a_{2008}$**, coeficienţii polinomului** $(x^4-3x^3+x-2)^{502}$**. Să se arate că** $a_0+a_2+a_4,....,a_{2008}$ **este un număr par.**

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Suma coeficienţilor pari ai polinomului f este dată de relaţia $\frac{f(1)+f(-1)}{2}=\frac{(-3)^{502}+1}{2}=\frac{3^{502}+1}{2}=\frac{(4-1)^{502}+1}{2}=\frac{4M+1+1}{2}=2M+1$, care este un număr impar, unde 3^{502} s-a scris ca un multiplu de 4 l-a care s-a adăugat 1.

L:21. Fie polinomul $(1+x^2+x^4)^{502}$ **cu rădăcinile** $x_1,x_2,....,x_{2008}\in C$**; Să se calculeze suma** $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+.....+x_{2008}^{\ 2}$**.**

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Fie y_1,y_2,y_3,y_4 soluţiile ecuaţiei $1+x^2+x^4=0;\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}y_i^{\ 2}=(\sum y_i)^2-2\sum y_iy_j=-2\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^{\ 2}=502\cdot(\sum_{i=1}^{4}y_i^{\ 2})=-1004.$$

L:22. Să se calculeze : $\int_2^4\frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare:Funcţia $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$ este nemărginită în punctele $x=2$ şi $x=4$.

Atunci avem

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx=\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_{2+\varepsilon}^{4-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\arcsin(x-3)\Big|_{2+\varepsilon}^{4-\delta}=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\left[\arcsin(1-\delta)-\arcsin(\varepsilon-1)\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

„Ceea ce nu face inteligenţa va face timpul”

„ Talmud”

„ Cei mai buni discipoli ai unui profesor nu sunt cei care repetă lecțiile după el, ci cei cărora el le-a trezit entuziasmul, le-a fertilizat neliniştea, le-a dezvoltat forțele pentru a-i face să meargă singuri pe drumul lor”

Gaston Berger

5. Probleme propuse

Clasa a III-a

P:41. Mihai şi Andrei au avut de rezolvat un număr egal de exerciţii. După ce Mihai a rezolvat 12 probleme, iar Andrei 21 de probleme, lui Mihai i-au rămas de rezolvat de 2 ori mai multe probleme decât lui Andrei.
Câte probleme a avut fiecare copil de rezolvat?

Inst. Axente Mirela

P:42. O ladă cu portocale este cu 8 kg mai grea decât una cu banane.
Cât cântăreşte fiecare ladă, dacă în magazin sunt 5 lăzi cu portocale şi 3 cu banane, în greutate totală de 296 kg.

***Înv.*Ene Rodica**

P:43. Îndoitul unui număr însumat cu doimea lui reprezintă 25.
Află numărul.

***Înv.*Ene Rodica**

P:44. Pentru 30 de pui şi 16 raţe s-au încasat 850 de lei. Ştiind că 10 pui valorează cât 6 raţe, să se afle cât costă fiecare pasăre.

***Înv.* Lupşan Constantin**

P:45. Reconstituiţi adunarea:

$$\begin{array}{r} MAC + \\ AC + \\ \underline{C} \\ MIC \end{array}$$

***Prof*. Lupşan Ion**

P:46. Bunicul împarte 45 de lei celor 4 nepoţi ai săi. După ce primul ar mai primi 2 lei, al doilea ar cheltui 2 lei, cel de-al treilea ar mai primi de la mama aceeaşi sumă pe care o are de la bunicul, iar cel de-al patrulea şi-ar cumpăra o carte cu jumătate din suma primită, sumele celor patru copii ar fi egale.
Câţi lei a primit fiecare de la bunicul său?

***Inst.* Lupşan Nicoleta Gabriela**

P:47. Trei silvicultori au împădurit o zonă deluroasă cu 2500 de puieţi de plop şi mesteacăn.
Ştiind că s-au sădit de patru ori mai mulţi puieţi de plop decât de mesteacăn, câţi puieţi s-au sădit din fiecare specie?

***Înv.* Marchidanu Florica**

P:48. La o masă fiecare persoană consumă câte două pahare de apă minerală a câte 100 ml. Dacă s-a cumpărat o sticlă de 2 litri de apă şi la masă participă 6 persoane, câtă apă mai rămâne în sticlă?

***Înv.* Marchidanu Florica**

Clasa a IV-a

P:49. Suma a trei numere naturale este 96.
Aflaţi numerele ştiind că primul număr este cât dublul celui de-al doilea număr, iar al treilea este cât suma primelor două numere.

***Inst.* Anton Maria**

P:50. Ce număr se obţine dacă din cel mai mare număr de 6 cifre se scade cel mai mic număr de 5 cifre, ştiind că atât primul cât şi al doilea număr se scriu mereu cu cifre distincte?

***Înv.* Avigeanu Felicia**

P:51. Alex şi-a cheltuit banii de buzunar astfel: cu jumătate din ei a cumpărat rechizite, cu un sfert din suma rămasă dulciuri, cu jumătate din noul rest jucării şi cu restul de 33 lei cărţi.
Află câţi bani de buzunar a avut Alex.

***Înv.* Ion Daniela**

P:52. Ştiind că numerele a, b, c satisfac simultan egalităţile

a + b = 3112
b + c = 2474

să se calculeze diferenţa a - c.

***Înv.* Lupşan Ion**

P:53. Într-o cutie sunt 45 de bomboane. În prima zi, Maria mănâncă o treime din bomboane, iar a doua zi mănâncă $\frac{5}{6}$ din bomboanele rămase. A treia zi împarte bomboanele cu fraţii ei în mod egal.
Câţi fraţi are Maria?

***Inst.* Lupşan Nicoleta Gabriela**

P:54. Suma a trei numere a,b,c este 1986. Ştiind că b este dublul lui a, iar a este diferenţa dintre c şi b, aflaţi numerele.

***Înv.* Marcela Marin**

Dan se gândeşte la un număr. După ce îl înmulţeşte cu 2, scade 100.Restul obţinut îl înmulţeşte iarăşi, cu 2 şi din rezultat, scade 300. Din nou, înmulţeşte restul cu 2, scade 400 şi obţine 80.La ce număr s-a gândit Dan?

***Înv.* Marcela Marin**

Clasa a V - a

G:32. Să se arate că există o infinitate de perechi de numere naturale cu proprietatea că, împărţindu-l pe primul la al doilea, obţinem un cât şi un rest, iar împărţindu-l pe al doilea la primul, obţinem câtul egal cu primul rest şi restul egal cu primul cât.

Prof. Constantin Apostol

G:33. Determinaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că are loc relaţia: $\frac{\overline{abc}}{(b+c)^2} = a^2$.

***Prof.* Adrian Stan**

G:34. Determinaţi numerele naturale nenule **a,b,c,d,e** astfel încât $5^{61} = a^2 + b^3 + c^4 + d^5 + e^6$.

***Prof.* Luca Tuţă**

G:35. Suma a două numere naturale este 162, iar suma răsturnatelor este 513. Determinaţi cele două numere.

***Prof.* Ştefana Ispas**

G:36. Să se determine numerele naturale x şi y ştiind că $x^2 - 5y \in \{2,3,7,8\}$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

G:37. Găsiţi toate numerele naturale pătrate perfecte mai mici decât 2008, care la împărţirea cu 48 dau restul 16.

***Prof.* Adrian Stan**

G:38. Determinaţi numerele prime a,b,c astfel încât: $4^a \cdot 8^b \cdot 16^c = 32^8$. ***Prof.*** **Simion Marin**

G:39. Determinaţi x $\in$ N astfel încât $\frac{5x-49}{20}$ să ia valoarea cea mai mică.

Prof. **Lupşan Rodica**

G:40. Aflaţi x, dacă fracţia $\frac{529}{(2x+3)^2}$ este echiunitară. ***Prof.*** **Ion Stănescu**

Clasa a VI - a

G:41. Determinaţi două fracţii, astfel ca diferenţa lor să fie egală cu produsul lor.

Prof. **Luca Tuţă**

G:42. Să se afle restul împărţirii lui 5^{6^n} la 11. ***Prof.*** **Adrian Stan**

G:43. Fie a şi b două numere naturale nenule.

a) Să se arate că dacă $(a,b)=1$, atunci $(a+b,ab)=1$.

b) Să se arate că $(a+b,ab)=1$, atunci $(a,b)=1$.

Prof. Constantin Apostol

G:44. Să se rezolve în $Z \times Z$ ecuaţia: $2009 \cdot x + 2008 \cdot y = 2011$.

Prof. **Neculai Stanciu**

G:45. Se consideră n numere naturale nenule şi diferite între ele, notate o dată cu $a_1, a_2, ..., a_n$ şi apoi, în altă ordine $b_1, b_2, ..., b_n$. Arataţi că nu putem avea: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Prof. **Ştefana Ispas**

G:46. Să se rezolve în N* ecuaţia: $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+..+n} = \frac{1004}{1005}$.

Prof. **Gheorghe Struţu, Prof. Ligia Struţu**

G:47. Să se simplifice raportul $\frac{\overline{aaa} - \overline{bbb} + \overline{ccc}}{\overline{ddd}}$. ***Prof.*** **Lupşan Rodica**

G:48. Rezolvaţi în N, ecuaţia: 8+18+28+...+2008=1008$\cdot x$

Prof. **Simion Marin,**

(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, iulie 2008)

G:49. Stabiliţi paritatea cifrei unităţilor, a zecilor şi a sutelor numărului $A = 7^1 + 7^2 + ... + 7^{4k}$, $k \in N, k \geq 4$.

Prof. **Dumitru Mărgineanu**

(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, iulie 2008)

G:50. Determinaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ştiind că sunt exprimate prin numere prime.

Prof. Simion Marin

G:51. Două unghiuri complementare au raportul dintre suma şi diferenţă măsurilor lor, 15. Aflaţi măsurile unghiurilor. ***Prof.*** **Ion Stănescu**

Clasa a VII - a

G:52. Să se calculeze x+y dacă: $x^4=y^4+48$, $x^2+y^2=12$ si $x=y+2$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

G:53. Fie $a=2^2+4^2+6^2+....+2008^2$ *si* $b=1^2+3^2+5^2+....+2007^2$. Calculaţi $\frac{a-b}{1004}$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

G:54. Să se arate că suma pătratelor a trei numere întregi consecutive impare, adunată cu 1 dă un număr divizibil cu 12.

***Prof.* Adrian Stan**

G:55. Arataţi că orice număr din şirul 1, 2, 3, ..., n este divizorul a cel puţin unui număr din şirul n+1,n+2,...,2n.

***Prof.* Ştefana Ispas**

G:56. Să se rezolve în $Q\times Q$ ecuaţia:

$$2x\sqrt{4+\sqrt{15}}-2y\sqrt{4-\sqrt{15}}=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}$$

Prof. Constantin Apostol

G:57. Să se rezolve ecuaţia: $\frac{1}{2\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 20}+...+\frac{1}{20\cdot 29}+...+\frac{1}{1997\cdot 2006}=\frac{167}{x\cdot(3010-x)}$.

***Prof.* Gheorghe Struţu**
***Prof.* Ligia Struţu**

G:58. Să se arate că numărul $x=\sqrt{\underbrace{100...0200...01}_{2n+3\ cifre}}$ este natural.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**

G:59. Să se arate că ecuaţia $x^3=64^y+15$ nu are soluţii în NxN.

***Prof.* Neculai Stanciu**

G:60. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\hat{A})=90^0$ şi $m(\hat{C})=15^0$, înălţimea din A este un sfert din lungimea ipotenuzei şi să se determine $\sin 15^0$.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**

G:61. Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{n}, M\in(AB)$ dacă si numai dacă $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{n+1}$ unde $\{N\}\in AC\cap MD$, iar $n\in N, n\geq 2$.

***Prof.* Luca Tuţă**

G:62. Se dă triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^0$ şi $m(\angle C)=30^0$.Fie D, simetricul lui A faţă de BC şi E, simetricul lui A faţă de mijlocul laturii (BC).Arătaţi că $DE=\frac{BC}{2}$. (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, iulie 2008)

***Prof.* Cătălin Iordache**

G:63. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^0$.Arătaţi că bisectoarea din C şi mediana din A sunt perpendiculare, dacă şi numai dacă, $m(\angle C)=60^0$.(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, iulie 2008)

***Prof.* Grigore Marin**

G:64. Arătaţi că aria unui trapez dreptunghic ortodiagonal este egală cu produsul dintre media aritmetică şi media geometrică a lungimilor bazelor.

***Prof.* Simion Marin**

G:65. Un dreptunghi are aria egală cu aria unui pătrat. Dacă perimetrele lor sunt egale, cum sunt dimensiunile dreptunghiului, comparative cu latura pătratului?

***Prof.* Ion Stănescu**

G:66. Demonstraţi că într-un triunghi ABC, $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B}) \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$

***Prof.* Ana Panaitescu**

Clasa a VIII - a

G:67. Să se arate că numărul $3^{3n+1} + 2 \cdot 3^{n+1}$ se poate scrie ca o sumă de cuburi a trei numere naturale consecutive.

***Prof.* Adrian Stan**

G:68. Arătaţi că $91 \mid \sqrt{\overline{abcabc}}$.

***Prof.* Lupşan Rodica**

G:69. Să se stabilească semnul numărului $a = (\sqrt{2008} - 1) \cdot (\sqrt{2007} - 2) \cdot (\sqrt{2006} - 3) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{1} - 2008)$.

***Prof.* Adrian Stan**

G:70. Determinati patratul numarului A=$\underbrace{33...3}_{n-1\,\text{cifre}}4$.

***Prof.* Ştefana Ispas**

G:71. Să se determine valorile reale ale lui x şi y astfel încât expresia
$E(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 39x^2 - 39y^2 + 2xy - 12x - 12y + 437$ să admită valoare minimă.

***Prof.* Gheorghe Struţu**

G:72. a) Să se arate că toate ecuaţiile de gradul II, cu coeficienţi diferiţi, din mulţimea $\{2,1,-3\}$, au o rădăcină comună.
b) Generalizare.

***Prof.* Constantin Apostol**

G:73. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi m şi n, de parităţi diferite, există numerele întregi a şi b, astfel încât, $a(a+m) = b(b+n)$.

***Prof.* Constantin Apostol**

G:74. Se dă expresia $E(x) = X^4 - 3X^2 - 14X - 12$.

a) Descompuneţi expresia în factori ireductibili;
b) Arătaţi că $5^{4n} - 3 \cdot 5^{2n} - 14 \cdot 5^n - 12$ se divide cu $5^{2n} + 2 \cdot 5^n + 4$, oricare ar fi n, număr natural.

(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, iulie 2008)

***Prof.* Mariana Apostol**

G:75. Rezolvaţi in **R** inecuaţia: $\left|\frac{x+4}{x-2}\right| \leq 3$.

***Prof.* Ion Stănescu**

G:76. Se consideră un cub pentru care volumul plus perimetrul bazei este egal cu aria laterală. Câţi metri are lungimea diagonalei cubului?

***Prof.* Neculai Stanciu**

G:77. Se dă triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^0$.Să se arate că oricare ar fi punctul M pe (BC), există punctele N pe (AB) şi P pe (AC), astfel încât triunghiurile MNP şi ABC să aibă acelaşi centru de greutate.
(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, iulie 2008)

***Prof.* Constantin Apostol**

G:78. În vârful A al unui triunghi dreptunghic ABC cu lungimea catetelor AB=3 cm şi AC=4 cm, se ridică perpendiculara SA pe planul triunghiului, astfel încât SA=$\frac{12}{5}cm$. Să se afle:

a) distanţa de la S la latura BC;
b) măsura unghiului diedru format de planele (SBC) şi (ABC);
c) aria totală şi volumul tetraedrului SABC.

***Prof.* Luca Tuţă**

G:79. Pe planul triunghiului ABC având $m(\hat{C}) = 30^0, m(\hat{A}) = 90^0$ şi perimetrul egal cu $24 + 24\sqrt{3}$ cm, se ridică perpendiculara AM de 12 cm. Determinaţi măsura unghiului format de planele (MBC) şi (ABC)

***Prof.* Simion Marin**

Clasa a IX - a

L:30. Să se arate că toate parabolele care sunt reprezentările geometrice ale graficelor funcţiilor de gradul II, cu coeficienţi diferiţi din aceeaşi mulţime de trei numere reale nenule, au un punct comun.

***Prof.* Constantin Apostol**

L:31. Să se rezolve în R* ecuaţia $\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 3$, unde [a] reprezintă partea întreagă a lui a, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a.

***Prof.* Neculai Stanciu**

L:32. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, a_3, ... a_{2n-1}, a_{2n}$, $n \in N^*$, în această ordine, în progresie aritmetică şi $S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$. Să se arate că

$$S = \frac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2).$$

***Prof.* Constantin Dinu**

L:33. Fie $a_n = 2^{1-n} \cdot 3^n,\ n \in N^*$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in N^*}$ este o progresie geometrică;

b) Determinaţi $n \in N^*$ astfel încât suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{195}{32}$.

***Prof.* Constantin Dinu**

Clasa a X - a

L:34. Să se determine numerele reale $x, y, z \in R$ din ecuaţia:

$$\sqrt{2^x(4^y + 8^z)} + \sqrt{4^y(8^z + 2^x)} + \sqrt{8^z(2^x + 4^y)} = \sqrt{2}(2^x + 4^y + 8^z).$$

***Prof.* Adrian Stan**

L:35. Fie $a, b \in R_+$, cu a+b=1.

a) Să se arate că: $a^2 \cdot b \le \frac{4}{27}$;

b) Să se determine valoarea maximă a funcţiei f:R→R, $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

***Prof.* Constantin Dinu**

Clasa a XI - a

L:36. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x)$.

b) Să se determine parametrii a şi b astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+x+1}+2ax+3b)=3.$

***Prof.* Constantin Dinu**

L:37. Să se arate că ecuaţia $a^x = bx^2 + cx + d$ are cel mult trei rădăcini reale $\forall a \succ 1$,b$\in R^+$;c,d$\in R$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

L:38. Să se calculeze matricea: $A=\sum\limits_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} k^3 & k(3k+1) \\ (2k-1)^2 & k^2 \end{pmatrix}$.

***Prof.* Gheorghe Struţu**

L:39. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2008 \\ 2008 & 1 & 2 & ... & 2007 \\ 2007 & 2008 & 1 & ... & 2006 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 3 & 4 & ... & 1 \end{pmatrix} \in M_{2008}(R)$.

Calculaţi $\det A$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

L:40. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & ... & 2^{2007} \\ 2^{2007} & 1 & 2 & ... & 2^{2006} \\ 2^{2006} & 2^{2007} & 1 & ... & 2^{2005} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2^2 & 2^3 & ... & 1 \end{pmatrix} \in M_{2008}(R)$.

Calculaţi $\det A$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Clasa a XII - a

L:41. Calculaţi $I(x)=\int \frac{\arccos(e^x)}{e^x}dx,\quad x\in(-\infty,0)$.

***Prof.* Constantin Dinu**

L:42. Să se arate că $\int\limits_0^2 \sqrt{2^x}dx - 2\int\limits_1^2 \log_2 x dy = 4.$

***Prof.* Adrian Stan**

L:43. Să se calculeze $\int x\cdot(tg^2 x + 2009)dx$.

***Prof.* Adrian Stan**

L:44. Să se calculeze: a) $\int (1-x^2)^{2008}dx$;

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(2008+\arcsin x)^{2009}}dx$

c) $\int \frac{1}{x\cdot(2008+\ln x)^{2009}}dx$

***

6. Teste pregătitoare pentru tezele cu subiect unic

Model - Teză cu subiect unic la matematică
Clasa a VII-a, semestrul I, 11.12.2008

Prof. Adrian Stan,

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I (50 de puncte) – Pe foaia de teză se trec numai rezultatele.

4p. **1. a)** Rezultatul calculului (-16):(+4)+6 este ....

3p. **b)** Dintre numerele $a=-\frac{3}{7}$ şi $b=-\frac{7}{16}$ mai mare este numărul ....

3p. **c)** Valoarea de adevăr a propoziţiei " $2\sqrt{9}-6$ este iraţional" este ....

4p. **2. a)** Soluţia ecuaţiei 3(x-4)-8=-10 este ....

3p. **b)** Soluţia număr intreg negativ a ecuaţiei $x^2=81$ este.............

3p. **c)** Rezultatul calculului $[-120: (-2^2)-25-32: (-4)^2].(-2)=$..............

4p. **3. a)** Rezultatul calculului $\left[\left(-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}\right)\cdot(-12{,}5)-0{,}1(6)\right]^2-0{,}5^3$ este ....

3p. **b)** Dacă $\sqrt{13}=3,abcd....$,atunci produsul abcd este egal cu ....

3p. **c)** Media geometrică a numerelor $a=20\sqrt{2}$, $b=5\sqrt{8}$ este ....

4. ABCD dreptunghi cu AB=10cm, BC=6cm.

4p. **a)** Perimetrul lui ABCD este...............

3p. **b)** Aria lui ABCD este.......................

3p. **c)** Dacă O este intersecţia diagonalelor să se calculeze aria triunghiului OAB.

5. ABCD este un trapez isoscel cu $AB\equiv CD$, AD=6cm M, N picioarele perpendicularelor duse din A respectiv D pe BC cu BM=5 cm şi $m(\hat{BAM})=30^0$

4p. **a)** Lungimea liniei mijlocii este.............

3p. **b)** Perimetrul trapezului ABCD este ....

3p. **c)** Aria trapezului ABCD este ....

SUBIECTUL II (40 de puncte) – Pe foaia de teză scrieţi rezolvările complete.

5p. **1. a)** Să se arate că numărul $\sqrt{2005n+2008}$ este iraţional pentru orice număr natural n.

5p. **b)** Să se calculeze media aritmetică a numerelor $a=2\sqrt{32}+3\sqrt{243}-(\sqrt{512}-\sqrt{1385})$,

$b=\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}+\sqrt{(4\sqrt{3}-5\sqrt{2})^2}$.

2. Într-un depozit magazionerul dacă aranjează 55 de cutii pe un singur raft îi mai rămân 135 de cutii nearanjate, iar dacă pune câte 70 de cutii pe fiecare raft atunci îi mai rămân trei rafturi goale**.**

5p. **a)** Determinaţi numărul de cutii;

5p. **b)** Determinaţi numărul de rafturi.

3. ABCD paralelogram cu AB=8cm, , $m(\hat{A})=30^0$, AD=4cm.

5p. **a)** Desenaţi paralelogramul şi duceţi înălţimea DE.

5p. **b)** Calculaţi aria paralelogramului.

5p. **c)** Dacă M este mijlocul lui DC iar N mijlocul lui BC să se arate că MONC este paralelogram.

5p. **d)** Calculaţi aria triunghiului CMN.

Model - Teză cu subiect unic la matematică
Clasa a VIII-a, semestrul I, 11.12.2008

Prof. Neculai Stanciu,

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I (50 de puncte) – Pe foaia de teză se trec numai rezultatele.

4p. **1. a)** Rezultatul calculului $\sqrt{32} : \sqrt{2}$ este ...
3p. **b)** Dintre numerele $a = 3\sqrt{4}$ şi $b = 2\sqrt{5}$ mai mic este numărul ...
3p. **c)** Valoarea de adevăr a propoziţiei “$\sqrt{3}$ este iraţional” este ...
4p. **2. a)** Rezultatul calculului $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ este ...
3p. **b)** În intervalul $[0,1]$ există ... numere întregi
3p. **c)** Valoarea de adevăr a propoziţiei “$|1 - \sqrt{2}| = 1 - \sqrt{2}$” este ...
4p. **3. a)** Scrieţi sub formă de interval $3 < x \leq 10$ ...
3p. **b)** Rezultatul calculului $2x \cdot 5x^2$ este ...
3p. **c)** Valoarea de adevăr a propoziţiei “$(x+1)^2 = x^2 + 1$” este ...
4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $DB = 4$ şi $VA = 4$
4p. **a)** Măsura unghiului VBD este egală cu ...
3p. **b)** Lungimea segmentului VO este egală cu ...
3p. **c)** Lungimea segmentului VA este egală cu ...
5. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are latura $AB = 2$
4p. **a)** Perimetrul bazei este egal cu ...
3p. **b)** Diagonala cubului este egală cu ...
3p. **c)** Diagonala unei feţe este egală cu ...

SUBIECTUL II (40 de puncte) – Pe foaia de teză scrieţi rezolvările complete.

5p. **1. a)** Calculaţi $\frac{2}{\sqrt{3}+2} - (\sqrt{3} + 2)$.
5p. **b)** Calculaţi $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.
5p. **2. a)** Să se rezolve în R ecuaţia $|x^2 - 9| + |x + 3| = 0$.
5p. **b)** Dacă a şi b sunt numere reale cu $a + b = 12$ şi $ab = 24$, calculaţi $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ şi $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}$.
3. Fie tetraedrul regulat $VABCD$ cu $AB = 2$.
5p. **a)** Desenaţi tetraedrul şi înălţimea VO.
5p. **b)** Calculaţi înălţimea VO.
5p. **c)** Arătaţi că $VA \perp BC$.
5p. **d)** Calculaţi măsura unghiului format de dreptele VA şi VM.

7. *Caleidoscop matematic*

„ Înţelepciunea şi iubirea mea e jocul ”
Lucian Blaga

Matematica – un joc

de Prof. Ana Panaitescu

Să facem matematica atractivă,să atragem copii către aceasta prin noi modalități cum ar fi jocul. Prin joc sperăm să atragem elevii spre studiul matematicii, să arătăm ca nu este o ştiință rigidă cum cred ei sau cum au auzit de la cei mai mari ca ei.

Studiul matematicii este important nu numai pentru cei ce vor îmbrățişa în viitor o profesie cu caracter tehnic. Sunt cunoscute aplicațiile matematicii în cele mai diverse domenii ca: biologia, economia, cibernetica, medicina, etc. Se ştie că matematica are calitatea de a contribui la formarea gândirii logice a omului. **M. I. Kalinin** spunea că ,,matematica disciplinează mintea , ne obijnuieşte să gândim logic. Nu degeaba se spune că matematica este gimnastica minții.”

În viața de toate zilele, omului îi sunt necesare deprinderea de a judeca logic, intuiția, spiritul de observație,perspicacitatea,etc., calități care pot fi foarte bine dezvoltate prin rezolvarea de probleme matematice interesante şi legate de viață. Acest lucru poate fi făcut nu numai la orele de matematică ci în cadrul familiei sau a cercului de prieteni şi colegi, în excursii, tabere, ocazii de a petrece timpul în mod plăcut şi util rezolvând probleme de matematică distractivă.

Ca principală formă de activitate şi ca bază de comunicare şcolară, jocul este prea puțin apreciat şi valorificat. Jocul conține cele mai importante elemente ale învățării: inițiativa şi autoghidarea precum şi posibilitatea de a trăi şi simți consecințele propriilor acțiuni. Orice intervenție din afară sau impunerea de reguli precise, obligatorii distrug motivația interioară a jocului transformând-o într-una exterioară elevul se joacă în acest caz doar pentru a place adultului şi este dependent de afecțiunea acestuia sau de teama critici sau pedepsei. Jocul implică anumite procese de gândire şi un anumit fel de a vorbii, multe forme de comunicare liberă între copii, iar jocul, ca şi discuțiile avute despre el , precum şi toate momentele de desfăşurare pot deveni prilejuri deosebit de interesante de educație. Pedagogia şcolară cunoaşte multe tipuri de jocuri: jocuri de cunoaştere,jocuri de cercetare şi de ghicit,jocuri ale fanteziei, jocul constructiv configurativ ,etc.

Cu ajutorul problemelor distractive şi ,,jocul” matematic putem să atragem spre matematică mai mulți elevi.
Propun câteva tipuri de probleme pentru un eventual opțional la matematică.

- GEOMETRIE CU CHIBRITURI
- PĂTRATE MAGICE , SUME ÎNCRUCISATE
- PRACTICA ŞI GEOMETRIA
- CU CREIONUL PE HÂRTIE ŞI CU MINTEA TA ZGLOBIE…
- TRUCURI,, MATEMATICE” SI NU NUMAI….

1. Cum aflăm vârsta unei persoane?

Rugăm persoana căreia dorim să-i aflăm vârsta să înmulțească vârsta sa, exprimată în ani, cu 2, la rezultatul obținut să adauge 5, suma obținută să fie înmulțită cu 5. Cerem rezultatul. Acesta va avea ultima cifră 5, pe care o eliminăm din rezultat, iar din numărul rămas se va scădea 2. Diferența obținută va reprezenta vârsta persoanei.

Exemplu:

Presupunând că persoana are 9 ani, efectuăm următoarele operații:

9 x 2 = 18 18 + 5 = 23 23 x 5 = 115 Eliminând ultima cifră se obține 11.

Vârsta calculată este: 11 - 2 = 9 (ani)

2. Calcul rapid

Orice număr înmulțit cu 11 se calculează rapid astfel: numărul dat se însumează cu numărul dat înmulțit cu 10; De ce?

Exemplu:

$$35 \cdot 11 = \begin{array}{r} 35+ \\ \underline{350} \\ 385 \end{array} \qquad 71 \cdot 11 = \begin{array}{r} 71+ \\ \underline{710} \\ 781 \end{array} \qquad 123 \cdot 11 = \begin{array}{r} 123+ \\ \underline{1230} \\ 1353 \end{array}$$

3.Curiozități:

$9 = (0 \cdot 9) + (0 + 9)$

$19 = (1 \cdot 9) + (1 + 9)$

$29 = (2 \cdot 9) + (2 + 9)$

$39 = (3 \cdot 9) + (3 + 9)$

....

$99 = (9 \cdot 9) + (9 + 9)$

$119 = (11 \cdot 9) + (11 + 9)$

$129 = (12 \cdot 9) + (12 + 9)$ De ce ?

....

4. Ce număr se potriveşte?

2	**3**	**4**	**24**
3	**2**	**2**	**12**
4	**2**	**6**	**48**
4	**3**	**4**	**?**

8	**6**	**4**
?	**9**	**1**
7	**5**	**3**

Prof., Şcoala nr. 8, Rm Sărat

Răspunsurile din numărul trecut:

Curiozități matematice 1. 9999^2=9990001; **2.** 1111^2=1234321; 3. 95^2=9025;

Unde este greşeala? 1) **-1=1** Nu există lg(-1), prin urmare nu are sens rezolvarea ecuației.

2) **i=0** Raportul $\dfrac{-1-\cos\pi}{\sin\pi}$ e un raport de funcții constante ale căror derivate sunt nule, şi nu respectă regula lui L'Hospital.

3) $i \in R$ *sau* $i \in C$ Nu există lgi , deoarece nu se calculează logaritmi din numerele complexe.

Să ghicim numere

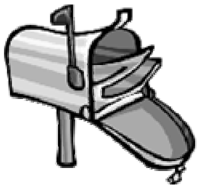
Toate numerele de pe cele cinci tabele se scriu ca sume de puteri ale lui 2 de forma $a \cdot 2^0 + b \cdot 2^1 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 + e \cdot 2^4$ cu a,b,c,d,e fiind 0 sau 1după cum numărul aparține sau nu tabelului reprezentat de puterea lui 2, adică 2^0 corespunde primului tabel, 2^1 corespunde celui de –al doilea tabel, etc. De exemplu $15 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$, adică numărul 15 se găseşte doar în primele patru tabele.

„ Matematica este un joc care se joacă după anumite reguli simple cu semne fără de înțeles pe hârtie”

David Hilbert

„Când nu mai poţi să gândeşti, începi să ai idei fixe”

Ernest Renan



8. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut al doilea număr al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Toţi aceia care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa redacţiei **Şcoala cu clasele I-VIII, POTOCENI, Com. MĂRĂCINENI, Jud. BUZĂU**, **Str. Centrală, nr. 107, Cod: 127327; Tel. 0238556432**, cu menţiunea Pentru revista de matematică „SCLIPIREA MINTII” . De asemenea se pot trimite pe adresele de mail: **ady_stan2005@yahoo.com, sclipireamintii@yahoo.com**, **stanciuneculai@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate , fie scrise de mână şi scanate.
Informaţii suplimentare se pot obţine la **Tel. 0238556432**, sau vizitând pagina Web: **www.sclipireamintii.110mb.com**

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condiţiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluţiei să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **P, G** şi **L** sunt pentru diferenţierea pe invăţământ primar,gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar elevii cu cele mai mari punctaje vor fi menţionaţi în revistă, urmând să fie premiaţi cu diplome şi cărţi.

Data finală până când profesorii şi elevii pot trimite materialele şi rezolvările pentru numărul 3 al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2009**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Redacţia

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 8, " Valeriu Sterian"Rm. Sărat:
Clasa a VI-a: Alecu Cristian(7), Dumitru Dragoş(7), David Alexandra(7), Ionescu Cătălin(6), Dinică Mariana(6), Ion Adina(5), Stoian Ionela(5), Gheorghe Denisa(5), Necula Cătălina(5), Preda Gabriela(5), Dobroiu Nadia(5);
Clasa a VII-a: Aktug Nebahad(8), Untea Alice(8), **Prof Panaitescu Ana;**

Şcoala Berca(Grup Şcolar Tehnologic „ Sf. Mc. Sava"):
Clasa a III-a: Marcu Alexandra, Şomoiag Andreea, Alexe Rareş, Panaet Roberta, Dascălu Ana Maria, Baciu Andrei, Zăvoianu Vlad, **Înv. Ene Rodica;** Dogaru Ioana; Iordache Ciprian, Nistor Răzvan, **Înv. Vrabie Marioara;** Boriceanu Bogdan, Tudor Alexandru, Andronache Lorena, Calen Mădălin, Popa Ana, Popa Mihaela, Cernat Miruna, Chivu Ştefania, Moldoveanu Mina, **Înv. Marchidanu Florica;**
Clasa a IV-a A : Bălălău Bogdan Ionuț, **Înv. Ion Daniela;** Neacşu Teodor, Dascălu Andreea, Vlad Mădălin, Pascu Bianca, Țiboacă Doina, Neagu Cezar, Bratu Raluca, Bahudu Roxana, **Înv. Avrigeanu Felicia;**
Vasile Nichi, Panaete Alexandra, Olaru Cosmin, Dinu Andrei, Leițoiu Adrian, **Înv. Anton Maria;**
Clasa a V-a: Oprea Andreea Bianca(7), Dumitrescu Sânziana Ioana(6), Grama Florin(6), Păpătoiu Gabriel(6);**Prof. Lupşan Rodica;** Marcu Bogdan(10), Năstase Cosmin(8), Rusen Călin(7), Popescu Liviu(7), Vlad Iuliana(6), Buganu Gabriel(6), Brăescu Elena(6), Diaconu Denis(6), Păun Andreea(6), Dogaru Georgiana(5), Dragomir Mădălin(5), Dobre Bianca(5), **Prof. Popa Claudia;**
Clasa a VI-a: Şoigan Mihaela(9), Radu Alexandru(9), Gheorghe Valentin(7), Dragomir Andreea(7), Dogaru Dorina(7), **Prof. Lupşan Rodica;** Dodan Anca(8), Dinu Cristi(8), **Prof. Berca Vasile;**
Clasa a VII-a: Dragomir Florin(10), Neagu Ancuța(10), Popa Andreea(10), Castravete Miruna(10), Minea Elena(10), Anton George(10), Dogaru Iulian(10), Stoica Petruț(9), Banu Bianca(9), Coman Eleonora(9), Tănase Bianca(9), Barchizeanu Andra(8), Chivu Adrian(8), Ilie Cristian(8), Jupoiu Marian(8), Constantin Răzvan(8), Iordache Răzvan(7), Prună Iulian(7), Huchiu Roxana(6), Budui Andreea(6), Câmpeanu Cosmin(6), Şerbănescu Valentin(6), **Prof. Stanciu Neculai;** Dodan Bogdan(9), **Prof. Berca Vasile;**
Clasa a VIII-a: Mezei Raluca(7), Şolea Mirela(7) , Preda Ruxandra (6), Jipa Iohana(6), Păpătoiu Andrei(6), **Prof Lupşan Rodica;** Vlad Alexandru(6), Croitoru Victor(6), Marin Florina(6), Tudora Mădălina(6), Pavel Alexandru(4), Cojocaru Tatiana(4), Palcău Cristina(4), Popa Ana Maria(4), Vasile Cosmina(4), Vrabie Lucian(4), Bundă Rareş(4), **Prof. Stanciu Neculai;**

Şcoala cu clasele I-VIII, Potoceni:
Clasa a V-a: Roşu Laurențiu(9), Cîmpeanu Andreea(8), Luntraru Denisa(8), Necula Elena(7), Păduraru Alexandra(7), Scîntei Bianca(6), Vlăgea Adrian(5), Caloian Bogdan(5);
Clasa a VI-a: Câmpeanu Iulian(10), Soare Georgiana(10), Popescu Mirela(9), Sava Ionuț(8), Martinov Alina(8), Manole Marius(7); Ciocan Irina(6), Tudose Ana Maria(6), Cucu Răzvan(5), Vlăgea Ionuț(5), Popescu Mădălina(5), Damian Cătălin(4), Zaharia Paul(4), Trentea Daniel(4), Ştefan Răzvan(4);
Clasa a VII-a: Bogdan Oana(5); Ilie Denis(5), Gembăşel Florica(5), Mihalcea Cătălin(4), Constantin Florin(5), Stan Anton(4), Văleanu Nicolaie(4);
Clasa a VIII-a: Ungureanu Liviu(12), Cîmpeanu Ion(12), Naftan Cristina(12), Tudorie Anca(8), Brezeanu Ioana(8), Moraru Cristian(7), Gembăsel Valerică(7), Bărbunea Mirela(6), Albu Florin(5), Roşu Gabriel(4), Mihai Maria(4), Ulmeanu Oana(4);
Prof. Stan Adrian;

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni:
Clasa a V-a: Scarlat Roxana (7), Vasile Georgiana (6), Minea Diana (5), Popa Ramon (5), Velicu Gabriel (5);
Clasa a VI-a: Dragomir Alexandru (6), Cristea Maria (5), Bârzoi Mădălina (5), Chivu Georgiana (5), Stanciu Simona (5);
Clasa a VII-a: Buzatu Camelia (5), Dumitru Cristina (4), Marin Ana (4), Lică Silviu (4), Radu Laura (4);
Clasa a VIII-a: Cristescu Lavinia (5), Apostol Alina (4), Luca Ciprian (4), Bratu Ioana (4), Simion Alin (4);**Prof. Stănescu Ion**