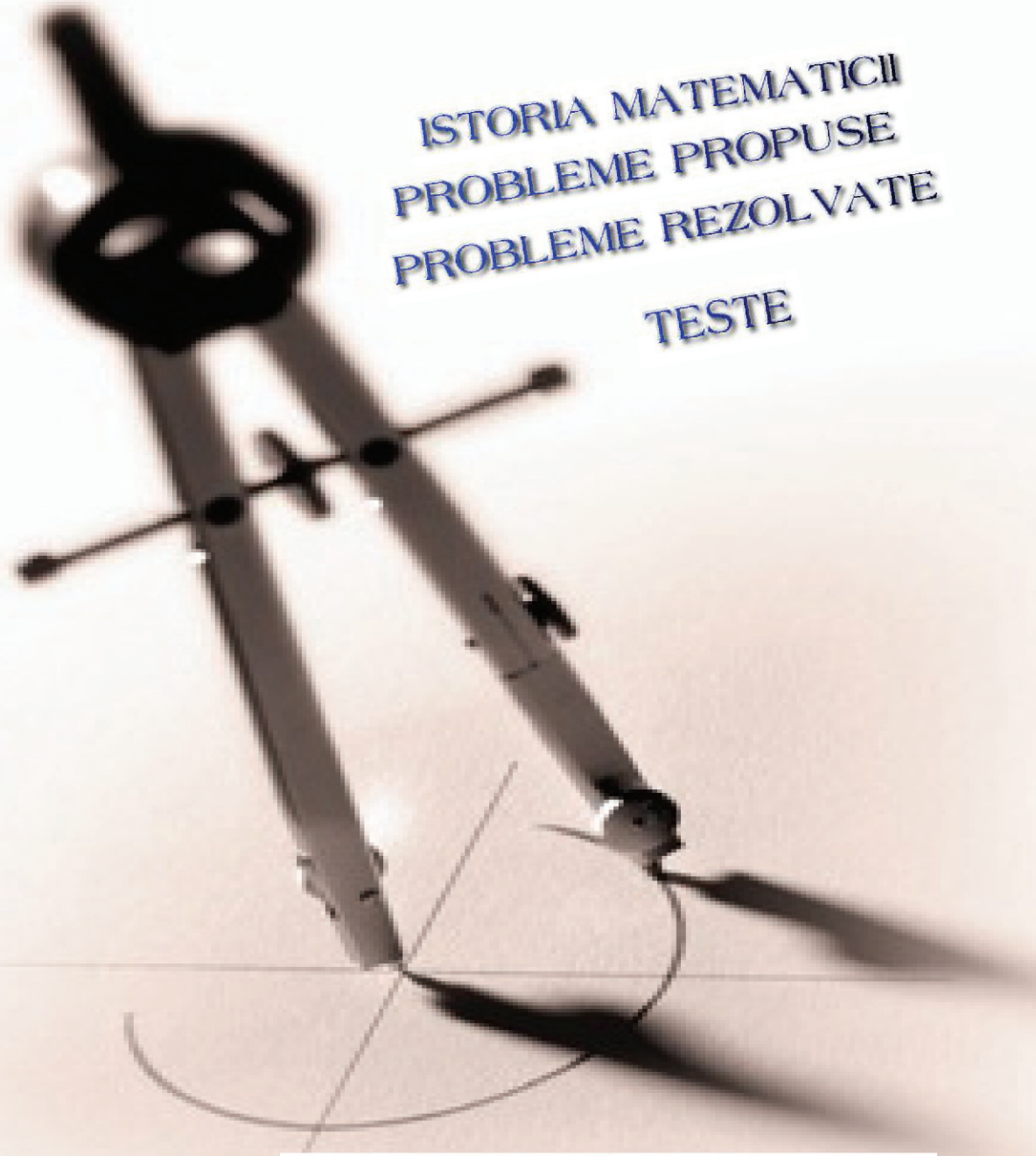
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN V, NR IX, 2012

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

ISSN 2247 - 6601
ISSN-L 2247 - 6601

SCLIPIREA MINTII

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An V, Nr. IX, APRILIE 2012, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- Membrii onorifici:

Constantin Apostol – Preşedinte de onoare

Constantin Rusu - Preşedinte de onoare a Filialei Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice

Lenuța Pîrlog – Preşedinte Filiala Buzău a Societății de Ştiințe Matematice

D. M . Bătinețu – Giurgiu **Titu Zvonaru**
Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**

- Director:
  Neculai Stanciu

- Redactor şef:
  Adrian Stan

- Redactori principali:
  Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
  Andrei Octavian Dobre **Iuliana Trască**
  Gabriela Nicoleta Lupşan

Membri :
Luca **Tuță,** Lăcrimioara **Năstase,** Florentina **Popescu**, Ciprian **Cheşcă**, Gheorghe **Dârstaru**, Ligia **Struțu**, Gheorghe **Struțu**, Delia **Naidin**, Ion **Stănescu,** Simion **Marin**, Marcela **Marin**, Maria **Anton**, Ion **Lupşan**, Constantin **Lupşan,** Ion **Radu,** Ovidiu **Țâțan,** Mirela **Axente,** Cristian Cosmin **Brânză,** Mihaela Cornelia **Luca,** Florica **Marchidanu,** Gabriela **Marinescu,** Florica **Anton,** Mirela **Lupşan,** Cornelia **Gurău,** Valerica **Roşu,** Mariana **Mitea,** Laura **Tănase,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Jamel **Ghanouchi,** Jose Luis Diaz – **Barrero, Florin** Stănescu, Roxana **Stanciu**, Daniela **Ion**, Florica **Anton, Cornelia** Drăgan

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 2

EXAMENE ŞI CONCURSURI..... 11

PROBLEME REZOLVATE..... 15

PROBLEME PROPUSE 32

CALEIDOSCOP MATEMATIC..... 40

MODELE DE TESTE 42

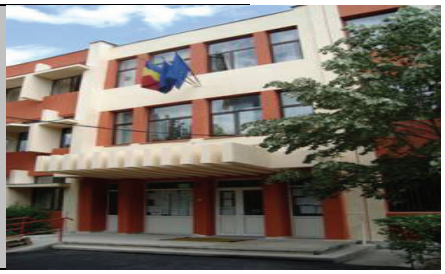
POSTA REDACTIEI..... 43

GÂNDEŞTE CORECT !

Tipar: editgraph
www.editgraph.ro

REDACTIA

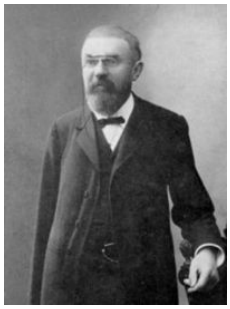
Grupul Şcolar „ Costin Nenițescu", Buzău,
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Vizitați www. liceulnenitescu.rdsbz.ro



„ Ştiinţa se face cu fapte, aşa cum o casă se face cu pietre;
dar o acumulare de fapte nu este ştiinţă,
aşa cum o grămadă de pietre nu este o casă”.
J. H. Poincare

1. Istoria Matematicii

Jules Henri Poincarè
– 100 de ani de la trecerea în nefiinţă



de prof. Adrian Stan şi prof. Neculai Stanciu, Buzău

Jules Henri Poincarè (n. 29 aprilie 1954 – d. 17 iulie, 1912) – a fost matematician, fizician, teoretician al astronomiei şi filozof francez.

În timpul liceului din Nancy, liceu care-i poartă astăzi numele în onoarea sa, era considerat cel mai bun dintre elevii care au studiat acolo.

În 1873 a intrat la Şcoala Politehnică şi a studiat matematica cu profesorul **Charles Hermite** ca care îşi dă şi doctoratul în 1879 în domeniul ecuaţiilor diferenţiale fiind primul care le studiază din perspectiva utilizării proprietăţilor geometrice.

După o scurtă perioadă de inginer minier, începând cu 1881 s-a dedicat carierei didactice la Universitatea din Paris, Sorbonne.

Şi-a adus contribuţia în diverse domenii ale matematicii. Rezultatele cercetărilor sale se referă la teoria funcţiilor (’’Asupra teoriei funcţiilor fuchsiene’’), la ecuaţiile diferenţiale, la topologie (unde a deschis un nou capitol – cel al topologiei algebrice, unde în 1895 a introdus conceptul de grup fundamental), precum şi la domeniul algebrei şi al fundamentelor geometriei. A publicat lucrări de fizică matematică şi de mecanică cerească (’’Metode noi în mecanica cerească’’), studii de epistemologie (’’Ştiinţă şi ipoteză’’, ’’Valoarea ştiinţei’’) de tendinţă pozitivistă, lucrări care au contribuit la elaborarea teoriei relativităţii. De asemenea, a studiat teoria numerelor, a funcţiilor abeliene, a funcţiilor analitice cu variabile complexe, s-a preocupat de optică, de mecanica fluidelor, de electricitate şi filozofie a ştiinţei.

A dat în 1904 aşa numita “ **Conjectura lui Poincare**” care a putut fi demonstrată abia după 100 de ani de la prima sa formulare. În 1906 este ales preşedintele Academiei de Ştiinţe din Paris iar în 1909 este ales membru de onoare al Academiei Române.

După propriile sale confesiuni lucra fără nicio metodă şi oriunde.

Tot anul acesta sărbătorim 130 de ani de la naşterea lui **Traian Lalescu** – ’’o culme a culturii româneşti’’, un român cu reputaţie internaţională care a frecventat la Sorbona alături de **Spiru Haret** cursurile lui **Poincarè**. O descriere în amănunt a personalităţii artistice a lui **Henri Poincarè** făcută de **Traian Lalescu** se găseşte în ***Convorbiri literare***, anul XLVIII, 1913. Astfel, după **Traian Lalescu**, **Poincarè** : “era un bărbat de statură mijlocie, cu spatele încovoiat, şi nasul congestionat, excesiv de roşu; distrat până la exces, fără ordine în conversaţia zilnică şi ca atâţia mari savanţi fără vocaţie de profesor strălucit. Chiar însăşi opera sa este adesea incompletă şi nesuficientă, fără meticulozitate ştiinţifică, astfel că toate lucrările sale au fost reluate, dar, rareori s-a înşelat în enunţarea rezultatelor generale care reprezintă capitole întregi din variatele ramuri ale ştiinţelor matematice. Nu-i plăcea să cizeleze şi să epuizeze un rezultat obţinut.”

’’Era un artist în înţelesul superior al cuvântului’’, ’’omul tuturor intuiţiilor’’, ’’o jertfă conştientă şi măreaţă pe altarul ştiinţei omeneşti!’’, iar în sufletul său zbuciumat, licărea flacăra genialităţii creatoare’’.

Bibliografie:

1. Smaranda Ecaterina Lalescu, ***Traian Lalescu – un nume peste ani***, Curtea Veche Publishing, Bucureşti, 2007.

**„ Inteligența nu este vorbire şi raționament de logică;
este pătrundere şi convingere.”**

Thomas Carlyle

2. Articole si note matematice

Inegalităţi în triunghi

de prof. dr. Mihály Bencze, Braşov

În acest articol prezentăm trei teoreme care generează o clasă de inegalităţi valabile într-un triunghi oarecare (vezi [1]).

Teorema 1. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, atunci $\sum aMA_1^2 \geq sRr$, unde A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB.

Demonstraţie. Dacă $u, v, w \in C$, atunci se ştie că

$$(u-v)(u+v)^2 + (v-w)(v+w)^2 + (w-u)(w+u)^2 = -(u-v)(v-w)(w-u).$$

Fie $A(a), B(b), C(c), A_1\left(\frac{b+c}{2}\right), B_1\left(\frac{c+a}{2}\right), C_1\left(\frac{a+b}{2}\right), M(z)$.

Dacă considerăm $u = z-a, v = z-b, w = z-c$, în identitatea menţionată mai sus, atunci după trecerea la modul obţinem că

$$4\sum |b-a|\left|z-\frac{a+b}{2}\right| \geq \prod |b-a| \Leftrightarrow \sum cMC_1^2 \geq \frac{abc}{4} = sRr, \text{ i.e., Q.E.D.}$$

Teorema 2. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, şi A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB, atunci $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{F(a)} \geq \frac{s^2R^2r^2}{\sum F(a)}$.

Demonstraţie. Din inegalitatea lui ***H. Bergström*** şi teorema 1 deducem că

$$\sum \frac{a^2 MA_1^4}{F(a)} \geq \frac{\left(\sum aMA_1^2\right)^2}{\sum F(a)} \geq \frac{s^2R^2r^2}{\sum F(a)}, \text{ i.e., Q.E.D.}$$

Teorema 3. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, şi $x, y, z > 0$, atunci

$$\sum \frac{x^2 MA^4}{F(a)} \geq \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{\left(\sum x\right)^2\left(\sum F(a)\right)}.$$

Demonstraţie. În [2], la pagina 16 se arată că $\sum xMA^2 \geq \frac{\sum a^2yz}{\sum x}$, de unde folosind din nou inegalitatea lui ***H. Bergström***, obţinem că $\sum \frac{x^2MA^4}{F(a)} \geq \frac{\left(\sum xMA^2\right)^2}{\sum F(a)} \geq \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{\left(\sum x\right)^2\left(\sum F(a)\right)}$, i.e., Q.E.D.

Bibliografie:
1. Colecţia Octogon Mathematical Magazine (1993-2011).
2. Gheorghe Stoica, Marin Stoica, O relaţie metrică în triunghi şi aplicaţii ale ei, Revista de Matematică din Valea Jiului, nr. 1, 2009, 10-20.

Rezolvarea unei probleme de loc geometric

de Titu Zvonaru, Comăneşti

Nota de faţă este o continuare a articolului din [1], şi are ca scop prezentarea unui exemplu de abordare concretă a unei probleme de loc geometric. Vom rezolva următoarea:

Problemă. Pe laturile [AB]şi [AC] ale triunghiului ABC se iau punctele variabile M şi N astfel încât $BM = CN$. Să se determine locul geometric al mijlocului P al segmentului MN dacă M şi N sunt de aceeaşi parte a lui BC. (*Vasile Pop*, Concursul liceelor partenere cu Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2010 – enunţ parţial).

Rezolvare:

Fără a restrânge generalitatea putem presupune $AB < AC$ (cazul $AB = AC$ este uşor de analizat). Notăm, ca de obicei, $AC = b$ şi $AB = c$.

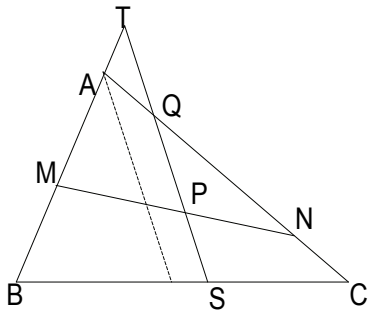


Figura 1

<u>Etapa 1.</u> "Ghicirea locului". Luând $BM = CN = 0$, rezultă imediat că mijlocul laturii [BC](fie S acesta) aparţine locului. Dacă $BM = CN = c$, deducem că punctul Q situat între A şi C şi pentru care $AQ = \frac{b-c}{2}$ aparţine locului. Dacă luăm $BM = CN = b$, mai obţinem un punct T, situat pe dreapta AB (cu A între B şi T), pentru care avem $AT = \frac{b-c}{2}$. Deoarece

$TB = \frac{b+c}{2}$, $BS = SC$, $QC = \frac{b+c}{2}$, avem $\frac{TA}{TB} \cdot \frac{SB}{SC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1$ şi conform reciprocei teoremei lui ***Menelaus*** (ΔABC şi punctele T, Q, S) rezultă coliniaritatea punctelor T, Q şi S. Presupunem că locul geometric căutat este o dreaptă, şi anume TS. Deoarece ΔAQT este isoscel şi $m(\sphericalangle BAC) = 2m(\sphericalangle ATQ)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ATQ)$, rezultă că dreapta TS este paralela dusă prin mijlocul laturii [BC] la bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$.

<u>Etapa 2.</u> Trebuie să demonstrăm că orice punct al locului se află pe dreapta TS. Notând $BM = CN = \alpha$, avem $TM = TA + AM = \frac{b-c}{2} + (c-\alpha) = \frac{b+c-2\alpha}{2}$, $QN = QN - NC = \frac{b+c-2\alpha}{2}$ şi obţinem uşor $\frac{TA}{TM} \cdot \frac{PM}{PN} \cdot \frac{QN}{QA} = 1$. Rezultă că punctul P este situat pe dreapta TS. Dacă punctul M este astfel încât să avem ordinea $A - M - T$ sau $A - T - M$, calculele sunt similare.

<u>Etapa 3.</u> Trebuie să demonstrăm că orice punct al dreptei TS aparţine locului, cu alte cuvinte, trebuie ca pentru orice punct P de pe dreapta TS să găsim punctele M şi N pe dreptele AB, respectiv AC astfel încât $BM = CN$ şi P e mijlocul lui MN. Deoarece demonstraţia din etapa 2 nu ne ajută la găsirea punctelor M şi N, vom folosi o construcţie ajutătoare: paralela prin C la dreapta TS intersectează prelungirea laturii [AB] în punctul F.

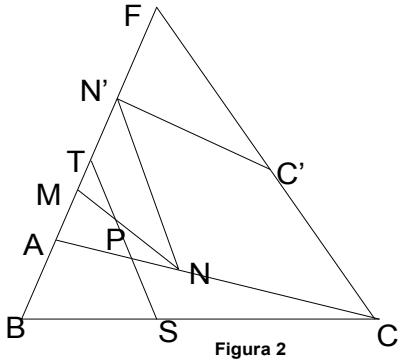


Figura 2

Deducem uşor că ΔACF este isoscel cu $AC = AF$ şi că T este mijlocul lui [BF]. Fie P un punct situat pe dreapta TS, de aceeaşi parte a dreptei BF ca şi punctul C. Luăm pe semidreapta (CF un punct C' astfel încât $CC' = 2PT$. Paralela prin C' la AC intersectează dreapta BF în punctul N', iar paralela prin N' la CF intersectează dreapta AC în punctul N.

Notăm $M = NP \cap AB$. Rămâne să demonstrăm că punctele M, N sunt cele căutate, adică $BM = CN$ şi P este mijlocul lui MN. Deoarece $NCC'N$ este paralelogram avem $NN' = CC' = 2PT$ şi cum $TP \| NN'$, din triunghiul MNN' rezultă că T este mijlocul lui MN' şi P e mijlocul lui MN. Folosind trapezul isoscel $CFN'N$ şi faptul că T este atât mijlocul lui BF cât şi mijlocul lui MN' deducem că $NC = N'F = BM$, adică punctele M şi N sunt cele căutate. Dacă punctul P de pe dreapta TS este de cealaltă parte a dreptei BF faţă de punctul C, construcţia punctelor M şi N este asemănătoare, dar punctul C' se alege pe dreapta CF astfel încât să avem ordinea $F - C - C'$. Trapezul $CFN'N$ folosit în demonstraţie este isoscel, dar NC şi $N'F$ nu mai sunt laturile neparalele, ci diagonalele egale ale acestui trapez.

Bibliografie:
1. Constatin Rusu, ***Aspecte referitoare la locurile geometrice***, SM, nr. VIII, 2011, 2-3.

Observaţii asupra unor noţiuni din geometria triunghiului
(II) **de prof. Constantin Apostol**

În continuarea articolului din numărul trecut, analizăm mai departe cazul în care un triunghi median al unui triunghi dat este asemenea cu triunghiul dat.

Fie triunghiul ABC, cu $AB = c$, $AC = b$ şi $BC = a$, având medianele $AA' = m_a$, $BB' = m_b$, $CC' = m_c$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a \le b \le c$ şi, deci, au loc şi relaţiile $m_a \ge m_b \ge m_c$. Din faptul că triunghiurile sunt asemenea, putem scrie egalităţile : $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}$, de unde rezultă şi egalităţile : $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{a^2}$, unde $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ şi $m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$; avem, deci, egalităţile:

$$\frac{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{c^2} = \frac{\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}{b^2} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}{a^2} = \frac{\frac{a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{4}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}}{a^2+b^2+c^2}$$

$= \frac{3}{4}$. Deducem că raportul de asemănare a triunghiurilor este $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Din egalitatea $\frac{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}{a^2} = \frac{3}{4}$, rezultă $\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$, deci, $3a^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, adică, $2b^2 = a^2 + c^2$ sau $b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$, relaţie care exprimă faptul că numărul b este media pătratică a numerelor a şi c. Acelaşi rezultat îl obţinem dacă prelucrăm egalităţile $\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{3}{4}$ sau $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{3}{4}$. In plus, putem preciza că are loc şi egalitatea $m_b = \sqrt{\frac{m_a^2+m_c^2}{2}}$. Prin urmare, putem enunţa şi următoarea observaţie :

„ Dacă un triunghi median al unui triunghi dat este asemenea cu triunghiul dat, atunci, în fiecare din cele două triunghiuri, o latură este media pătratică a celorlalte două laturi. ”

Probleme :

1) Se dă triunghiul ABC, cu $BC = 8\sqrt{2}$ cm, $AC = 10$ cm, $AB = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați lungimile laturilor unui triunghi median al triunghiului ABC , arătați că acest triunghi este asemenea cu triunghiul ABC şi determinați raportul lor de asemănare ;

b) Arătați că în fiecare din cele două triunghiuri, o latură este media pătratică a celorlalte laturi.

Soluție :

a) Notând BC = a, AC = b, AB = c şi, ținând seamă de teorema medianei, putem scrie egalitățile :

$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$, $m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$, unde m_a, m_b, m_c sunt lungimile medianelor triunghiului ABC, duse din A, din B şi, respectiv, din C. Asfel, obținem :

$$m_a^2 = \frac{100+72}{2} - \frac{128}{4} = 54 \Rightarrow m_a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \text{ cm};$$

$$m_b^2 = \frac{128+72}{2} - \frac{100}{4} = 75 \Rightarrow m_b = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm};$$

$$m_c^2 = \frac{128+100}{2} - \frac{72}{4} = 96 \Rightarrow m_c = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ cm}.$$

Verificăm dacă laturile omoloage ale celor două triunghiuri sunt proporționale :

Din faptul că $a > b > c \Rightarrow m_a < m_b < m_c$, aşadar, vom scrie : $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}$, deci, $\frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci, cele două triunghiuri sunt asemenea, raportul lor de asemănare, fiind $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

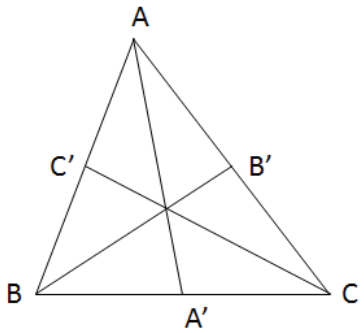
b) În general, dacă un triunghi median al unui triunghi ABC este asemenea cu triunghiul ABC, au loc egalitățile : $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}$, de unde : $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{a^2}$, adică :

$$\frac{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{c^2} = \frac{\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}{b^2} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}{a^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4b^2} = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4a^2} =$$

$= \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)} = \frac{3}{4}$. Din $\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$ deducem $2b^2+2c^2-a^2 = 3c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$, deci, $b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$. Din asemănarea triunghiurilor, rezultă că are loc şi egalitatea $m_b = \sqrt{\frac{m_a^2+m_c^2}{2}}$.

2) a) În triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\widehat{A}) = 90^0$**, notăm cu a, b, c, lungimile laturilor (BC), (AC) şi, respectiv, (AB). Arătați că, dacă** $b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$**, atunci un triunghi median al triunghiului ABC este tot dreptunghic ;**

b) Arătați că cele două triunghiuri sunt asemenea şi determinați raportul lor de asemănare.



Soluție: a) Din faptul că triunghiul ABC este dreptunghic în A, $\Rightarrow$

$(AA')^2 = \frac{a^2}{4}$ (1) .

Din triunghiul ABB' $\Rightarrow$ $BB'^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}$ (2).

Din triunghiul ACC', $\Rightarrow CC'^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{c^2}{4}$ (3). Din $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ 2b^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3c^2 \\ b^2 = 2c^2 \end{cases}$ şi, ţinând seamă de (1), (2) şi (3), deducem că au loc egalităţile : $\begin{cases} AA'^2 = \frac{3c^2}{4} \\ BB'^2 = \frac{6c^2}{4} \\ CC'^2 = \frac{9c^2}{4} \end{cases}$, care verifică relaţia lui Pitagora, căci, $\frac{9c^2}{4} = \frac{6c^2}{4} + \frac{3c^2}{4}$, ceea ce pune în evidenţă faptul că un triunghi median al triunghiului ABC, este dreptunghic.

b) Din faptul că $a > b > c$, $\Rightarrow AA' < BB' < CC'$. Din $\frac{AA'}{c} = \frac{BB'}{b} = \frac{CC'}{a}$, căci,

$\frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\frac{c\sqrt{6}}{2}}{c\sqrt{2}} = \frac{\frac{3c}{2}}{c\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deducem că triunghiurile sunt asemenea, raportul lor de asemănare fiind $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bibliografie:

1. Lalescu Traian, ***Geometria triunghiului***. Editura Tineretului, Bucureşti, 1958 .

2. Lalescu Traian, ***Geometria triunghiului***. Editura Apollo, Craiova, 1993 .

Încă patru demonstraţii ale problemei L:155 din Sclipirea Minţii nr. VII, 2011

de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

În $[1]$ se dau problemei L:155 din SM nr. VII, 2011 şase soluţii. În lucrarea de faţă ne propunem să prezentăm patru demonstraţii noi ale unei generalizări a acestei probleme.

Generalizare. Dacă $n \in N^* - \{1,2\}, a \in R_+, b, c, d, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, şi

$cX_n > d \max_{1 \le k \le n} x_k$, atunci: (N) $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n - dx_k} \ge \frac{(an+b)\cdot n}{cn-d}$.

Demonstraţia **1.** Avem:

$$(an+b)^2 X_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n + bx_k)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}} \cdot \sqrt{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}\right)^2 \overset{(C-B-S)}{\le}$$

$$\overset{(C-B-S)}{\le} \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2 + (bc-ad)X_n x_k - bdx_k^2\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_n \ge \frac{(an+b)^2 X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2 - bd\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Deoarece media pătratică este mai mare decât media aritmetică, rezultă că: $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{X_n^2}{n}$. Deci, obţinem că: $V_n \geq \frac{(an+b)^2}{acn+bc-cd-\frac{bd}{n}} = \frac{(an+b)n}{cn-d}$, c.c.t.d.

Demonstraţia **2.** $V_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(aX_n+bx_k)^2}{(cX_n-dx_k)(aX_n+bx_k)}$, de unde conform inegalităţii lui Bergström, deducem că: $V_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)} = \frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2} \geq$

$$\geq \frac{(an+b)^2}{acn^2+(bc-ad)n-bd} = \frac{(an+b)n}{cn-d}, \text{ q.e.d.}$$

Demonstraţia **3.** Considerăm trinomul:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}}\cdot U-\sqrt{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}\right)^2 =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\cdot U^2-2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)\cdot U+\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\cdot U^2-2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)\cdot U+\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right).$$

Deoarece, valorile trinomului sunt $T_n(u)\geq 0$, $\forall u\in R$, rezultă că $\Delta'\leq 0$, adică:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}aX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)} = \frac{(an+b)^2X_n^2}{acnX_n^2+(bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

Apoi, deoarece, $\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \geq \frac{X_n^2}{n}$, obţinem că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k} \geq \frac{(an+b)^2X_n^2}{\left(acn+(bc-ad)-\frac{bd}{n}\right)X_n^2} = \frac{(an+b)^2n}{acn^2+(bc-ad)n+bd} = = \frac{(an+b)^2n}{(an+b)(cn-d)} = \frac{(an+b)n}{cn-d}$$

Demonstraţia **4.** Considerăm vectorii $x, y\in R^n$, unde:

$$x=\left(\sqrt{\frac{aX_n+bx_1}{cX_n-dx_1}},\sqrt{\frac{aX_n+bx_2}{cX_n-dx_2}},\ldots,\sqrt{\frac{aX_n+bx_n}{cX_n-dx_n}}\right) \text{ şi}$$

$$y=\left(\sqrt{(aX_n+bx_1)(cX_n-dx_1)},\sqrt{(aX_n+bx_2)(cX_n-dx_2)},\ldots,\sqrt{(aX_n+bx_n)(cX_n-dx_n)}\right).$$

Conform inegalităţii Cauchy – Buniakovski Schwarz, adică: $\langle x,y\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\|$, $\forall x,y\in R^n$, sau

$$\left(\langle x,y\rangle\right)^2 \leq \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right), \text{ avem:}$$

$$\left(\langle x,y\rangle\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n+bx_k\right)\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge\frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$, de unde, dacă ţinem cont de $\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ge\frac{X_n^2}{n}$, obţinem ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 1. Dacă în relaţia (N) luăm $a=0,b=c=d=1$, obţinem

$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X_n-x_k}\ge\frac{n}{n-1}$, adică relaţia Nesbitt pentru n variabile strict pozitive.

Observaţia 2. dacă $a_k\in R^*,\forall k=\overline{1,n}$ şi luăm $x_k=a_k^2$ şi $a=0,b=c=d=1$ obţinem din (N) inegalitatea $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{A_n-a_k^2}\ge\frac{n}{n-1}$, unde $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$, de unde pentru $n=4$ obţinem problema $L:155$ din Sclipirea Minţii

Bibliografie:
1. Titu Zvonaru, Neculai Stanciu, *Şase soluţii pentru problema L:155 din Sclipirea Minţii, nr. VII, 2011*, SM, nr. VIII, 2011, 9-10.

Aspecte referitoare la locurile geometrice (II)

de prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În continuare vom demonstra sintetic şi analitic că $L_{10}=\left\{M\in P\middle|MA^2-MB^2=k,k\in R,A\ne B,puncte\ fixe\right\}$ este o dreaptă perpendiculară pe AB (vezi $[1]$).

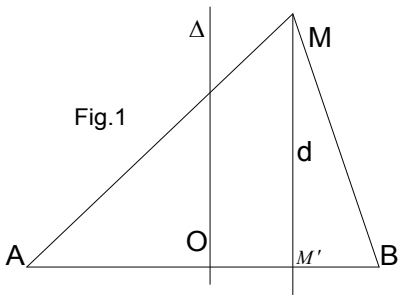


Fig.1

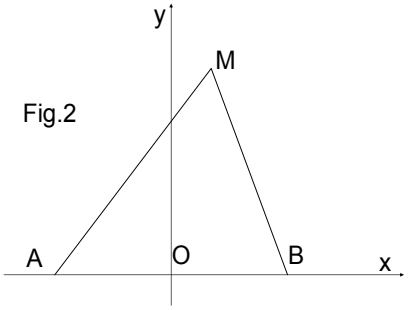


Fig.2

Sintetic. Vom considera cazurile:

1) Cazul $k>0$, $M\in(\Delta,B,\Delta\perp AB,OA=OB,O\in\Delta,m(\angle B)<90^0$ (vezi fig.1).

Rezultă $MA>MB$ şi vom determina punctul $M'\in[AB]$ astfel încât $M'\in L_{10}$.

Din $M'\in L_{10}\Rightarrow M'A^2-M'B^2=k\Leftrightarrow(M'A+M'B)(M'A-M'B)=k$. Avem sistemul

$\begin{cases}M'A+M'B=AB\\M'A-M'B=\frac{k}{AB}\end{cases}\Rightarrow AM'=\frac{1}{2}\left(AB+\frac{k}{AB}\right),M'B=\frac{1}{2}\left(AB-\frac{k}{AB}\right)$, de unde deducem că

$AM' =$ constant şi $L_{10} \neq \varnothing$. Intuim că perpendiculara în punctul M' pe dreapta AB pe care o notăm cu d este inclusă în L_{10}.

Demonstrație. Fie M un punct arbitrar luat pe dreapta d. Cu teorema lui Pitagora avem:

$MM'^2 = MA^2 - AM'^2 = MB^2 - M'B^2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = M'A^2 - M'B^2 = k \Rightarrow$

$\Rightarrow M \in L_{10}$, deci $d \subset L_{10}$. În continuare demonstrăm că $L_{10} \subset d$.

Fie punctul $M \in L_{10} \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = k$. Ducem din M o perpendiculară pe AB şi notăm cu M'' piciorul său. În triunghiurile dreptunghice $M''MA$ şi $M''MB$ aplicând teorema lui Pitagora obținem:

$MM'' = MA^2 - AM''^2 = MB^2 - BM''^2 \Leftrightarrow AM'' - BM'' = AM^2 - BM^2 = k \Rightarrow$

$\Rightarrow AM'' = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{k}{AB}\right) =$ constant $\Rightarrow AM'' = AM' \Rightarrow M' = M'' \Rightarrow L_{10} \subset d$.

În concluzie $L_{10} = d$.

Observații. a) Dacă $m(\angle B) = 90^0 \Rightarrow L_{10} = d =$ perpendiculara în B pe AB;

b) Dacă $m(\angle B) > 90^0 \Rightarrow L_{10} = d =$ perpendiculara în M' pe AB, unde $B \in (AM')$.

2) Cazul $k = 0 \Rightarrow MA = MB$ şi conform cu $L_1 \Rightarrow$ **M** este mediatoarea segmentului AB.

3) Cazul $k < 0 \Leftrightarrow M \in (\Delta, A$, se tratează ca în cazul 1 şi obținem:

pentru $m(\angle A) < 90^0$, $L_{10} = d =$ perpendiculara în M' pe AB, unde $M' \in (AB)$.

pentru $m(\angle A) = 90^0$, $L_{10} = d =$ perpendiculara în A pe AB.

pentru $m(\angle A) > 90^0$, $L_{10} = d =$ perpendiculara în M' pe AB, unde $A \in (M'B)$.

În concluzie, pentru orice $k \in R$, mulțimea L_{10} este o perpendiculară pe dreapta AB.

<u>Analitic</u>. Luăm ca axă Ox dreapta AB şi ca axă Oy mediatoarea segmentului AB (vezi fig.2). $A(-a,0), B(a,o), M(x,y)$, iar cu formula distanței avem:

$MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{4a} =$ constant, care este ecuația unei drepte perpendiculare pe AB pe care o notăm cu d. Am arătat că $\forall M \in L_{10} \Rightarrow M \in d$, deci $L_{10} \subset d$.

Demonstrăm că $d \subset L_{10}$.

Pentru $\forall M \in d \Rightarrow M\left(\frac{k}{4a}, y\right)$, de unde obținem că $MA^2 - MB^2 = k \Rightarrow M \in L_{10}$.

În concluzie $L_{10} = d$.

Bibliografie:

1. Constatin Rusu, *Aspecte referitoare la locurile geometrice*, SM, nr. VIII, 2011, 2-3.

“ Există trei metode de a învăța înțelepciunea: prima este prin reflecție, metoda care este cea mai nobilă din toate; a doua este prin imitație, metoda cea mai facilă; şi a treia prin experiență, metoda cea mai amară din toate”.

Confucius

A Nesbitt – Cesáro Collaboration

by Titu Zvonaru, Comăneşti

In this short note we prove that the following inequalities

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2} \qquad (Nesbitt)$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz \qquad (Cesáro)$$

for any $x,y,z>0$, are equivalent.
We use the following

Lemma. If a,b,c are real numbers, then

$$2a(a+b)(a+c)+2b(b+a)(b+c)+2c(c+a)(c+b)-3(a+b)(b+c)(c+a)=$$
$$=(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)-8(a+b)(b+c)(c+a).$$

Proof. We denote $s=a+b+c$ .Since $(a+b)(a+c)=as+bc$ and

$(a+b)(b+c)(c+a)=(ab+bc+ca)s-abc$, we have

$$2a(a+b)(a+c)+2b(b+a)(b+c)+2c(c+a)(c+b)-3(a+b)(b+c)(c+a)=$$
$$=2a^2s+2abc+2b^2s+2abc+2c^2s+2abc-3(ab+bc+ca)s+3abc=$$
$$=2s(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)s+9abc=2s\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]-$$
$$-3(ab+bc+ca)s+9abc=2s^3-7(ab+bc+ca)s+9abc,$$ and

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)-8(a+b)(b+c)(c+a)=$$
$$=(s+a)(s+b)(s+c)-8(ab+bc+ca)s+8abc=s^3+(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s+abc-$$
$$-8(ab+bc+ca)s+8abc=2s^3-7(ab+bc+ca)s+9abc,$$ and the lemma is proved.

Let a,b,c be real positive numbers. Using the lemma, we can write

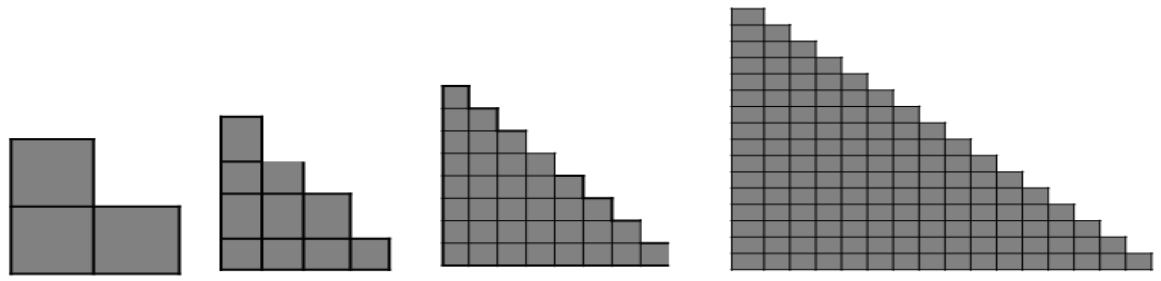
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a(a+b)(a+c)+2b(b+a)(b+c)+2c(c+a)(c+b)-3(a+b)(b+c)(c+a)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)-8(a+b)(b+c)(c+a)\geq 0,$$

and the last inequality is *Cesáro's* inequality applied to the numbers $a+b,b+c,c+a$.

În figurile de mai jos sunt prezentate din lateral patru scări formate din atâtea blocuri de piatră câte se văd în figură având respectiv 2, 4, 8, 16 trepte. Respectând regula după care s-au construit primele patru scări puteți spune din câte trepte şi câte blocuri de piată este formată a zecea scară ?

1 2 3 4 10



2 trepte 4 trepte 8 trepte 16 trepte

„ Un gând mare la o minte mică e ca un straşnic comandant la o oaste de netoţi”.
Nicolae Iorga

3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA SCLIPIREA MINTII

5 Noiembrie 2011 Ediţia a VI-a

În data de 5 Noiembrie 2011 la Grupul Şcolar ” Costin Nenițescu” Buzău a avut loc a şasea ediție a Concursului Județean de Matematică „ Sclipirea Minții” , concurs la care au participat peste 200 de elevi de la 14 şcoli şi licee din județul Buzău. Subiectele date vă sunt prezentate în cele ce urmează:

Clasa a V-a

1. Arătați că numărul $1+2+3+...+2010+2011+2010+2009+...+3+2+1$ este pătrat perfect.
(R.M.T. nr. 2/2011, Neculai Stanciu, Buzău)

2. Determinați toate numerele de două cifre care sunt egale cu suma dintre răsturnatul lor şi triplul sumei cifrelor lor. (R.M.T. nr. 3/2011, Mihai Vijdeluc, Baia Mare)

3. Adunând un număr de două cifre diferite, nenule, cu răsturnatul său, obținem un număr de două cifre egale.Care este cel mai mare număr cu această proprietate? Dar cel mai mic?
(R.M.T. nr. 2/2011, Constantin Apostol, Rm. Sărat)

Clasa a VI-a

1. Arătați că nu există numere naturale a,b,c,d care să verifice relația
$a^2b+ab^2+c^2d+cd^2=2011$.
(R.M.T. nr. 3/2011, Dragoş Constantinescu, Râmnicu Vâlcea)

2. a) Precizați câte numere naturale sunt divizori ai numărului 1225. Scrieți mulțimea divizorilor naturali ai acestui număr.

b) Arătați că numărul $\overline{1a05}$ are un număr par de divizori naturali.
(Constantin Apostol, Rm. Sărat)

3. Pe o dreptă, se consideră punctele A, B, C, D, E şi F, în această ordine. Precizați dacă :
$AD+BE+CF=AE+BF+CD$ (Constantin Apostol, Rm. Sărat)

Clasa a VII-a

1. Determinați numerele $\overline{xyz}$ ştiind că $\frac{x+y}{15}=\frac{y+z}{9}=\frac{x+z}{6}$.
(R.M.T. nr. 2/2011, Mircea Mario Stoica,Arad)

2. a)Arătați că $\frac{503}{504}$ este cea mai mare fracție subunitară care se poate scrie ca sumă de trei fracții de forma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$, unde a,b,c,d,e,f sunt nume de câte o cifră, diferite de zero;
Calculați numerele a,b,c,d,e,f de la punctul a) .
(Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti)

3.Într-un triunghi dreptunghic, măsura unui unghi este de patru ori mai mare decât măsura altui unghi. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.
(R.M.T. nr. 2/2011, Constantin Apostol, Rm. Sărat)

Clasa a VIII-a

1. Rezolvați ecuația $1+3+5+...+x=9^{2011}$. (R.M.T. nr. 2/2011, Luca Tuță, Buzău)

2. Arătați că dacă $a,b,c>0$, atunci: $\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2(a+b-c)$.

(D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău)

3. Fie numerele reale pozitive a, b, c, astfel încât, $\frac{b+c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ şi $\frac{a+c}{b}=\sqrt{3}$.

a) Determinați valoarea raportului $\frac{a+b}{c}$;

b) Arătați că a, b, c pot fi lungimile laturile unui triunghi ;

c) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului de la punctul b).

(Constantin Apostol, Rm. Sărat)

Clasa a IX-a Profil tehnic

1. a) Să se calculeze $\sqrt{a^2-b^2}$ unde **a = 14,5 şi b = 10, 5** ;

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{3\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}+\left(\sqrt{3}-1\right)^{-2}=a+b\sqrt{3}$;

2. Să se arate că expresia $E(x)=\frac{(2x+1)^3-(2x-1)^3}{(2x+1)^2+(2x+1)(2x-1)+(2x-1)^2}$ nu depinde de x;

3. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+$ astfel încât a+ b + c + d = 1. Să se arate că

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+2}+\sqrt{4c+3}+\sqrt{4d+4}\langle 9$;

Clasa a IX-a Profil Economic

1. a) Să se calculeze $\sqrt{a^2-b^2}$ unde **a = 14,5 şi b = 10, 5** ;

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{3\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}+\left(\sqrt{3}-1\right)^{-2}=a+b\sqrt{3}$;

2. Să se arate că expresia $E(x)=\frac{(2x+1)^3-(2x-1)^3}{(2x+1)^2+(2x+1)(2x-1)+(2x-1)^2}$ nu depinde de x;

3. Dacă $a,b\in\mathbb{R}^*$ şi $9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-42\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+67\leq 0$. Să se arate că $6a=b(7+\sqrt{13})$ sau

$6b=a(7+\sqrt{13})$.

Clasa a X-a Profil Tehnic

1. Fie $a=\lg 2$ şi $b=\lg 3$. Să se demonstreze că $(2-2a)\log_{25}12=2a+b$;

2. Să se arate că $\sqrt{2\cdot\log_x\sqrt{y}}+\sqrt{3\cdot\log_y\sqrt[3]{x}}=2\Leftrightarrow x=y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+-\{1\}$

3. a) Să se demonstreze relația $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$;

b) Să se raționalizeze numitorul fracției $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}}$;

Clasa a X-a Profil Economic

1. Fie $a = \lg 2$ şi $b = \lg 3$. Să se demonstreze că $(2-2a)\log_{25} 12 = 2a + b$;

2. Să se arate că $\sqrt{2\cdot\log_x \sqrt{y}} + \sqrt{3\cdot\log_y \sqrt[3]{x}} = 2 \Leftrightarrow x = y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$

3. a) Să se demonstreze că $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} + \frac{5}{\sqrt[3]{3}} + \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \rangle\ 9$; b) Să se arate că $\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;

Clasa a XI-a Profil Tehnic, Economic

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 2x-1 & x^2 \\ 2^x & \log_{2012}\frac{x}{x+1} & C_{2011}^x \end{pmatrix}$. Să se calculeze A(1) + A(2) + ...+ A(2011).

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{tg8x} - 2^{\sin 6x}}{tg4x - \sin 3x}$;

3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x-a}-b}{x^2-5x+6} = \frac{1}{3}$.

Clasa a XI-a Profil Ştiinţe

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 2x-1 & x^2 \\ 2^x & \log_{2012}\frac{x}{x+1} & C_{2011}^x \end{pmatrix}$. Să se calculeze A(1) + A(2) + ...+ A(2011).

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{tg8x} - 2^{\sin 6x}}{tg4x - \sin 3x}$;

3. Fie $k \in \mathbb{R}$ şi funcţia, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 2x^k\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

Clasa a XII-a Profil Tehnic, Economic

1. Să se calculeze : a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1;\infty)$; b) $\int \frac{\cos 2x - 3}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$; $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât F să fie primitiva unei funcţii f:

unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1}, x \le 0 \\ \sqrt{x^2-6x+9}, x\rangle 0 \end{cases}$;

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că $H = \left\{X(a) \middle| a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor şi că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b-10ab)$;

b) Să se calculeze $X(\frac{1}{100})\cdot X(\frac{2}{100})\cdot ....\cdot X(\frac{100}{100})$.

Clasa a XII-a Profil Ştiinţe

1. Să se calculeze : a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1;\infty)$; b) $\int \frac{4\cos 2x+1}{\sin^2 2x}dx$; $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$;

2. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât F să fie primitiva unei funcţii f:

unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}\frac{ax+b}{x^2+1}, x\le 0\\ \sqrt{x^2-6x+9}, x\rangle 0\end{cases}$;

3. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie prin $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

a) Calculaţi $\underbrace{x\circ x\circ .....\circ x}_{2011\ termeni}$. Generalizare.

b) Pe tablă sunt scrise numerele -2011, -2010, …0, 1, 2, …,2010, 2011. Se şterg două numere a şi b şi în locul lor se scrie numărul 2ab -2a -2b +3. Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr ?

Rezolvările subiectelor se găsesc pe **www.liceulnenitescu.rdsbz.ro**

Rezultatele elevilor de la concurs:

Clasa a V-a: **Premiul I**, Coman Camelia, Scoala nr.1 Rm.Sărat; **Premiul II**, Pascu Bogdan,Scoala nr. 2 Buzău, Vasile Rucsandra, Zota Mădălina, Scoala nr. 15 Buzău; **Premiul III**, Andrei Maria, Manolache Cristian, Scoala nr. 1 Rm. Sărat;

Clasa a VI-a : **Premiul I**, Burada Andrei,Scoala nr.15 Buzău, **Premiul II**, Jercan Adrian, Scoala nr. 1 Rm. Sărat, Vasilache Violeta Cătălina, Scoala nr. 5 Rm. Sărat, **Premiul III**, Micu Octavian George, Scoala nr. 1 Rm. Sărat, Gheorghe Laura, Scoala nr. 5 Rm. Sărat.

Clasa a VII-a : **Premiul I**, Bănică Mihaela, Scoala nr. 1 Rm. Sărat, **Premiul II**, Ilie Ionuţ, Scoala nr. 1 Rm. Sărat, **Premiul III**, Mihai Andrei, Scoala nr. 1 Nehoiu;

Clasa a VIII-a : **Premiul I**, Buterez David, Scoala nr. 5 Rm. Sărat, **Premiul II**, Spînu Cristina, Scoala Smeeni, **Premiul III**, Mancu Oana, Scoala nr. 15 Buzău, Neacşu Karina, Scoala nr. 1 Rm. Sărat;

Clasa a IX-a , Tehnic: **Premiu I**, Ciopec Corina, **Premiul II**, Panaet Florentina, **Premiul III**, Dragomir Ionuţ, Grup Scolar „ Costin Nenitescu" Buzău, Mateescu Marijana, Liceul de Artă „ Margareta Sterian";

Clasa a IX-a Economic: **Premiul I**, Dincă Andreea, **Premiul II**, Pavel Iulia, **Premiul III**, Antofie Alexandra, Colegiul Economic Buzău;

Clasa a X-a, Tehnic: **Premiul I**, Perţea Larisa, **Premiul II**, Lică Adriana, **Premiul III**, Docuz Ionela, Grup Şcolar „ C. Nenişescu", Buzău;

Clasa a X-a, Economic şi Ştiinţe: **Premiul I**: Pascu Georgiana, Colegiul Economic, Lungu Ionuţ, Colegiul National „Mihai Eminescu, **Premiul II**, Dragomir Liviu, Colegiul Economic;

Clasa a XI-a, Tehnic şi Economic: **Premiul I**, Nicolae Elena, Colegiul Economic, **Premiul II,** Cristescu Lavinia, Colegiul Economic, Barbu Elena, Gr. Sc. „ C. Nenitescu", **Premiul III**, Ispas Elena, Colegiul Economic;

Clasa a XI-a , Ştiinţe: Premiul I, Grecu Alexandru, **Premiul II**, Diaconu Maria, **Premiul III**, Hanganu Raluca, Colegiul Naţional „ Mihai Eminescu" Buzău;

Clasa a XII –a , Tehnic şi Economic: Premiul I, Nicoleta Elena, Colegiul Economic, **Premiul II**, Chiriţă Ştefania, **Premiul III**, Vlad Iulian, Grup Şcolar „ Costin Nenişescu";

Clasa a XII-a, Ştiinţe: **Premiul I**, Nedelcu Diana, **Premiul II**, Dobrescu Gabriela, **Premiul III**, Vargău Elena, Liceul „Ştefan cel Mare", Rm. Sărat.

„ Nu soluția este cea care nu se vede, ci însăşi problema”.
G. K. Chesterton

4. Probleme rezolvate

▪ *ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR*

P:222. Determinați toate numerele naturale care împărțite la 1961 dau restul de 400 de ori mai mare decât câtul.

Prof. **Mircea Mario Stoica**,Arad

Rezolvare: $d = 1961 \cdot c + r,\ r \langle 1961 \Rightarrow r \in \{0;1;2;...1959;1960\}$; Cum $r = 400c \Rightarrow c \in \{0;1;2;3,4\}$.

Din cele de mai sus rezultă $d \in \{0;2361;4722;7083;9444\}$.

P:223. Suma a 63 de numere naturale diferite de zero este de 2011. Arătați că cel puțin două numere sunt egale.

Prof. **Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Presupunem că cele 63 de numere naturale sunt diferite iar cea mai mică sumă posibilă este $S = 1+2+3+....+62+63 \Leftrightarrow S = (63 \cdot 64):2 \Leftrightarrow S = 2016 \rangle 2011$. Aşadar, cel puțin două dintre ele sunt egale.

P:224. Produsul dintre un număr de trei cifre şi un număr de o cifră este 2012. Determinați cele 2 numere.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $2012:4 = 503 \Rightarrow 503 \cdot 4 = 2012$. Numerele sunt 503 şi 4.

P:225. Determinați două numere naturale, a căror sumă să fie 109, ştiind că, dacă-l împărțim pe primul la al doilea, obținem restul 35 şi, dacă-l împărțim pe al doilea la primul, obținem restul 37 .

Prof. **Constantin Apostol**, Rm.Sărat

Rezolvare: Fie a şi b, cele două numere. Evident, ele nu pot fi egale, căci, atunci, resturile ar fi egale cu zero. Vom deosebi două cazuri :

I) $a > b$. Cu teorema împărțirii cu rest a numerelor naturale, vom avea :

$a = b \cdot c_1 + 35$, unde, $35 < b$ şi :

$b = a \cdot 0 + 37$, unde, $37 < a$, adică, $b = 37$. Deducem că $a = 109 - 37 = 72$.

II) $a < b$. Cu aceeaşi teoremă, vom avea :

$a = b \cdot 0 + 35$, unde, $35 < b$, adică, $a = 35$, deci, rezultă $b = 109 - 35 = 74$ şi :

$b = a \cdot c_2 + 37$, unde, $37 < a$, adică, $37 < 35$, ceea ce este fals, aşadar, acest caz nu poate avea loc.

P:226. Din dublul anului, în care a avut loc prima unire a țărilor române, scădem anul care marchează Ziua Națională a României. Adăugăm numărul $\overline{abc}$ şi obținem anul revoluției din decembrie. Determinați $\overline{abc}$.”

Prof. **Victoria Popa**, Timişoara

Rezolvare: $2 \cdot 1600 - 1918 + \overline{abc} = 1989$.

$$3200 - 1918 + \overline{abc} = 1989$$
$$1282 + \overline{abc} = 1989$$
$$\overline{abc} = 1989 - 1282 \qquad \overline{abc} = 707.$$

Clasa a V-a

G: 270. **Arătați că există n astfel încât fracția $\frac{2011n+41}{50n+1}$ să fie reductibilă.**

***Prof.* Doina Stoica, Mircea Mario Stoica**, Arad

***Rezolvare*:**

Pentru n = 4 obținem $\frac{8085}{201}$ **care se simplifică cu 3.**

G: 272. **Aflați restul împărțirii la 97 a numărului** $N = 1648\underbrace{99...9}_{2007 cifre}$ **.**

Prof. Tuță Luca, Buzău

Rezolvare: Observăm că $N+1 = 164900...0 = 1649\cdot 10^{2007} = 97\cdot 17\cdot 10^{2007}$; deci $N+1$ se divide cu 97. Atunci restul împărțirii lui N prin 97 este $97-1=96$.

G: 273. **Să se afle numerele prime de două cifre care împărțite la răsturnatele lor care sunt prime dau câtul şi restul tot numere prime.**

***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest avem: $\overline{ab}=\overline{ba}\cdot q+r, 0\le r<\overline{ba}$, cu $\overline{ab},\overline{ba},q,r$ numere prime, de unde rezultă că $\overline{ab}>\overline{ba}$, şi atunci $\overline{ab}\in\{31,71,73,97\}$. Efectuând împărțirile, avem: $31=13\cdot 2+5$; $71=17\cdot 4+3$; $73=37\cdot 1+36$; $97=79\cdot 1+18$;

În concluzie, există un singur număr de două cifre 31 care împărțit la răsturnatul său 13 dă câtul 2 şi restul 5, toate numere prime.

G: 274. **a) Precizaţi câte numere naturale sunt divizori ai numărului 1225. Scrieţi mulţimea divizorilor naturali ai acestui număr.**

b) Arătaţi că numărul $\overline{1a05}$ are un număr par de divizori naturali.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: a) Cum $1225=5^2\cdot 7^2$ atunci numărul divizorilor naturali ai numărului 1225 este $\tau(1225)=(2+1)(2+1)=9$ iar mulțimea divizorilor săi este $D_{1225}=\{1,5,7,25,35,49,175,245,1225\}$.

b) Se demonstrează, fără dificultate, că un număr natural are un număr impar de divizori naturali dacă şi numai dacă numărul respectiv este pătrat perfect.

În cazul nostru, numărul $\overline{1a05}$, având ultima cifră, 5, este divizibil cu 5, dar, penultima cifră, fiind 0, numărul nu este divizibil cu 5^2, deci numărul nu este pătrat perfect. Aşadar, numărul $\overline{1a05}$ are un număr par de divizori naturali.

G: 275. Fie numarul $a = 7+21+35+49+...+1421$**.**

a) Aratati ca $3\,|\,a$

b) Sa se determine cel mai mic numar natural de două cifre *b*, astfel încat produsul a· b să fie pătrat perfect.

***Prof.* Valerica Roşu**, Rm. Sărat

Rezolvar:.

a) $a = 7\cdot(1+3+5+7+...+203) \Rightarrow a = 7\cdot[(1+2+3+4+5+6+...+204)-(2+4+6+...+204)]$

$\Rightarrow a = 7\cdot\left[\frac{(1+204)\cdot 204}{2} - 2\cdot\frac{(1+102)\cdot 102}{2}\right] \Rightarrow a = 7\cdot(205\cdot 102 - 103\cdot 102)$

$\Rightarrow a = 7\cdot 102\cdot(205-103) \Rightarrow a = 7\cdot 102\cdot 102 \Rightarrow a = 7\cdot 102^2$. Cum 3 îl divide pe 102, rezultă că 3 îl divide pe *a*.

b) $b = 7\cdot 2^2 = 7\cdot 4 = 28 \Rightarrow b = 28$.

G: 276. **Să se arate că există numerele naturale nenule, x, y, z astfel încât** $x^3+y^3+z^3=2016^3$.

Prof. **Ana Panaitescu**, Rm. Sărat

Rezolvare: Cum $2016=9\cdot 224 \Rightarrow 2016^3=9^3\cdot 224^3$. Scriind $9^3=1^3+6^3+8^3$ atunci, $2016^3=(1^3+6^3+8^3)\cdot 224^3=(1\cdot 224)^3+(6\cdot 224)^3+(8\cdot 224)^3$. Rezultă x =224, y =1344 şi z =1792.

G : 277. **Fie numărul a =1234567891011...2012, unde cifrele sunt obţinute, scriind numerele naturale de la 1 la 2012. Care este a 2012- a cifră ?**

Prof. **Cornelia Gurău,** Moineşti, Bacău

Rezolvare **:** De la 1 la 9 sunt 9 cifre. De la 10 la 99 se folosesc 180 cifre. De la 100 la 699 se folosesc 1800 cifre. 2012-(9+180+1800) = 23; sunt încă 23 de cifre din numere de câte trei cifre .
De la 700 la 706 se folosesc 21 cifre şi ultimile două cifre sunt 7 şi 0. Deci a 2012 –a cifră a numărului este a doua cifră din numărul 707, adică 0.

G: 278. **Aflaţi** $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât să avem** $a^3+b^3+c^3=\overline{dd}$ **.**

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Deoarece $5^3\rangle 100$ şi $2\cdot 4^3\rangle 100$, dând valori lui a,b,c, obţinem soluţiile :

$$(a;b;c;d)\in\left\{\begin{matrix}(1;1;4;6),(1;4;1;6),(4;1;1;6),(1;3;3;5),(3;1;3;5),(3;3;1;5),(2;3;4;9),(2;4;3;9),(3;4;2;9),(3;2;4;9),\\(4;2;3;9),(4;3;2;9)\end{matrix}\right\}.$$

Clasa a VI-a

G: 279. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **ecuaţia** $xy+7x-6y=52$**.**

Prof. **Doina Stoica, Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $xy+7x-6y=52 \Leftrightarrow xy-6y+7x-42=10 \Leftrightarrow (x-6)(y+7)=10$.

Cum $(x-6;y+7)\in\{(-10;-1),(-5;-2),(-2;-5),(-1;-10),(1;10),(2;5),(5;2),(10;1)\}$ rezultă mulţimea soluţiilor $S=\{(-4;-8),(1;-9),(4;-12),(5;-17),(7;3),(8;-2),(11;-5),(16;-6)\}$

G: 280. **Să se arate că** $\dfrac{2a+2b+7^{42}}{2a+2b+3^{63}}>\dfrac{b^a+2^{388}}{b^a+3^{291}}$, $\forall a,\ b\in\mathbb{N}^*$

Prof. **Iuliana Traşcă**, Scorniceşti, Olt

Rezolvare:

$$\left.\begin{matrix}7^{42}=\left(7^2\right)^{21}=49^{21}\\3^{63}=\left(3^3\right)^{21}=27^{21}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 7^{42}>3^{63}, \qquad 2a+2b+7^{42}>2a+2b+3^{63}\Leftrightarrow\frac{2a+2b+7^{42}}{2a+2b+3^{63}}>1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix}2^{388}=\left(2^4\right)^{97}=16^{97}\\3^{291}=\left(3^3\right)^{97}=27^{97}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2^{388}<3^{291}, \qquad b^a+2^{388}<b^a+3^{291}\Leftrightarrow\frac{b^a+2^{388}}{b^a+3^{291}}<1 \quad (2)$$

Din (1) şi(2) avem **:** $\dfrac{2a+2b+7^{42}}{2a+2b+3^{63}}>\dfrac{b^a+2^{388}}{b^a+3^{291}}$.

G: 281. **Într-o lună oarecare, diferită de luna februarie, trei duminici cad la date cu soţ. În ce zi a săptămânii cade data de 25?** ***Prof.*** **Tuţă Luca**, Buzău

Rezolvare: Dacă trei duminici cad la date cu soţ, rezultă că în luna respectivă sunt cinci duminici; prima din ele a fost pe data de 2; a treia pe data de 16, iar a cincea pe data de 30. Rezultă că data de 25 a fost marţi.

G: 222. Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care următoarea problemă are soluție unică: "*Bogdan*, *Nicu* şi *Titu* au împreună n mere. Aflați câte mere are fiecare dintre ei, ştiind că *Nicu* are de trei ori mai multe mere decât *Bogdan*, iar *Titu* are mai multe mere decât *Bogdan* şi mai puține decât *Nicu*."

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

***Rezolvare*:** Notând cu a numărul de mere ale lui *Bogdan*, rezultă că *Nicu* are $3a$ mere, iar *Titu* are $n-4a$ mere. Condițiile din problemă sunt îndeplinite dacă $a < n-4a < 3a \Leftrightarrow 5a < n < 7a$, adică a este un număr natural din intervalul $\left(\frac{n}{7},\frac{n}{5}\right)$. Acest interval conține sigur două numere naturale dacă $\frac{n}{5}-\frac{n}{7} > 2$, adică $n > 35$.

Pentru $n = 35$, intervalul $(5,7)$ conține doar numărul natural 6, şi deci valoarea maximă pentru n este 35.

Observație. Nu pentru toate numerele $n < 35$ problema are soluție unică; de exemplu, pentru $n = 15$ intervalul $\left(\frac{15}{7},\frac{15}{5}\right)$ nu conține niciun număr natural, iar pentru $n = 34$, intervalul $\left(\frac{34}{7},\frac{34}{5}\right)$ conține numerele naturale 5 şi 6.

G: 283. Să se rezolve ecuația:

$x+(x-1)x+(x-1)x^2+...+(x-1)x^n = 2011^{n+1}, n \in N^*, x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

***Prof.* Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: După desfacerea parantezelor obținem $x^{n+1} = 2011^{n+1}$, deci $x = 2011$.

G : 284. Arătați că numărul $a = \underbrace{444...4}_{n\ cifre}\underbrace{222...2}_{n\ cifre} - \underbrace{666...6}_{n\ cifre}$ este pătrat perfect , $n \in \mathbb{N}^*$.

***Prof.* Marin Simion**, Râmnicu Sărat

Rezolvare :

$$\underbrace{444...4}_{n}\cdot 10^n + \underbrace{222...2}_{n} - \underbrace{666...6}_{n} = \underbrace{44...4}_{n}\cdot 10^n + \underbrace{22...2}_{n} - \underbrace{22..2}_{n} - \underbrace{44...4}_{n} = \underbrace{44...4}_{n}\cdot 10^n - \underbrace{44...4}_{n} = \underbrace{44...4}_{n-cifre}\cdot(10^n-1) =$$

$$\underbrace{444...4}_{n}\cdot(\underbrace{1000...0}_{n\ zerouri}-1) = \underbrace{444...4}_{n}\cdot\underbrace{999...9}_{n} = 4\cdot\underbrace{11...1}_{n}\cdot 9\cdot\underbrace{11...1}_{n} = 36\cdot\underbrace{111...1}_{n-cifre}^2 = (6\cdot\underbrace{111...1}_{n-cifre})^2 = \underbrace{666...6}_{n-cifre}^2.$$

Am obținut că $a = \underbrace{666...6}_{n-cifre}^2$, deci este pătrat perfect.

G: 285. Găsiți $a,b \in \mathbb{N}^*$, $a \rangle b$ astfel încât $2011 = a^2 - b^2$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Din $2011 = (a+b)(a-b) \Rightarrow a+b = 2011$ şi $a-b = 1$. Adunând cele două relații obținute rezultă $2a = 2012$, adică $a = 1006$ după care se află $b = 1005$. Aşadar, $2011 = 1006^2 - 1005^2$.

G: 286. Un muncitor poate executa o lucrare în 6 zile, iar altul în 9 zile. Ei lucrează împreună un număr oarecare de zile la lucrare, după care al doilea muncitor termină lucrarea în 4 zile. Câte zile au lucrat împreună muncitorii?

***Prof.* Lăcrimioara Năstase**, Padina, Buzău

Rezolvare: Notăm cu 1 (un întreg) lucrarea şi cu x numărul de zile în care muncitorii au lucrat împreună. Primul lucrează pe zi $\frac{1}{6}$ din întreaga lucrare, iar al doilea lucrează pe zi $\frac{1}{9}$ din lucrare. Împreună lucrează pe zi $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$ din lucrare. Formăm ecuația: $x\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)+4\cdot\frac{1}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5x}{18}+\frac{4}{9}=1$ cu soluția 2;

deci, au lucrat împreună, două zile.

G: 287. **În triunghiul ascuţitunghic ABC, în care** $m(\widehat{B}) \rangle m(\widehat{C})$ **şi M este mijlocul laturii (BC), mediatoarea laturii (BC) intersectează dreptele AB şi AC în E, respectiv, F. Să se arate că dacă** $\frac{EF}{EM}=\frac{1}{2}$**, atunci** $\frac{EA}{EB}=\frac{1}{3}$ **şi** $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{4}$ **.** ***Prof.*** **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie N, mijlocul laturii [AC] atunci, [MN] devine linie mijlocie în triunghiul ABC cu $MN \parallel AB$ şi $MN=\frac{AB}{2}$. Triunghiurile MNF şi EAF sunt congruente (cazul ULU) deoarece $[MF]\equiv[EF]$ căci $\frac{EF}{EM}=\frac{1}{2}$, $\widehat{MFN}\equiv\widehat{EFA}$, opuse la vârf, $\widehat{FMN}\equiv\widehat{FEA}$,alterne interne formate de paralele MN şi EA tăiate de secanta ME. Aşadar, $EA=MN=\frac{AB}{2}\Rightarrow\frac{EA}{EB}=\frac{1}{3}$. Tot din această congruenţă, deducem că FN = FA şi din AN = NC, rezultă $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{4}$.

G: 288. **Se dau punctele A, B, C, D, E coliniare luate în această ordine, iar a, b, c, d lungimile segmentelor [AB], [BC], [CD], [DE].**
a) Dacă a – 2011=b+2010=c – 2012=d+2009 , scrieţi în ordine crescătoare a lungimile segmentele date.
b) Dacă AE = 100m, aflaţi lungimile segmentelor exprimate în cm.
c) Aflaţi lungimea segmentului [MN], respectiv [PQ], unde M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD], [DE].

Prof. **Mariana Mitea**, Cugir, Alba

Rezolvare: a) Din datele problemei se obţine a = b + 4021, c= b + 4022 şi d= b +1. Atunci, b<d<a<c .
b) Dacă a=b+4021, c=b+4022, d=b+1 , iar a+b+c+d=10000, rezultă 4b+8044=10000, de unde b=489, a = 4510, c = 4511, d = 490.
c) MN=(AB+BC):2=4999:2=2499,5 cm . PQ=(CD+DE):2=5001:2=2500,5 cm.

Clasa a VII-a

G: 289. **Arătaţi că** $1959+\frac{1}{2!}+\frac{5}{3!}+\frac{11}{4!}+....+\frac{49^2+49-1}{50!}\langle 1961,$ **unde** $n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n,\ n\in\mathbb{N}^*$ **şi** $0!=1$**.**

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Notăm cu S membrul stâng al inegalităţii de demonstrat. Cum pentru fiecare termen al sumei se poate scrie $\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}=\frac{n(n+1)}{(n+1)n(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$ rezultă

$S=1959+\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{48!}-\frac{1}{50!}\Leftrightarrow S=1961-\frac{1}{49!}-\frac{1}{50!}$. Este evident că $S\langle 1961$.

G: 290. **Să se arate că dacă** $a+b+c+d=2011$ **unde** $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$ **atunci** $\frac{2011}{a}+\frac{2011}{b}+\frac{2011}{c}+\frac{2011}{d}\geq 16$**.**

Prof. **Gheorghe Struţu**, Buzău

Rezolvare: $\frac{2011}{a}+\frac{2011}{b}+\frac{2011}{c}+\frac{2011}{d}=2011\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=(a+b+c+d)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=$

$4+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)+\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\right)\geq 4+6\cdot2=16$.

G: 291. **Arătați că numărul** $\sqrt{2009^{2010}+2010^{2011}+2011^{2012}+2012^{2013}+2013^{2014}}$ **este irațional.**

Prof. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare: Ultima cifră a numărului de sub radical este ultima cifră a sumei dintre ultimele cifre ale puterilor şi anume u(1 + 0 + 1 + 2 + 9) = u(13) = 3, ceea ce înseamnă că sub radical nu este pătrat perfect.

G: 292. **Determinați o proporție în care suma extremilor este 23 , suma mezilor este 17 şi suma pătratelor tuturor termenilor este 578.**

Prof. **Marin Simion**, Rm. Sărat

Rezolvare: Din $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, conform enunțului avem : a + d = 23 , b + c = 17 şi $a^2+b^2+c^2+d^2=578$.

Conform proprietății fundamentale a proporției avem ad = bc .

$a^2+b^2+2ad-2ad+b^2+c^2+2bc-2bc=578$; dar a + d = 23 şi b + c = 17. Rezultă

$23^2-2ad+17^2-2bc=578 \Leftrightarrow 529+289-2ad-2bc=578 \Leftrightarrow 818-4ad=578$

căci ad = bc $\Rightarrow ad=bc=(818-578):4=240:4=60$.

Deoarece a +d = 23 şi ad = 60 rezultă că $a^2+d^2+2ad=529 \Leftrightarrow a^2+d^2+2\cdot 60=529$.

Obținem $a^2+d^2=409 \Rightarrow a^2+d^2-2ad=289 \Leftrightarrow (a-d)^2=17^2 \Rightarrow |a-d|=17$; dar

a + d = 23 de unde rezultă că a = 20 iar d = 3 sau a = 3 şi d = 20. Analog se obține că b = 5 şi

c = 12 sau invers: b = 12 şi c = 5 . O proporție are forma: $\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$.

G: 293. **Să se determine valorile lui x, numere întregi, pentru care fracția** $\frac{2012x+1}{2013x+2}$ **este ireductibilă.**

Prof. **Valerica Roşu,** Rm. Sărat

Rezolvare: Fie $d=(2012x+1,2013x+2)\Rightarrow \begin{matrix} d|\,2012x+1\Rightarrow & d|\,2013\cdot(2012x+1) \\ d|\,2013x+2\Rightarrow & d|\,2012\cdot(2013x+2)\end{matrix}$, rezultă d divide

diferența lor $\Rightarrow d\,|\,(2012\cdot 2-2013\cdot 1)\Rightarrow d\,|\,(2012\cdot 2-2012-1)\Rightarrow d\,|\,(2012-1)\Rightarrow d\,|\,2011$.

Cum 2011 este număr prim $\Rightarrow d\in\{1,2011\}$. Pentru $d=1$ fracția este ireductibilă.

Pentru d = 2011, fracția este reductibilă, $\begin{matrix}2011|\ 2012x+1\\ 2011|\ 2013x+2\end{matrix}\Rightarrow 2011\,|\,(x+1)\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, astfel

încât $x=2011k-1$, pentru care fracția devine : $\frac{2012\cdot(2011k-1)+1}{2013\cdot(2011k-1)+2}=\frac{2011\cdot(2012k-1)}{2011\cdot(2013k-1)}=\frac{2012k-1}{2013k-1}$.

În concluzie fracția este ireductibila pentru pentru $x\neq 2011k-1,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

G: 294. Comparați numerele $a=\sqrt{2009}+\sqrt{2010}$ **şi** $b=\sqrt{2008}+\sqrt{2011}$**.**

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: A compara numerele a şi b revine la a compara pătratele lor.

Cum $a^2=\left(\sqrt{2009}+\sqrt{2010}\right)^2=4019+2\sqrt{2009\cdot 2010}$ şi $b^2=\left(\sqrt{2008}+\sqrt{2011}\right)^2=4019+2\sqrt{2008\cdot 2011}$, ne rămâne să comparăm doar numărul $\sqrt{2009\cdot 2010}$ cu $\sqrt{2008\cdot 2011}$ echivalent cu a compara numărul $m=2009\cdot 2010$ cu numărul $n=2008\cdot 2011=(2009-1)(2010+1)=2009\cdot 2010-2$. Evident că $m\rangle n\Rightarrow a^2\rangle b^2\Rightarrow a\rangle b$.

O altă variantă de rezolvare a dat domnul Titu Zvonaru:

Fie $m=\sqrt{2009}-\sqrt{2008}$ şi $n=\sqrt{2011}-\sqrt{2010}$. Avem

$m=\dfrac{\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}\right)\cdot\left(\sqrt{2009}+\sqrt{2008}\right)}{\sqrt{2009}+\sqrt{2008}}=\dfrac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2008}}$ şi analog $n=\dfrac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2010}}$.

Rezultă imediat că $m\rangle n$ adică $\sqrt{2009}-\sqrt{2008}\rangle\sqrt{2011}-\sqrt{2010}\Leftrightarrow a\rangle b.$

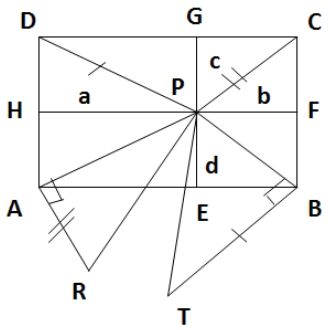
G: 295. Aflați aria triunghiului ABC ştiind că AB + AC = 20 cm şi că distanța de la intersecția dreptei BC cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ la dreapta AB este egală cu 8 cm.

***Prof.* Lăcrimioara Năstase**, Padina, Buzău

***Rezolvare*:** Fie D intersecția dreptei BC cu bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, iar E, F picioarele perpendicularelor din D pe AB, respectiv AC. $A_{ABC}=A_{ABD}+A_{ADC}=\dfrac{AB\cdot DE}{2}+\dfrac{AC\cdot DF}{2}$. Punctul D se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ $\Rightarrow$ DE=DF=8 cm, şi înlocuind în relația de mai sus, obținem $A_{ABC}=4(AB+AC)=80cm^2$.

G : 296. În interiorul dreptunghiului ABCD luăm punctul P şi construim în exteriorul său BT $\perp$ PB , AR$\perp$ AP cu AR = PC şi BT = DP. Arătați că PR = PT.

***Prof.* Ion Radu**, Bozioru, Buzău



Rezolvare : Notăm cu E, F, G, respectiv H proiecțiile punctului P pe laturile [AB], [BC], [CD], respectiv [DA] şi $a=PH,\ b=PF,\ c=PG,\ d=PE$.

Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile AEP, BEP, CPG, ABC rezultând relațiile $PA^2=a^2+d^2$, $PB^2=b^2+d^2$, $PC^2=b^2+c^2$, $PD^2=a^2+c^2$, de unde $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

Aplicând din nou teorema lui Pitagora în triunghiurile PAR şi PBT, din relațiile $PA^2+AR^2=PR^2$, $PB^2+BT^2=PT^2$ rezultă că $PR=PT$.

G: 297. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi, ştiind că trei dintre unghiurile sale exterioare au măsurile proporţionale cu numerele 11, 11 şi 14 şi suma măsurilor celorlalte trei, egală cu 330^0 .

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

***Rezolvare*:** Fie ABC, triunghiul dat, unde A, B, C sunt măsurile unghiurilor sale ; deducem că cele şase unghiuri exterioare au următoarele măsuri: două au 180^0-A, două au 180^0-B şi două au 180^0-C. Deosebim două cazuri :

Cazul I : Dacă $A\neq B$, putem scrie : $\dfrac{180^0-A}{11}=\dfrac{180^0-A}{11}=\dfrac{180^0-B}{14}=\dfrac{540^0-(2A+B)}{36}=k$, unde k se determină ținând seamă de faptul că suma celorlalte trei unghiuri au suma măsurilor egală cu 330^0:

$\left(180^0-B\right)+\left(180^0-C\right)+\left(180^0-C\right)=330^0\Leftrightarrow B+2C=210^0$. Dar,

$(2A+B)+(B+2C)=2(A+B+C)=$

$=2\cdot180^0=360^0\Rightarrow 2A+B=360^0-(B+2C)\Leftrightarrow 2A+B=150^0\Rightarrow k=\dfrac{540^0-150^0}{36}=10^0 50'$. Imediat, se obțin măsurile unghiurilor triunghiului: $A=60^0 50'$, $B=28^0 20'$, $C=90^0 50'$.

Cazul II: Dacă $A=B\neq C$, putem scrie : $\dfrac{180^0-A}{11}=\dfrac{180^0-B}{11}=\dfrac{180^0-C}{14}$

şi $\left(180^0-A\right)+\left(180^0-B\right)+\left(180^0-C\right)=330^0\Leftrightarrow 540^0-180^0=330^0\Leftrightarrow 360^0=330^0$,

ceea ce este fals, deci, cazul al doilea nu poate avea loc.

Observaţie : Evident, putem schimba între ele literele A, B, C .

G: 298. **Se consideră un segment $[BC]$ pe care luăm un punct D. În punctul D se ridică perpendiculara pe segmentul $[BC]$. Fie M un punct variabil pe această perpendiculară. Dacă $BD = 3$ cm, $DC = 12$ cm, $DM = x$ cm, atunci se cere:**

a) Pentru $x = 6$ cm să se afle raza cercului circumscris triunghiului BMC;

b) Să se afle valoarea lui x pentru care $m(\sphericalangle BMC) < 90^0$;

c) Să se afle valoarea lui x pentru care $m(\sphericalangle BMC) > 90^0$.

***Prof.* Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: a) Se observă că $6^2 = 3 \cdot 12 \Rightarrow m(\sphericalangle BMC) = 90^0$ (s-a utilizat reciproca teoremei înălțimii). Notăm poziția punctului M în această situație cu A ($m(\sphericalangle BAC) = 90^0$).

b) Dacă $M \in (DA,\ A \in (DM) \Rightarrow m(\sphericalangle BMC) < 90^0$, deoarece cu teorema unghiului exterior avem, $m(\sphericalangle BAD) > m(\sphericalangle BMD)$ şi $m(\sphericalangle CAD) > m(\sphericalangle CMD)$. De aici însumând avem $m(\sphericalangle BMC) < m(\sphericalangle BAC) = 90^0$ şi în concluzie $x \in (6, \infty)$.

c) Analog avem pentru $M \in (AD)$, $m(\sphericalangle BMC) > 90^0$ şi în consecință $x \in (0,6)$.

G: 299. **Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 60^0$. Să se arate că lungimea înălțimii din vârful A este dată de relația $h_a = \dfrac{bc\sqrt{3}}{2a}$, unde notațiile sunt cele obişnuite.**

***Prof.* Tuță Luca**, Buzău

Rezolvare: Fie $S = aria[ABC]$. Avem $S = \dfrac{ah_a}{2} \Leftrightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} \Leftrightarrow h_a = \dfrac{S+S}{a} = \dfrac{bh_b + ch_c}{2a}$.

Dar $h_b = c\sin 60^0 = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$ şi $h_c = b\sin 60^0 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Rezultă $h_a = \left(\dfrac{bc\sqrt{3}}{2} + \dfrac{bc\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2a} \Leftrightarrow h_a = \dfrac{bc\sqrt{3}}{2a}$.

Clasa a VIII-a

G: 300. Rezolvați ecuația $\left|\left||x-1|-2\right|-2009\right| = 2008,\ x \in \mathbb{N}$.

***Prof.* Doina Stoica, Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $\left|\left||x-1|-2\right|-2009\right| = 2008 \Rightarrow \left||x-1|-2\right|-2009 = -2008$ (1) şi $\left||x-1|-2\right|-2009 = 2008$ (2)

Din (1) rezultă: $\left||x-1|-2\right| = 1$ $\left|\begin{array}{l} \Rightarrow (a):\ |x-1| = 1 \Rightarrow x \in \{0;2\} \\ \Rightarrow (b):\ |x-1| = 3 \Rightarrow x \in \{-2;4\} \end{array}\right.$ şi

Din (2) rezultă $\left||x-1|-2\right| = 4017$ $\left|\begin{array}{l} \Rightarrow (a):\ |x-1| = -4015 \Rightarrow x \in \varnothing \\ \Rightarrow (b):\ |x-1| = 4019 \Rightarrow x \in \{-4018;4020\} \end{array}\right.$.

Aşadar, $S = \{0;2;4;-4018;4020\}$.

G: 301. **Să se arate că $x(x-10)(x^2-10x+36)+324 \rangle 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}$.** ***Prof.* Ligia Struțu**, Buzău

Rezolvare: $x(x-10)(x^2-10x+36)+324 \rangle 0, \forall x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (x^2-10x)^2 + 36(x^2-10x)+324 \rangle 0, \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x^2-10x+18)^2 \rangle 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

Dacă presupunem că $(x^2-10x+18)^2 = 0 \Rightarrow x^2-10x+18 = 0 \Rightarrow x \in \left\{5-\sqrt{7}, 5+\sqrt{7}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, aşadar, $(x^2-10x+18)^2 \rangle 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

G: 302. Să se determine funcţia liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât să aibă loc relaţia : $f(3u+v)+f(5u+3v)=8u+8v+6$, în cazurile : I) u este argument şi $v\in\mathbb{R}$;II) v este argument şi $u\in\mathbb{R}$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: I) Considerăm că funcţia, pe care trebuie să o determinăm, este definită prin legea de corespondenţă $f(x)=ax+b$.

În cazul I), avem : $f(3u+v)=a(3u+v)+b$ şi $f(5u+3v)=a(5u+3v)+b$. Atunci,

$f(3u+v)+f(5u+3v)=8u+8v+6 \Leftrightarrow 8au+4av+2b=8u+8v+6$ de unde $a=1,\ b=2v+3$.

$\Rightarrow f(u)=u+2v+3,\ v\in\mathbb{R}$. Trecând la argumentul x rezultă $f(x)=x+2v+3$.

II) Se procedează analog, rezultând $f(x)=2x-4u+3,\ u\in\mathbb{R}$.

G: 303. Să se arate că numărul $a=20102011^4+2\cdot 20102010^2+4\cdot 20102011-1$ este pătrat perfect.

***Prof.* Valerica Roşu**, Rm. Sărat

Rezolvare: $a=20102011^4+2\cdot(20102011-1)^2+4\cdot 20102011-1$

$a=20102011^4+2\cdot 20102011^2-4\cdot 20102011+2+4\cdot 20102011-1$

$a=20102011^4+2\cdot 20102011^2+1 \Rightarrow a=\left(20102011^2+1\right)^2$, rezultă că **a** este pătrat perfect.

G: 304. Arătaţi că dacă $\alpha\in R-Q$, $n\geq 10^{k+2}$ $\left(k\in N^*\right)$, şi $M=\{\{\alpha\},\{2\alpha\},...\{(n+1)\alpha\}\}$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracţionară, atunci mulţimea M conţine cel puţin două elemente diferite care au primile k zecimale aceleaşi.

***Prof.* dr. Mihály Bencze**, Braşov

***Rezolvare*:**

Deoarece $M\subseteq(0,1)$ vom împărţi intervalul $(0,1)$ în n intervale $\left(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right)\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ de lungime $\frac{1}{n}$.

Din **principiul lui *Dirichlet***, avem că există un interval în care sunt incluse două elemente ale mulţimii M.

Fie acest interval $\left(\frac{a}{n},\frac{a+1}{n}\right)$. Dacă $\frac{a}{n}=\overline{0,x_1x_2...x_kx_{k+1}...}$, atunci $\frac{a+1}{n}=\frac{a}{n}+\frac{1}{n}=\overline{0,x_1x_2...x_kx_{k+1}...}+0,\underbrace{00...0}_{(k+1)ori}1$, deoarece $n\geq 10^{k+2}$. Aşadar, $\frac{a}{n}$ şi $\frac{a+1}{n}$ au primile $k+1$ zecimale aceleaşi, şi de aici rezultă concluzia.

G: 305. Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi şi $a^2+b^2+c^2\leq ab+bc+ca$, atunci triunghiul este echilateral.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Se ştie că $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$. Aşadar, din enunţ rezultă că

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

G : 306. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este $288\sqrt{3}$ dm^3 , iar distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală este de 48 dm . Să se determine aria laterală a piramidei .

***Prof.* Marin Simion** , Rm. Sărat

Rezolvare : Notăm apotema bazei [OM] cu **x** şi înălţimea [VO] cu **h** . În triunghiul dreptunghic VOM construim OH $\perp$ VM . OH = d(O ,(VBC)) . $OH=\frac{VO\cdot OM}{VM}\Leftrightarrow 48=\frac{h\cdot x}{VM}\Rightarrow VM=\frac{hx}{48}$.

$OM=x\Rightarrow R=2x$ şi $l_3=2x\sqrt{3}\ \Rightarrow A_b=\frac{(2x\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=3x^2\sqrt{3}$; $P_b=6x\sqrt{3}$. Cum $V=\frac{Ab\cdot h}{3}$

$\Rightarrow 288\sqrt{3} = \frac{3x^2\sqrt{3}\cdot h}{3} = x^2h\sqrt{3} \Rightarrow x^2h = 288$,

$$A_l = \frac{Pb\cdot VM}{2} = 6x\sqrt{3}\cdot\frac{hx}{48}\cdot\frac{1}{2} = \frac{x^2h\sqrt{3}}{16} = \frac{288\sqrt{3}}{16} = 18\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

G: 307. **Un rezervor are forma unui paralelipiped dreptunghic cu una din dimensiuni egală cu media aritmetică a celorlalte două. Ştiind că suma celor trei dimensiuni este 27 m şi aria totală este de 428 m^2 aflați capacitatea în hectolitri a rezervorului.** ***Prof.*** **Tuță Luca**, Buzău

Rezolvare: Dacă notăm cu x, y şi z dimensiunile paralelipipedului, atunci pe baza datelor problemei, avem: $y+z=2x,\ x+y+z=27 \Rightarrow 3x=27 \Rightarrow x=9$ şi
$2(xy+yz+zx)=428 \Rightarrow xy+yz+zx=214 \Rightarrow yz=214-x(y+z) \Rightarrow yz=214-2x^2=52$. Aşadar, $V=xyz=468\,m^3=468000\,dm^3=468000\,l=4680\,hl$.

Clasa a IX-a

L: 181. **Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:**
$\sqrt{2ap+bc}+\sqrt{2bp+ac}+\sqrt{2cp+ab}\le 2P_{ABC}$ **, unde notațiile sunt cele obişnuite.**

Prof. **Mariana Mitea**, Cugir, Alba

Rezolvare:

Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem: $bc\le\frac{(b+c)^2}{4}$ de unde $2ap+bc\le 2ap+\frac{(b+c)^2}{4}$, (1).

dar $b+c=2p-a$ şi înlocuind în inegalitatea (1), rezultă $2ap+bc\le\frac{(a+2p)^2}{4}\Rightarrow\sqrt{2ap+bc}\le\frac{a+2p}{2}$

Analog, se demonstrează că $\sqrt{2bp+ac}\le\frac{b+2p}{2}$, $\sqrt{2cp+ab}\le\frac{c+2p}{2}$. Adunând aceste ultime trei inegalități se obține $\sqrt{2ap+bc}+\sqrt{2bp+ac}+\sqrt{2cp+ab}\le\frac{(a+b+c)+6p}{2}=4p=2P_{ABC}$.

O altă variantă de rezolvare a dat domnul Titu Zvonaru:
Din $2ap+bc=a(a+b+c)+bc=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$, aplicând inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{2bp+ac}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{2a+b+c}{2}$. Analog pentru celelalte două inegalități. Rezultă

$$\sqrt{2ap+bc}+\sqrt{2bp+ac}+\sqrt{2cp+ab}\le\frac{2a+b+c+a+2b+c+a+a+b+2c}{2}=4p=2P_{ABC}.$$

L: 182. **Dacă** $x_k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), k=\overline{1,n}$**, atunci, arătați că** $\sum_{k=1}^{n}\left(\sin x_k+tgx_k\right)>2n\cdot\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ **.**

Prof. **D.M. Bătinețu – Giurgiu**, Bucureşti

Rezolvare:

Vom folosi inegalitățile ***Huygens***: $\sin x+tgx>4\cdot tg\frac{x}{2}>2x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Demonstrație: Notând $tg\frac{x}{2}=t\in(0,1), \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem de demonstrat că

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}>4t \Leftrightarrow \frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{1-t^2}>2, \forall t\in(0,1) \Leftrightarrow 1-t^2+1+t^2\ge 2(1-t^4) \Leftrightarrow 2t^4>0, \forall t\in(0,1)$$

ceea ce este evident. Prin urmare $\sin x + tgx > 4 \cdot tg\frac{x}{2}$ şi deoarece $tg\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că

$\sin x + tgx > 2x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deci, conform inegalităţilor lui *Huygens* avem $\sin x_k + tgx_k > 2x_k$, $k = \overline{1,n}$, iar din inegalitatea mediilor $\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ deducem că $\sum_{k=1}^{n}(\sin x_k + tgx_k) > 2\sum_{k=1}^{n} x_k \geq 2n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, adică tocmai relaţia din enunţ.

L: 183. Arătaţi că dacă $a,b,c,d > 0$, atunci: $1 + \frac{1}{8}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b}\right) > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

José Luis Díaz-Barrero, Polytechnical University of Catalonia, Barcelona, Spain

***Rezolvare*:**

Observăm că $\frac{a}{b+c} = \frac{a + \frac{2}{3}b}{b+c} + 2\left(\frac{\frac{2}{3}b + c}{b+c}\right) - 2$, şi încă trei egalităţi similare pentru $\frac{b}{c+d}, \frac{c}{d+a}$ şi $\frac{d}{a+b}$. Aplicăm inegalitatea mediilor aritmetică-geometrică şi obţinem:

$$\frac{a + \frac{2}{3}b}{b+c} + 2\left(\frac{\frac{2}{3}b + c}{b+c}\right) \geq 2\sqrt{\left(\frac{a + \frac{2}{3}b}{b+c}\right) \cdot 2\left(\frac{\frac{2}{3}a + b}{a+b}\right)} = 2\sqrt{2\frac{\frac{2}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{9}ab}{(a+b)(b+c)}} > 2\sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{a+b}{b+c}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{a+b}{b+c}},$$

şi încă trei inegalităţi similare , care prin adunare conduc la

$$(*)\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} > \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{\frac{a+b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+d}} + \sqrt{\frac{c+d}{d+a}} + \sqrt{\frac{d+a}{a+b}}\right) - 8.$$

Aplicăm din nou inegalitatea mediilor aritmetică-geometrică, şi obţinem:

$$(**)\ \sqrt{\frac{a+b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+d}} + \sqrt{\frac{c+d}{d+a}} + \sqrt{\frac{d+a}{a+b}} \geq 4\sqrt[4]{\sqrt{\frac{a+b}{b+c}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{c+d}} \cdot \sqrt{\frac{c+d}{d+a}} \cdot \sqrt{\frac{d+a}{a+b}}} = 4.$$

Din (*) şi (**) obţinem: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} > 8\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$, de unde rezultă şi concluzia.

O altă variantă de soluţie a dat domnul Titu Zvonaru:

Deoarece $\frac{a}{b+c} \rangle \frac{a}{b+c+d}$, scriind încă trei inegalităţi similare obţinem

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \rangle \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$. (a se vedea problema L: 155 şi soluţiile ei în SM nr. VIII). Astfel este suficient să demonstrăm că $1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \rangle \frac{2\sqrt{3}}{3}$, adică $\frac{7}{6} \rangle \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow 7 \rangle 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 49 \rangle 48$, adevărată.

L: 184. Arătaţi că există numerele naturale x_i $(i = \overline{1,n})$ distincte astfel încât $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ este o $4p+1$ putere perfectă, şi $\sum_{k=1}^{n} x_k^3$ un pătrat perfect.

***Prof.* dr. Mihály Bencze**, Braşov

***Rezolvare*:** Avem:

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = a$ şi $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = b^2$, aşa că $\sum_{k=1}^{n}(tk)^2 = at^2$ şi $\sum_{k=1}^{n}(tk)^3 = b^2t^3$.

Dacă $t = a^{2p}\left(p \in N^*\right)$ atunci $\sum_{k=1}^{n}(ka^{2p})^2 = a^{4p+1}$ şi $\sum_{k=1}^{n}(ka^{2p})^3 = (ba^{3p})^2$. Deci, $x_k = ka^{2p}\ \left(k = \overline{1,n}\right)$.

L: 185. Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi care nu este obtuzunghic şi

$$a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2 \le a^6 + b^6 + c^6 + 2a^2b^2c^2,$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu (1) $\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right) \le 0$

Din ipoteză avem că: $\cos A \ge 0$, $\cos B \ge 0$ şi $\cos C \ge 0$,

deci $\left(-a^2+b^2+c^2\right) \ge 0$, $(a^2-b^2+c^2) \ge 0$ şi $(a^2+b^2-c^2) \ge 0$, de unde rezultă:

$$(2)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right) \ge 0.$$

Din (1) şi (2) avem că: $\left(-a^2+b^2+c^2\right) = 0$ sau $(a^2-b^2+c^2) = 0$ sau $(a^2+b^2-c^2) = 0$, de unde concluzia.

L: 186. Fie $f:[2;\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$.
Să se determine funcţia $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ g)(x) = 2x+1, \forall x \rangle 11$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare*:** $f(x) = \sqrt{\left(1+\sqrt{x-2}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{x-2}\right)^2} = \begin{cases} 4, x \le 11 \\ 2\sqrt{x-2}-2, x \ge 11 \end{cases}$.

Din $2\sqrt{g(x)-2} - 2 = 2x+1$, $2\sqrt{g(x)-2} = 2x+3$,

$4(g(x)-2) = 4x^2+12x+9 \,\big|:4 \Rightarrow g(x) = x^2+3x+\frac{17}{4}$.

Clasa a X-a

L: 187. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea
$\log_2\left(\log_{x^2+2}[(m-1)x^2+2(2m-3)x+5m-4]\right) \rangle 0$ **să fie adevărată pentru orice x real.**

***Prof.* Florentina Popescu**,Buzău

***Rezolvare*:** Din

$\log_2\left(\log_{x^2+2}[(m-1)x^2+2(2m-3)x+5m-4]\right) \rangle \log_2 1 \Rightarrow \log_{x^2+2}[(m-1)x^2+2(2m-3)x+5m-4] \rangle \log_{x^2+2}(x^2+2)$

rezultă $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6 \rangle 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Din condiţiile $\Delta \langle 0 \Rightarrow m \in (-\infty;1) \cup (3;\infty)$ şi $a \rangle 0 \Rightarrow m \in (2;\infty)$ obţinem $m \in (3;\infty)$.

L:188. Dacă $a,b,c \in (1,\infty)$ şi $bc < a^2$, atunci arătaţi că $\frac{\left(\log_a \frac{a}{b}\right)^2}{\log_a ab} + \frac{\left(\log_a \frac{a}{c}\right)^2}{\log_a ac} + \frac{(\log_a bc)^2}{\log_a \frac{a^2}{bc}} \ge 1$.

***Prof.* D.M. Bătinţu – Giurgiu**, Bucureşti

***Rezolvare*:** Notând $x = \log_a b, y = \log_a c$, din enunţ rezultă că $x, y > 0$ şi $x+y < 2$.

Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $\frac{(1-x)^2}{1+x} + \frac{(1-y)^2}{1+y} + \frac{(x+y)^2}{2-x-y} \ge 1$.

Conform **inegalității lui Bergström** avem

$\frac{(1-x)^2}{1+x}+\frac{(1-y)^2}{1+y}+\frac{(x+y)^2}{2-x-y}\geq\frac{(1-x+1-y+x+y)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$, ceea ce demonstrează enunțul.

L: 189. Fie un şir $(x_n)_{n\geq 3}$ de numere în progresie aritmetică în care $x_1\geq 1$şi rație pozitivă. Să se arate că: $\lg^2 x_2+\lg^2 x_3+\lg^2 x_4+...+\lg^2 x_{n-1}\geq\lg x_1\lg x_3+\lg x_2\lg x_4+\lg x_3\lg x_5+...+\lg x_{n-2}\lg x_n$.

***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Şirul fiind o progresie aritmetică cu termeni pozitivi şi rația $r\geq 0$ demonstrăm mai întâi că: $x_k^2\geq x_{k-1}x_{k+1},\forall k=\overline{1;n}$. Avem $x_k=\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{2}$ şi cu inegalitatea mediilor deducem $x_k^2\geq x_{k-1}x_{k+1},\forall k=\overline{1;n}$.

Pentru trei numere a, b, c ≥ 1 cu $b^2\geq$ ac se arată uşor că are loc inegalitatea: $\lg^2 b\geq\lg a\cdot\lg c$. Aplicând inegalitatea anterioară pentru numerele $x_2,x_3,...,x_{n-1}$,avem: $\lg^2 x_2\geq\lg x_1\lg x_3,\lg^2 x_3\geq\lg x_2\lg x_4,\ldots,\lg^2 x_{n-1}\geq\lg x_{n-2}\lg x_n$. Prin însumarea inegalităților obținute se obține inegalitatea propusă. Egalitatea are loc atunci când rația r este 0, adică atunci când $x_1=x_2=x_3=...=x_n$.

L:190. Arătați că dacă $z\in C^*$ astfel încât $\left|z+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{5}$, atunci $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\leq|z|\leq\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$.

Prof. dr. Mihály Bencze, Braşov

Rezolvare: $(1)|z|=\left|z+\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\right|\leq\left|z+\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{z}\right|=\sqrt{5}+\frac{1}{|z|}\Rightarrow$

$|z|^2-\sqrt{5}\cdot|z|-1\leq 0\Rightarrow|z|\leq\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$.

$(2)\frac{1}{|z|}=\left|\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{1}{z}+z-z\right|\leq\left|\frac{1}{z}+z\right|+|z|=\sqrt{5}+|z|\Rightarrow|z|^2+\sqrt{5}\cdot|z|-1\geq 0\Rightarrow|z|\geq\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$.

L: 191. Să se calculeze partea întreagă a numărului $a=\log_7 8+\log_8 2\cdot\log_2 7$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $2\langle\log_7 8+\log_8 7\langle 2+1\Rightarrow\quad[a]=[\log_7 8+\log_8 7]=2.$

L: 192. Să se rezolve ecuația: $\frac{x+y}{2}-\frac{1005}{x}-\frac{1005}{y}+2011=\sqrt{2011x-2010}+\sqrt{2011y-2010}$.

***Prof.* Mitea Mariana**, Cugir, Alba

Rezolvare: Înmulțim ecuația cu 2 şi grupând termenii convenabili se obține

$\frac{1}{x}(x-\sqrt{2011x-2010})^2+\frac{1}{y}(y-\sqrt{2011y-2010})^2=0$, (1).

Din condiția de existență $x,y\geq\frac{2010}{2011}$ rezultă că în (1) avem o sumă de numere pozitive nulă, de unde rezultă că $\frac{1}{x}(x-\sqrt{2011x-2010})^2$ şi $\frac{1}{y}(y-\sqrt{2011y-2010})^2=0$, ecuații ale căror soluții sunt: $x,y\in\{1;2010\}$. Rezultă $(x;y)\in\{(1;1),(1;2010),(2010;1),(2010;2010)\}$.

L: 193. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{12x}=\left(\frac{1}{125}\right)^{x}+\left(\frac{1}{16}\right)^{x}$.

***Prof.* Delia Ileana Basch- Naidin,** Caracal, Olt

Rezolvare: Cu notațiile $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}=m$ şi $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=n$, 12x=t, ecuația dată devine: $(m+n)^t=m^t+n^t$. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^t+\left(\frac{n}{m+n}\right)^t$, care este strict crescătoare, deci injectivă. Aşadar, din $f(t)=f(1)=1\Rightarrow t=1$, adică $x=\frac{1}{12}$.

Clasa a XI-a

L: 194. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{Z})$ **şi** $\det(A+1936\cdot B)=0$**, atunci arătați că 75 divide** $\det(A+2011\cdot B)$**.**

***Prof.* D.M. Bătinețu – Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Fie polinomul $f(X)=\det(A+X\cdot B)\in Z[X]$. Deoarece $f(1936)=\det(A+1936\cdot B)=0$, rezultă că 1936 este o rădăcină a polinomului f. Prin urmare $X-1936$ divide polinomul f, adică există $g\in Z[X]$ astfel încât $f(X)=(X-1936)\cdot g(X)$. Aşadar, $f(2011)=(2011-1936)\cdot g(X)=75\cdot g(X)$, ceea ce arată că 75 divide $f(2011)=\det(A+2011\cdot B)$.

L:195. Să se arate că dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ **astfel încât** $A^2=2A-I_n$**, atunci** $\det(A^{2011}+2010I_n)=2011^n\det(A)$**.**

***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare*:** Înmulțim relația dată cu A şi atunci: $A^3=2A^2-A=4A-2I_n-A=3A-2I_n$. Se arătă uşor prin inducție matematică că: $A^n=nA-(n-1)I_n$, $n\geq 2$. Pentru n = 2011, obținem: $A^{2011}=2011A-2010I_n$, şi de aici, rezultă că: $\det(A^{2011}+2010I_n)=\det(2011A)=2011^n\det(A)$.

L: 196. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ **două matrice pentru care avem** $\det(A^{2011}+AB-BA)=(\det A)^{2011}$ **.**
Arătați că :

a) $(AB-BA)^2\in O_2$**.**

b) $\det(A+B+AB-BA)=\det A+\det B+\det(AB-BA)$**,** $Tr(AB)=Tr(A)\cdot Tr(B)$

Prof. Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

***Rezolvare*:**

a) Se va folosi următorul rezultat: Dacă $X,Y\in M_2(\mathbb{C})$, atunci $Tr(X)\cdot Tr(y)=Tr(X\cdot Y)\Leftrightarrow\det(X+Y)=\det X+\det Y$ (1). Demonstrația provine din folosirea urmei la teorema Hamilton–Cayley pentru X: $X^2-Tr(X)\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2\Rightarrow\det X=\frac{1}{2}[(TrX)^2-Tr(X^2)]$

Din $\det(X+Y)-\det X-\det Y=\frac{1}{2}\left[(Tr(X+Y))^2-Tr(X+Y)^2\right]-\frac{1}{2}\left[(TrX)^2-TrX^2\right]-\frac{1}{2}\left[(TrY)^2-TrY^2\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[(TrX)^2+(TrY)^2+2TrX\cdot TrY-Tr(X^2+Y^2+XY+YX)\right]-\frac{1}{2}\left[(TrX)^2-TrX^2\right]-\frac{1}{2}\left[(TrY)^2-TrY^2\right]=$

$=Tr(X)\cdot Tr(y)-Tr(X\cdot Y)\Rightarrow Tr(X)\cdot Tr(y)=Tr(X\cdot Y)\Leftrightarrow \det(X+Y)=\det X+\det Y$.

Din $Tr\left(A^{2011}\cdot(AB-BA)\right)=Tr(A^{2012}B-A^{2011}BA)=Tr(A^{2012}B-A^{2012}B)=0$, rezultă

$Tr(A^{2012}(AB-BA))=Tr(A^{2011})\cdot Tr(AB-BA)\Rightarrow$

$\det(A^{2011}+AB-BA)=\det(A^{2011})+\det(AB-BA)\Leftrightarrow$

$\det(A^2+B^2+2AB)=(\det A)^{2011}+\det(AB-BA)$, (2). Din (2) şi din $Tr(AB-BA)=0$ rezultă

$\det(AB-BA)=0\Leftrightarrow (AB-BA)^2=O_2$.

b) Din $Tr\left((A+B)(AB-BA)\right)=Tr(A^2B)-Tr(ABA)+Tr(BAB)-Tr(B^2A)=0\Rightarrow$.

$Tr\left((A+B)(AB-BA)\right)=Tr(A+B)\cdot Tr(AB-BA)$, din (1) rezultă

$\det(A+B+AB-BA)=\det(A+B)+\det(AB-BA)$ (3).

Din (1) şi (3) rezultă $\det(A+B)+\det(AB-BA)=\det A+\det B+\det(AB-BA)\Leftrightarrow$

$\det(A+B)=\det A+\det B\Leftrightarrow Tr(AB)=TrA\cdot TrB$.

L: 197. **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}$. ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{x+5}{x^2+3x-10}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x+5}{x^2+3x-10}\right)}{\dfrac{x+5}{x^2+3x-10}}\cdot\frac{x(x+5)}{x^2+3x+10}=1$$

L:198. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **şi** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**. Ştiind că f este o funcţie pară, iar** $g(x)=\left(\dfrac{2x^5}{5}+3\right)\cdot f(x)+2x$ **, să se calculeze** $g'(0)$**.**

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Scorniceşti, Olt

Rezolvare: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=-f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=0.$

$g'(x)=2x^4\cdot f(x)+\left(\dfrac{2x^5}{5}+3\right)\cdot f'(x)+2$. Atunci, $g'(0)=2$.

Clasa a XII-a

L:199. **Rezolvând ecuaţia** $x^3-x-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=0$ **să se demonstreze relaţiile:**

a) $\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{9}=\dfrac{1}{8}$; **b**) $\cos^2\dfrac{\pi}{9}+\cos^2\dfrac{5\pi}{9}+\cos^2\dfrac{7\pi}{9}=\cos^4\dfrac{\pi}{9}+\cos^4\dfrac{5\pi}{9}+\cos^4\dfrac{7\pi}{9}=\dfrac{3}{2}$;

c) $\cos^3\dfrac{\pi}{9}+\cos^3\dfrac{5\pi}{9}+\cos^3\dfrac{7\pi}{9}=\dfrac{3}{8}$. ***Prof.* OvidiuŢâţan** , Rîmnicu Sărat

Rezolvare: Soluţiile ecuaţiei $x^3-x-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, sunt $x_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{\pi}{9}, x_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{5\pi}{9}, x_3=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{7\pi}{9}$,

toate reale. Din ultima din relaţiile lui Viète

$\Rightarrow\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{9}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{9}=\dfrac{1}{8}$, adică a)

Deci $\frac{4}{3}\cos^2\frac{\pi}{9}+\frac{4}{3}\cos^2\frac{5\pi}{9}+\frac{4}{3}\cos^2\frac{7\pi}{9}=2\Rightarrow\cos^2\frac{\pi}{9}+\cos^2\frac{5\pi}{9}+\cos^2\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{2}$.

Din ecuaţia iniţială obţinem relaţia de recurenţă $S_{n+3}-S_{n+1}-\frac{1}{3\sqrt{3}}S_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

Pentru $n=1\Rightarrow S_4-S_2-\frac{1}{3\sqrt{3}}S_1=0$. Dar $S_1=0\Rightarrow S_4=S_2=\frac{3}{2}$, adică b).

Pentru $n=0\Rightarrow S_3-S_1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot S_0=0\Rightarrow S_3=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot 3\Rightarrow S_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi deci

$\frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^3\frac{\pi}{9}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^3\frac{5\pi}{9}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos^3\frac{\pi}{9}+\cos^3\frac{5\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$ adică c).

L:200. Dacă $a,b\in R\ (a<b)$ şi $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu proprietatea că $\int_a^b f(x)dx=2011$, atunci calculaţi: $\int_a^b x\big(f(x)+f(a+b-x)\big)dx$.

***Prof.* D.M. Bătinețu – Giurgiu**, Bucureşti

Rezolvare:

Avem: $\int_a^b x\big(f(x)+f(a+b-x)\big)dx=\int_a^b xf(x)dx+\int_a^b xf(a+b-x)dx$.

Totodată $\int_a^b xf(a+b-x)dx=\int_a^b(a+b-t)f(t)dt=\int_a^b(a+b-x)f(x)dx$.

Atunci $\int_a^b x\big(f(x)+f(a+b-x)\big)dx=\int_a^b xf(x)dx+\int_a^b(a+b-x)f(x)dx=(a+b)\int_a^b f(x)dx=2011(a+b)$.

L: 201. Să se calculeze: $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+1}{x^{2011}+x^{2007}+x^4+1}dx$. ***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Integrala dată se mai scrie: $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+1}{(x^4+1)(x^{2007}+1)}dx$. Prin schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$,

integrala devine: $I=-\int_2^{\frac{1}{2}}\frac{t^2(t^2+1)}{t^4+1}\cdot\frac{t^{2007}}{t^{2007}+1}\cdot\frac{dt}{t^2}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{t^2+1}{t^4+1}\left(1-\frac{1}{t^{2007}+1}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt-I$, de unde, rezultă că:

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

În această relație dând valori lui n da la 1 la n-1 şi adunându-le rezultă

$F(n)=F(1)+2\cdot(1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2)=F(1)+2\cdot\frac{(n-1)n(2n+1)}{6}$. Dacă în loc de n punem x obținem:

$F(x)=F(1)+\frac{2x^3-x^2-x}{3}, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ prin derivare că $f(x)=F'(x)=2x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

Atunci, $S=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-\frac{2}{3}k-\frac{1}{3})=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{3}-\frac{n}{3}=\frac{n}{3}(2n^2+2n-1)$.

L: 205. În planul XOY un melc pleacă din punctul A(2;2) şi merge până în $B(3;\frac{27}{4})$ străbătând graficul unei funcții continue $f:[2;3]\to(0;\infty)$. Melcul constată că în orice punct M(x;y) ar fi el , situat pe graficul funcției, diferența dintre o pătrime din produsul coordonatelor punctului M şi aria subgraficului funcției f pe [2;x] este egală cu 1.

a) Demonstrați că f este derivabilă pe [2;3] şi că $x\cdot f'(x)=3f(x)$;

b) Determinați funcția f . ***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: a) Din datele problemei rezultă $\frac{1}{4}x\cdot f(x)-\int_2^x f(t)dt=1$ (*) atunci $f(x)=\frac{1}{x}\left(4+4\int_2^x f(t)dt\right)\Rightarrow$ f e derivabilă pe [2;3].

Derivând relația (*) obținem $\frac{1}{4}f(x)+\frac{1}{4}xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)=3f(x)$.

b) Din $x\cdot f'(x)=3f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x}\Rightarrow\ln f(x)=3\ln x+\ln c\Leftrightarrow f(x)=cx^3$, $f(2)=2$ de unde rezultă $c=\frac{1}{4}$ şi $f(x)=\frac{1}{4}x^3$.

Erată

- Problema **G:271** din S.M. VIII / 2011, este problema **G:232** (cu soluția în acelaşi număr);
- Numerotarea problemelor din S.M. VIII / 2011 de la G:230 la G:257 , se va citi de la G:280 la G:307.
- La problema **L 180**, din S.M. VIII/2011, în loc de $\int_0^1\frac{e^{2x}-5x+3}{e^{2x}+x}dx$ se va citi $\int_0^1\frac{e^{2x}+5x+3}{e^{2x}+x}dx$.

LEGI , PRINCIPII, AXIOME

- **Axioma copiilor.**

O jucărie care nu se poate sparge este totuşi folosită la spargerea altor jucării.

- **Legea proporțiilor.**

Timpul pe care îl ia rectificarea unei greşeli este invers proporțional cu timpul pe care ți l-a luat comiterea erorii.

- **Legea relativității.**

Orice poate fi împărțit în oricâte părți doreşti.

- **Regula regulilor.**

Există reguli pentru alegerea unei soluții, dar nu există reguli pentru alegerea acestor reguli.

- **Teorema despre adâncimea bâltoacei.**

Nu poți spune nimic despre adâncimea unei bâltoace până nu cazi în ea.

- **Postulat etic**

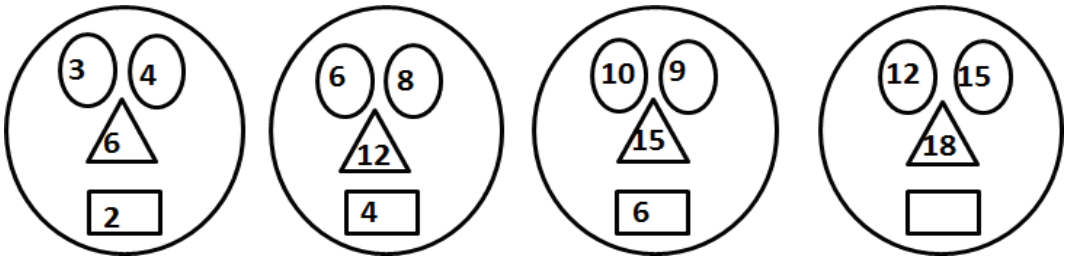
A greşi este omenişte, dar a da vina pe altcineva este încă şi mai omenişte.

„ Ferice de acela căruia îi zici o vorbă şi pricepe zece, şi vai de acela căruia îi spui zece şi nu pricepe niciuna”.
Ion Pas

5. Probleme propuse

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:227. Analizând cele trei cercuri, găsiţi numărul lipsă din al patrulea cerc. ***Prof.*** **Adrian Stan,** Buzău



P:228. Completaţi spaţiile libere din pătratele de mai jos cu cifre de la 1 la 8 o singură dată respectând operaţiile astfel încât să dea rezultatul final 9. ***Prof.*** **Adrian Stan,** Buzău

$$(\square+\square)\cdot(\square-\square)-(\square+\square):\square+\square=9.$$

P:229. Suma a cinci numere naturale este 416 . Aflaţi numerele ştiind că primele patru numere sunt impare consecutive , iar al cincilea este o treime din suma celorlalte . ***Inst.*** **Marcela Marin**, Rm. Sărat

P:230. Să se afle un număr ştiind că dacă îl împărţim la 5, câtului obţinut îi adunăm 11, suma obţinută o înmulţim cu 6, iar din produsul obţinut scădem 14, obţinem 100.
Prof. **Axente Mirela**, Buzău

P:231. Arătaţi că nu există numere naturale care împărţite la 6 să dea restul 1 şi împărţite la 12 să dea restul 5;
Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

P:232. Determinaţi numerele a, b, c, ştiind că $\overline{aba}+\overline{cbc}=\overline{b4b}$.
Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

P:233. Suma a trei numere este 84. Să se afle numerele ştiind că primul este cu 16 mai mare decât al doilea, iar al treilea este jumătate din suma primelor două.
Prof. **Lupşan Nicoleta**, Berca

P:234. Din triplul numărului 9 mărit cu 13, ia jumătatea numărului 12 micşorată cu 3.
Prof. **Anton Maria**, Berca

P:235.Trei fraţi au împreună 2450 de timbre. Primul frate are cu 250 mai multe timbre decât al doilea şi cu 180 mai multe timbre decât al treilea. Câte timbre are fiecare frate?
Prof. **Brânză Cristian**,Buzău

P:236. Află 7 numere impare consecutive, ştiind că, dacă la suma lor, mărită de 5 ori adaugi 4, rezultatul este 1999.

***Prof.* Luca Mihaela Cornelia** , Berca

P:237. Doi elevi au de rezolvat împreună 50 de probleme. După ce primul a rezolvat 3 probleme şi al doilea 7 probleme, cei doi elevi au de rezolvat acelaşi număr de probleme. Câte probleme are de rezolvat fiecare elev?

***Înv.* Lupşan Ion** , Pleşcoi

P:238. Doi fraţi citesc două cărţi având un număr egal de pagini. În prima zi, unul citeşte a cincea parte din cartea sa, iar celălalt citeşte a şaptea parte, constatând că a citit cu 16 pagini mai puţin decât primul. Câte pagini mai are fiecare de citit?

***Înv.* Marchidanu Florica**, Berca

P:239. Suma a trei numere consecutive este 4851. Ce rezultat obţinem, dacă scădem 155 din ultimul număr?

***Prof.* Marinescu Gabriela** ,. Stănceşti,Vadu-Paşii

P:240. O croitorie primeşte stofă timp de 4 zile. În prima zi primeşte jumătate din stofă plus 8 m, în a doua zi jumătate din rest plus 8 m, în a treia zi jumătate din noul rest plus 8 m, iar în patra zi 8 m. Câţi metri de stofă a primit croitoria?

***Înv.* Rotărescu Viorel** , Vadu Paşii

P:241. Matei, Corina şi Alin au colecţionat timbre. Câte timbre a colecţionat fiecare copil dacă Matei şi Corina au colecţionat 46 timbre, Corina şi Alin 54 timbre, iar Matei şi Alin 64 timbre.

***Prof.* Rotărescu Viorica** , Vadu Paşii

▪ Clasa a V-a

G:308. Găsiţi numerele naturale $\overline{ab}, \overline{cca}$ cu a,b,c, cifre distincte astfel încât $a + \overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cca}$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:309. Găsiţi numerele naturale $\overline{ab}$ cu $a \rangle\ b$ astfel încât $\dfrac{\overline{ab} - \overline{ba}}{a+b} = a - b$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:310. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuaţia $x^4 + x^3 yz = 216$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:311. Să se arate că numărul $A = 173^{73} + 137^{37}$ este număr par.

***Prof.* Tuţă Luca,** Buzău

G:312. Determinaţi numărul $\overline{xyzt}$, ştiind că are loc egalitatea: $\overline{xyzt} + \overline{yzt} + \overline{zt} + t = 2012$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:313. Produsul dintre un număr de 3 cifre şi diferenţa dintre un număr de două cifre şi răsturnatul său este 3564. Aflaţi numărul de trei cifre care îndeplineşte condiţia.

***Prof.* Mitea Mariana**, Cugir, Alba

G:314. Determinaţi suma numerelor de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc} \vdots 3$ şi că $\overline{ab}$ este, simultan, pătrat perfect şi cub perfect.

***Prof.* Victoria Popa**, Timişoara

G:315. Arătaţi că dacă $a_i > 0\ \left(i = \overline{1,n}, n \geq 2\right)$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, atunci

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \geq 1.$$

***Prof.* Neculai Stanciu, Buzău, Titu Zvonaru,** Comăneşti

G:316. Să se demonstreze că numărul $11^{2010}+11^{2011}+11^{2012}+11^{2013}+1$ are un număr par de divizori.

Titu Zvonaru, Comăneşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

G:317. Arătaţi că numărul $n = 13^1+13^2+13^3+...+13^{2012}$ este divizibil cu produsul a două numere naturale consecutive .

***Prof.* Simion Marin**, Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:318. Dacă $\frac{a+b+c}{d+a+b}=\frac{d+a+b}{c+d+a}=\frac{c+d+a}{b+c+d}=\frac{b+c+d}{a+b+c}$, $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$, să se compare numerele: a^a,b^b,c^c,d^d

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:319. Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}=\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}+\sqrt{c}+a$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:320. Arătaţi că numărul n din proporţia $\frac{10001}{\overline{abcdabcd}}=\frac{\overline{abcd}}{n}$ este pătrat perfect.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:321. Determinati cifrele a, b din egalitatea $\overline{2,37(a)}=\overline{1,ab}+\overline{1,(a)}$. ***Prof.* Rosu Valerica**, Rm. Sărat

G:322. Împărţind fracţiile $\frac{7}{6}$ şi $\frac{9}{8}$ la o fracţie dată, se obţin, respectiv, câturi numere naturale consecutive. Care este această fracţie?

***Prof.* Lăcrimioara Năstase**, Padina, Buzău

G:323. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$x $\mathbb{N}^*$x $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $100x + 101y + 102z = 2011$.

***Prof.* Mariana Mitea** , Cugir, Alba

G:324. Arătaţi că dacă numărul $A=\overline{abc}+\overline{def}$ se divide cu 111 atunci şi numărul $B=\overline{abcdef}$ se divide cu 111.

Prof. Tuţă Luca, Buzău

G:325. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţia $5^{x+2}-5^y=3\cdot(5^x-1)$. ***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

G:326. Determinaţi numărul soluţiilor din $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$ ale inecuaţiei $|x|+|y|\langle 6$.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

G:327. Rezolvaţi ecuaţia $\left|x^2-5|x|+3\right|=3$.

***Prof.* Tuţă Luca,** Buzău

G:328. Aflaţi restul împărţirii numărului a = $2008^{2011}+2011^{2011}+2012^{2011}$ la 2010.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru** , Buzău

G:329. Arătaţi că 503 divide a + b , unde :

a = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2012}$ şi b = $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+....+\frac{2011}{2012}$. ***Prof.* Simion Marin**, Rm. Sărat

G:330. În pătratul ABCD, se consideră punctele E pe (AB) şi F pe (BC), astfel încât, $\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$. Arătaţi că $\widehat{BDE}=\widehat{BEF}$.

***Prof.* Constantin Apostol,** Rm. Sărat

▪ Clasa a VII-a

G:331. Arătați că fracțiile $\frac{1}{(x+y)^2+(6x+y)^2+(8x+y)^2}$ şi $\frac{1}{(2x+y)^2+(4x+y)^2+(9x+y)^2}$ sunt echivalente pentru orice x şi y numere reale nesimultan nule. ***Prof.*** **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:332. Rezolvați ecuația $\frac{2x-1}{a-1}+\frac{2x-2}{a-2}+\frac{2x-3}{a-3}+...+\frac{2x-2011}{a-2011}=\frac{4022x}{a}$, $x\in\mathbb{N}^*, a\langle 0$.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:333. Fie a,b,c,d lungimile laturilor unui patrulater convex.Arătaţi că patrulaterul este paralelogram dacă şi numai dacă $\frac{2(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}=\frac{ab}{a+b}+\frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}$.

Prof. dr.**Mihály Bencze,** Braşov

G:334. Precizați dacă $n=\sqrt{\left(1+\frac{3}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{16}\right)\cdot.....\cdot\left(1+\frac{89}{1936}\right)}\in\mathbb{N}$.

Prof. **Mariana Mitea**, Cugir, Alba

G:335. Rezolvați în $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ ecuația $x^2+xy-x+y=2$. ***Prof.*** **Ion Stănescu**, Smeeni,Buzău

G:336. Calculați valorile întregi ale lui x pentru care $\sqrt{\frac{2x+2019}{2x+3}}$ este număr întreg.

Prof. **Gheorghe Dărstaru, Buzău**

G:337. Fie triunghiurile AOB, BOC, COD, DOA dreptunghice în O, având lungimile laturilor [OA], [OB], [OC], [OD] numere naturale consecutive. Demonstrați că are loc relația: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\cdot k^2+10$, unde $k\in N^*$.

Prof. **Victoria Popa**, Timisoara

G:338. Fie triunghiul ABC cu măsura unghiului $\widehat{BAC}$ de 120^0. Fie [AA' bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ a triunghiului, $A'\in(BC)$. Prin punctul A' se construieşte paralela la dreapta AB care intersectează latura [AC] în M, $M\in(AC)$. Demonstrați că $\frac{AA'}{AB}+\frac{AA'}{AC}=1$.

Prof. **Cornelia Gurău** , Moineşti Bacău

G:339. Se consideră un triunghi ABC cu lungimile laturilor $AB=16, BC=34, CA=30$ şi punctele M respectiv N pe latura $[BC]$ astfel încât $BM=4, MN=12$. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle MAN$.

Prof. D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:340. În sistemul ortogonal de coordonate xOy, se consideră punctele $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,-a)$ şi $D(-b,b)$.Dacă $BC\cap Ox=\{E\}$ şi $AD\cap Oy=\{F\}$, atunci:

a) arătați că ΔFOE este isoscel;

b) determinați aria patrulaterului $ABFE$.

Prof. **D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:341. Pe dreapta BC, care include ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC, se consideră punctele D şi E, astfel încât, $B\in(DC)$ şi $(DB)\equiv(AB)$, $C\in(BE)$ şi $(CE)\equiv(AC)$. Arătaţi că măsura unghiului $\widehat{BOC}$ este constantă, unde O este centrul cercului circumumscris triunghiului DAE.

Prof. **Constantin Apostol**, Râmnicu Sărat

▪ Clasa a VIII-a

G:342. Demonstraţi că $2^{2n+2}-3n-4$ se divide cu 9, oricare ar fi numărul natural n

***Prof.* Tuţă Luca,** Buzău

G:343. Să se rezolve ecuaţia: $\frac{x+10}{y}+\frac{34}{xy}=\frac{6-y}{x}$.

***Prof.* Mariana Mitea** , Cugir, Alba

G:344. Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1960}}+\frac{1}{\sqrt{1961}}\rangle\sqrt{1961}-1$.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

G:345. Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{2012-\sqrt{2012}}{2012}$$

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:346. Dacă a,b si c sunt numere pozitive demonstraţi inegalitatea:
$abc(a+b+c)\le a^4+b^4+c^4$.

***Prof.dr.ing*, Panţuru Dumitru**, Galaţi

G:347. Dacă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt a, b, $\frac{ab}{a+b}$ unde $a,b\in\mathbb{Q}_+^*$, ce fel de număr este diagonala paralelipipedului, raţional sau iraţional ?

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:348. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ astfel încât $f(x)+g(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}_+$. Să se arate că

$$\sqrt{x^2+f^2(y)+g^2(z)}+\sqrt{y^2+f^2(z)+g^2(x)}+\sqrt{z^2+f^2(x)+g^2(y)}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z),$$

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$. Există funcţii cu proprietatea din enunţ?

***Prof.* D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

G:349. Se consideră semidreptele $(Ox,(Oy,(Oz$ două câte două perpendiculare în centrul O. Pe ele în această ordine se iau punctele A,B,C. Perpendiculara dusă din punctul O pe planul (ABC) îl intersectează în punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie punctul M ce aparţine semidreptei $(OG$. Precizaţi o poziţie a punctului M pe $(OG$ ştiind că $(CM$ face cu (OB) un unghi de măsură 45^0.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

G :350. Pe perpendiculara în A, pe planul dreptunghiului ABCD, se consideră punctul M. Ştiind că laturile triunghiului MBD sunt proporţionale cu numerele $\sqrt{34}$, $\sqrt{25}$ şi $\sqrt{41}$ şi că $MC=15\sqrt{2}$ cm, calculaţi dimensiunile dreptunghiului şi lungimea segmentului (MA).

***Prof.* Constantin Apostol**, Râmnicu. Sărat

G :351. Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului ABCD se ia punctul M astfel încât MB = $8\sqrt{2}$ cm , MC = $2\sqrt{41}$ cm şi MD = 10 cm . Să se determine aria triunghiului MBD .

***Prof.* Simon Marin**, Râmnicu Sărat

▪ Clasa a IX-a

L:206. Comparați $x, y \in \mathbb{Z}^*$ ştiind că $3\sqrt{2011}x - 3\sqrt{2011}y - x^2 - y^2 = 2011$.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

L:207. Arătați că dacă $x, y, z > 0$, atunci $\sum \frac{1}{4x^3y + y^3z + 2z^3x} \le \frac{\sum xy}{7x^2y^2z^2}$.

Prof. dr. **Mihály Bencze,** Braşov

L:208. Să se arate că dacă $x, y \in (0, \pi)$, atunci $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} \ge \frac{2}{\sin \frac{x+y}{2}}$.

(În legătura cu problema 26418 din G.M.-B, nr. 3/2011, propusă de *Neculai Stanciu*, Buzău)

Prof. **D.M. Bătinețu – Giurgiu,** Bucureşti

L:209. Arătați că dacă A, B, C, D sunt patru puncte din spațiu astfel încât $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = \sqrt{6}$, atunci $AC \perp BD$. (În legătură cu o problema din Suplimentul cu exerciții al G.M-B nr. 10/2011)

Prof. **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

L:210. Să se arate că $\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)} + \frac{(yz)^2}{x^2(y+z)} + \frac{(zx)^2}{y^2(z+x)} \ge \frac{x+y+z}{2}$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

Prof. **Florin Stănescu,** Găeşti, Dâmbovița

L:211. Să se demonstreze inegalitatea

$\frac{1}{1+\sqrt[n]{tg\alpha}} + \frac{2\cdot\sqrt[n]{tg\alpha}}{(1+\sqrt[n]{tg\alpha})(1+\sqrt[n]{ctg\alpha})} + \frac{\sqrt[n]{ctg\alpha}}{(1+\sqrt[n]{ctg\alpha})} \ge \frac{3}{2}$, unde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $n \in N, n \ge 2$.

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:212. Aflați minimul expresiei $E = 3a^2 + 13b^2 + 5c^2 - 12ab + 2bc - 8c + 2011$.

Prof. **Mariana Mitea,** Cugir, Alba

L:213. Se dă triunghiul ABC, cu $(AB) \equiv (AC)$. Pe perpendiculara în B pe [BC] se consideră un punct oarecare, P şi fie M, mijlocul segmentului (AB) şi N, mijlocul segmentului (PC). Arătaţi că raportul $\frac{MN}{AP}$ este constant.

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

L:214. Fie $x, y \rangle 0$ astfel încât x+y = 6. Să se arate că $\frac{x}{y^2x+y} + \frac{y}{x^2y+x} \rangle \frac{1}{10}$.

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

L:215. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x^3y = \frac{1}{3} \\ 3x + y = 3 \end{cases}$;

Prof. **Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

L:216. Să se arate că numărul 6^{2012} are cel puțin 1566 de cifre.

Prof. **Ovidiu Țâțan ,** Râmnicu Sărat

L:217. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $\frac{[x]}{x}+\frac{x}{[x]}=\frac{85}{42}$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x .

***Prof.* Constantin Dinu**,Buzău

L:218 **a**) Să se găsească formula termenului general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit (descriptiv) astfel:

$\frac{1}{1\cdot 11};\frac{1}{11\cdot 21};\frac{1}{21\cdot 31};\ldots;$

b) Calculați suma : $S=\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 21}+\frac{1}{21\cdot 31}+\ldots+\frac{1}{2001\cdot 2011}$.

c) Determinați partea întreagă şi partea fracționară a numărului S determinat la punctul b) .

***Prof.* Strutu Ligia , *Prof.* Gheorghe Struțu**, Buzau

▪ Clasa a X-a

L:219. Arătați că dacă $x_k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci: $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{\cos^2 x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos x_k}{\sin^2 x_k}\right)\geq\frac{27}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right)$.

***Prof. dr.* Mihály Bencze,** Braşov

L:220. Fie numerele $\frac{1}{\cos\alpha},\frac{1}{\cos\beta},\sqrt{tg^2\alpha+tg^2\beta}$, unde $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Să se arate că există un triunghi având laturile numerele date şi să se calculeze aria acestui triunghi.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:221. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x-2012}+\sqrt{y-2012}=\frac{x+y+976}{100}$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:222. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z|=1$. Să se arate că $|z^{2011}-2|+|z^{2012}-z|+|z^{2011}+1|\geq 1$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:223. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația: $z^3-3iz=1-i$

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

L:224. Rezolvați ecuația $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{x^2-1}\right)=4$

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

L:225. Să se arate ca pentru orice x real are loc inegalitatea

$\frac{1}{2^{x+1}}+\frac{1}{2\cdot 3^x}+\frac{1}{2\cdot 5^x}\geq\frac{1}{2^x+3^x}+\frac{1}{3^x+5^x}+\frac{1}{2^x+5^x}$.

***Prof.* Strutu Ligia, *Prof.* Gheorghe Struțu** , Buzau

▪ CLASA a XI-a

L:226. Determinați $m\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=m^{1-m}x^m$ să verifice relația $f^{-1}(x)=f'(x),\ \forall x\in(0;\infty)$.

***Prof.* Laura Tănase,** Buzău

L:227. Să se calculeze limita $\lim_{n\to\infty}[a_1(n+1)+a_2\sqrt{n^2+2}+a_3\sqrt[3]{n^3+3}+\ldots+a_k\sqrt[k]{n^k+k}]$ unde $a_1+a_2+\ldots+a_k=0$.

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

L:228. Să se găsească toate şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=1$ oricare ar fi $n\geq 1$.

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

L:229. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Să se arate că ecuația $X^{2010}+X^{2011}+X^{2012}=A^{2013}$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{R})$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:230. Arătaţi că dacă $\alpha>0, G_1=(-\alpha,\alpha), G_2=(e^{-\alpha},e^{\alpha}), x\circ y=\dfrac{\alpha^2(x+y)}{\alpha^2+xy}, x*y=(xy)^{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\ln x\ln y}}$, atunci $(G_1,\circ)$ şi $(G_2,*)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.

***Prof. dr.* Mihály Bencze,** Braşov

L:231. Se consideră $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ cu $f(2011)=2010$ şi $g(x)=x^2-2x+2011$ astfel încât ecuația $f(g(x))=0$ nu are rădăcini reale. Rezolvați ecuația $f(x)=0$ ştiind că are patru rădăcini distincte numere naturale.

***Prof.* Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

L:232. Să se arate că $\int_0^1 arctge^x dx>\dfrac{13\pi}{48}$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:233. Să se determine primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4-4x^3+10x^2-14x+11}{(x^2-2x+3)^3}$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:234. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a>0$ o funcție derivabilă cu derivata crescătoare si pozitivă. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ atunci are loc inegalitatea: $\int_a^b f(x)dx\leq\dfrac{n}{n-1}\cdot\left(\dfrac{(b-a)\left(b^nf(b)-a^nf(a)\right)}{b^n-a^n}-\dfrac{bf(b)-af(a)}{n}\right)$.

***Prof.* Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

L:235. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 2012 elemente. Să se arate că:
În G există un element de ordinul 2, şi în G nu există un element de ordin 3.

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

L:236. Fie a un număr real nenul. Să se arate că dacă lungimile laturilor unui poligon înscris într-un cerc $l_1,l_2,...,l_n$ sunt rădăcinile ecuației:

$ax^n-x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_2x^2-n^2x+\dfrac{1}{a}=0$, atunci poligonul este regulat.

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Tech, Spania

" Fiecare om pe care îl întâlnesc în drumul meu îmi este superior prin ceva. De aceea încerc să învăț câte ceva de pe lângă fiecare ".

Sigmund Freud

„ Prea adesea, ironia nu-i decât o formă a lipsei de inteligență”
Oxenstierna

6. Caleidoscop matematic

1. Curiozități matematice

$100 = 1+2+3+4+5+6+7+8\times 9$; $100 = 1+2\times 3+4\times 5-6+7+8\times 9$;

$100 = 1+2\times 3+4+5+67+8+9$; $100 = 1\times 2+34+56+7-8+9$;

$100 = 123+45-67+8-9$; $100 = 123-45-67+89$;

$100 = (1+2-3-4)\cdot(5-6-7-8-9)$; $100 = 91+\frac{5823}{647}$

$100 = 94+\frac{1578}{263}$; $100 = 96+\frac{1428}{357}$; $100 = 24\frac{3}{6}+75\frac{9}{18}$; $100 = 47\frac{3}{6}+52\frac{9}{18}$;

$100 = 74\frac{3}{6}+25\frac{9}{18}$ $100 = 95\frac{3}{7}+4\frac{16}{28}$ $100 = 98\frac{3}{6}+1\frac{27}{54}$ $100 = 94\frac{1}{2}+5\frac{38}{76}$

$100 = 1\frac{6}{7}+3+95\frac{4}{28}$ $100 = 57\frac{3}{6}+42\frac{9}{18}$ $2\times 2 = 2+2$ $3\times 1\frac{1}{2} = 3+1\frac{1}{2}$

$11\times 1{,}1 = 11+1{,}1$ $21\times 1\frac{1}{20} = 21+1\frac{1}{20}$ $1\times\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$6\times\frac{6}{7} = 6-\frac{6}{7}$ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $2^5\cdot 9^2 = 2592$

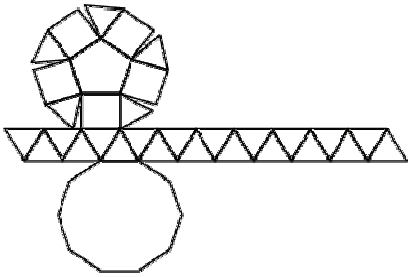
Culese de **prof. dr. ing. Dumitru Panțuru**, Galați

2. Ghicitoare. Dar, e bine a vedea lucrurile de foarte multe ori .
(Indiciu: Număr irațional (chiar transcendent) aproximat cu nouă zecimale exacte.)

de prof. Neculai Stanciu, Buzău

3. Un poliedru convex are desfăşurata de mai jos, construiţi-l !

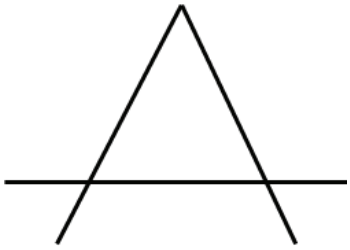
de prof. dr. ing. Dumitru Panțuru, Galați



4. Într-o cameră în care sunt 7 scaune, intră trei doamne, fiecare fiind însoțită de câte două fiice. Ştiind că pe fiecare scaun încape o singură persoană şi că niciuna dintre femei nu a rămas în picioare, cum vă explicați?

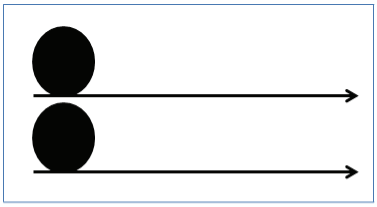
5. O trezorerie a primit cinci lăzi cu monezi de colecție de acelaşi fel însă li s-a comunicat că una din lăzi conține monezi care nu respectă standardul de calitate întrucât cântăreşte cu 10 grame mai puțin decât celelalte şi nu se poate identifica prin simpla observație. Ştiind că fiecare monedă ar trebui să cântărească exact 100 grame şi că ar trebui să fie restituită lada cu monezi neconforme, se pune întrebarea: care este numărul minim de cântăriri necesare pentru identificarea lăzii respective.

6. Linii şi triunghiuri



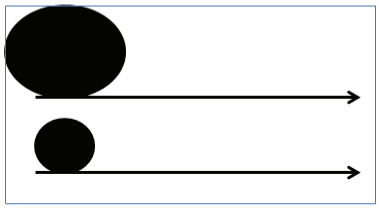
Trei linii mărginesc un triunghi, iar patru linii mărginesc patru triunghiuri. Adăugați două linii la cele trei din figură, aşa încât să rezulte zece triunghiuri.

7. Cercuri rotitoare



Două bile identice se deplasează între două şine paralele, menținându-şi poziția relativă una față de celaltă. Dacă una din bile este de două ori mai mare decât cealaltă, mai este posibil acest lucru ?

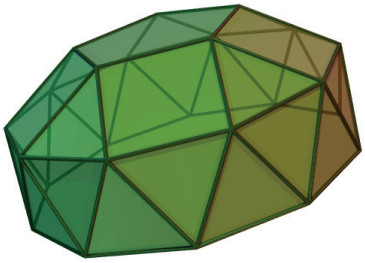
8. Indiana Jones



Indiana Jones alerga printr-un tunel cu secțiune pătrată, încercând să scape de un bolovan uriaş sub forma unei sfere ce are diametrul de 10 m cât lățimea tunelului şi care se rostogoleşte în spatele său. Ieşirea din tunel fiind mult prea îndepărtată, cum reuşeşte Jones să scape?

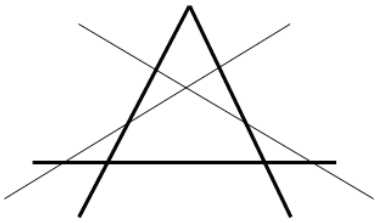
Răspunsuri:

2. Dezlegare = numărul π cu nouă zecimale 3,141592653. Numărul literelor fiecărui cuvânt dă valoarea lui π=3,141592653.Dar(3), e(1) bine(4) a(1) vedea(5) lucrurile(9) de(2) foarte(6) multe(5) ori(3) ....Vezi şi colecția RMT + www.anulmatematicii.ro:"Aşa e uşor a scrie renumitul şi utilul număr din manual" – regula mnemotehnică de reținere a numărului de mai sus cu 10 zecimale exacte – vezi articolul ''Memoria şi Matematica'' RMT/ Nr. 1-2, 1989, de Pavel Petroman şi Titu Andreescu sau intrați pe www.anulmatematicii.ro, pentru a putea cunoaşte primele 11 zecimale ale numărului de mai sus e suficient să rețineți versurile:
„Aşa e uşor a scrie orişicare/Un simbol creat din multe zecimale".



3. Corpul există cu adevărat şi se numeşte gyroelongated pentagonal cupola şi arată ca în figura alăturată.
4. Evident, bunica avea două fiice şi patru nepoate, care stăteau toate pe 7 scaune.
5. O singură cântărire.

Se va lua din prima ladă o monedă, din a doua ladă două monezi şi aşa mai departe, din a cincea ladă se va lua cinci monezi şi se vor cântări. În total, cele 15 monezi ar trebui să cântărească 1500 de grame. Dacă însă vor cântări 1490 de grame înseamnă că prima ladă este cu rebuturi, dacă vor cântării 1480 grame înseamnă că a doua ladă este cu rebuturi, şi aşa mai departe, dacă vor cântării 1450 grame înseamnă că a cincea ladă este cu rebuturi.
6.



7. Indiferent de mărimea bilelor, ele vor avea aceeaşi poziție una față de alta.
8. Datorită dimensiunii foarte mari a sferei există suficient loc în colțurile de jos ale tunelului pentru a se înghesui astfel încât bolovanul să treacă pe lângă el fără să-l atingă.

„ Adevărata înțelepciune înseamnă să-ți recunoşti propria ignoranță”
Socrate

6. Modele de teste

Bacalaureat 2012 – M2

SUBIECTUL I (30 p)

5p **1**. Să se calculeze $\sqrt[3]{-8}-\log_2\frac{1}{4}$.

5p **2**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+3x+1$. Să se calculeze $f(f(-1))-f(0)$;

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x^2-6x+12)=2$.

5p **4.** În câte moduri putem forma echipe de câte 4 elevi dacă avem 5 băieți şi 3 fete ?

5p **5**. Dacă $a\in(0;\frac{\pi}{2})$ şi $\cos a=\frac{2}{3}$ să se calculeze sin a;

5p **6**. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele **A(-2;1) şi B(2;3).**

SUBIECTUL II (30 p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei $A+I_3$;

5p b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $A+mI_3$ să fie inversabilă;

5p c) Să se rezolve ecuația matriceală $X\cdot(A+I_3)=I_3$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f(X)=X^2+(a+\hat{3})X+\hat{a}+\hat{2}$ şi $g(X)=X+\hat{1}$.

5p a) Determinați $a\in\mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{1})=\hat{2}$;

5p b) Pentru $a=\hat{3}$ rezolvați ecuația $f(x)=\hat{2}$;

5p c) Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g.

SUBIECTUL III (30 p)

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-2}{e^x}$

5p a) Să se calculeze $f'(0)$;

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției;

5p c) Să se arate că f(x) este convexă pe $[4;+\infty)$.

2. . Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-1, & x\langle 1\\ x^3-1, & x\geq 1\end{cases}$;

5p a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

5p b) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$;

5p c) Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției $g:[1:2]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x^2+x+1}$ în jurul axei OX între dreptele de ecuații x=1 şi x=2;

Model propus de către prof. **Stan Adrian**, Buzău

„ Înțelepciunea este fiica experienței'' .

Leonardo da Vinci

8. Poşta redacției

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 9** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**", o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi şi profesori împreună, din județul Buzău şi din țară , pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții şi probleme cu enunț şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic", sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor, trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condițiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluției să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **P, G** şi **L** sunt pentru diferențierea pe învățământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare către profesorul clasei. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar în funcție de posibilități, elevii cu cele mai mari punctaje ale profesorilor care colaborează cu revista vor fi premiați cu diplome şi cărți.

Facem pe această cale o invitație către toți profesorii de matematică care apar în revistă, de a sprijinii şi promova în continuare revista în rândul elevilor, iar cei cărora li se publică articole să comande un număr mai mare de exemplare.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 10** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII"** va fi **1 Octombrie 2012**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Dedicăm acest număr al revistei domnului profesor Constantin Rusu cu prilejul împlinirii vârstei de 70 de ani la data de 10 aprilie 2012 . Îi urăm domnului profesor viață lungă şi să iubească în continuare matematica, pentru că aşa cum chiar el o spune mereu – ''această iubire ne vindecă de foarte multe boli''.

Redacția

Vizitați www. mateinfo. ro

MATEmatică şi INFOrmații din învățământul ROmânesc

Reviste, sinteze teorie, probleme rezolvate, concursuri şi olimpiade, programe şcolare,
proiecte didactice, metodologii şi documente şcolare, cărți de matematică, teste, fişe de lucru, jocuri de logică, softuri educaționale, modele subiecte BAC.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII "Vasile Cristoforeanu" Rm. Sărat:
Clasa a VIII-a : 56p-Buterez David, Sîrbu Claudiu, 50p- Chiriac Andrei, Doni Alina, 48p- Pârlog Valentin, Baciu Diana Valentina, Tudorache Alina, Neagu Daniela, Lazăr Elena ,Vlad Oana Andreea, Taşcă Valentin, Banu Calinuț ; **Prof. Marin Simion;**

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni.
Clasa a VI-a: 27p**.** Chiriacescu Roxana, 25p. Nica Camelia, Tescan Irina;
Clasa aVII-a: 40p. Bulgarea Alexandra; 45p. Neacsu Laura.
Clasa a VIII- a. 50p.Scarlat Roxana; 44p.Vasile Cristina, Marin Valentina; **Prof. Stanescu Ion.**

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1, Padina.
Clasa a IV-a: 45p. Năstase Teodora;
Clasa a V-a: 35p. Drăghici George, 32 p. Mircescu Corina, Jega Cristian, Herța Adelina 28p. Drăghici Silvan, 26p. Dumitroiu Andreea, 20p. Nica Ionuț, 18 p. Balica Gabriela, Călin Elena;
Clasa a VI-a: 45p. Bocioacă Andreea, 40p. Dumitru Georgiana, 20p. Cuzuma Claudia, Negulescu Cristina, 15p Dumitru Georgiana, Ilie Ionuț;
Clasa a VII-a: 40p. Năstase Daniel; 28p. Fleoarcă Andreea, Dumitrache Diana, 25p. Ciocan Mirela Vasilica
Prof. Lăcrimioara Năstase.

Scoala cu clasele I-VIII, "Tristan Tzara" Moineşti, Bacău. .
Clasa a V-a: 12p. Gherman Andrada, Faraoneanu Mădălina, 11p. Merla Andrei, Maziliu Alexandra, 10p. Dîrlău Florin, Grădinarru Miruna, 8p. Vasilache Bogdan, Dîrlău Marta, **Prof. Cornelia Gurău;**
Clasa a VI-a: 31p. Munteanu Gheorghe, 28p. Lila Ionuț, 26p. Olaru George, **Prof. Cornelia Gurău**; 15p. Malache Raluca, **Prof. Văsîi Ionela**
Clasa a VII-a: 16p. Călin Andreea**, Prof. Văsîi Ionela;**

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a V-a: 25p. Traşcă Ionuț- Vlăduț, Ene Daniela- Iuliana, Vochin Ioan – David, Moisescu Denis, Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă**.

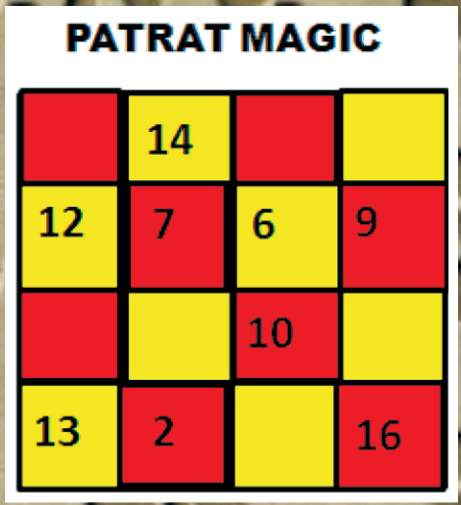
Grupul Şcolar „Costin Nenițescu", Buzău:
Clasa a IX-a: 20p. Tudor Mădălin, Tureac Andrei, Dragomir Ionuț, Grozea Cosmin, Pîrnog Georgiana, Ciopec Corina, Dobrin Iulian, Picu Elena Daniela, Borcea Eduard, Stoian Cristina, Sterpu Denisa, Toader Florinel;
Clasa a X-a: 32p**.** Feraru Andreea, Perțea Larisa, Marcu Cristina, Lică Adriana, Gheorghiță Dinel, Dinu Mădălina ;
Clasa a XI-a: 40p- Zaharia Mădălina, Bisoceanu Aura, Soare Manuela, Lixeanu Daniela, Tabără Ştefan;
Clasa a XII-a: 45p- Vlad Iulian, Dinu Alin, Antemir George, Dima Octavian, Anghel Sorin; **Prof. Stan Adrian**.

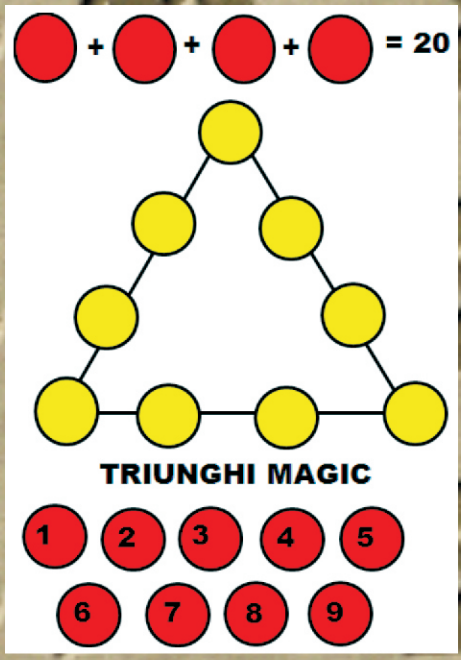
Şcoala cu clasele I-VIII "George Emil Palade " Buzău
Clasa a V-a: 20p.Ciocan Cristian, Vasile Rucsandra, Zota Mădălina, Bordei Valentina, Neagu Bianca, Dumitrache Radu.
Clasa a VI-a: 24p. Burada Andrei, Stan Eduard, Marin Cristian, Văceanu Ramona, Duca Miruna, Mutuligă Teodor, Sandu Alexandra, Şerban Ionuț, Ştefănescu Raluca.
Clasa a VII-a: 28p. Mardale Cosmin, Mântoiu Antoniu, Răican Mihaela.
Clasa a VIII-a: 34p. Radu Bogdan, Zwak Eduard, Dima Lucian, Apostol Alice, Cojanu Elena. **Prof. Neculai Stanciu**.

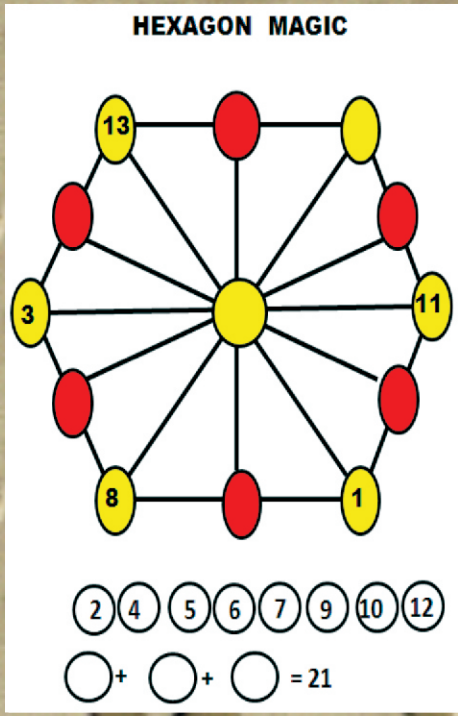
Scoala cu clasele I-VIII, nr. 1 Rm Sărat.
Clasa a VI-a: 20p. Jercan Adrian, Nacu Cătălin.
Clasa a VII-a: 36p. Iaru Ioana Victoria, Vasile Dragoş Mitruț, Răpeanu Miruna. **Prof. Valerica Roşu.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba.
Clasa a V-a: 26p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeț Dragoş, Sideriaş Alexandru;
Clasa a VIII-a: 30p. Bortoc Adrian, Codeanu Andrei, Dan Andreea, Vinersar Cătălin; **Prof. Mariana Mitea.**

Grup Şcolar Tehnic „ Sf. Mucenic Sava", Berca, Buzău.
Clasa a IV-a: 25p. Badea Teodora, Bratosin Cosmina, Ciupag Alin, Dinu Alexandru, Ioniță Lorena, Moldoveanu Andreea, Păpătoiu Andrei, Popa Mădălina, Şolcă Roxana, Tătulescu Răzvan, **Prof. Lupşan Nicoleta**.







LEI 10 RON

REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 9 ANUL V - 2012

Cuprins

1. Istoria Matematicii
   - Jules Henri Poincare – 100 de ani de la trecerea în neființă, de prof. Adrian Stan şi prof. Neculai Stanciu 1

2. Articole şi note matematice
   - Inegalități în triunghi de prof. dr. Mihaly Bencze 2
   - Rezolvarea unei probleme de loc geometric de Titu Zvonaru 3
   - Observații asupra unor noțiuni din geometria triunghiului de Prof. Constantin Apostol 4
   - Încă patru demonstarții ale problemei L: 155 din revista SCLIPIREA MINTII, nr. VII – 2011 de prof. D.M. Bătinețu – Giurgiu, şi prof. Neculai Stanciu 6
   - Aspecte referitoare la locurile geometrice (II) de prof. Constantin Rusu 8
   - A Nesbit – Cesaro Collaboration de Titu Zvonaru 10

3. Examene şi Concursuri 11

4. Probleme rezolvate 15

5. Probleme propuse 32

6. Caleidoscop matematic 40

7. Modele de teste 42

8. Poşta redacției 43

editgraph

ISSN 2247 - 6601
ISSN-L 2247 - 6601