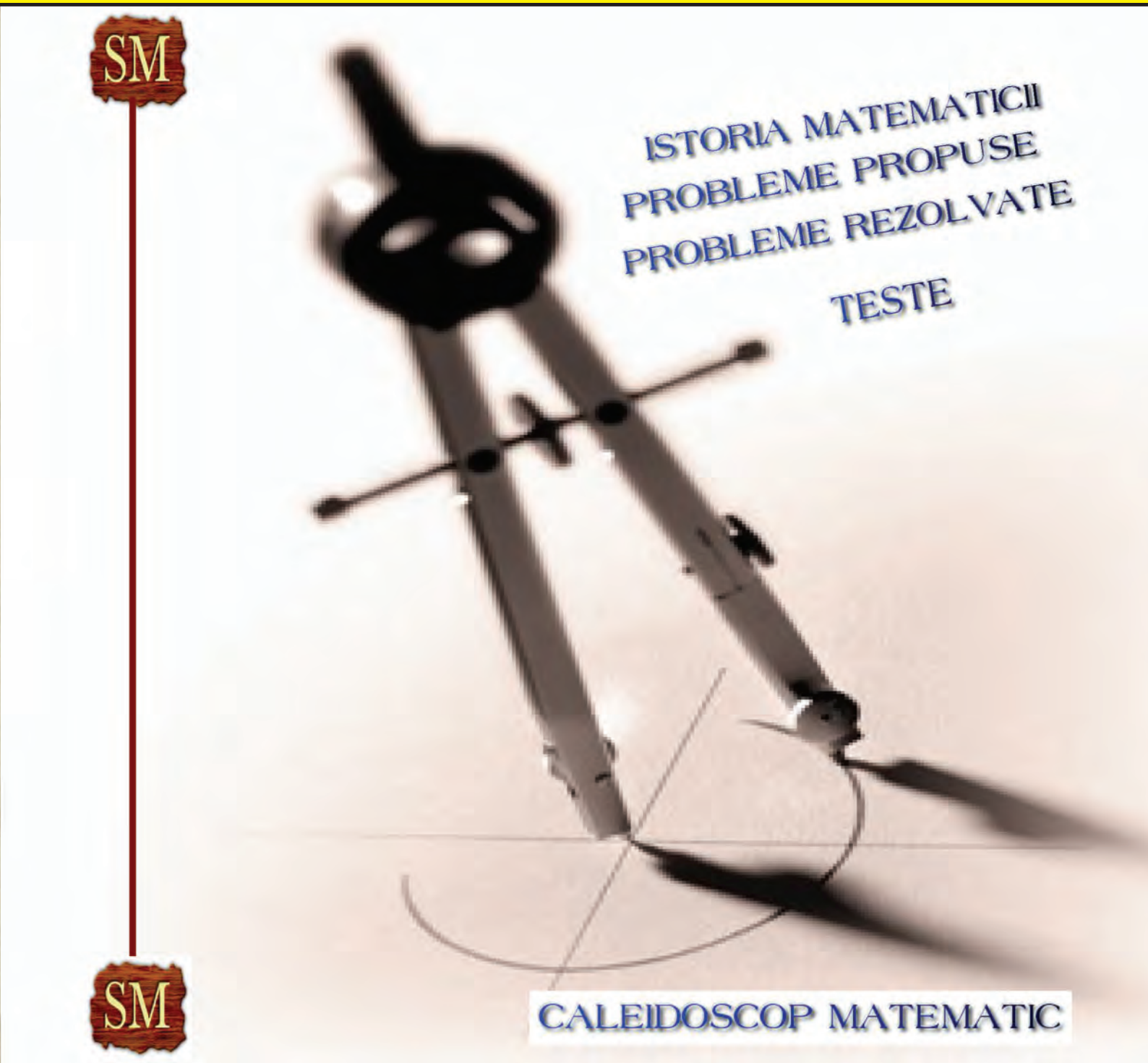
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN IX, NR XVII, 2016

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINȚII 17

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An IX, Nr. XVII, APRILIE 2016, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- **Membrii onorifici:**

Constantin Apostol - Președinte de onoare
Iorgu Mînzală - Inspector matematică, ISJ Buzău
Constantin Rusu - Președinte de onoare a Filialei Râmnicu Sărat a Societății de Științe Matematice
Costică Ambrinoc - Președinte Filiala Râmnicu Sărat a Societății de Științe Matematice
Lenuța Pîrlog - Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice
D. M . Bătinețu - Giurgiu
Titu Zvonaru
Nicolae Ivășchescu
Mihály Bencze

- **Director:**
Neculai Stanciu

- **Redactor șef:**
Adrian Stan

- **Redactori principali:**
Nicoleta Gabriela Lupșan
Constantin Dinu
Andrei Octavian Dobre
Iuliana Traşcă
Mihai Neagu
Ion Stănescu
Lucian Tuțescu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1
ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3
PROBLEME REZOLVATE..... 10
PROBLEME PROPUSE 34
QUICKIES 43
CALEIDOSCOP MATEMATIC 45
POŞTA REDACȚIEI..... 47

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri:**

Valentina **Anghel**, Gigel **Buth, Daniela** Burtoiu, Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ovidiu **Cioponea,** Ana **Cismaru,** Nicoleta **Clinciu,** Ciprian **Chește,** Marcel **Chiriță,** Aurel **Chiriță,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Marian **Cucoaneș,** Gheorghe **Dârstaru**, Viorica **Dogaru**, Marius **Drăgan,** Otilia **Drăgan**, Gabriela **Drânceanu,** Răzvanl **Drânceanu** , Gheorghe **Ghiță,** Dorina **Goiceanu,** Daniela **Grama,** Lucian Dan **Grigore,** Cornelia **Gurău,** Laura Mariana **Ilie**, Cristina Dida **Isaia**, Ionuț **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Cristian Cosmin **Lupșan,** Simion **Marin**, Marcela **Marin**, Gabriela Maria **Marinescu,** Monica **Matei,** Andrei **Micu,** Mariana **Mitea,** Cristian **Moanță,** Ion **Nedelcu,** Delia **Naidin**, Andrei Florin **Nicolaescu**, Ana **Panaitescu,** Cătălin **Pană,** Stelian **Piscan,** Valerica **Pometescu,** Claudia **Popa,** Petre **Păunescu,** Ion **Pătrașcu,** Oana **Preda,** Constantina **Prunaru**, Ion **Radu,** Teodora **Rădulescu**, Viorel **Rotărescu**, Viorica **Rotărescu**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Gheorghe **Struțu,** Florin **Stănescu**, Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Carmen **Terheci,** Gabriel **Tica,** Alina **Tigae,** Daniela **Ticea,** Roxana-Violeta **Toader,** Ionel **Tudor,** Titu **Toma,** Ovidiu **Țâțan,** Roxana **Vasile,** Dumitru **Vieriu,** Ionuț **Voinea,** Marian **Voinea,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Visescu,** Elena **Zainea,** Ileana **Stanciu,** Emil **Stanciu,** Gabriel **Nemțaru**

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „Costin Nenitescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro



„ Orice drum ai alege, urmează-l cu toată inima. ”
Confucius (cca 550- 470 î.e.n)



1. Istoria Matematicii

Gheorghe Lazăr şi Gheorghe Asachi, ctitorii învățământului românesc

Adrian Stan, Buzău



Gheorghe Lazăr (05.06.1779 - cca 09.01.1782) fiu de țăran, s-a născut la Avrig în județul Sibiu. Studiile liceale şi le face la Sibiu şi Cluj urmând ca apoi să ia cursuri de drept, teologie, filozofie şi ştiințe, dovedind de tânăr o pregătire excepțională în multe domenii. Din meditațiile pe care le dă la germană reuşeşte să se întrețină.

În **1806**, pleacă cu o bursă la Viena pentru a studia teologia, dar printre altele el audiază şi cursuri de drept, filozofie, literatură, matematică şi medicină. Din 1812, întors la Sibiu el devine profesor la Seminarul Episcopal Ortodox. Pe parcursul câtorva ani (1809- 1815) are parte de o serie de conflicte cu autoritățile bisericeşti de la cel mai înalt nivel, mitropolit, episcop, care fie nu l-au mai sprijinit să urmeze cursurile la Viena, fie s-au opus ca el să obțină postul de episcop al Aradului, şi o dată şi cu destituirea lui ca profesor, se hotărăşte să plece la Bucureşti. Aici, prin funcțiile pe care le-a avut avea să-şi dedice întreaga viață întemeierii şi dezvoltării învățământului românesc național, dezvoltării culturii şi ştiinței în limba română .

În **1817**, i se datorează introducerea la şcoala românească de la Sf. Gheorghe a unui curs de aritmetică şi geometrie urmând ca în **1818** să solicite Divanului- un fel de guvern al vremii, să introducă predarea filozofiei şi matematicii în limba română. Astfel că, domnitorul Ioan Gh. Caragea aprobă la **24 martie 1818** înființarea primei şcoli superioare româneşti ce avea să se deschidă în luna august, în localul de la “Sf. Sava”.

Gheorghe Lazăr devine director şi alături de alți colegi profesori printre care şi matematicianul Petrache Poenaru au dezvoltat un program de studii îndreptate cu prioritate către limba română, istoria națională şi matematica.

El însuşi preda matematica şi susținea prelegeri la filozofie. Adept al mişcării iluministe şi a filozofiei lui Kant, **Gheorghe Lazăr** s-a aplecat şi asupra pregătirii viitorilor profesori şi insistând pe lângă “Eforia Scoalelor” a reuşit să-i trimită pe unii în străinătate cu bursă.

A publicat o serie de cursuri şi manuale inclusiv de matematică, fiind original dar preluând din cultura germană multe cunoştințe la care a introdus pentru prima dată terminologiile de specialitate în limba română. În 1820 introduce în limba română terminologia de ” sinus” şi “cosinus”.

A participat activ la revoluția de la **1821** a lui Tudor Vladimirescu. Visul său de propăşire a culturii şi ştiinței române care să înlăture asupririle sociale şi incultura națională a reprezentat un îndemn pentru generațiile următoare, care pregătite în spirit iluminist de profesorii formați de Gh. Lazăr, au dus la revoluția paşoptistă din 1848.

În concluzie, **Gheorghe Lazăr** ca teolog, inginer, orator, scriitor, profesor a reprezentat întemeietorul şcolii româneşti superioare şi a culturii moderne în Țara Românească.

Gheorghe Asachi (01. 03. 1788 – 12. 11. 1869) născut în ţinutul Herţa (acum în Ucraina), era fiu de popă şi a beneficiat de o educaţie în spiritul curentului iluminist al vremii datorită tatălui său care avea preocupări culturale.



Studiile şcolare inclusiv facultatea în domeniul filozofiei, literaturii şi ştiinţelor le-a făcut la Lviv (Lwow), astăzi, un oraş în Ucraina. În **1805** pleacă la Viena împreună cu fratele său pentru a-şi continua studiile dar şi pentru a se îngriji de sănătatea sa. Aici studiază matematica cu profesorul J. T. Burg, după care în loc să se întoarcă acasă pleacă la Roma unde este atras de artă în special de pictură.

Contactul cu Italia îi formează caracterul umanist. Este interesat de studiul artelor plastice, de arheologie, de literatură şi poezia europeană, devenind membru al Societăţii literare italiene.
Cunoaşte tumultul vieţii politice italiene şi lupta pentru libertate, ceea ce îi trezeşte interesul conştiinţei naţionale şi dezvoltarea sentimentelor patriotice.

Cei câţiva ani petrecuţi în Europa l-au ajutat să cunoască italiana, latina, germana, polona, engleza, franceza şi rusa. În **1812** se întoarce în ţară şi participă la viaţa culturală fiind promotorul acesteia.

Între **1813- 1818**, înfiinţează pe lângă Şcoala Domnească de limba greacă, o clasă pentru pregătirea de ingineri. Aceasta era prima clasă în care se studia matematica, geodezia, arhitectura în limba română, el însuşi predând aici discipline după manuale realizate de el. Datorită lui, în **1814** se desfăşoară primul curs de drept la Iaşi. Din **1820** şi până în **1849** ocupă funcţii importante în fruntea învăţământului drept pentru care este procupat de înfiinţarea a cât mai multor şcoli cu profesori bine pregătiţi şi de introducerea unor programe de studiu susţinute de manuale cât mai bune.

În **1822** e numit reprezentat diplomatic la Viena până în **1827** cînd se întoarce în ţară şi prin străduinţa sa ia fiinţă în **28 martie 1828** Şcoala Normală şi Gimnaziul în limba română de la „Trei Ierarhi „ din Iaşi.

Începând cu **1829**, Asachi editează revista „Albina românească", care, printre altele, promovează inclusiv ştiinţa. Nu este singura revistă la care lucrează. Condus de spiritul iluminist, el conduce şi editează foarte multe publicaţii cu deschidere către toate aspectele vieţii cultural - ştiinţifice: literatură, artă, arheologie, geografie, istorie, economie. Face parte din delegaţia care a realizat Regulamentul Organic şi care l-a prezentat în **1830** la Petersburg, împăratului rus.

Un rol excepţional l-a avut în înfiinţarea la **16 iunie 1835** a primei instituţii de învăţământ superior din Moldova, numită Academia Mihăileană.
O dată cu dezvoltarea culturală şi economică promovează înfiinţarea a cât mai multe şcoli săteşti şi introduce şcolile de arte şi meşteşuguri, în **1841**.

În **1848**, din păcate, ideile paşoptiste ale generaţiei mai tinere nu le înţelege şi păstrează distanţă faţă de intelectualitatea grupată în jurul „Daciei literare".

Unirea Principatelor (**1859**) îl găseşte pe **Asachi** pe poziţii diferite faţă de cei care doreau unirea. După 1850, **Asachi** se dedică în principal publicării a numeroaselor sale opere: poezii, sonete, ode, lirica filozofică, nuvele, scite, fabule , drame. Traduce foarte mult din literatura italiană, germană dar şi rusă.

Asachi poate fi considerat pe drept cuvânt un spirit enciclopedic al vremii datorită aplecării lui faţă de toate zonele culturii şi ştiinţei, prin realizarea unor opere literare şi ştiinţifice, dar pentru înfiinţarea primelor clase şi şcoli cu predare în limba română, pentru dezvoltarea învăţământului punându-l pe o bază solidă, organizat şi orientat către aspectele practice ale vieţii, se consideră că **Gheorghe Asachi** este ctitorul învăţământului românesc.

În memoria celor doi, multe şcoli, licee şi facultăţi din România şi Republica Moldova, poartă numele lor. Pe 5 iunie de ziua de naştere a lui **Gheorhe Lazăr**, ca un omagiu adus lui, se sărbătoreşte Ziua Invăţătorului.

Bibliografie: Dicţionarul Literaturii Române de la origini până la 1900. Editura Academieie Române. Bucureşti. 1979.

Prof. Liceul Tehnologic " Costin Nenitescu" Buzău

„ **Singurul mod de a realiza lucruri minunate**
e să iubeşti ceea ce faci. ”
Steve Jobs (1955-2011)



2. Articole si note matematice

Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcţii cu ajutorul ” formulei de integrare prin părţi” IV

Prof. Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Lucrarea continuă materialul publicat în numerele trecute privind metode de calcul al primitevelor utilizând integrarea prin părţi.

În cadrul modelului IV) avem câteva tipuri de integrale:

Fie $P(x)=s_n\cdot x^n+s_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+s_1\cdot x+s_0$, $s_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,n}, s_n\neq 0, x\in\mathbb{R}$:

a) $\int P(x)\cdot \log_a x\,dx \quad ; a>0, a\neq 1, x>0$.

b) $\int P(x)\cdot \log_a(bx)dx;\ a>0, a\neq 1, b\in N^*, x>0$.

c) $\int P(x)\cdot \log_a(cx)dx;\ a>0, a\neq 1, c\in R^*, cx>0$.

d) $\int P(x)\left[\log_a(a_1x)+\log_a(a_2x)+...+\log_a(a_nx)\right]dx,\ a>0; a\neq 1,\ a_i\in N^*, i=\overline{1,n};\ x>0$.

e) $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot \log_a\left(u(x)\right)dx,\ x\in D_u\cap D_u'; a>0, a\neq 1, u:D\to\mathbb{R}$ funcţie derivabilă cu derivata continuă ; $u(x)>0, \forall x\in D$.

f) $\int (u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x))\cdot \log_a(u(x)\cdot v(x))dx,\ x\in D_u\cap D'_u$; Unde funcţiile $u,v:D\to\mathbb{R}$ sunt derivabile cu derivatele continue; $u(x)\cdot v(x)>0, \forall x\in D; a>0, a\neq 1$.

g) $\int\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\cdot\log_a\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)dx,\ x\in D_u\cap D'_u, a>0, a\neq 1, u,v:D\to\mathbb{R}$ funcţii derivabile cu derivata continuă; $\frac{u(x)}{v(x)}>0, v(x)\neq 0, \forall x\in D$.

h) $\int u'(x)\cdot\log_a\left[u(x)\right]dx,\ x\in D_u\cap D'_u; a>0, a\neq 1; u:D\to\mathbb{R}$ funcţie derivabilă cu derivata continuă , $u(x)>0$, $\forall x\in D$.

Exemple: Să se calculeze integralele:

a) $\int x^2\cdot\log_5 x,\ x>0$; **b)** $\int(x-1)\cdot\log_{\frac{1}{5}} x,\ x>0$; **c)** $\int\left(2x^2-1\right)\cdot\lg(7x), x>0$;

d) $\int x\cdot\log_2\left(-\sqrt{2}x\right)dx;\ x<0$; **e)** $\int\left(3\cdot x^2-2x\right)\cdot\left|\log_{\frac{1}{2}}(2x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^2x\right)+...+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{10}x\right)\right|dx, x>0$.

f) $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot\log_a(u(x))dx,\ x\in D_u\cap D_u'; a>0, a\neq 1, u:D\to R$ funcţie derivabilă cu derivata continuă , $u(x)>0, \forall x\in D$.

g) $\int \frac{1}{4+x^2}\cdot arctg\frac{x}{2}\cdot \log_2\left(arctg\frac{x}{2}\right)dx,\ x\in(0,\infty).$

h) $\int\left(u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right)\cdot \log_a\left(u(x)\cdot v(x)\right)dx,\ x\in D_u\cap D'_u$; unde funcțiile $u,v:D\to\mathbb{R}$ sunt derivabile cu derivatele continue; $u(x)\cdot v(x)>0,\forall x\in D;\ a>0,a\neq 1$.

i) $\int\left[\sin x+(1+x)\cdot\cos x\right]\cdot\log_\pi\left[(1+x)\cdot\sin x\right]dx,\ x\in(0,\pi).$ **j)** $\int\left(\sin 2x\right)\cdot\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\sin^2 x\right)dx;\ x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) $\int x^2\cdot\log_5 x\ dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\cdot\log_5 x\ dx=\frac{x^3}{3}\cdot\log_5 x-\frac{1}{3\ln 5}\cdot\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\cdot\log_5 x-\frac{x^3}{9\cdot\ln 5}+c$.

b) $\int(x-1)\cdot\log_{\frac{1}{5}}xdx=\int\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\cdot\log_{\frac{1}{5}}x\ dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\log_{\frac{1}{5}}x-\int\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\left(-\frac{1}{x\ln 5}\right)dx=$

$=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\log_{\frac{1}{5}}x+\frac{1}{2\cdot\ln 5}\int xdx-\frac{1}{\ln 5}\cdot\int dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\log_{\frac{1}{5}}x+\frac{1}{4\cdot\ln 5}\cdot x^2-\frac{1}{\ln 5}\cdot x+c$.

c) $\int\left(2x^2-1\right)\cdot\lg(7x)\ dx=\int\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-x\right)'\cdot\lg(7x)dx=\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-x\right)\cdot\lg(7x)-\int\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-x\right)\cdot\frac{1}{x\ln 10}dx=$

$=\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-x\right)\cdot\lg(7x)-\frac{2}{3\ln 10}\cdot\int x^2dx+\int\frac{1}{\ln 10}dx=\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-x\right)\cdot\ln(7x)-\frac{2}{9\cdot\ln 10}\cdot x^3+\frac{x}{\ln 10}+c$.

d) $\int x\cdot\log_2\left(-\sqrt{2}x\right)\ dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\log_2\left(-\sqrt{2}x\right)dx=\frac{x^2}{2}\cdot\log_2\left(-\sqrt{2}x\right)-\frac{1}{4\cdot\ln 2}\cdot x^2+c$.

e) $\int\left(3\cdot x^2-2x\right)\cdot\left[\log_{\frac{1}{2}}(2x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^2x\right)+...+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{10}x\right)\right]dx=\int\left(x^3-x^2\right)'\cdot\left[\log_{\frac{1}{2}}(2x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^2x\right)+...+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{10}x\right)\right]dx$

Cum $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^2x\right)+...+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{10}x\right)$, atunci

$$g'(x)=\frac{2}{2x\cdot\ln\frac{1}{2}}+\frac{2^2}{2^2x\cdot\ln\frac{1}{2}}+...+\frac{2^{10}}{2^{10}x\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\left(\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+...+\frac{1}{x}}_{de\,10\,ori}\right)=-\frac{10}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$I=\left(x^3-x^2\right)\cdot\left[\log_{\frac{1}{2}}(2x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^2x\right)+...+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{10}x\right)\right]+\frac{10}{\ln 2}\cdot\int\left(x^2-x\right)dx=$$

$$=\left(x^3-x^2\right)\cdot\left[\log_{\frac{1}{2}}(2x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^2x\right)+...+\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{10}x\right)\right]+\frac{10}{3\cdot\ln 2}\cdot x^3-\frac{5}{\ln 2}\cdot x^2+c.$$

f) $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot\log_a\left(u(x)\right)dx=\frac{u^2(x)}{2}\cdot\log_a u(x)-\frac{1}{2\ln a}\cdot\int u^2(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}dx=$

$=\frac{u^2(x)}{2}\cdot\log_a u(x)-\frac{1}{2\ln a}\cdot\int u'(x)\cdot u(x)dx=\frac{u^2(x)}{2}\cdot\log_a\left(u(x)\right)-\frac{1}{4\ln a}\cdot u^2(x)+c$.

g) $\int\frac{1}{4+x^2}\cdot arctg\frac{x}{2}\cdot\log_2\left(arctg\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\cdot arctg^2\frac{x}{2}\cdot\log_2\left(arctg\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4\ln 2}\int\left(arctg^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\left(arctg\frac{x}{2}\right)'}{arctg\frac{x}{2}}dx$

$$f^I(x)=\frac{1}{4+x^2}\cdot arctg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(arctg\frac{x}{2}\right)^I\cdot arctg\frac{x}{2}\Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{2}\int\left(arctg\frac{x}{2}\right)^I\cdot arctg\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}\cdot arctg^2\frac{x}{2}$$

$$g(x)=\log_2\left(arctg\frac{x}{2}\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(arctg\frac{x}{2}\right)^I}{\left(arctg\frac{x}{2}\right)\cdot\ln 2}.$$

$$I=\frac{1}{4}\cdot arctg^2\frac{x}{2}\cdot\log_2\left(arctg\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{8\ln 2}\cdot arctg^2\frac{x}{2}+c$$

h) $\int\left(u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right)\cdot\log_a\left(u(x)\cdot v(x)\right)dx=u(x)\cdot v(x)\cdot\log_a\left[u(x)\cdot v(x)\right]-\frac{1}{\ln a}\cdot u(x)\cdot v(x)+c$;

$$f'(x)=\left[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right]=\left[u(x)\cdot v(x)\right]'\Rightarrow f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$g(x)=\log_a\left[u(x)\cdot v(x)\right]\Rightarrow g'(x)=\frac{\left[u(x)\cdot v(x)\right]'}{u(x)\cdot v(x)\cdot\ln a}.$$

i) $\int\left[\sin x+(1+x)\cdot\cos x\right]\cdot\log_\pi\left[(1+x)\cdot\sin x\right]dx=(1+x)\cdot(\sin x)\cdot\log_\pi\left[(1+x)\sin x\right]-\frac{(1+x)\cdot\sin x}{\ln\pi}+c$.

$$f'(x)=\sin x+(1+x)\cdot\cos x\Rightarrow f(x)=\int\left[\sin x+(1+x)\cos x\right]dx$$

$$f(x)=-\cos x+\int(1+x)\cdot\cos x\,dx=-\cos x+\int(1+x)\cdot\sin' x\,dx=$$

$=-\cos x+(1+x)\sin x+\cos x=(1+x)\cdot\sin x$. Aplicând exemplul (g) unde: $u(x)=1+x$, $v(x)=\sin x$.

$$g(x)=\log_\pi\left[(1+x)\sin x\right]\Rightarrow g'(x)=\frac{\left[(1+x)\sin x\right]'}{(1+x)\cdot\sin x\cdot\ln\pi}=\frac{f'(x)}{(1+x)\sin x\cdot\ln\pi}.$$

j) $\int(\sin 2x)\cdot\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\sin^2 x\right)dx=u(x)\cdot\log_\pi\left(u(x)\right)-\frac{1}{\ln\frac{1}{\pi}}\cdot u(x)+c=\left(\sin^2 x\right)\cdot\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\sin^2 x\right)+\frac{1}{\ln\pi}\cdot\sin^2 x+c$

unde $u(x)=\sin^2 x\Rightarrow u'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

Profesori, Colegiul "Vasile Lovinescu", Fălticeni

Despre Limba română, Statistică, şi alte câteva lucruri importante

Daniel Văcaru, Piteşti

– Motto: Ghicitoare populară: Cin' le paşte, le cunoaşte!
– Răspuns: Literele

I. Haideţi să considerăm o **propoziţie** simplă, în limba **română :"Ana are mere".** Primul lucru la care ne **gândim** este să împărţim propoziţia, care, **deşi** scurtă, este **mare** pentru noi, fiind la început. Pentru cei mai avansaţi dintre voi, este bine să ne gândim la un **mesaj**. Vă propun să începem cu partea din **mesaj** care este cea mai **mare**. Evident, ea este **cuvântul.** Sunt doar **trei**. Ce putem oare noi face cu doar trei **cuvinte?** Să vedem. Ce este comun acestor cuvinte, si mesajului din ele? Că este scris în limba română. Marcăm această **informatie** ca fiind un bun câştigat. Să trecem la ce le deosebeşte. "**Ana**" este nume **propriu**, de **femeie** **„are"** reprezintă o stare, este un **verb**, iar
'**mere**" este tot un nume (**S**ubstantiv), dar, nemaiîncepând cu literă mare, este un **S**ubstantiv **C**omun. Au intrat în scenă niste persoane ale unei piese de **teatru**, anume, **S**ubstantivul **P**ropriu (Scarlat Popescu), **V**erbul (**V**isătorul realist), **S**ubstantivul **C**omun (**S**ănătate (re) **C**ăpătată).

Noi, la **MATEMATICĂ,** numim multimea {*Ana*, *are*, *mere*}, **populatie statistică**, a cuvintelor **mesajului** studiat, şi chiar şi un prim **tabel statistic** [i-aş spune **tabelaş** (caci nu e **împlinit, complet**)], anume

Substantiv **P**ropriu	**V**erb	**S**ubstantiv **C**omun
Ana	are	mere

În continuare, să detaliem aspectele mai pe larg. Să ne referim mai întâi la cele două substantive. Este clar că le defineşte ca **părti de vorbire** funcţia pe care o au în propozitie. "**Ana"** este scrisă cu literă mare, se va numi **Subiect**; "**merele"** (a apărut şi un Articol; cum, desigur, ştiţi, Hotărât, si subliniat, dar nu avem timp decât de o Notă(e deja altă poveste; vine Moş Crăciun, iscusit, am auzit!))**:**cum ştiţi, în anumite lăzi, sunt mici şi multe, iar în altele sunt mari, frumoase, dar puţine. Aceasta ne aduce aminte, între noi (filosofii) de matematicianul, poate şi filosof, Gauss **(**K.F.**,** pe numele său**),** care zicea "pauca, sed matura**"** , adică "**putine, dar** împlinite, **bune, mature"**; revenind la **mere,** bune, sănătoase, zemoase**.** Savurând în gând **merele,** şi revenind la **funcţii**, observăm că legătura între "mere" şi "Ana**"** trece prin "are", **hotărâtor** fiind "are". Este bine acum să-i dăm funcţie lui "are" **.** În propoziţie, cele două cuvinte "Ana" şi "are" sunt alăturate, şi amândouă **principale**. Deja vorbim despre **Subiect** şi **Predicat.** Cum "merele" sunt legate de predicat (acum, ca l-am numit, (definit, desigur), scos în evidenţa, are litera mică), **observăm** că nu putem spune doar "Ana are", că-i puţin, nu e împlinită propoziţia, mesajul**;** vom spune acum că avem **Complement direct,** căci e aşezat, subordonat predicatului. Acum putem "împlini" tabelul nostru statistic astfel

Ana	**are**	**mere**
Substantiv propriu	**Verb**	**Substantiv comun**
Subiect	**Predicat**	**Complement Direct**

şi iată, în acest **tabel statistic** scurt despre care vorbim avem, deja, adunate, **populaţia statistică,** mulţimea{*Ana*, *are*, *mere*}, şi două **caracteristici**, anume **funcţia morfologică** şi cea **sintactică**.

Mărturisesc că mi–am adus aminte, de curând, de **Jules Verne**. O carte minunată, pe care v–o recomand cu căldură, este „800 de leghe pe Amazon". Bogat documentată, are şi o poveste poliţisto - judiciară prin ea, din care personal am remarcat ceva şi **important**, şi **interesant**. Voi încerca să vă spun câte ceva despre aceasta, **împletind** (nu **împleticind**) LINGVISTICA cu TEORIA CODURILOR. Vom folosi tot propoziţia „Ana are mere".

Să facem prezentările. Personajele sunt **literele**, vom avea un **bal** (mascat), şi apoi vom încerca să vedem dacă **bal**ul se poate încheia cum trebuie (**Jos masca**).

Vom folosi tot **tabelul** (vedeţi, e atât de **important**, şi totuşi, simplu)

a	**ă**	**â**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	**r**	**s**	**ş**	**t**	**ţ**	**u**	**v**	**w**	**x**	**y**	**z**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**

Am găsit astfel o **corespondenţă** (altfel zis, o **funcţie bijectivă**) cu **sursa** (izvorul) mulţimea literelor din alfabetul **românesc** şi **adresa** mulţimea numerelor naturale, cu unele restricţii; sunt numerele naturale ≥ 1 şi ≤ 29, descrisă de **corespondenţa bijectivă**, ilustrată mai sus, prin tabelul deja dat.

Regula de **mascare** este foarte simplă, se ia litera, se coboară „în jos" (în tabel), se găseşte poziţia în alfabet, se măreşte cu 1, apoi se revine „în matca" iniţială (în tabel, **fireşte!**) şi se găseşte noua literă.

Folosind această procedură, litera „**a**” se transformă în „**ă**” (mare sau mic), “**e**” trece în „**f**”. Acestea sunt **vocalele** din limba română. La **consoane**, fiind mai multe, avem corespondențele **“m”→”n”, “n”→”o”, “r”→”s”** **Acum o să scriem mesajul despărțit, spicuit, așa**

A	**n**	**a**	**a**	**r**	**e**	**m**	**e**	**r**	**e**
1	**16**	**1**	**1**	**19**	**7**	**15**	**7**	**19**	**7**
2	**17**	**2**	**2**	**20**	**8**	**16**	**8**	**20**	**8**
Ă	**o**	**ă**	**ă**	**s**	**f**	**n**	**f**	**s**	**f**

Mesajul codat ar arăta astfel „Ăoă ăsf nfsf” .

Noi, având regula, ştim cum să ne comportăm, să „scoatem măştile**”.** E uşor, mergeți invers, de **jos în sus**. Dar dacă nu mai avem **pauzele** din scriere, firesc, e mai greu.

Asupra unor inegalități în triunghi

Vasile Jiglău, Arad

În triunghiul oarecare ABC notăm cu **R , r** razele cercurilor circumscris , respectiv înscris şi cu m_a , l_a lungimile medianei , respectiv bisectoarei aferente laturii a = BC , etc. . Să se demonstreze că :

$$\text{a)}\ \frac{3R}{2r} \geq \frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_c} + \frac{m_c}{m_a}; \qquad \text{b)}\ \frac{R}{r} \geq \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_a}$$

Soluție :

a) Rescriem inegalitatea din enunț sub forma $\frac{3R}{2r} \geq \frac{m_a^2 m_c + m_b^2 m_a + m_c^2 m_b}{m_a m_b m_c}$ (1)

Să demonstrăm mai întâi că $\frac{R}{r} \geq \frac{1}{\sin\omega}$ ([1] , pag 143) (2)

unde prin ω am notat unghiul lui Brocard al triunghiului ABC . Utilizând substituțiile $x = p = a$,

$y = p - b, z = p - c$ şi formula $\sin\omega = \frac{2S}{\sqrt{\Sigma a^2 b^2}}$ ([3] , 17.6) (3)

inegalitatea (2) devine :

$$\frac{R}{r} \geq \frac{\sqrt{\Sigma a^2 b^2}}{2rp} \Leftrightarrow 2Rp \geq \sqrt{\Sigma a^2 b^2} \Leftrightarrow 2\frac{\Pi(x+y)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}(x+y+z) \geq \sqrt{\Sigma(x+y)^2(x+z)^2} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{\frac{x+y+z}{4xyz}} \geq \sqrt{\Sigma\frac{1}{(x+y)^2}} \Leftrightarrow \Sigma\frac{1}{4xy} \geq \Sigma\frac{1}{(x+y)^2}$, inegalitate care rezultă imediat din $(x+y)^2 \geq 4xy$ şi analoagele sale .

Să demonstrăm acum că $\frac{3}{2\sin\omega} \geq \frac{a^2c + b^2a + c^2a}{abc}$ (4)

Utilizând (3) , (4) devine echivalentă cu

$$\frac{3\sqrt{\Sigma a^2 b^2}}{4S} \geq \frac{\Sigma a^2 c}{abc} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{\Sigma a^2 b^2}}{4S} \geq \frac{\Sigma a^2 c}{4RS} \Leftrightarrow 3R\sqrt{\Sigma a^2 b^2} \geq \Sigma a^2 c \qquad (5)$$

Dar $\Sigma a^2 c = \Sigma a \cdot ac \leq \sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a^2 c^2)}$ conform inegalității lui Cauchy-Buniakowski , astfel că e suficient să arătăm că $\sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a^2 c^2)} \leq 3R\sqrt{\Sigma a^2 b^2}$, fapt care se reduce la binecunoscuta inegalitate $\Sigma a^2 \leq 9R^2$.

Pe de altă parte , triunghiul format de m_a, m_b, m_c (faptul că acest triunghi există este binecunoscut şi se demonstrează fără dificultate) este echibrocardian cu triunghiul ABC (rezultat cunoscut - a se vedea de exemplu [2] pag. 125-126 ; şi acest fapt se poate demonstra uşor folosind formula care dă lungimea medianei aferente laturii unui triunghi , şi (3)) .Notând cu ω_m unghiul lui Brocard aferent acestuia şi aplicând succesiv (2) , apoi (4) , vom avea : $\frac{3R}{2r} \geq \frac{3}{2\sin\omega} = \frac{3}{2\sin\omega_m} \geq \frac{m_a^2 m_c + m_b^2 m_a + m_c^2 m_b}{m_a m_b m_c}$, de unde rezultă inegalitatea din enunț .

Generalizare : Fie $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ două triunghiuri echibrocardiene . Atunci , cu notațiile uzuale în triunghi : $\frac{3R_1}{2r_1} \geq \frac{a_2}{b_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{c_2}{a_2}$. Demonstrația urmează acelaşi curs ca mai sus .

b) Utilizăm formula : $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ (1)

Din (1) rezultă imediat , conform inegalității mediilor , că $l_a^{\,2} \leq p(p-a)$ (2)

Din (2) rezultă că $l_a^2 + l_b^2 \leq p(p-a) + p(p-b) = p(p-a+p-b) = pc$, deci că

$$\frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_a} = \frac{l_a^2 + l_b^2}{l_a l_b} \leq \frac{pc}{l_a l_b} \quad (3)$$

Dar $l_a l_b \geq h_a h_b$, deci $\frac{pc}{l_a l_b} \leq \frac{pc}{h_a h_b} = \frac{pcab}{4S^2} = \frac{4rRp^2}{4r^2p^2} = \frac{R}{r}$ (4)

S-au utilizat succesiv binecunoscutele formule $h_a = \frac{2S}{a}$, $abc = 4RS$ si $S = rp$.

Din (3) şi (4) rezultă concluzia din enunțul problemei .

Referințe bibliografice :
[1] Miu IC – Câteva probleme de matematică , Craiova , 1994
[2] Voda V – Triunghiul – ringul cu trei colturi , Ed Albatros , 1979
[3] Lalescu T – Geometria triunghiului

Ştiați că .....



primul calculator mecanic complex care făcea operațiile de adunare şi scădere a fost realizat în 1642 de către cel care avea să fie numit copilul minune al matematicii şi anume, **Blaise Pascal** .

Înainte cu câțiva ani, germanul **Wilhelm Schickard** creează în 1623 un calculator simplu care folosea roțile dințate şi care l-a ajutat pe Johanes Kepler la calculele sale astronomice.

În 1671, **Leibniz** inventează un calculator mecanic net superior celui inventat de Pascal, având ca principiu de funcționare, folosirea bazei 2 şi nu a celei în baza 10, tehnică ce avea să stea la baza construirii calculatoarelor electronice din sec. al IX-lea. . Era o maşină de calculat care efectua cele patru operații şi care putea să extragă şi rădăcina pătrată,



Charles Babbage(1791-1871) este considerat „ părintele computerului" programabil. Matematician şi inventator englez, Babbage a creat în anul 1820, conceptul de motor analitic, inventând primul calculator din istorie care teoretic putea să fie programat cu ajutorul cartelelor perforate.

El nu şi-a terminat opera sa, dar inginerii au construit în 1991 după schițele sale un calculator care făcea operații cu rezultate cu 31 de cifre. Un rol important l-a avut şi discipola sa, Ada Lovelace care şi-a adus o mare contribuție la inițierea în crearea primelor programe de calculator.

Profesorul Dumitru Bătinețu-Giurgiu la 80 de ani

de Mihály Bencze şi Neculai Stanciu



Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu se naşte la 27 ianuarie 1936, în comuna Pietroşani, judeţul Vlaşca unde urmează cursurile Şcolii Generale; apoi pe cele ale Colegiului Național "Ion Maiorescu" din Giurgiu. În toamna anului 1960, devine student al Universității din Bucureşti, Facultatea de Matematică (specializarea analiză matematică).

A fost asistent universitar la catedra de Matematică a Institutului Politehnic ''Gheorghe Asachi'' din Iaşi (1965-1968); cercetător ştiinţific la Institutul de Cercetări Forestiere din Bucureşti (1968-1970); asistent universitar la catedra de matematică-fizică a Institutului Agronomic ''Nicolae Bălcescu'' din Bucureşti (1970-1972); profesor la Colegiul Național ''Ion Creangă'' din Bucureşti (1985-1989) şi la Colegiul Național ''Matei Basarab'' din Bucureşti (1976-1985; 1989-2003).

S-a ocupat de: şirul lui Lalescu, introducând diferite extinderi şi conceptele de funcţii Lalescu şi funcţii Euler-Lalescu; şirul lui Ioachimescu, introducând noţiunea de constantă de tip Ioachimescu, şirurile de tip Euler-Ioachimescu şi generalizări ale şirului Ioachimescu; şirul lui Ghermănescu şi constante Euler-Ghermănescu.

Activitatea ştiinţifică a domnului profesor **D.M. Bătinețu-Giurgiu** este extrem de bogată şi variată prin lucrări de referinţă, articole şi studii, cărţi publicate, note şi materiale didactice.

A făcut şi face parte din redacţiile mai multor reviste naţionale şi internaţionale.

A participat şi şi-a prezentat rezultatele cercetărilor ştiinţifice la Conferinţe, Simpozioane şi Sesiuni de comunicări ştiinţifice internaţionale şi naţionale.

De-a lungul carierei sale, a fost onorat cu numeroase medalii şi diplome.

Nu putem încheia modesta prezentare a activităţii profesorului **D.M. Bătinețu-Giurgiu** fără a face o scurtă trimitere la soţia domniei sale, la doamna profesor universitar Maria Bătinețu-Giurgiu, care l-a susţinut fără condiţii şi limite creîndu-i libertatea deplină în activitatea profesională.

La final, noi care am stat în preajma profesorului ceva mai mult şi de la care am avut multe de învăţat, îi dorim multă sănătate, bucurii, ne plecăm respectuos, mulţumindu-i şi urîndu-i din suflet

La mulţi ani şi succes în continuare !

„ Când pierzi, ai grijă să nu pierzi lecția. ”
Dalai Lama

Tenzin Gyatso- The 14th Dalai Lama



3. Probleme rezolvate

▪ Învățământ primar

P:361. Aflați numerele naturale $\overline{abab}$ astfel ca $\overline{abab}+\overline{aba}+\overline{ab}+a=1906$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Egalitatea dată se mai scrie
$(1000a+100b+10a+b)+(100a+10b+a)+(10a+b)+a=1906$ sau $1122a+112b=1906$.
Singurile valori care se pot da sunt a = 1 şi apoi b = 7. Aşadar, $\overline{abab}=1717$.

P:362. Pentru un pix am plătit cu 12 lei mai puțin decât pe un stilou. Cât costă un pix şi cât costă o carte dacă pe trei pixuri şi două stilouri am plătit 49 lei? **Nicolae Ivăşchescu,** Canada

Rezolvare: Notăm cu “ a „ prețul unui pix, atunci un stilou costă a + 12. În total, s-a plătit $a\times 3+(a+12)\times 2=49$. De aici se obține că $5\times a=25$ adică a = 5. Aşadar, un pix costă 5 lei, iar o carte costă 17 lei.

P:363. Două bucăți de stofă au 54 m şi 33 m. Din prima bucată se fac cu 7 costume mai mult decât din a doua. Câte costume s-au făcut din cele două bucăți?

Viorica Rotărescu, Viorel Rotărescu, Vadu Paşii, Buzău

Rezolvare:
54 m - 33 m= 21 m (diferența dintre cele două bucăți de stofă), 21 m : 7 = 3 m (pentru un costum)
54 m + 33 m = 87 m (total stofă), 87 m : 3 m/costum = 29 costume

P:364. Un triunghi echilateral are perimetrul exprimat printr-un număr par cuprins între 61 şi 67. Ce lungime are latura sa, ştiind că aceasta este exprimată printr-un număr natural?

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Fie l latura triunghiului. Atunci perimetrul său este 3l. $61 \langle 3l \langle 67$, rezultă 3l este par adică $3l\in\{62,64,66\}$. Rezultă, **l** trebuie să fie par ca 3**l** să fie par, aşadar, **l** =22.

P:365. Câte numere de patru cifre au diferența dintre prima şi ultima cifră egală cu 6 ?

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Numerele sunt de forma $\overline{abcd}$ cu $a-d=6$ (şi avem 4 cazuri 9-3 = 8-2 = 7-1 = 6-0 = 6) şi $b,c\in\{0;1;2;.....;9\}$. În total, sunt $4\cdot 10\cdot 10=400$ de numere.

P:366. Suma a 14 numere naturale este 2014. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural n, obținem resturi egale cu 2 sau 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 29. Determinați cel mai mic număr n care satisface condițiile din enunț.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Scriem proba pentru fiecare împărțire cu rest, adunăm şi obținem
$2014=n\cdot(c_1+c_2+...+c_{14})+29$, de unde $1985=n\cdot(c_1+c_2+...+c_{14})$.
Deoarece $n>3$ şi n este cel mai mic, rezultă $n=5$.

▪ Clasa a V-a

G:544. Justificați că $3^{2015}+3$ este divizibil cu 10. **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare: Utilizăm principiul ultimei cifre,

$u(3^{2015}+3)=u(3^{4\cdot 503+3}+3)=u(3^{4\cdot 503}\cdot 3^3+3)=u(1\cdot 27+3)=0$,

sau $3^{2015}+3=3\cdot 9^{1007}+3=3\cdot(10-1)^{1007}+3=M_{10}-3+3=M_{10}\vdots 10$

G:545. Suma a trei numere este 47. Daca împărțim al treilea număr la primul obținem câtul 1 si restul 8; dacă împărțim al doilea număr la primul, obținem câtul 1 si restul 6; iar, dacă împărțim al treilea număr la al doilea, obținem câtul 1 si restul 2. Aflați cele trei numere.

Claudia Popa, Buzău

Rezolvare: a+b+c = 47; b=a+6; c=a+8; c=b+2. Deci, 47=a+b+c=3a+14, de aici, a=11. Apoi b=17, c=19.

G:546. Arătați că există o infinitate de numere naturale nenule pătrate perfecte, n, astfel încât 3n este cub perfect, 4n este puterea a patra a unui număr natural iar 5n este puterea a cincea a unui număr natural.

Carmen Terheci , Alina Tigae , Craiova

Rezolvare: $n=k^{60}\cdot 2^{30}\cdot 3^{20}\cdot 5^{24}, \forall k\geq 6.$

G:547. Fie n un număr care, împărțit la 8, dă restul 7 şi, împărțit la 15, dă restul 11. Determinați restul împărțirii numărului n la 24.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare:

Utilizând teorema împărțirii cu rest pentru numere naturale, obținem $n=8c_1+7$, **(1) şi** $n=15c_2+11$, (2) unde am notat cu c_1 şi c_2, câturile celor două împărțiri .

Din $8c_1+7=15c_2+11 \Leftrightarrow c_1=\frac{15c_2+4}{8} \Leftrightarrow c_1=\frac{8c_2+7c_2+4}{8} \Leftrightarrow c_1=c_2+\frac{7c_2+4}{8}$. Dar, $c_1,c_2\in\mathbb{N}$,

$\Rightarrow \frac{7c_2+4}{8}\in\mathbb{N}\Rightarrow c_2\in\{4,12,20,\cdots\}$, adică, $c_2=4+8k$, $k\in\mathbb{N}$.

Înlocuind c_2 în egalitatea (2), $\Rightarrow n=15(4+8k)+11 \Leftrightarrow n=120k+71$ (3).

Prelucrăm relația (3) :

$n=24\cdot 5k+24\cdot 2+23 \Leftrightarrow n=24(5k+2)+23$, ceea ce pune în evidență că împărțind numărul n la 24, se obține câtul $5k+2$ şi restul 23 .

G:548. Ştiind că $4\cdot \overline{ab}=\overline{cd}$, arătați că numerele de forma $\overline{abcd}$ se divid cu 13 şi cu 8.

Marin Simion, Rm. Sărat

***Rezolvare*:** Numărul $\overline{abcd}$ se poate scrie : $\overline{abcd}=\overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}$; dar $4\cdot \overline{ab}=\overline{cd}\Rightarrow$

$\overline{abcd}=\overline{ab}\cdot 100+4\cdot \overline{ab}=104\cdot \overline{ab}$.

Deoarece $104=13\cdot 8 \Rightarrow \overline{abcd}\vdots 13$ şi $\overline{abcd}\vdots 8$, căci 13 şi 8 sunt divizorii numărului 104.

G:549. Să se demonstreze că $107\cdot 2^{4n+1}\cdot 3^{4n}+221^n\vdots 43, \forall n\in N.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Avem $107\cdot 2^{4n+1}\cdot 3^{4n}+221^n=214\cdot 2^{4n}\cdot 3^{4n}+221^n=$

$=(215-1)6^{4n}+221^n=215\cdot 6^{4n}+221^n-6^{4n}=5\cdot 43\cdot 6^{4n}+221^n-1296^n=$

$=M43+(5\cdot 43+6)^n-(30\cdot 43+6)^n=M43+M43+6^n-M43-6^n=M43.$ şi atunci numărul dat se divide la 43. **Altfel**, se poate utiliza faptul că $1296^n-221^n=M(1296-221)=M43$.

G:550. Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de 2015 cuburi perfecte şi o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de 2015 pătrate perfecte.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare. Cum $\left(2015^{3n+2}\right)^2 = 2015^{6n+4} = 2015^{6n+3}\cdot 2015 = 2015^{6n+3} + 2015^{6n+3} + ... + 2015^{6n+3} =$

$= \left(2015^{2n+1}\right)^3 + \left(2015^{2n+1}\right)^3 + ... + \left(2015^{2n+1}\right)^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci, există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de 2015 cuburi perfecte. Pentru orice număr natural nenul n avem

$$\left(2015^{2n+1}\right)^3 = 2015^{6n+3} = 2015^{6n+2}\cdot 2015 = 2015^{6n+2} + 2015^{6n+2} + ... + 2015^{6n+2} =$$

$= \left(2015^{3n+1}\right)^2 + \left(2015^{3n+1}\right)^2 + ... + \left(2015^{3n+1}\right)^2$, deci există o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de sumă de 2015 pătrate perfecte.

G:551. Arătați că numărul $A = (2^{2020} - 2^{2015})\cdot(2^{2018} + 2^{2017} + 2^{2015})\cdot(2^{2016} + 2^{2014})$ se divide cu 2015 şi de asemenea că se poate scrie ca diferență a două pătrate perfecte.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:

$A = 2^{2015}\cdot(2^5 - 2^0)\cdot 2^{2015}\cdot(2^3 + 2^2 + 2^0)\cdot 2^{2014}\cdot(2^2 + 2^0) = 2^{6044}\cdot 2015 \ \vdots 2015$;

$A = 2^{6044}\cdot 2015 = \left(2^{3022}\right)^2\cdot(1008^2 - 1007^2) = \left(2^{3022}\cdot 1008\right)^2 - \left(2^{3022}\cdot 1007\right)^2$.

G:552. Aflați numerele naturale x, y, z astfel încât $25^x + 15^y + 5^z = 627$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Observăm că am putea avea egalitate numai dacă doi termeni ai sumei sunt egali cu 1 adică exponenții corespunzători sunt egali cu 0.

Dacă $x = y = 0 \Rightarrow 5^z = 625 \Rightarrow z = 4$; Dacă $y = z = 0 \Rightarrow 25^x = 625 \Rightarrow x = 2$;

Dacă $x = z = 0 \Rightarrow 15^y = 625 \Rightarrow y \notin \mathbb{N}$;

G:553. Determinați numerele naturale x, astfel încât ultima cifră a numărului $n = x! + 961$ să fie 1, unde $x! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot x$, $x \in \mathbb{N}^*$, şi $0! = 1$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Observăm că dacă luăm $x \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, ultima cifră a lui n, $u(n) \neq 1$, iar dacă $x \geq 5$ atunci, $u(n) = u(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot .....\cdot x) + u(961) = 0 + 1 = 1$. Aşadar, numerele x sunt $\{5;6;7;.....\}$.

G:554. Să se rezolve ecuația $13_x + 34_y = 33_{10}$, unde indicii reprezintă baze de numerație.

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: $13_x + 34_y = 33_{10} \Leftrightarrow x + 3 + 3y + 4 = 33 \Leftrightarrow x + 3y = 26$ cu $x, y \in \mathbb{N}$, $x \rangle 2, y \rangle 6$. Se obține soluția $x = 5, y = 7$.

G:555. Să se determine numerele de patru cifre $\overline{a0bc}$ ştiind că se scriu în baza 7 ca $\overline{defg}_{(7)}$ şi că cifrele a, b, c, d, e, f, g, luate într-o anumită ordine, sunt consecutive.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Rezolvare: Vom folosi de mai multe ori relațiile $343 = 7^3$; $343\times 2 = 686$; $343\times 3 = 1029$; $343\times 4 = 1372$; $343\times 5 = 1715$; $343\times 6 = 2058$; $49\times 3 = 147$; $49\times 4 = 196$; $49\times 5 = 243$; $49\times 6 = 294$. Deoarece $6543_{(7)} = 2332$, rezultă că avem două posibilități pentru cifra a:

1) $a = 1$. Nu putem avea decât $d = 3$ sau $d = 2$.

- Pentru $d = 3$ deducem uşor că $e = 0$ şi atunci cifrele consecutive sunt $0,1,2,3,4,5,6$;

avem posibilitățile: $3024_{(7)} = 1047$; $3025_{(7)} = 1048$; $3026_{(7)} = 1049$; $3042_{(7)} = 1059$; $3045_{(7)} = 1062$;

$3046_{(7)} = 1063$, iar începând cu $3052_{(7)}$ obținem un număr mai mare decât 1066. Am obținut soluția $1062 = 3045_{(7)}$.

- Pentru $d = 2$ rezultă $e = 6$ şi $f \geq 4$; nu obținem soluții.

2) $a = 2$. Nu putem avea decât $(d = 6, e = 0)$ sau $(d = 5, e = 6)$. Cum $\overline{60fg}_{(7)} \geq 2058$, rămâne doar $d = 5, e = 6$: $5601_{(7)} = 2010$; $5603_{(7)} = 2012$; $5604_{(7)} = 2013$; $5610_{(7)} = 2016$

$5613_{(7)} = 2019$; $5614_{(7)} = 2020$; $5630_{(7)} = 2030$; $5631_{(7)} = 2031$; $5634_{(7)} = 2034$;

$5640_{(7)} = 2037$; $5641_{(7)} = 2038$; $5643_{(7)} = 2040$ şi obținem soluția $2013 = 5604_{(7)}$.

În concluzie avem soluțiile: $1062 = 3045_{(7)}$ şi $2013 = 5604_{(7)}$.

▪ Clasa a VI-a

G:556. Arătați că suma $S = 2^0 + 2^1 + \ldots 2^{401}$ nu este pătrat perfect. **Claudia Popa**, Buzău

Rezolvare: $S = 2^{402} - 1 = (2^2)^{201} - 1$. De aici, u(S) = 3, deci S nu e pătrat perfect.

Altfel, $S = \left(2^{201}\right)^2 - 1$, nu este pătrat perfect căci nu există pătrate perfecte consecutive, $\left(2^{201}\right)^2 - S = 1$.

G:557. Determinați cel mai mic număr natural care are 36 de divizori şi printre aceştia şi 16.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

Rezolvare:

Numărul de divizori ai numărului $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ este $N = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1) = 36$.

Cum 16 este un divizor al lui n, atunci n este de forma $n = 2^4 \cdot s$, iar un divizor al lui n are forma $\left\{2^5, 2^8, 2^{11}, 2^{17}, 2^{35}\right\}$ (4+1 nu divide pe 36) ; Se ia fiecare element şi obținem

$n \in \left\{2^{35}, 2^{17} \cdot 3^1, 2^{11} \cdot 3^2, 2^8 \cdot 3^3, 2^8 \cdot 3 \cdot 5, 2^5 \cdot 3^5, 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5\right\}$. Cel mai mic n este $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$.

G:558. Determinați două numere întregi direct proporționale cu 2000 şi 2010, ştiind că suma pătratelor lor este 72360900. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Conform datelor problemei, $\frac{x}{2000} = \frac{y}{2010} = k \Rightarrow x = 2000k,\ y = 2010k$ iar din

$x^2 + y^2 = 72360900 \Rightarrow 4000000k^2 + 4040100k^2 = 72360900 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k \in \{-3; 3\} \Rightarrow$

$(x; y) \in \{(-6000; -6030), (6000; 6030)\}$.

G:559. Aflați cardinalul mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \frac{n^2 + 21n}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \right\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Cum $x = \frac{n^2 + 21n}{n-1} = \frac{(n^2 - 1) + (21n - 21) + 22}{n-1} = \frac{(n-1)(n+2) + 22}{n-1} = n + 22 + \frac{22}{n-1}$ rezultă că

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{22}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n - 1 \mid 22 \Rightarrow n \in \{1; 2; 11; 22\}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{36, 46\}$. Atunci, card A = 2.

G:560. Să se determine numerele $\overline{abcd}$ ştiind că numerele a + b, b + c, c + a sunt direct proporționale

cu numerele d, d + 1, d + 3,cu $d \neq 0$**.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din proporționalitatea directă, avem: $\frac{a+b}{d}=\frac{b+c}{d+1}=\frac{c+a}{d+3}=k$. Rezultă de aici că, $a+b=dk, b+c=dk+k, c+a=dk+3k$. (1).

Pe de altă parte, utilizând o proprietate a şirului de rapoarte egale, avem:

$k=\frac{a+b}{d}=\frac{b+c}{d+1}=\frac{b+c-a-b}{d+1-d}=\frac{c-a}{1}=c-a,$ aşadar, k este un număr natural.

Din (1) avem că $a+b+a+c=2dk+3k,$ şi cum $b+c=dk+k$ rezultă că $2a+dk+k=2dk+3k$ şi de aici: $a=\frac{k(d+2)}{2}, b=\frac{k(d-2)}{2}, c=\frac{k(d+4)}{2}$.

Cum b este cifră, rezultă $\frac{k(d-2)}{2}\geq 0\Rightarrow d\geq 2,$ iar din $c=\frac{k(d+4)}{2}\leq 9\Rightarrow k(d+4)\leq 18.$ Dând valori lui d obținem:

1) $d=2\Rightarrow 6k\leq 18\Rightarrow k=\overline{1,3}\Rightarrow \overline{abcd}\in\{2032,4062,6092\};$ **2)** $d=3\Rightarrow k=\overline{1,2}\Rightarrow \overline{abcd}=5173;$

3) $d=4\Rightarrow k=\overline{1,2}\Rightarrow \overline{abcd}\in\{3144;6284\};$ **4)** $d=5\Rightarrow k=\overline{1,2}\Rightarrow \overline{abcd}=7395;$

5) $d=6\Rightarrow k=1\Rightarrow \overline{abcd}=4256;$ **6)** $d=8\Rightarrow k=1\Rightarrow \overline{abcd}=5368;$ **7)** $d\in\{7,9\}\Rightarrow \overline{abcd}\in\varnothing.$

In conluzie $\overline{abcd}\in\{2032;3144;4062;4256;5173;5368;6092;6284;7395\}$.

G:561. Bisectoarele a 2 unghiuri adiacente formează un unghi de 120 ^{0}. Măsura unui unghi este pătratul măsurii celuilalt. Aflați măsurile unghiurilor. **Ion Stănescu,** Buzău

Rezolvare: Notăm cu n măsura primului unghi. Atunci, $n^2 + n = 240^0$. $n(n+1)=240$, $n = 15$.
Aşadar primul unghi are măsura de 15^0; Celălalt de 225^0 nu poate fi considerat unghi căci unghiurile au măsura mai mică de 180^0.

G:562. Să se determine măsurile a două unghiuri complementare , ştiind că sunt direct proporționale respectiv cu măsurile complementului şi suplementului lor.

Marin Simion, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie x şi 90^0 - x măsurile a două unghiuri complementare . 90^0 -x este complementul lui x şi 180^0 - (90^0 -x) = 90^0+x este suplementul unghiului cu măsura 90^0-x. Deoarece $\left(x;90^0-x\right)$ sunt direct proporționale cu

$$\left(90^0-x;90^0+x\right)\Rightarrow \frac{x}{90^0-x}=\frac{90^0-x}{90^0+x}=\frac{x+90^0-x}{90^0-x+90^0+x}=\frac{90^0}{180^0}=\frac{1}{2}.$$

Din proporția $\frac{x}{90^0-x}=\frac{1}{2}$ obținem $2x = 90^0-x$, deci $3x = 90^0$, de unde $x = 30^0$. Astfel unghiurile căutate au 30^0 şi respectiv 60^0.

G:563. În ΔABC se dau AB=5 cm, AC=12 cm, BC=13 cm, iar pe latura $[BC]$ se iau punctele M, N astfel încât BM=1 cm, CN=8 cm. Aflați măsura unghiului MAN.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:

Conform reciprocei Teoremei lui Pitagora , triunghiul ΔABC este dreptunghic în A şi deci $m(BAC)=90^0$ iar $m(B)+m(C)=90^0$.

Avem MN=BC-BM-NC=13-1-8=4 cm, iar apoi BN=BM+MN=1+4=5 cm şi MC=MN+CN=4+8=12 cm.

În ΔBAN avem AB=BN=5 cm, atunci triunghiul este isoscel şi prin urmare $BAN\equiv BNA$, iar

$m(B)+2m(BAN)=180^0$ (1). În ΔCAM avem AC=MC=12cm, atunci triunghiul este isoscel şi prin urmare $CAM \equiv CMA$, iar $m(C)+2m(CAM)=180^0$ (2).

Adunăm relaţiile (1) şi (2) şi obţinem: $m(B)+m(C)+2\left[m(BAN)+m(CAM)\right]=360^0$ (3). Însă

$m(BAN)+m(CAM)=\left[m(BAN)+m(CAN)\right]+m(MAN)=m(BAC)+m(MAN)=90^0+m(MAN)$

şi cum $m(B)+m(C)=90^0$, înlocuind în relaţia (3) obţinem: $90^0+2\cdot[90^0+ m(MAN)]=360^0$, de unde $m(MAN)=45^0$.

G:564. Determinaţi măsura unghiului BAC **al triunghiului ABC, ştiind că sunt îndeplinite condiţiile:**
a) $[AB]=[AC]$; **b)** $D,E\in(BC)$ **şi** $[BD]\equiv[DE]\equiv[EC]$; **c)** $m(DAE)=m(BAD)+m(EAC)$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare: Din datele problemei, rezultă $\Delta ADB\equiv\Delta AEC$ (ULU); $\Rightarrow [AD]\equiv[AE]$.

Fie F, mijlocul laturii [BC]; deducem că [AF] este, şi mediană, şi bisectoare în triunghiul ABC.

Deducem că $[DF]\equiv[FE]$ şi $DAF\equiv EAF$.

Dacă G este simetricul lui E, faţă de dreapta AC, $\Rightarrow \Delta AFE\equiv\Delta AHE\equiv\Delta AHG$, (unde H este punctul de intersecţie a dreptelor AC şi EG) , fiind dreptunghice şi realizându-se cazul IU.

Rezultă că $[DF]\equiv[FE]\equiv[EH]\equiv[HG]$ şi $[EC]\equiv[GC]$; $\Rightarrow [DE]\equiv[EG]\equiv[EC]$; Obţinem că triunghiul ECG este echilateral, deci, $m(ACB)=30^0$, aşadar, $m(BAC)=120^0$.

▪ Clasa a VII-a

G:565. Rezolvaţi în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ **ecuaţia** $xyz=x+y+z$. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** 1). Dacă $x=y=z$, ecuaţia devine $x^3=3x$ şi obţinem soluţia $(0,0,0)$.

2). Dacă $x\neq y=z$ avem de rezolvat ecuaţia $xy^2-2y-x=0$,

$\Delta_x=4+4x^2=k^2\Leftrightarrow k^2-4x^2=4\Leftrightarrow(k-2x)(k+2x)=4$, de unde obţinem din nou soluţia $(0,0,0)$.

3). Fie $x<y<z$. Considerăm cele mai mici numere y şi z care verifică ecuaţia, atunci $x(x+1)(x+2)=3x+3$, şi se obţine uşor soluţia $(1,2,3)$.

4). Dacă $1<x<y<z$, nu obţinem soluţii pentru că $xyz>x+y+z$ deoarece conform cazului 3 cea mai mica valoare a lui x pentru care avem soluţii este 1.

În concluzie soluţiile sunt $\{(0,0,0),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

G:566. Arătaţi că dacă suma a două numere pozitive este un număr par, atunci valoarea maximă a produsului lor este pătratul jumătăţii sumei lor . **Andrei Octavian Dobre**, Ploieşti

Rezolvare:

Fie $x+y=2k, k>0$. Atunci, $y=2k-x$ iar $xy=x(2k-x)=2kx-x^2=-(x-k)^2+k^2$, $\max(xy)=k^2$.

$\Rightarrow x=y=k$, $\quad xy=\left(\frac{2k}{2}\right)^2=k^2$.

G:567. a) Ştiind că x şi m sunt numere naturale şi că $x^2+4(x+1)=m^2-4(m+1)+8$**, arătaţi că** $x\leq m$.

b) Arătați că ecuațiile cu necunoscuta x, unde $x\in\mathbb{Z}$, care se obțin din egalitatea dată, dacă $m=1$ sau $m=3$, sunt echivalente.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare: a) Egalitatea dată se scrie, echivalent, astfel : $x^2+4x+4=m^2-4m-4+8 \Leftrightarrow$ $x^2-m^2+4(x+m)=0 \Leftrightarrow (x-m)(x+m)+4(x+m)=0 \Leftrightarrow (x+m)(x-m+4)=0$. Deducem următoarele cazuri : I) Dacă $x+m=0$, $\Rightarrow$ $x=m=0$;

II) Dacă $x-m+4=0 \Leftrightarrow x=m-4$, rezultă că $x<m$. Din I) şi II) deducem că $x\le m$.

b) Dacă $m=1$, obținem ecuația : $x^2+4(x+1)=1 \Leftrightarrow x^2+4x+4=1 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0$ $\Leftrightarrow x^2+x+3x+3=0 \Leftrightarrow x(x+1)+3(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$, deci, $x=-1$ sau $x=-3$ şi $S_1=\{-1;-3\}$. Dacă $m=3$, obținem aceeaşi ecuație $x^2+4x+3=0$, deci, $S_2=\{-1;-3\}$.

Datorită faptului că cele două ecuații au aceeaşi mulțime de existență şi aceeaşi mulțime de soluții, ele sunt echivalente.

G:568. Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}=\sqrt{\overline{cb}}+\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}+a+c$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Se constată că $\overline{cb},\overline{ab}\in\{16;25;36;49;64;81\}$. Cum ele trebuie să se termine în aceeaşi cifră, vom lua convenabil $\overline{cb}=16,\overline{ab}=36\Rightarrow a+c=3+1=4,\ a+b=3+6=9\Rightarrow\overline{abc}=361$.

G:569. Fie $n\in\mathbb{N}$ şi $a,b\in(1;\infty)$. Arătați că $ab+\dfrac{1}{a^nb^n}\rangle\ \dfrac{1}{a^{n-1}}+\dfrac{1}{b^{n-1}}$.

Ileana Didu, Camelia Dana, Craiova

Rezolvare: Pentru n=0 rezultă $ab+1\rangle\dfrac{1}{a^{-1}}+\dfrac{1}{b^{-1}}\Rightarrow ab+1\rangle a+b\Leftrightarrow(a-1)(b-1)\rangle 0.$

Fie $n\in\mathbb{N}^*$, cum $a\rangle 1,\ b\rangle 1$ rezultă $\dfrac{1}{a^n}\langle 1,\ \dfrac{1}{b^n}\langle 1\Rightarrow\ a-\dfrac{1}{b^n}\rangle 0,\ b-\dfrac{1}{a^n}\rangle 0\Rightarrow\left(a-\dfrac{1}{b^n}\right)\left(b-\dfrac{1}{a^n}\right)\rangle 0$, c.c.t.d.

G:570. Determinați $x,y,z\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=2015yz$.

Cătălin Pană, Rm. Vâlcea**, Lucian Tuțescu**, Craiova

Rezolvare: Ecuația se scrie $x^2+(y-z)^2=2013yz$ (1). Cum 2013 se divide cu 3 rezultă 3 divide $x^2+(y-z)^2$.

Rezultă $x=3x_1,\ x_1\in\mathbb{Z},\ y-z=3a\Rightarrow a\in\mathbb{Z}$ (2). Înlocuind în (1) se obține, $3\left(x_1^2+3a^2\right)=671yz\Rightarrow 3\,|\,yz\Rightarrow\ 3\,|\,y$ sau $3\,|\,z$. Din (2) rezultă y, z sunt divizibile cu 3, şi atunci, $y=3y_1,z=3z_1$. Aşadar, $x_1^2+y_1^2+z_1^2=2015y_1z_1$ de unde rezultă că $x=3^nx_n,y=3^ny_n$, $z=3^nz_n,\ x_n,y_n,z_n\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$, rezultă, $x=y=z=0$;

G:571. Fie n_1 numărul numerelor naturale $n\langle 2015$ astfel încât $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ se divide cu 3 şi n_2 numărul numerelor naturale $n\langle 2015$ astfel încât $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ să se dividă cu 9. Determinați n_1-n_2.

Lucian Tuțescu, Craiova, **Dumitru Săvulescu**, Bucureşti

Rezolvare: Numerele naturale **n** care verifică faptul că $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ se divide cu 3 sunt de forma $9k,9k+1,9k+2$. Numerele divizibile cu 9 mai mici decât 2015 sunt $0\cdot 9,1\cdot 9,2\cdot 9,.....,223\cdot 9$ adică, în total 224. Numerele de forma 9k+1 mai mici decât 2015 sunt $1\cdot 9+1,2\cdot 9+1,3\cdot 9+1,.....,223\cdot 9+1$ adică , în număr de 223.

Analog, sunt 223 numere de forma 9k+2. Aşadar, $n_1 = 224 + 223 + 223 = 670.$

Cum $2015 = 27 \cdot 74 + 17$, numerele naturale n care verifică faptul că $\left[\frac{n}{3}\right]$ se divide cu cu 9 sunt de forma $27k, 27k+1, ..., 27k+8.$

Numerele de forma $27k \langle 2015,\ k \in \mathbb{N}$ sunt $27 \cdot 0, 27 \cdot 1, 27 \cdot 2, ..., 27 \cdot 74$, în total 75 de numere.

Numerele de forma $27k+1 \langle 2015,\ k \in \mathbb{N}$ sunt $27 \cdot 0 + 1, 27 \cdot 1 + 1, 27 \cdot 2 + 1, ..., 27 \cdot 74 + 1,$ în total 74 numere.

Analog avem 74 de numere naturale de forma $27k+2, 27k+3, ..., 27k+8.$ Aşadar,

$n_2 = 75 + 74 \cdot 8 = 667 \Rightarrow n_1 - n_2 = 3.$

G:572. Determinați $x, y \in \mathbb{R}_+$ ştiind că $\sqrt{6x+6y} + \sqrt{20x^2+20y^2} = \frac{(x+y)(x+y+1) - 2xy + 26}{2}$.

Gheorghe Struțu, Buzău

Rezolvare: Cum $\sqrt{6(x+y)} \le \frac{6+x+y}{2}$, $\sqrt{20(x^2+y^2)} \le \frac{20+x^2+y^2}{2}$, prin adunare, rezultă ca trebuie sa avem egalitate. Atunci, trebuie ca $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Rightarrow (x;y) \in \{(2;4),(4;2)\}.$

G:573. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 6a + 16b - 12c + 20$. Să se determine max(a,b.c).

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $a^2 - 6a + 9 + 4b^2 - 16b + 16 + 9c^2 + 12c + 4 = 49 \Rightarrow$ $(a-3)^2 + (2b-4)^2 + (3c+2)^2 = 49.$ De aici, observăm că $a - 3 \le 7,\ 2b - 4 \le 7,\ 3c + 2 \le 7$. Cea mai mare valoare se obține pentru $2b - 4 = 0,\ 3c + 2 = 0 \Rightarrow (a-3)^2 = 49 \Rightarrow a = 10$. Deci, $\max(a,b,c) = 10.$

G:574. Dacă A = 3·9+4·10+5·11+…+2015·2021 iar B = 1·11+2·12+3·13+…+2013·2023, comparați cele două numere.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Observăm că fiecare termen al sumei A, este de forma $(n+2) \cdot (n+8) = n^2 + 10n + 16,$ iar fiecare termen al sumei B, este de forma $n \cdot (n+10) = n^2 + 10n,$ unde $n \in \{1;2;3;.....;2013\}$. Comparând termen cu termen, deducem că A > B.

G:575. Se consideră numărul $a = 4\sqrt{15} + 4\sqrt{35} + 4\sqrt{21} + 30$. Să se arate că $a = b^2$, unde $b \in \mathbb{R}$.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede

Rezolvare: $a = 2(2\sqrt{3 \cdot 5} + 2\sqrt{7 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 7} + 3 + 5 + 7) = \left[\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}\right)\right]^2$. S-a folosit formula $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, unde $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{7}$;

G:576. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ atunci : $\frac{n^{2015}}{2015n - 2014} \ge \frac{n^{2015} + 2016}{n^{2017} + 2016}$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Se observă că : $\frac{n^{2015} + 2016}{n^{2017} + 2016} \le 1.$ Pentru n = 1 avem egalitate. Pentru $n \ge 2$, avem relațiile : $n - 1 = n - 1$; $n^2 - n = n(n-1) > n - 1$; $n^3 - n^2 = n^2(n-1) > n - 1$; .....;
$n^{2015} - n^{2014} > n - 1.$

Prin adunarea inegalităților obținem: $n^{2015} - 1 > 2015n - 2015 \Leftrightarrow n^{2015} > 2015n - 2014$,

adică $\frac{n^{2015}}{2015n-2014} \geq 1$. Din cele de mai sus , rezultă o inegalitate adevărată. Egalitatea are loc pentru n = 1.

G:577. Determinați $\overline{abc}$ astfel încât [$\sqrt{\overline{abc}}$]=16 şi a+b+c=17.

Prof. Iuliana Traşcă, Scorniceşti, Olt

***Rezolvare*:** Dacă [$\sqrt{\overline{abc}}$]=16 rezultă că $256 \leq \overline{abc} < 289$. Cum a+b+c=17 rezultă că $\overline{abc} \in \{269, 278, 287\}$.

G:578. Dacă un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor a , respectiv b , şi lungimea ipotenuzei c , iar p este semiperimetrul, atunci arătați că $p(p-c)=(p-a)(p-b)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare. Notăm cu A aria triunghiului. Atunci avem :

(1). $A=\frac{ab}{2}=\frac{c^2-(b^2+a^2)+2ab}{4}=\frac{c^2-(b-a)^2}{4}=\left(\frac{c+b-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{c-b+a}{2}\right)=$

$=\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)=(p-a)(p-b)$.

(2) . $A=\frac{ab}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{4}=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=p(p-c)$.

Din (1) şi (2) rezultă concluzia.□

Altfel, (soluție dată de dl. Zvonaru).

$4p(p-c)=(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2=(a+b)^2-a^2-b^2=2ab$ iar

$4(p-a)(p-b)=(c+a-b)(c-a+b)=c^2-(a-b)^2=a^2+b^2-(a-b)^2=2ab$.

G:579. Fie P un punct situat pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC. Arătați că :

a) PA=PB+PC sau PB=PA+PC sau PC=PA+PB

b) Dacă AB = a ,a număr real pozitiv, atunci $PA^2+PB^2+PC^2=2a^2$.

Rezolvare: **Ion Radu**, Bozioru, Buzău

a) Daca P este situat pe arcul mic BC , luăm punctul **Q** situat pe arcul mic AB astfel încât $PB=BQ$ =>

$\Rightarrow m(QCB)=m(PCB)$, $AP=QC$, luăm punctul **R** pe semidreaptă [CP astfel încât $PR=BP \Rightarrow$ Δ BPQ este echilateral şi RC=PB+PC. Arătăm că triunghiul BCQ este congruent cu triunghiul BCR, cazul (ULU) (BC=BC,

$QBA \equiv PBC \Rightarrow QBC \equiv RBC \Rightarrow RC=QC=AP=PB+PC$. Asemănător, dacă **P** este situat pe arcul mic AB . Rezultă, $PC=PA+PB$.

b) În triunghiul PAC aplicăm teorema lui Pitagora generalizată şi avem

$a^2=PA^2+PC^2-2\cdot PA\cdot PC\cdot\cos APC=PA^2+PC^2-PA\cdot PC$,

Analog, în triunghiul BPA: $a^2=PA^2+PB^2-PA\cdot PB$. Prin adunarea relațiilor de mai sus rezultă

$2a^2=2PA^2+PB^2+PC^2-PA\cdot(PC+PB)=PA^2+PB^2+PC^2$. Ştim că PB + PC = PA.

G:580. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , iar M mijlocul ipotenuzei .Perpendiculara în M pe BC intersectează pe (AC) în N . Dacă AN = NM şi AB = 4 cm , determinați perimetrul şi aria triunghiului ABC.

Marin Simion, Rm. Sărat

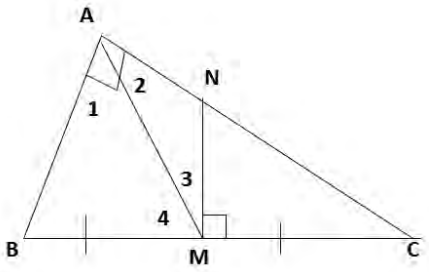
Rezolvare: Deoarece AN = NM $\Rightarrow A_2 \equiv M_3 \Rightarrow A_1 \equiv M_4$ (au complementele congruente) $\Rightarrow$ BA = BM ;

dar BM = $\frac{BC}{2}$; cum AB = 4cm rezultă BC = 8 cm ;

aplicând teorema lui Pitagora, obținem $AC = 4\sqrt{3}$ cm .

$P_{ABC} = 4+8+4\sqrt{3} = 4(3+\sqrt{3})$ cm .

$A_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ cm^2 .



▪ Clasa a VIII-a

G:581. **Arătați că dacă** $3x^2-2x+3y^2-4y+\dfrac{1}{3}=0$ **atunci** $x+y+1\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right]$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $(3x-1)^2+(3y-2)^2=4$ de unde rezultă $-2\le 3x-1\le 2$ respectiv, $-2\le 3y-2\le 2$. Adunând ultimele două inegalități se obține

$-4\le 3x+3y-3\le 4 \mid +6 \Rightarrow\ 2\le 3x+3y+3\le 10 \mid :3 \Rightarrow \dfrac{2}{3}\le x+y+1\le\dfrac{10}{3}$, c.c.t.d.

G:582. **Se consideră mulțimile : A = {** $x \mid$ **x** $\in\mathbb{R}$ **şi** $|x-1|\le 4$ **},B = {** $y \mid y\in\mathbb{R}$ **şi** $|y+0,3|<3,3$ **}.**

a) Scrieți sub formă de intervale mulțimile A şi B .

b) Determinați mulțimile : A $\cup$ **B , A** $\cap$ **B şi (A-B)** $\cap\mathbb{N}$ **, unde** $\mathbb{N}$ **reprezintă mulțimea numerelor naturale .**

Marin Simion, Rm. Sărat

Rezolvare : Deoarece $|x-1|\le 4$, rezultă că -4 $\le x-1\le 4$, de unde obținem că -3 $\le x\le 5$ şi deci $x\in[-3,5]\Leftrightarrow A=[-3;5]$. Analog obținem B = (-3,6 ;3) .În aceste conditii A $\cup$ B = $(-3,6;5]$ şi A $\cap$ B = $[-3;3]$. În plus A-B = $[3;5]$; deci (A-B) $\cap\mathbb{N}=[3;5]\cap\mathbb{N}=\{3,4,5\}$ (deoarece 3,4,5 sunt singurele numere naturale din intervalul închis $[3;5]$) .

G:583. **Fie** $P=\left(\sqrt{1}-900\right)\cdot\left(\sqrt{2}-899\right)\cdot\left(\sqrt{3}-898\right)\cdot.....\cdot\left(\sqrt{899}-2\right)\cdot\left(\sqrt{900}-10\right)\cdot$ **Stabiliți semnul lui P.**

Dan Lucian Grigore , Craiova

Rezolvare: Se observă că forma generală a termenilor produsului P este $\sqrt{901-n}-n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\le 900$.

Pentru a determina numărul parantezelor negative din produs se consideră $\sqrt{901-n}\langle n \mid ()^2 \Rightarrow$ $n^2\rangle 901-n$, $n^2+n\rangle 901\Leftrightarrow n(n+1)\rangle 901\Rightarrow n\ge 30$. Aşadar, fiind 29 de factori pozitivi şi 871 de factori negativi, înseamnă că produsul P este negativ.

G:584. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **ecuația** $x(x+1)(x^2+x-5)=300$**.** **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Notăm $x^2+x=y$, atunci, ecuația data devine: $y^2-5y-300=0$ cu soluțiile $y_1=-15$, $y_2=20$ de unde rezultă $x^2+x+15=0\Rightarrow x\notin\mathbb{R}$ şi $x^2+x-20=0\Rightarrow x\in\{-5;4\}$.

G:585. **Determinați** $x, y \in \mathbb{R}_+$ **dacă** $\sqrt{\frac{x^2+4y(x+y)+9}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+8y(x+2y)+16}{2}}=x+3y+\frac{7}{2}$.

Gheorghe Struțu, Buzău

Rezolvare: $\sqrt{\frac{(x+2y)^2+3^2}{2}} \geq \frac{x+2y+3}{2}$, $\sqrt{\frac{(x+4y)^2+4^2}{2}} \geq \frac{x+4y+4}{2}$. Prin adunare, rezultă că trebuie să avem egalitate, adică $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+4y=4 \end{cases} \Rightarrow (x;y) \in \left\{\left(2;\frac{1}{2}\right)\right\}$.

G:586. **Dacă** $x \in \mathbb{Z}$ **şi numărul** $n=x^3+6x^2-109x-234$ **se divide cu 11, demonstrați că numărul** $\frac{n}{1331}$ **este întreg.**

Iuliana Trașcă, Scorniceşti, Olt, **Daniela Burtoiu,** Piteşti, Argeş

***Rezolvare*:** n se descompune în factori şi avem: n=(x-9)(x+2)(x+13). Se vede că dacă un factor al lui n se divide cu 11 atunci şi ceilalți se divid cu 11 deoarece diferă între ei prin 11 sau multiplu al lui 11. Numărul n se divide cu 11 care este număr prim numai dacă unul din factorii săi se divide cu 11. Dar dacă n se divide cu 11 atunci se divide şi cu 11^3=1331 fiind un produs de 3 factori divizibili cu 11. Cum n se divide cu 1331 rezultă că $\frac{n}{1331} \in \mathbb{Z}$.

G:587. **Rezolvați în** $\mathbb{R}^* \text{x } \mathbb{R}^*$ **sistemul :** $\begin{cases} 15y(x^2+1)=7x(y^2+1) \\ xy^2-x^2y+x-y=\frac{80xy}{21} \end{cases}$; **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

***Rezolvare*:** Sistemul dat se scrie echivalent, astfel:

$$\begin{cases} \frac{15\left(x^2+1\right)}{x}=\frac{7\left(y^2+1\right)}{y} \\ y-x+\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{80}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\left(y+\frac{1}{y}\right) \\ y+\frac{1}{y}-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{80}{21} \end{cases}. \quad \text{Notăm : } \begin{cases} x+\frac{1}{x}=a \\ y+\frac{1}{y}=b \end{cases};$$

Sistemul se scrie astfel : $\begin{cases} 15a=7b \\ b-a=\frac{80}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{3} \\ b=\frac{50}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3} \\ y+\frac{1}{y}=\frac{50}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-10x+3=0 \\ 7y^2-50y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x-3)(3x-1)=0 \\ (y-7)(7y-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ sau } x=\frac{1}{3} \\ y=7 \text{ sau } y=\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow S=\left\{(3;7);\left(3;\frac{1}{7}\right);\left(\frac{1}{3};7\right);\left(\frac{1}{3};\frac{1}{7}\right)\right\}.$$

G:588. **Să se arate că numărul** $x=\frac{4^{2009}+16^{2009}+64^{2009}+256^{2009}+...+4^{2009^2}-2009}{4^{2009}-1}$ **este număr natural.**

Mircea Mario Stoica , Arad

***Rezolvare*:**

Evident, $x=\frac{4^{2009}-1+\left(4^{2009}\right)^2-1^2+\left(4^{2009}\right)^3-1^3+\left(4^{2009}\right)^4-1^4+...+\left(4^{2009}\right)^{2009}-1^{2009}}{4^{2009}-1}=1+\left[4^{2009}+1\right]+$

$$+\left[\left(4^{2009}\right)^2+4^{2009}+1\right]+\left[\left(4^{2009}\right)^3+\left(4^{2009}\right)^2+4^{2009}+1\right]+...+\left[\left(4^{2009}\right)^{2008}+\left(4^{2009}\right)^{2007}+.....+4^{2009}+1\right].$$

Rezultă, $x \in \mathbb{N}$. S-a folosit formula $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $a, b, n \in \mathbb{N}$

G:589. Aflați valorile întregi ale lui n pentru care fracția $F = \dfrac{n^3 - n^2 - 48}{n^3 + 5n^2 + 18n + 24} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Cu ajutorul descompunerilor obținem

$$F = \frac{n^3 - 4^3 - (n^2 - 4^2)}{n^3 + 2^3 + 4(4 + 4n + n^2) + n(n+2)} = \frac{(n-4)(n^2 + 3n + 12)}{(n+2)(n^2 + 3n + 12)} = \frac{n-4}{n+2}.$$

$F = \dfrac{n-4}{n+2} = \dfrac{n+2-6}{n+2} = 1 - \dfrac{6}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+2 \mid 6 \Rightarrow n \in \{-1; -3; 0; -4; 1; -5; 4; -8\}$. Singurele valori convenabile sunt $n \in \{-3; -4; -5; 4; -8\} \Rightarrow F \in \{7; 4; 3; 0; 2\}$.

G:590. Rezolvați ecuația $\sqrt{504 + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{504 - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1$. **Mariana Mitea,** Cugir, Alba

Rezolvare: Condiții de existență: $0 \le y \le 1008^2$; Prin ridicare la pătrat se obține

$504 + \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{y}} - 2 \cdot \sqrt{504 + \frac{1}{2}\sqrt{y}} \cdot \sqrt{504 - \frac{1}{2}\sqrt{y}} + 504 - \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1$, de unde, rezultă că $y = 2015$.

G:591. Fie $a,\ b \in \mathbb{R}$ **,** $a \ne b$ **cu** $a^2 = nb + n^2 + 1$ **şi** $b^2 = na + n^2 + 1$**, unde** $n \in \mathbb{R}$**. Calculați:** $a^3 - 2a^2b^2 + b^3$ **.**

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Scăzând cele două egalități obținem: $a^2 - b^2 = n(b-a)$; Cum $a \ne b$ rezultă că $a + b = -n$

Obținem $a^2 + b^2 = n(a+b) + 2n^2 + 2 = -n^2 + 2n^2 + 2 = n^2 + 2 \Rightarrow ab = -1$;

Deducem: $a^3 - 2a^2b^2 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 2a^2b^2 = -n^3 + 3(-n) - 2 = -n^3 - 3n - 2$.

G:592. Dacă $a, b, c \in R^+$ **, astfel încât** $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 2$**, arătați că** $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \le \dfrac{3}{2}$**.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ satisface ipoteza, atunci avem $\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1} = 1$.

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \le \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right)\left[(a+1) + (b+1) + (c+1)\right] = a + b + c + 3.$$

Deci, $2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 - (a+b+c) \le 3$.□

G:593. Dacă a, b, c **sunt laturile unui triunghi, arătați că are loc următoarea inegalitate:**

$\dfrac{1}{2(a^4 + b^4) - (a^2 + b^2 - c^2)^2} + \dfrac{1}{2(b^4 + c^4) - (b^2 + c^2 - a^2)^2} + \dfrac{1}{2(c^4 + a^4) - (c^2 + a^2 - b^2)^2} \le \dfrac{3}{16S^2}$, unde S **este aria triunghiului.**

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare: Se aplică inegalitatea mediilor:

$2(a^4 + b^4) - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \ge 2 \cdot 2\sqrt{a^4 b^4} - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) =$

$= (c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) = (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c) \rangle 0$, a, b, c fiind laturile triunghiului. Analog, $2(b^4 + c^4) - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \ge (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)$,

$2(c^4 + a^4) - (c^2 + a^2 - b^2)^2 \ge (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)$.

Aşadar, suma din stânga este mai mică sau egală cu $\frac{3}{2(p-a)2(p-b)2(p-c)2p}=\frac{3}{16S^2}$. S-a folosit formula $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

G:594. Să se rezolve ecuația: $(x+1)(1+\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha)^2=\sin^2\alpha,$ **unde** α **este măsura unui unghi al unui triunghi.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare : 1) Dacă $\alpha=90^0$, ecuația devine $2(x+1)=1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$;

2) Dacă $\alpha\neq 90^0$, înmulțind ecuația prin $-\cos^2\alpha$, şi cum $-\cos^2\alpha=-1+\sin^2\alpha$, ecuația se rescrie:

$(-x\cos^2\alpha-1+\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha)^2=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Notăm $\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha=t$ şi ştiind că $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ecuația devine:

$(t-1)(t+1)t^2=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Leftrightarrow t^4-t^2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0\Leftrightarrow t^4-t^2+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha=0.$

$\Delta=1-4\sin^2\alpha+4\sin^4\alpha\Leftrightarrow\Delta=(1-2\sin^2\alpha)^2\Rightarrow t^2=\frac{1+1-2\sin^2\alpha}{2}=\cos^2\alpha,$ sau

$t^2=\frac{1-1+2\sin^2\alpha}{2}=\sin^2\alpha\Rightarrow t_{1,2}=\pm\cos\alpha, t_{3,4}=\pm\sin\alpha.$ Avem ecuațiile:

a) $\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha=\pm\cos\alpha\Leftrightarrow x=\frac{\sin^2\alpha\pm\cos\alpha}{\cos^2\alpha};$ b) $\sin^2\alpha-x\cos^2\alpha=\pm\sin\alpha\Leftrightarrow x=\frac{\sin^2\alpha\pm\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$

G:595. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ **cu laturile** $AB=5$ **cm,** $BC=DA=\sqrt{17}$ **cm şi** $CD=3$ **cm.**

Pe planul $ABCD$ **în punctul de intersecție a diagonalelor notat cu** O **se ridică o semidreaptă perpendiculară pe** AC **. Pe această semidreaptă se ia un punct** M **astfel încât** $OM=\frac{3\sqrt{6}}{4}$ **cm. Se cere:**

a)Demonstrați că $DM\perp AC$ **.** **b)Calculați volumul piramidei** $ABCDM$ **ştiind că** $m(\sphericalangle MBD)=60^0$ **.**

c)Aflați aria lateral a piramidei $ABCDM$ **în cazul în care** ΔAMB **are aria maximă.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

a) Cu datele din enunț avem: $AB^2+DC^2=CB^2+AD^2\Rightarrow AC\perp BD$. Deci $OC\perp OM$; $OC\perp OD\Rightarrow OC\perp(DMB)\Rightarrow OC\perp DM$.

b) Notăm $DM=x$ şi din teorema cosinusului în ΔMDO obținem $\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2=x^2+\frac{9}{2}-\frac{6x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

$A_{MDB}=\frac{DM\cdot DB\cdot\sin 60^0}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2.$

Prin urmare, $V_{MABCD}=V_{MABD}+V_{MBDC}=\frac{1}{3}A_{MBD}\cdot AO+\frac{1}{3}A_{MDB}\cdot OC=\frac{1}{3}A_{MBD}\cdot AC=2\sqrt{6}\ cm^3.\ cm^3$.

c) $A_{MDB}=A_{DMO}+A_{MOB}=\frac{OM\cdot OD\cdot\sin(DOM)}{2}+\frac{OM\cdot OB\cdot\sin(MOB)}{2}=\frac{OM\cdot DB\cdot\sin(DOM)}{2}\cdot A_{MDB}$

este maximă dacă $\sin(DOM)=1$.

Rezultă $MO\perp DO$, dar $MO\perp AC$ (ipoteză) $\Rightarrow MO\perp(ABCD)$.

Fie P,R,T,Q picioarele perpendicularelor duse din M pe AB,BC,CD şi DA.

Cu reciproca teoremei celor trei perpendiculare obținem $OP\perp AB$, $OR\perp DC$, $TO\perp DC$ şi $QO\perp DA$.

În triunghiurile dreptunghice AOB,BOC,COD,DOA avem

$$OP=\frac{5}{2},OR=\frac{15\sqrt{17}}{34},OT=\frac{3}{2},OQ=\frac{15\sqrt{17}}{34}.$$

Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile MOP,MOR,MOT,MOQ obținem $MP=\frac{1}{4}\sqrt{154}$, $MR=\frac{\sqrt{1918}}{2\sqrt{17}}$, $MT=\frac{3}{4}\sqrt{14}$, acum deducem $A_l=\frac{1}{8}\left(5\sqrt{154}+9\sqrt{14}+4\sqrt{1918}\right)cm^2$.

▪ Clasa a IX-a

L:401. Să se determine valorile naturale ale parametrului a astfel încât ecuația $(ax-1)^2+(x-a)^2=-18x$ să aibă o soluție întreagă şi să se rezolve ecuația în acest caz.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $(a^2+1)x^2-2(2a-9)x+(a^2+1)=0.$ Pentru a avea rădăcini trebuie pusă condiția $\Delta\geq 0\Rightarrow 4(2a-9)^2-4(a^2+1)^2\geq 0\Leftrightarrow\ (-a^2+2a-10)\cdot(a^2+2a-8)\geq 0$.
Cum $-a^2+2a-10\leq 0,\forall a\in\mathbb{R}$ deoarece $\Delta=-36\langle 0$, atunci, trebuie ca $a^2+2a-8\leq 0$ adică $a\in[-4;2]$. Cum $a\in\mathbb{N}$ rezultă $a\in\{0;1;2\}$. Doar pentru $a=2\Rightarrow 5x^2+10x+5=0$ cu rădăcinile întregi $x_1=x_2=-1$.

L:402. a) Arătați că dacă r este un număr rațional pozitiv ce aproximează prin lipsă pe $\sqrt{7}$ atunci $\frac{r+7}{r+1}$ este un număr rațional pozitiv ce aproximează prin adaos pe $\sqrt{7}$.

b) Pentru ce valori raționale pozitive ale aproximării r prin lipsă a lui $\sqrt{7}$ valoarea $\frac{r+7}{r+1}$ este o aproximare mai bună a lui $\sqrt{7}$ decât r ?

Ion Pătraşcu, Titu Toma, Craiova

Rezolvare:
a) Cum r este o aproximație prin lipsă a lui $\sqrt{7}$, atunci, $r-\sqrt{7}\langle 0$. Rămâne să arătăm că $\frac{r+7}{r+1}\rangle\sqrt{7}\Leftrightarrow\frac{r+7-r\sqrt{7}-\sqrt{7}}{r+1}\rangle 0\Leftrightarrow(1-\sqrt{7})(r-\sqrt{7})\rangle 0$, ceea ce este evident;
b)
$$\frac{r+7}{r+1}-\sqrt{7}\langle\sqrt{7}-r\Leftrightarrow\frac{r+7-r\sqrt{7}-\sqrt{7}}{r+1}\langle\sqrt{7}-r\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{7}-r)(\sqrt{7}-1)}{r+1}\langle\sqrt{7}-r\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}-1}{r+1}\langle 1\Leftrightarrow r\rangle\sqrt{7}-2\Rightarrow$$

Valorile căutate sunt $(\sqrt{7}-2;\sqrt{7})\cap\mathbb{Q}$.

L:403. Fie ABC un triunghi echilateral de latura "a" şi un punct M în interiorul triunghiului astfel încât distanța de la M la laturile triunghiului este egala cu „ d ". Arătați că $a\geq 2\sqrt{3}d$.

Andrei Octavian Dobre, Ploieşti

Rezolvare: $A_{ABC}=A_{AMB}+A_{BMC}+A_{AMC}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a}{2}(d_1+d_2+d_3)$.

$\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}(d_1+d_2+d_3)\geq\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}+\frac{d_2d_3}{d_2+d_3}+\frac{d_1d_3}{d_1d_3}$ (relație cunoscută, care se demonstrează folosind faptul că $m_h\leq m_a$). Cum $d_1=d_2=d_3=d$, atunci, $\frac{\sqrt{3}a}{4}\geq\frac{3d^2}{2d}\Rightarrow a\geq 2\sqrt{3}d$.

Observație: Singurul punct egal depărtat de laturile triunghiului este I – centrul cercului înscris în triunghi, iar d este raza.

L:404. a) Să se arate că $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x;

b) Rezolvați ecuația $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+.....+\left[\sqrt{n\cdot(n+1)}\right]=496$ în $\mathbb{N}$.

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare:

a) Întrucât $n^2\leq n(n+1)<(n+1)^2\Leftrightarrow n\leq\sqrt{n^2+n}<n+1\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

b) Conform a) ecuația devine $1+2+3+...+n=496\Rightarrow n=31$.

L:405. Dacă $a,\ b,\ c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$ şi $1<n\leq 2$, arătați că: $\frac{1}{n-a}+\frac{1}{n-b}+\frac{1}{n-c}\geq\frac{3}{n-1}$.

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Avem $a,\ b,\ c\in\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ şi $\frac{1}{n-a}\geq\frac{a^2+2n-3}{2(n-1)^2}\Leftrightarrow a^3-na^2+(2n-3)a+2-n\geq 0\Leftrightarrow$

$(a-1)^2(a+2-n)\geq 0$. Obținem:

$$\sum\frac{1}{n-a}\geq\sum\frac{a^2+2n-3}{2(n-1)^2}=\frac{\sum a^3+3(2n-3)}{2(n-1)^2}=\frac{3+6n-9}{2(n-1)^2}=\frac{6n-6}{2(n-1)^2}=\frac{3}{n-1}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

L:406. Determinați numerele reale nenule a_1, a_2, a_3,..., a_n , astfel încât:

$\frac{a_1+2a_2+3a_3+...+na_n}{a_1+a_2+a_3+...+a_n}=\frac{2n+1}{3}$, $\forall\ n\geq 2$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Pentru n = 2, egalitatea din enunțul problemei, se scrie: $\frac{a_1+2a_2}{a_1+a_2}=\frac{5}{3}$, care conduce la $a_2=2a_1$.

Pentru n = 3, obținem $\frac{a_1+2a_2+3a_3}{a_1+a_2+a_3}=\frac{7}{3}$, care conduce la $a_3=3a_1$.

Vom demonstra prin inducție matematică, că $a_n=n\,a_1,\ \forall\ n\geq 2$.

Evidentă egalitatea pentru n = 2. Presupunem că $a_n=na_1$, şi demonstrăm că $a_{n+1}=(n+1)a_1$.

Egalitatea dată pentru n + 1 numere, se scrie: $\frac{a_1+2a_2+3a_3+...+na_n+(n+1)a_{n+1}}{a_1+a_2+a_3+...+a_n+a_{n+1}}=\frac{2n+3}{3}$, şi ținând seama de ipoteza din inducție, egalitatea devine succesiv : $\frac{a_1(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)a_{n+1}}{a_1(1+2+3+...+n)+a_{n+1}}=\frac{2n+3}{3}$,

$3\,a_1\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3(n+1)a_{n+1}=a_1(2n+3)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(2n+3)a_{n+1}$,

$na_{n+1}=n(n+1)a_1$, adică $a_{n+1}=(n+1)\,a_1$.

Ca urmare a celor de mai sus, rezultă $a_n=n\,a_1,\ \forall\ n\geq 2$.

L:407. Fie m > 0 . Fie o funcție f : [a,b] → R pentru care f(a) = f(b) = 0 şi pentru $\forall\ x_1,x_2\in[0,1]$, $x_1\neq x_2\ \Rightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|<m|x_1-x_2|$. Să se arate că există $x_1,\ x_2\in(0,1)$, $x_1\neq x_2$ astfel încât

$|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{m(b-a)}{2}$. **Chiriță Marcel**, Bucureşti

Rezolvare: Avem $|f(x)-f(a)|\langle m\cdot|x-a|,\ \forall x\in(a;b]\Rightarrow|f(x)|\langle m(x-a),\forall x\in(a;b]$.

Analog, $|f(x)-f(b)|\langle m\cdot|x-b|,\ \forall x\in[a;b)\Rightarrow|f(x)|\langle m(b-x),\forall x\in[a;b)$.

Rezultă că $|f(x)|\langle\min\{m(x-a),m(b-x)\},\forall x\in(a;b)$.

Fie $x_1\in\left(a;\dfrac{a+b}{2}\right)$, $x_2\in\left(\dfrac{a+b}{2};b\right)$, astfel încât $x_2-x_1\rangle\dfrac{b-a}{2}\Rightarrow$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)|+|f(x_2)|\langle m(x_1-a)+m(b-x_2)=m(b-a)-m(x_2-x_1)\langle m(b-a)-m\cdot(\frac{b-a}{2})\ \langle\frac{b-a}{2}$$

L:408. **Rezolvați în $\mathbb{R}^*$x $\mathbb{R}^*$ sistemul :** $\begin{cases}15y\left(x^2+1\right)=7x\left(y^2+1\right)\\ xy^2-x^2y+x-y=\dfrac{80xy}{21}\end{cases}$

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvarea este cea de la G:587.

L:409. **Să se arate că** $\dfrac{1}{\left[\sqrt{11}\right]\cdot\left[\sqrt{27}\right]}+\dfrac{1}{\left[\sqrt{27}\right]\cdot\left[\sqrt{51}\right]}+\ldots+\dfrac{1}{\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]\cdot\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]}=\dfrac{2n}{3(2n+3)}$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ **unde** $[x]$ **este partea întreagă a lui x.**

Constantin şi Elena Ciobica, Fălticeni

Rezolvare: Se arată mai întâi că din $(2n+1)^2<4n^2+4n+3<(2n+2)^2\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]=2n+1$,

$(2n+3)^2<4n^2+12n+11<(2n+4)^2\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]=2n+3$.

Atunci, $\dfrac{1}{\left[\sqrt{11}\right]\cdot\left[\sqrt{27}\right]}+\dfrac{1}{\left[\sqrt{27}\right]\cdot\left[\sqrt{51}\right]}+\ldots+\dfrac{1}{\left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right]\cdot\left[\sqrt{4n^2+12n+11}\right]}=$

$$=\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}=\frac{2n}{3(2n+3)}$$

▪ Clasa a X-a

L:410. **Să se arate că** $2\lg3+\lg7\cdot\lg27\langle\log_2 10$. **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: Se înmulțește inegalitatea dată cu $\lg4$ adică cu $2\lg2$ rezultând

(*) $\lg4\cdot\lg9+\lg4\cdot\lg7\cdot\lg27\langle2$ deoarece $2\lg2\cdot\log_2 10=2\cdot1=2$. Cu inegalitatea mediilor se

obține $\lg4\cdot\lg9\langle\left(\dfrac{\lg4+\lg9}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\lg36}{2}\right)^2\langle\left(\dfrac{\lg100}{2}\right)^2=1$

$\lg4\cdot\lg9\cdot\lg27\langle\left(\dfrac{\lg4+\lg9+\lg27}{3}\right)^3=\left(\dfrac{\lg972}{3}\right)^3\langle\left(\dfrac{\lg1000}{3}\right)^3=1$.

Adunând cele două inegalități de mai sus se obține inegalitatea (*).

L:411. Determinați numerele prime p şi q astfel încât $\frac{(p-1)!+1}{p} = q^6 + 39$ **.**

Cristian Moanță, Lucian Tuțescu, Craiova

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $(p-1)!+1 = p(q^6+39)$.

Pentru $p \geq 3 \Rightarrow (p-1)!+1$ este impar, atunci, q^6+39 este impar. Se obține q=2 şi $(p-1)!+1 = 103p$.

Dacă $p \geq 11$ se obține contradicția $(p-1)!+1 \geq 1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot (p-2)(p-1)+1 \geq 8!(p-1)(p-2) \rangle 103p$.

Aşadar, $p \leq 7$. Se obține soluția p=7, q=2;

L:412. Care sunt condițiile ce trebuie să le îndeplinească $a,b,c \geq 0$ **astfel încât să avem** $\sqrt[3]{27a^2b^2c^2} \leq 2ab+c^2 \leq ab+bc+ca$ **?** **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Notăm $A = \sqrt[3]{27a^2b^2c^2}$, $B = 2ab+c^2$ şi $C = ab+bc+ca$. Aplicând inegalitatea mediilor avem: $A = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{(ab)(ab)c^2} \leq 2ab+c^2$ cu egalitate dacă $ab = c^2$;

$A = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} \leq ab+bc+ca$ cu egalitate dacă $a = b = c$. Aşadar am obținut că $A \leq B, A \leq C \ \forall a,b,c \geq 0$. Rămâne să vedem în ce caz avem $B \leq C$. După evaluarea $B-C = (a-c)(b-c)$ obținem $b < c < a$ sau $a < c < b$. Egalitatea se obține dacă $a = b = c$.

L:413. Rezolvați ecuația $\log_4\left(\log_5(\lg x)\right) = 1$ **în** $\mathbb{R}^*_+$**.** **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: $\log_4 \log_5 \lg x = 1 \Rightarrow \log_5 \lg x = 4 \Rightarrow \lg x = 5^4 \Rightarrow x = 10^{625}$.

L:414. Rezolvati in $\mathbb{R}$ **ecuatia:** $x\sqrt{3+x} + \sqrt{39-3x} = 4\sqrt{3+x^2}$**.** **Marin Chirciu**, Piteşti

Rezolvare: Domeniul de definiție al ecuației este $D = [-3, 13]$. Cu inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem: $\left(x\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{13-x}\right)^2 \overset{(CBS)}{\leq} \left(x^2+3\right)\left(3+x+13-x\right) = 16\left(x^2+3\right)$, de unde

$x\sqrt{3+x} + \sqrt{39-3x} \leq 4\sqrt{3+x^2}$, cu egalitate dacă si numai dacă:

$x\sqrt{13-x} = \sqrt{3+x}\cdot\sqrt{3} \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x^3-13x^2+3x+9 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2-12x-9\right) = 0$;

$x_1 = 1 \in D$, $x_{2,3} = 6 \pm 3\sqrt{5} \in D$. Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației date este:

$S = \left\{1,\ 6+3\sqrt{5},\ 6-3\sqrt{5}\right\} \cap [-3;13] = \left\{1,\ 6+3\sqrt{5}\right\}$.

L:415. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$*** ecuația** $(2^x-1)^{\frac{1}{x}} + (3^x-1)^{\frac{1}{x}} + ... + (n^x-1)^{\frac{1}{x}} = \frac{(n-1)n}{2}$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Gigel Buth, Satu Mare

Rezolvare: Fie $f:(0;\infty) \to (0;\infty)$, $f(x) = (a^x-1)^{\frac{1}{x}}, a \rangle 1$. Se va arăta că f este strict crescătoare pe $(0;\infty)$ ceea ce implică faptul că membrul stâng este o sumă de funcții strict crescătoare prin urmare ecuația dată are soluția unică 1.

Fie $0 \langle x_1 \langle x_2$ şi $y_1 = f(x_1) = (a^{x_1-1})^{\frac{1}{x_1}}$ iar $y_2 = f(x_2) = (a^{x_2-1})^{\frac{1}{x_2}}$ atunci $a^{x_1} = y_1^{x_1}+1$, $a^{x_2} = y_2^{x_2}+1 \Rightarrow$

$a \rangle y_1, a \rangle y_2 \Rightarrow \frac{y_2}{a} \langle 1$. Cum $x_1 \langle x_2$, $\exists\, t \rangle 0$ astfel încât $x_2 = x_1 + t$ atunci

$a^{x_2}-1 = y_2^{x_2} \Leftrightarrow a^{x_1}\cdot a^t - 1 = y_2^{x_1}\cdot y_2^t$ de unde rezultă $a^{x_1} - \left(\frac{1}{a}\right)^t = y_2^{x_1}\cdot\left(\frac{y_2}{a}\right)^t \langle y_2^{x_1}$ (*).

Pe de altă parte, $y_1^{x_1} = a^{x_1} - 1$, $a^{x_1} = y_1^{x_1} + 1$ înlocuim în relația (*) şi obținem $y_1^{x_1} + 1 - (\frac{1}{a})^t \langle y_2^{x_1}$

$\Rightarrow y_1^{x_1} \langle y_2^{x_1} - \left(1 - (\frac{1}{a})^t\right) \Rightarrow y_1^{x_1} \langle y_2^{x_1} \Rightarrow y_1 \langle y_2 \Rightarrow f(x_1) \langle f(x_2)$ adică f este strict crescătoare.

L:416. **Fie** $x, y, z \in (0;\infty)$. **Arătați că:** $\sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2-xy+y^2}} + \sqrt{\frac{y^2+yz}{y^2-yz+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2+zx}{z^2-zx+x^2}} \le 3\sqrt{2}$

Marcel Chiriță, Bucureşti

Rezolvare: $\frac{x^2+xy}{x^2-xy+y^2} = \frac{2(x^2+xy)}{x^2+y^2+(x-y)^2} \overset{2)}{\le} \frac{2(x^2+xy)}{x^2+y^2}$ şi analoagele.

$$\sqrt{\frac{(x^2+xy)}{x^2-xy+y^2}} \le \sqrt{\frac{2(x^2+xy)}{x^2+y^2}}$$

Atunci, $\sqrt{\frac{2(x^2+xy)}{x^2+y^2}} + \sqrt{\frac{2(y^2+yz)}{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{2(z^2+zx)}{z^2+x^2}} \le 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}} + \sqrt{\frac{y^2+yz}{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2+zx}{z^2+x^2}} \le 3 \Leftrightarrow$

$2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2(x^2+y^2)} \le \frac{1}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{2}{x+y} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2+y^2}} \le \sqrt{\frac{2x}{x+y}}$, şi analoagele.

Notăm cu $E(x,y,z)$ partea stângă, atunci, inegalitatea inițială este echivalentă cu

$E(x,y,z) = \sqrt{\frac{2x}{x+y}} + \sqrt{\frac{2y}{y+z}} + \sqrt{\frac{2z}{z+x}} \le 3$,

$$E(x,y,z) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x(y+z)(z+x)} + \sqrt{y(z+x)(x+y)} + \sqrt{z(x+y)(y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \le$$

$$\le \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{[x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)] \cdot [(z+x)+(x+y)+(y+z)]}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} =$$

$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{4(xy+yz+zx)(x+y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} = 2\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \le 2\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{8}} = 3$. S-a folosit inegalitatea Cauchy- Buniakowski- Schwarz şi faptul că $\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \le \frac{1}{2}$ şi analoagele , care înmulțite dau

$\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \frac{1}{8}$. Avem egalitate când x = y = z.

Observație: Se putea utiliza şi inegalitatea $(x+y)^2 \le 4(x^2-xy+y^2)$, după care ne rămânea de demonstrat o inegalitate a lui Vasile Cartoaje, a se vedea exercitiul 4.1.5 din Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities, vol 1, pag. 72, Gil 2007.

L:417. **Dacă** $z, z_0 \in C, |z_0| \le 1$, **astfel încât** $z^n \pm z^{n-1} \pm ... \pm z \pm 2z_0 = 0$ **atunci** $|z| \le 2$, **unde** $n \in N^8$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din relația dată obținem:

$z^n = \pm z^{n-1} \pm z^{n-2} \pm ... \pm z \pm 2z_0 \Rightarrow |z^n| = |\pm z^{n-1} \pm z^{n-2} \pm ... \pm z \pm 2z_0| \le |z^{n-1}| + |z^{n-2}| + ... + |z| + 2|z_0|$.

Notăm $|z| = r \ge 0, |z_0| = a \le 1$ şi atunci inegalitatea se rescrie:

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} - \ldots - r - 2a \le 0 \Leftrightarrow r^n - r^{n-1} - r^{n-2} - \ldots - r - 2 \le 2a - 2.$

Dacă r =1 cerința problemei este adevărată, iar dacă $r \neq 1$ inegalitatea dată devine:

$$r^n - \left(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1\right) - 1 \le 2(a-1) \Leftrightarrow r^n - \frac{r^n - 1}{r-1} - 1 \le 2(a-1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{r^{n+1} - 2r^n - r + 2}{r-1} \le 2(a-1) \Leftrightarrow \frac{(r-2)\left(r^n - 1\right)}{r-1} \le 2(a-1).$$

Cum $a \le 1$, membrul drept este negativ şi cum $\frac{r^n - 1}{r-1} > 0$ rezultă că $r \le 2$, adică $|z| \le 2.$

L:418. Fie triunghiul ABC ascuțit unghic şi $[AD],[BE],[CF]$ înălțimile sale iar H ortocentrul triunghiului. Arătați că $6\left(AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH\right) \ge (a+b+c)^2$, unde notațiile sunt cele uzuale. În ce caz avem egalitate?

Daniela Grama, Lucian Tuțescu, Craiova

Rezolvare: Cum $AD = \frac{2S}{a}$, $S = \frac{abc}{4R}$ iar $AH = 2R\cos A$ (ΔABC este ascuțit unghic), rezultă

$$AD \cdot AH = \frac{2S}{a} \cdot 2R\cos A = \frac{2}{a} \cdot \frac{abc}{4R} \cdot 2R\cos A = bc \cdot \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow$$

$\sum AD \cdot AH = \frac{1}{2}\sum (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \ge (a+b+c)^2$. S-a folosit inegalitatea Cauchy- Buniakowski. Egalitatea există pentru $a = b = c$, adică triunghiul ABC este echilateral.

▪ Clasa a XI-a

L:419. Aflați matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ dacă $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare: Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. **Atunci, din** $A \cdot \left| A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \cdot A \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0,\ a = d$. **Aşadar,** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Înlocuind în relația din enunțul problemei, obținem $\begin{pmatrix} a^2 + a & 2ab + b \\ 0 & a + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, b = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{5}$.

L:420. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $BA = 0_2$ şi $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$ atunci $\det(A + nB) = O$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **Marcel Chiriță**, Bucureşti

Rezolvare: Fie $f(x) = \det(A + xB) = \det A + ax + \det B\, x^2$, unde $a \in \mathbb{R}$. (1)

$(\det(A+B))^2 = \det(A+B)(\det(A+B) = \det(A+B)(A+B) = \det(A^2 + AB + BA + B^2) = \det(A^2 + AB + B^2) = 0$ de unde, $\det(A+B) = 0$.

În (1) pentru $x = 1$ avem $\det(A+B) = \det A + a + \det B = 0$ de unde $a = -\det A - \det B$ (2)

Fie $f(x) = \det(A + xB) = \det A - (\det A + \det B)x + \det B\, x^2$.

$0 = \det(A^2 + AB + B^2) = \det(A + \omega B) \cdot \det(A + \varpi B) = f(\omega) f(\varpi)$, unde ω, ϖ sunt rădăcinile ecuației

$t^2+t+1=0$. Rezultă, $f(\omega)=0,\ f(\varpi)=0$.

Obținem, $\det A+a\omega+\det B\cdot\omega^2=0$ (3) şi $\det A+a\varpi+\det B\cdot\varpi^2=0$. (4). Din (3) + (4) rezultă: $2\det A+a(\omega+\varpi)+\det B\cdot(\omega^2+\varpi^2)=0$. Cum $\omega+\varpi=-1$ şi $\omega^2+\varpi^2=-1\Rightarrow$ 2det A − a − det B de unde a = 2det A − det B (5)
Din (2) şi (5) avem − detA −detB = 2det A − det B şi obținem detA = 0 şi a = − det B.
Deci f(x) = det(A+xB) = – detB x + detB x^2 şi avem f(n) = det(A + nB) = – n^2 detB x + n^2 detB = 0

L:421. **Să se calculeze:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+...+\frac{1}{n}C_n^n}{2^2+\frac{1}{2}2^3+...+\frac{1}{n}2^{n+1}}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare. Notând $x_n=C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+...+\frac{1}{n}C_n^n, y_n=2^2+\frac{1}{2}2^3+...+\frac{1}{n}2^{n+1}$, y_n crescător($y_{n+1}-y_n=\frac{2^{n+2}}{n+1}>0$) şi nemărginit$\left(y_n>\frac{2^{n+1}}{n+1}\to\infty\right)$, conform lemei Stoltz-Cesaro, avem:

$$\lim_n\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_n\frac{C_{n+1}^1+\frac{1}{2}C_{n+1}^2+...+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}-C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2-...-\frac{1}{n}C_n^n}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=$$

$$\lim_n\frac{C_{n+1}^1-C_n^1+\frac{1}{2}(C_{n+2}^2-C_n^2)+...+\frac{1}{n}(C_{n+1}^n-C_n^n)+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=$$

$$\lim_n\frac{C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+...+\frac{1}{n}C_n^1+\frac{1}{n+1}C_n^n}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}.$$

L:422. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **ecuația** $x^3+5x=x^2-5+4\cdot\sqrt[3]{(5x^2+x-5)^2}+6\cdot\sqrt[3]{5x^2+x-5}$.

Oana Preda, Roxana Vasile, Craiova

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $x^3+4x^2+6x=5x^2+x-5+4\cdot\sqrt[3]{(5x^2+x-5)^2}+6\cdot\sqrt[3]{5x^2+x-5}$ (*). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=t^3+4t^2+6t$. Cum $f'(t)=3t^2+8t+6\rangle 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ rezultă f este strict crescătoare, atunci, f eset injectivă. Ecuația (*) se scrie $f(x)=f(\sqrt[3]{5x^2+x-5})$ şi din injectivitatea lui f se obține $x=\sqrt[3]{5x^2+x-5}$ de unde, rezultă $x^3-5x^2-x+5=0\Leftrightarrow(x-5)(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x\in\{-1;1;5\}$.

L:423. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+....+f(n)\right)^{n^2-n+2}$.

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Întrucât $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+....+f(n)\right)^{n^2-n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n^2-n+2}=\frac{1}{e}.$$

L:424. **Calculați** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3!}{4!-2!}+\frac{7!}{8!-6!}+....+\frac{(4n-1)!}{(4n)!-(4n-2)!}\right)$.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede

***Rezolvare*:** $\frac{(4n-1)!}{(4n)!-(4n-2)!}=\frac{(4n-2)!(4n-1)}{(4n-2)!\left[(4n-1)4n-1\right]}=\frac{4n-1}{4n(4n-1)-1}=\frac{1}{4n-\frac{1}{4n-1}}\rangle\frac{1}{4n}\Rightarrow$

$1+\frac{3!}{4!-2!}+\frac{7!}{8!-6!}+....+\frac{(4n-1)!}{(4n)!-(4n-2)!}\rangle 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{4n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, limita dată este egală cu ∞.

L:425. **Fie** $(x_n)_{n\geq 1}$ **un şir de numere reale cu** $x_1=x_2=4$ **şi** $2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n-1=0,\forall n\geq 1$. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x_k-k)$.

Ovidiu Ţâţan, Râmnicu Sărat

***Rezolvare*:** Căutăm un şir $(y_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general de forma $y_n=x_n-a\cdot n-b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ şi $y_1=4-a-b, y_2=4-2a-b$. Înlocuind în relaţia de recurenţă din enunţ $x_n=y_n+a\cdot n+b$ obţinem: $2y_{n+2}-3y_{n+1}+y_n+a-1=0,\forall n\geq 1\Rightarrow a=1$. Din ecuaţia caracteristică $2z^2-3z+1=0$, asociată şirului $(y_n)_{n\geq 1}$, ecuaţie cu soluţiile $z_1=1,z_2=\frac{1}{2}$ rezultă că termenul general al şirului $(y_n)_{n\geq 1}$ este de forma: $y_n=A+B\left(\frac{1}{2}\right)^n\ \forall n\geq 1$, cu $y_1=3-b, y_2=2-b$. Rezolvând sistemul corespunzător pentru $n=1,n=2\Rightarrow A=1-b,B=4$ şi deci $y_n=1-b+\frac{1}{2^{n-2}}$ pentru $n\geq 1$. Aşadar, obţinem $x_n=1-b+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+n+b\Rightarrow x_n=n+1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ pentru orice $n\geq 1$.

Înlocuind în limita cerută avem succesiv:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x_k-k)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(n+1+\frac{1}{2^{k-2}}-k\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{k-2}}\right)\right)\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(3\cdot 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(3\cdot 2\cdot 2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right)\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(12\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)\right)=\ln 12.$

L:426. **Se consideră** $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, **o funcţie derivabilă de două ori, cu următoarele proprietăţi:**

a) $f''(x)>0,(\forall)x\in(0,2]$ **si** $\min\limits_{x\in[0,2]}f(x)\notin\{f(0),f(2)\}$.

b) $f''(0)\cdot f''(2)+f'(0)\cdot f'(2)\leq 0$.

i) Găsiţi un exemplu de funcţie care are proprietatea din enunţ.

ii) Demonstraţi că există $c\in(0,2)$ **astfel încât** $f''(c)=\sqrt{-f'(0)\cdot f'(2)}$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmboviţa

Rezolvare: a) $f(x)=x^3-x, x\in[0,2]$.

b) Din teoremele Weiestrass si Fermat, există $c\in(0,2)$ astfel încât $f'(c)=0$. Aplicând teorema lui Lagrange, există $c_1\in(0,c)$, $c_2\in(c,2)$, astfel încât $f'(c)-f'(0)=cf''(c_1)$ şi $f'(2)-f'(c)=(2-c)f''(c_2)\Rightarrow -f'(a)\cdot f'(b)=c(2-c)f''(c_1)f''(c_2)$. Acum vom demonstra că există $c_3\in(0,2)$ astfel încât $f''(c_1)f''(c_2)=(f''(c_3))^2$. Dacă $c_1=c_2$ concluzia este imediată. Presupunem $c_1<c_2$. Definim funcția $\varphi:[c_1,c_2]\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=f''(x)-\sqrt{f''(c_1)\cdot f''(c_2)}$.

Avem $\varphi(c_1)\cdot\varphi(c_2)=\dfrac{-f''(c_1)\cdot f''(c_2)\cdot(f''(c_1)-f''(c_2))^2}{\left(f''(c_1)+\sqrt{f''(c_1)\cdot f''(c_2)}\right)\left(f''(c_2)+\sqrt{f''(c_1)\cdot f''(c_2)}\right)}\le 0$, deoarece $f''(x)>0,(\forall)x\in(0,2]$. Cum φ are proprietatea lui Darboux, există $c_3\in(c_1,c_2)$ astfel încât $\varphi(c_3)=0\Rightarrow f''(c_1)f''(c_2)=(f''(c_3))^2$. Astfel, am obținut $c_3\in(a,b)$, cu proprietatea că $f''(c_1)f''(c_2)=(f''(c_3))^2$.

Revenind , avem $-f'(0)\cdot f'(2)=(c-a)(b-c)\cdot(f''(c_3))^2$, iar din inegalitatea mediilor obținem $-f'(0)\cdot f'(2)=c(2-c)\cdot(f''(c_3))^2\le\left(\dfrac{c+2-c}{2}\right)^2\cdot(f''(c_3))^2\Rightarrow(f''(c_3))\ge\sqrt{-f'(a)\cdot f'(b)}$. Din enunț $\sqrt{-f'(0)\cdot f'(2)}\ge\sqrt{f''(0)\cdot f''(2)}\Leftrightarrow f''(0)\cdot f''(2)+f'(0)\cdot f'(2)\le 0$. Procedând la fel ca mai devreme, (definind funcția $\phi:[0,2]\to\mathbb{R},\phi(x)=f^2(x)-f''(0)\cdot f''(2)$), obținem că există $c_4\in(0,2)$ astfel încât $f''(0)\cdot f''(2)=f^2(c_4)$.

Am găsit că exista $c_3,c_4\in(0,2)$ astfel încât $f''(c_4)\le\sqrt{-f'(0)\cdot f(2)}\le f''(c_3)$ şi cum f'' are proprietatea lui Darboux, $c\in(c_4,c_3)$ astfel încât $f''(c)=\sqrt{-f'(0)\cdot f'(2)}$.

▪ Clasa a XII-a

L:427. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+e^{-x}$ **şi** $g(x)=\int_0^2 f(t)dt$ **.**

a) Arătați că funcția g este inversabilă;

b) Să se calculeze: $\int_{\frac{6}{5}-\frac{1}{2}}^{\frac{37}{5}-\frac{1}{e^2}} g^{-1}(x)dx$;

Dârstaru Gheorghe , Buzău

Rezolvare: a) $g(x)=\int_0^x(t^4+e^{-t})dt=\left(\dfrac{t^5}{5}-e^{-t}\right)\Big|_0^x=\dfrac{x^5}{5}-e^{-x}+1$; Cum $g^I(x)=f(x)\rangle 0$ rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum $\lim_{x\to\infty}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty\Rightarrow g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Aşadar, f este injectivă şi surjectivă, deci, bijectivă, adică f este inversabilă;

b) Aplicăm schimbarea de variabilă $y=g^{-1}(x)\Rightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g^I(y)dy\Rightarrow dx=f(y)dy$.

$$\int_{\frac{6}{5}-\frac{1}{2}}^{\frac{37}{5}-\frac{1}{e^2}} g^{-1}(x)dx = \int_1^2 y\cdot f(y)dy = \int_1^2 y^5 dy + \int_1^2 y\cdot e^{-y}dy = \left(\frac{y^6}{6} - e^{-y}\cdot y - e^{-y}\right)\Big|_1^2 = \frac{63}{6} - \frac{3}{e^2} + \frac{2}{e}.$$

L:428. **Să se calculeze:** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Integrala dată pe care o notăm cu I se scrie:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx.$$

Folosind schimbarea de variabilă $\varphi(x) = -x$, $\varphi : [-1;0] \to [0;1]$ în prima integrală şi avem:

$$I = -\int_1^0 \frac{dx}{-\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{-\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sin^{1008}x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{\sin^{2016}x + 1 + x^2}\right)^2 - \left(\sin^{1008}x\right)^2}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2+\sin^{2016}x}\right)}{2\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2+\sin^{2016}x}\right)}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

L:429. **Rezolvați în** $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ **ecuația** $x! = xy + x + y$.

Marian Voinea, Florentin Visescu, Bucureşti

Rezolvare: Dacă $x = 0 \Rightarrow 0! = y \Rightarrow y = 1$. Dacă $y = 0 \Rightarrow x! = x \Rightarrow x = 1, x = 2$. Presupunem $x, y \geq 1$. Ecuația dată este echivalentă cu $x!+1 = (x+1)(y+1) \Rightarrow x+1 \mid x!+1$.

Din reciproca teoremei lui Willson ($p \mid (p-1)!+1 \Leftrightarrow p$ *prim*) rezultă $x+1 = p$ şi cum p este prim rezultă $y+1 = \frac{(p-1)!+1}{p} \Rightarrow y = \frac{(p-1)!-p+1}{p}$. Aşadar, $x = p-1$ şi $y = \frac{(p-1)!-p+1}{p}$, p prim.

L:430. **Fie ecuația** $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + a = 0, a \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația pentru a = 32;

b) Să se rezolve ecuația şi să se discute în funcție de $a \in \mathbb{R}$ **natura rădăcinilor ei.**

Ovidiu Țâțan , Râmnicu Sărat

Rezolvare: Pentru $a = 32$ obținem succesiv:

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 32 = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x^2 - 16x + 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\left(x^2 - 4x + 12\right) + 4\left(x^2 - 4x + 12\right) = 0 \Rightarrow \left(x^2+4\right)\left(x^2 - 4x + 12\right) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2i, x_{3,4} = 2 \pm 2i.$$

Notăm $x = y + \alpha$, cu $y, \alpha \in \mathbb{R}$ şi determinăm α astfel încât coeficienții termenilor care îi conțin pe x^3 şi x să fie nuli. $\left(y+\alpha\right)^4 - 4\left(y+\alpha\right)^3 + 12\left(y+\alpha\right)^2 - 16\left(y+\alpha\right) + a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^4+(4\alpha-4)y^3+(6\alpha^2-12\alpha+12)y^2+(4\alpha^3-12\alpha^2+24\alpha-16)y+(\alpha^4-4\alpha^3+12\alpha^2-16\alpha+a)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha=1$. Pentru $\alpha=1$, obținem ecuația bipătrată $y^4+6y^2+a-7=0$.

Notând $y^2=t\Rightarrow t^2+6t+a-7=0\Rightarrow \Delta=4(16-a)$

Dacă $\Delta\geq 0\Rightarrow a\leq 16\Rightarrow t_{1,2}\in\mathbb{R}\Rightarrow t_{1,2}=-3\pm\sqrt{16-a}\Rightarrow$

$\Rightarrow t_1=-3-\sqrt{16-a}<0\Rightarrow y_{1,2}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Rightarrow x_{1,2}=y_{1,2}+1\in\mathbb{C}-\mathbb{R}, x_{1,2}=\pm i\sqrt{3+\sqrt{16-a}}+1$

$t_2=-3+\sqrt{16-a}\geq 0\Leftrightarrow a\leq 7\Rightarrow y_{3,4}\in\mathbb{R}\Rightarrow x_{3,4}=y_{3,4}+1\in\mathbb{R}, x_{3,4}=\pm\sqrt{\sqrt{16-a}-3}+1$

$t_2=-3+\sqrt{16-a}<0\Leftrightarrow a\in(7,16]\Rightarrow y_{3,4}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Rightarrow x_{3,4}=y_{3,4}+1\in\mathbb{C}-\mathbb{R}, x_{3,4}=\pm i\sqrt{3-\sqrt{16-a}}+1$

Dacă $\Delta<0\Rightarrow a>16\Rightarrow t_{1,2}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Rightarrow y_{1,2,3,4}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Rightarrow x_{1,2,3,4}=y_{1,2,3,4}+1\in\mathbb{C}-\mathbb{R}.$

L:431. Dacă ecuația $x^3-x+3=0$ are rădăcinile a,b şi c determinați polinomul monic care are rădăcinile a^5,b^5 şi c^5.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

***Rezolvare*:** Avem $a+b+c=0, ab+bc+ca=-1, abc=-3$. Polinomul cerut este dat de

$P(x)=(x-a^5)(x-b^5)(x-c^5)=x^3-(a^5+b^5+c^5)x^2+(a^5b^5+b^5c^5+c^5a^5)x-(abc)^5=$

$=x^3-S_5x^2+Px+243$, unde $S_5=a^5+b^5+c^5$ şi $P=(ab)^5+(bc)^5+(ca)^5$.

Avem $S_1=0, S_2=2, \ldots$, şi din $x^3=x-3$ rezultă că $S_{n+3}=S_{n+1}-3S_n, \forall n\geq 0$.

Avem $P=\dfrac{S_5^2-S_{10}}{2}$. Rezultă că $x^3+15x^2+44x+243=0$ are rădăcinile a^5,b^5 şi c^5. □

Paradoxul anunțului

Pe un zid este scris următorul anunț: **„Vă rugăm să ignorați acest anunț ”.** Ce facem? Îl luăm în considerare sau îl ignorăm ?

Acesta este un paradox, căci dacă îl luăm în considerare, conform conținutului lui , trebuie să-l ignorăm. Dar, dacă îl ignorăm atunci înseamnă că l-am respectat.

„ Munca în echipă presupune în primul rând să-ți pierzi jumătate din timp explicându-le celorlalți de ce nu au dreptate. ”
George Wolinski (1934-2015)
ucis pe 7 ianuarie 2015 în atentatul terorist de la Charlie - Hebdo



„ Lucrurile nu sunt greu de făcut.
Greu este să te pui în starea de a le face. ”
Constantin Brâncuşi (1876-1957)



4. Probleme propuse

▪ Învățământ primar

P:367. Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ care se împart exact cu numerele $2a+3b$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

P:368. În sertare se distribuie creioane. Dacă se distribuie câte 3 creioane într-un sertar, rămân 3 creioane nedistribuite, iar dacă se distribuie câte 5 creioane, rămân 5 sertare neocupate. Câte creioane şi câte sertare sunt ?

Valentina Anghel, Buzău

P:369. Florin, Mihaela şi Gabi au plecat la cumpărături, având fiecare câte 1005 lei. Câți lei a cheltuit fiecare, dacă resturile sunt respectiv numere consecutive, care valorează împreună cât suma cheltuită de Gabi?

Laura Mariana Ilie, Buzău

P:370. Ioana are de rezolvat în vacanța de vară un număr de probleme. Ea constată că dacă rezolvă în luna iunie jumătate din numărul total de probleme plus 2, în luna iulie jumătate din cele rămase plus 3, iar în august jumătate din cele rămase plus 4, îi mai rămân pentru luna septembrie un număr de probleme reprezentând cel mai mic număr natural de trei cifre distincte. Câte probleme a avut de rezolvat Ioana în vacanța de vară?

Nicoleta Gabriela Lupşan, Berca, Buzău

P:371. Mara şi Alina au împreună 201 păpuşi. Diferența dintre păpuşile Marei şi triplul păpuşilor Alinei este mai mare cu 1 decât numărul păpuşilor Alinei. Câte păpuşi are fiecare fată?

Cristian Cosmin Lupşan, Buzău

P:372. Să se afle două numere care împărțite dau câtul 1 şi restul 4, iar câtul dintre suma şi diferența acestora reprezintă o cincisprezecime din 725. Rezolvați în două moduri.

Gabriela- Maria Marinescu, Buzău

P:373. La o librărie s-au adus caiete şi cărți, în total 220 de bucăți care costă 825 lei. Numărul cărților este de 3 ori mai mare decât numărul caietelor, iar o carte costă de 2 ori mai mult decât un caiet. Cât costă un caiet şi cât costă o carte?

Viorica Rotărescu, Viorel Rotărescu, Vadu Paşii, Buzău

P:374. Pentru olimpiada de matematică au fost propuse mai multe tipuri de probleme. Pentru fiecare rezultat corect se acordă 5 puncte, iar pentru un rezultat greşit se scad 20 de puncte. Ştiind că Ştefan a primit 50 de puncte pentru 40 de probleme, află câte a rezolvat corect.

Iuliana Stan, Buzău

P:375. Dublul unui număr se adună cu 50. Suma obişnuită se scade din 400, iar rezultatul este 270. Care este numărul?

Daniela Ticea, Buzău

P:376. Dacă pun pe o tavă 3 căni, rămân 5 căni fără tavă, iar dacă pun câte 4 căni pe tavă, rămân 2 tăvi goale. Află câte căni şi câte tăvi sunt.

Elena Zainea, Buzău

▪ Clasa a V-a

G:596. Determinați mulțimile X şi Y ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $X \cup Y = \{2008;2009;2010;2011;2012;2013\}$; **b)** $X \cap Y = \{2008;2009\}$;

c) $X \cap \{2010;2011\} = \varnothing$; **d)** $Y \cap \{2012;2013\} = \varnothing$;

Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

G:597. Comparați numerele $A = 1 + 2014 + 2014^2 + 2014^3 + ... + 2014^{2015}$ şi $B = \frac{2014^{2016}}{2013} - \frac{1}{2013}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:598. Arătați că $\frac{1}{1489} + \frac{1}{1490} + \frac{1}{1491} + ... + \frac{1}{1983} + \frac{1}{1984} > \frac{1}{4}$.

Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

G:599. Fie mulțimea $M = \{1;3;5;.....;151\}$. Arătați că mulțimea M se poate împărți în 38 de submulțimi disjuncte două câte două, fiecare conținând două elemente a căror sumă să fie cub perfect.

Marian Voinea , Bucureşti

G:600. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2b - 3a = 17$. Arătați că $b \geq 10$.

Ionuț Voinea Florin, Bucureşti

G:601. Să se determine cardinalul mulțimii $\left\{\overline{abc} / \, a + b = ac,\right\}$ ştiind că b şi c sunt numere prime.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:602. Arătați că numărul $A = \frac{2^{2015} - 2^{2010}}{2^{2014} + 2^{2008}} \cdot 2015$ este pătrat perfect.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

G:603. a) Determinați numerele prime a, b, c ştiind că $13 \cdot a + 78 \cdot b + 86 \cdot c = 2015$.

b) Dacă $\overline{abb} + \overline{bac} + \overline{cbc} = 2013 + 3 \cdot c + x$ şi $x > 11$, arătați că numărul x este număr compus.

Mariana Mitea , Cugir, Alba

G:604. Demonstrați că numărul $117^{6k+1}, k \in \mathbb{N}^*$ se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte şi ca o diferență de două cuburi perfecte.

Ionuț Voinea Florin, Bucureşti

G:605. Arătați că fracțiile $F_1 = \frac{2^{n+1} \cdot 5^{m+2} \cdot 10}{3^{p+3} \cdot 7^{q+1} \cdot 21}$ şi $F_2 = \frac{2^n \cdot 5^{m+3} \cdot 4}{3^{p+4} \cdot 7^q \cdot 49}$ sunt echivalente, oricare ar fi $n, m, p, q \in \mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

▪ Clasa a VI- a

G:606. **Arătați** că numărul $A = 1! + 2! + 3! + ... + 2015!$ nu este pătrat perfect, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot .... \cdot n, \; n \in \mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:607. Cercetați dacă fracția $\frac{8n+3}{5n+2}$ este ireductibilă , pentru orice n număr natural.

Ion Stănescu, Buzău

G:608. Să se arate că pentru orice număr natural n , expresia $E=2\cdot 10^{n+3}+3\cdot 10^{n+2}+4$, este divizibilă cu 36. **Marin Simion,** Rm. Sărat

G:609. Dacă $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ şi $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+z}=\frac{z}{x+y}$ atunci $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}$ este un cub perfect.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:610. Determinați numerele naturale a,b,c ştiind că : $\frac{a+2014}{2014}=\frac{b+2015}{2015}=\frac{c+2016}{2016}$ şi 2a + 3b = 5c-7.

Marin Simon, Rm. Sărat

G:611. Fie $a,b\in(0;\infty)$ astfel încât $a+b=2$. Arătați că $(ab)^{2016}(a^2+b^2)\le 2$. În ce caz avem egalitate?

Constantina Prunaru, Roxana Vasile, Craiova

G:612. Să se afle câte numere de forma $\overline{abcde}$ există, ştiind că $\overline{abc}$ este prim şi că:

$\overline{ab}$(a + bd + ce) = 150. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

▪ Clasa a VII-a

G:613. Fie numărul $A=\sqrt{2015^4+2\cdot 2014^2-4029^2}$. Arătați că $\sqrt{A+1}\in\mathbb{N}$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

G:614. Să se demonstreze că $\sqrt{A}\in\mathbb{N}$ unde

$A=\left[\left(\frac{2n-1}{4}-\frac{n+1}{3}+\frac{n^2+8}{12}\right):\frac{n+1}{6}+\frac{n^2+n}{2}\right]\bullet 2,\ \forall n\in\mathbb{N}.$ **Nicolae Ivăşchescu,** Canada

G:615. Arătați că $\frac{(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{3}\ge ab+bc+ac,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:616. a) Arătați că $\left(x^2+7x+1\right)^2 \rangle\ 9x\left(x+1\right)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Folosind eventual a) să se arate că $A=9^{8052}+5\cdot 9^{6039}+33\cdot 9^{4026}+5\cdot 9^{2013}+1$ este compus.

Monica Matei, Carmen Terheci, Craiova

G:617. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=2$. Arătați că $3(x+y)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$.

Constantina Prunaru, Craiova

G:618. Determinați numerele $\overline{abcd}$ formate din cifre prime, ştiind că:
2a + ad + 3b + bd + cd^2 + 4cd + 3c = d^3 + $7d^2$ + 15d + 9.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:619. Se consideră pătratul $ABCD$. În exteriorul pătratului se construiesc triunghiurile $\triangle ABE$, $\triangle BCF$, $\triangle CDG$ şi $\triangle ADH$ echilaterale. Arătați că raportul dintre aria suprafeței patrulaterului $EFGH$ şi dublul ariei suprafeței $\triangle CHE$ este supraunitar.

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

G:621. Demonstrați că în interiorul unui pătrat de latură a = 32 cm, există 128 de puncte distincte astfel încât distanța dintre oricare două astfel de puncte vecine determinate este de $\left(2-\sqrt{2}\right)$ cm şi alte 512 puncte distincte astfel încât distanța dintre ele să fie de $\sqrt{2}$ cm respectiv 2 cm.

Dumitru Vieriu, Dorohoi

G:622. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=2$ şi $BC=1$. Fie $M\in[AB]$, $N\in[BC], P\in[CD]$şi $Q\in[DA]$, calculați : $\min(MN^2+NP^2+PQ^2+QM^2)$, respectiv $\max(MN^2+NP^2+PQ^2+QM^2)$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **, Neculai Stanciu,** Buzău

G:623. Fie ABCD un trapez cu $AB=2015$ şi CD astfel încât $CD\,\|\,AB$. Fie $M,P\in(AD)$şi $N,Q\in(BC)$ astfel încât $MN\,\|\,PQ\,\|\,AB$ şi Aria (DCNM) = A(MNQP) + Aria (PQAB). Determinați lungimile segmentelor $[MN]$şi $[PQ]$.

Lucian Tuțescu, Roxana Vasile, Craiova

▪ Clasa a VIII-a

G:624. Să se demonstreze inegalitatea: $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}+\sqrt{132+\sqrt{132+\sqrt{132}}}<17$.

Cristina Isaia, Galați

G:625. Să se arate că numărul $A=9n^4-18n^3+3n^2+6n+1$ este natural impar şi pătrat perfect, pentru orice $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$. **Viorica Dogaru,** Giurgiu

G:626. Determinați numerele întregi $x_1,x_2,x_3,.....,x_{2015}$ care verifică egalitatea: $x_1^{2015}+5x_2^{2015}+5^2x_3^{2015}+.....+5^{2014}x_{2015}^{2015}=2015x_1x_2\cdot...\cdot x_{2015}$.

Dumitru Săvulescu, Marian Voinea, Bucureşti

G:627. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(5x+3)=10x-9$ şi $g(x)=2x-15$. Arătați că funcțiile sunt egale.

Claudia Popa, Buzău

G:628. Aflați valorile întregi ale lui n pentru care fracția $F=\dfrac{n^3-n^2-48}{n^3+5n^2+18n+24}\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:629. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ sistemul $\begin{cases}x\cdot y+x\cdot z=14\\ x\cdot y+y\cdot z=18\\ x\cdot z+y\cdot z=20\end{cases}$;

Mircea Mario Stoica, Arad

G:630. Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{3x-2}{7}\right]=x-1149$, $x\in\mathbb{R}$ unde, $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

G:631. Demonstrați că într-un triunghi cu mijloacele înălțimilor coliniare, suma dintre lungimea razei cercului înscris şi lungimea razei cercului circumscris este egală cu semisuma lungimilor a două laturi ale triunghiului.

Dumitru Vieriu, Dorohoi

G:632. Dacă $a,\ b,\ c>0$ si $n\geq 0$ demonstrați că $\frac{a^3}{b+nc}+\frac{b^3}{c+na}+\frac{c^3}{a+nb}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{n+1}$.

Marin Chirciu, Piteşti

G:633. Dacă $a,\ b,\ c>0$ să se arate că: $\frac{a^3+b^3}{ab(a+b)+c^3}+\frac{b^3+c^3}{bc(b+c)+a^3}+\frac{c^3+a^3}{ca(c+a)+b^3}\geq 2$.

Marin Chirciu, Piteşti

G:634. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se înscrie prisma triunghiulară regulată $CMNC'M'N'$, unde $M\in(AB), N\in(AD), M'\in(A'B'), N'\in(A'D')$. Determinați raportul volumelor celor două corpuri: $\frac{V_{cub}}{V_{prisma}}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti , **Neculai Stanciu,** Buzău

G:635. Fie ABCD un romb cu AB = 3a, iar AC= 4a, unde $AC\cap BD=\{O\}$; în interiorul ΔBDC se ia un punct E astfel încât $CBE=CDE$.

a) Arătați că punctele A, C, E sunt coliniare;

b) Pe planul rombului se ridică perpendiculara $ME=a\sqrt{3}$; dacă CE = a , aflați măsura unghiului diedru dintre (ABC) şi (MBD), precum şi $m(MAC)$.

c) Dacă N este mijlocul lui AM, iar $NE\cap MO=\{P\}$, arătați că $NE\perp(MBD)$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a IX-a

L:432. Să se demonstreze că nici o putere de număr prim nu poate fi număr perfect. (Numim număr perfect, acel număr întreg care este egal cu suma divizorilor săi din care se exclude el însuşi).

Lucian Dan Grigore, Craiova

L:433. Determinați numărul şi poziția soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, $m\in\mathbb{R}$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+8x+10, x\in(-\infty,-2]\\ -2, x\in(-2,1)\\ -x^2+6x-7, x\in[1,\infty)\end{cases}.$$

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

L:434. Fie $a,b\in(0;1)$ cu $a+b=1$. Să se arate că $\frac{5b+23ba^3}{1-a^6}+\frac{5a+23ab^3}{1-b^6}\geq 8$.

Marcel Chiriță, Bucureşti

L:435. Fie numerele reale nenule şi pozitive a,b,c. Să se demonstreze că $(b+c)^2,(c+a)^2,(a+b)^2$ sunt laturile unui triunghi dacă şi numai dacă $a+b+c>\max\left\{\frac{bc}{a},\frac{ca}{b},\frac{ab}{c}\right\}$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:436. Să se determine $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ astfel încât $x-y=x^3-y^3=x^5-y^5$.

Ana Cismaru, Malu Mare, Dolj

L:437. Determinați toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât:
$x^2y^2-x^2-xy-y^2+x+y=0$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti, **Neculai Stanciu,** Buzău

L:438. În triunghiul ABC cu notațiile obişnuite şi cu $m(A)=90^0$ se ştie că a = 2b – c. Să se calculeze $\sin 2B$.

Adrian Stan, Buzău

L:439. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:
$12\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\le \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. **Marin Chirciu,** Piteşti

L:440. Dacă ABCD este un patrulater convex care satisface simultan condițiile:
i) $AB+CD\ge BC+AD$; b) Cercurile construite pe AB şi CD ca diametre sunt tangente exterioare. Demonstrați că ABCD este trapez, paralelogram sau romb.

Ion Pătraşcu, Craiova

L:441. În interiorul pătratului ABCD cu latura de lungime 1 cm se consideră un punct M astfel încât $MBC=MDB=15^0$. Să se calculeze lungimea segmentului $[MC]$.

Marcel Chiriță, Bucureşti

L:442 . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ştiind că înălțimea din A este jumătate din înălțimea din C şi bisectoarea din A este jumătate din bisectoarea din C .

Constantin Apostol, Rm. Sărat

▪ Clasa a X-a

L:443. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x^2-2x+1}-3=0$. **Adrian Stan**, Buzău

L:444. Fie $n,p\in\mathbb{N}^*,\ n\ge p$. Arătați că $\left\{\sum_{k=p}^{n}\sqrt[(k+1)!]{k+1}\right\}<\frac{1}{p!}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

Dana Camelia, Ileanan Didu, Craiova

L:445. Fie $x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$. Arătați că $\sin 2x<\frac{1}{2x^2-x^4}$.

Lucian Tuțescu, Lucian Dan Grigore, Craiova

L:446. Numerele complexe a, b, c, având modulele egale, sunt afixele unui triunghi isoscel. Arătați că numerele complexe ab, bc, ac sunt de asemenea afixele vârfurilor unui triunghi isoscel.

Ana Cismaru, Malu Mare, Dolj

L:447. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}=\sqrt[5]{x+242}$.

Lucian Tuțescu, Craiova, **Andrei Micu,** Melineşti, Dolj

L:448. Fie $x_1,x_2,....,x_{2n+1},\ n\ge 1$, numere strict pozitive astfel încât $x_1+x_2+....+x_{2n+1}=2n+1$.

Arătați că $\frac{x_1}{nx_1^2+n+1}+\frac{x_2}{nx_2^2+n+1}+....+\frac{x_{2n+1}}{nx_{2n+1}^2+n+1}\le 1$. În cez avem egalitate ?

Lucian Tuțescu, Teodora Rădulescu, Craiova

L:449. Calculați suma $S=\sum_{i=0}^{2015}\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}$ unde $x_i=\frac{i}{2015}$, $i\in\{0;1;2;...;2015\}$.

Cristian Moanță, Oana Preda, Craiova

L:450. Dacă $a=\sqrt[2012]{2012}$, $a_0=1, a_{n+1}=a^{a_n}\ (n\ge 0)$ comparați numerele: 2012 şi a_{2013} (de exemplu, $a_3=a^{a^a}$, un turn de puteri ale lui a). **Neagu Mihai,** Rm. Sărat

L:451. Fie $n,\ k\in\mathbb{N},\ n\ge k\ge 1$. Să se arate că numărul $x=C_{2n-1}^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(C_{n+k-1}^k C_{n+k}^k-C_{n+k-1}^n C_{n+k}^n\right)$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:452. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{1+C_{n-1}^1}+\sqrt[3]{1+C_{n-1}^2}+...+\sqrt[n]{1+C_{n-1}^{n-1}}<\frac{2^n+n^2-2n-1}{n}, n\in N, n\ge 2.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:453. În triunghiul ABC, mediana $[AM]$, $(M\in[BC])$, are mijlocul D, iar perpendiculara pe mijlocul segmentului $[DM]$ trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC. Să se arate că $m(BDC)=90^0$.

Marcel Chiriță, Bucureşti

L:454. Dacă $a,\ b,\ c>0$ astfel încât $abc=1$ şi $-9\le n\le 4$, demonstrați că:

$$a+b+c+\frac{n}{ab+bc+ca}\ge\frac{n+9}{3}.$$

Marin Chirciu, Piteşti

▪ Clasa a XI-a

L:455. Fie $(a_n)_{n\ge 1}\in\mathbb{R}$ cu $a_1=1$ şi $a_{n+1}=a_n+(n+1)b^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ b\rangle 1$. Determinați termenul general al şirului $(a_n)_{n\ge 1}$ şi calculați $\lim_{n\to\infty}\left[(b-1)^2\cdot a_n\right]^{\sin\frac{1}{n}}$.

Stelian Piscan, Giurgiu

L:456. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}n^2a_n$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti , **Neculai Stanciu,** Buzău

L:457. Să se calculeze: $\lim_{x\to 1}\frac{tg\sqrt{4x+2}-tg\sqrt{2x+4}}{tg\sqrt{2x+1}-tg\sqrt{x+2}}$.

Adrian Stan, Buzău

L:458. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{k=2}^{i}\left[\sqrt{(5k-4)(5k+1)}\right]}{\sum\limits_{k=2}^{n}k^2}$. **Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

L:459. Determinați toate tripletele (x,y,z) de numere reale astfel încât:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\log_2(4-y);\quad \frac{y}{\sqrt{y^2-2y+4}}=\log_2(4-z);\quad \frac{z}{\sqrt{z^2-2z+4}}=\log_2(4-x).$$

Neagu Mihai, Rm. Sărat

L:460. Fie ABC un triunghi, AD înălțimea din A, E şi F mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Pentru un punct oarecare P din planul triunghiului ABC , fie Y şi Z simetricele acestuia față de punctele E, respectiv F. Dacă P' este mijlocul lui DP şi $M=BY\cap CZ$, arătați că dreapta MP' trece printr-un punct fix.

Neculai Stanciu, Buzău**, şi Titu Zvonaru,** Comăneşti

L:461. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-2b)\left(\dfrac{a}{a-b}\right)^x+(2a-b)\left(\dfrac{b}{a-b}\right)^x-a-b$ cu $a\rangle 2,\ b\rangle 0$. Să se arate că f nu este injectivă şi să se rezolve ecuațiile:

$(a-2b)\cdot a^x+(2a-b)\cdot b^x=(a+b)\cdot(a-b)^x$ în $\mathbb{R}$ şi $\dfrac{a^n+b^n}{a^n+(a-b)^n}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$ în $\mathbb{N}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:462. Un determinant de ordinul trei are valoarea d. Să se calculeze semnul lui d ştiind că elementele de pe diagonala principală sunt egale cu $\dfrac{1}{2}$, iar suma elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană este egală cu 1.

Constantin Dinu, Buzău

L:463. Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$, de forma $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$, care verifică egalitatea $X^2+X=\dfrac{1}{4}I_2$.

Constantin Dinu, Buzău

L:464. Dacă $A\in M_2(R)$ să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\det(A+nI_2)}{\det(A^2+nI_2)}\right]^n=e^{Tr(A)-Tr^2(A)+2\det(A)}$,

unde Tr(A) reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A, det(A), determinantul matricei A.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:465. Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că dacă exista $x\in[a,b]$ astfel încât $f(x)-f'(x)\notin\{f(a);f(b)\}$, atunci $\ln\left(\left|f'(x)-f(x)+f(a)\right|\right)-\ln\left(\left|f'(x)-f(x)+f(b)\right|\right)\neq a-b.$ Demonstrați că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0.$

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

▪ Clasa a XII-a

L:466. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $2x^5+5x^4-5x^2+1=0$; b) $x^6+3x^5-5x^3+3x-1=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:467. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X]$ polinoame neconstante care verifică egalitatea:

$f(x^{2016}+x+1)=f(x)\cdot g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Arătați că gradul polinomului f este par.

Dumitru Săvulescu, Bucureşti

L:468. a) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^{2n+1}-x^{2n}-x^{2n-1}-...-x^2-x-2=0,\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că pentru $n\in\mathbb{N}^*$ există egalitățile:

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}+\sin\frac{3\pi}{2n+1}+\sin\frac{5\pi}{2n+1}+....+\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\sin\frac{6\pi}{2n+1}+....+\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$$

,

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+....+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+....+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:469. Fie $F:[0;1]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=e^{-x^2}$.

a) Ştiind că $F(0)=0$, să se arate că $\int_0^1 F(x)dx\le\frac{1}{2}$;

b) Să se arate că $\frac{1}{e}<\int_0^1 f(x)dx<\frac{\pi}{4}$. **Adrian Stan ,** Buzău

L:470. Calculați $I=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln\left[(1+t)(1+t^4)\right]dt$.

Răzvan Drînceanu, Gabriel Drînceanu , Craiova

L:471. Calculați: $\int_0^a\frac{dx}{1+a^{bx-\frac{ab}{2}}}dx$, unde $a>0,a\neq1,b\in R^*$.

(In legătură cu problema 25432/GM/11/2005, Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran, Arad}

Ghorghe Ghiță, Buzău

L:472. Dacă f,f',f'' şi f''' sunt funcții continue pe $[0,4]$ astfel încât

$f(4)=3,f'(4)=2,f''(4)=1$ şi $\int_0^4 f(x)dx=5$, calculați: $\int_0^4 x^3f'''(x)dx$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:473. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi legea de compoziție $x*y=axy+bx+by+c$, definită pe $\mathbb{R}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Determinați b şi c în funcție de a astfel încât - 4 să fie element neutru;

b) Cu b şi c astfel determinați, arătați că legea este asociativă. Aflați apoi a, ştiind că simetricul lui – 6 este -6;

c) Pentru a, b, c determinați anterior, calculați 1*2*3*....*n, $n\in\mathbb{N}$.

Constantin Dinu, Buzău

"God used beautiful mathematics in creating the world".
Paul Dirac (1902-1984)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before September 30 , 2016.

PROPOSALS – QUICKIES

Q25. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. Prove that: if a,b,c,d are positive real numbers such that $a+b+c+d=1$, then

$$\frac{1}{a^3+3bcd}+\frac{1}{b^3+3cda}+\frac{1}{c^3+3dab}+\frac{1}{d^3+3abc}\le\frac{1}{4abcd}.$$

Q26. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. In all triangle ABC holds $\sum a^2m_b^2m_c^2\ge 27s^2R^2r^2$.

Q27. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute $I_n=\int\frac{x^{n+1}+(n-1)(n+1)x^{n-1}}{(x^n+n^2)^2}dx$, unde $n\in N^*$.

Q28. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If $B_n(t)=n^{1-t}\left(\frac{(n+1)^{2t}}{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t}-\frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\right)$, with $t>0$, then compute $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(t)$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q21. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Let ABC be a triangle with circumcenter O and incenter I. Prove that the line OI and the internal bisector of angle $\angle CAB$ are perpendicular if and only if $BC=\frac{AB+AC}{2}$.

Solution by author. With usual notations we have

$$w_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c};AI=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot w_a=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{s};OI^2=R^2-2Rr;AO^2=R^2.$$

By Pitagora' s theorem we have

$$OI\perp AI\Leftrightarrow OI^2+AI^2=AO^2\Leftrightarrow R^2-2Rr+\frac{b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{p^2}=R^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{b^2c^2}{p^2}\cdot\frac{p(p-a)}{bc}=2Rr\Leftrightarrow\frac{bc(p-a)}{p}=2\cdot\frac{abc}{4S}\cdot\frac{S}{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc(p-a)}{p}=\frac{abc}{2p}\Leftrightarrow 2(p-a)=a\Leftrightarrow b+c-a=a\Leftrightarrow a=\frac{b+c}{2}.$$

Q22. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. In all triangle ABC holds

$$\sum tg\frac{A}{2}\sqrt{tg^2\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg^2\frac{C}{2}}\geq\sqrt{3}.$$

Solution by Marius Drăgan, Bucharest.

Using the inequality $x^2+xy+y^2\geq\frac{3}{4}(x+y)^2$ and the identity

$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$, we obtain:

$$\sum tg\frac{A}{2}\sqrt{tg^2\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg^2\frac{C}{2}}\geq\sum tg\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=\sqrt{3}.$$

Q23. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Show that in any triangle ABC with usual notations holds $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geq\frac{6R}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$.

Solution by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania. By AM-GM inequality and well-known formulas yields that

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{h_ah_bh_c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\frac{8S^3}{abc}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{abc}}{S}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{abc}}{\frac{abc}{4R}}=\frac{6R}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}},\ \text{q.e.d.}$$

The equlity occurs iff triangle ABC is equilateral.

Also solved by Marius Drăgan, Bucharest.

Q24. Proposed by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

If $0<x<1$, then show that

a) $\frac{x+1}{2}+\sqrt{x}<\frac{2x}{1+x}+\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}+\sqrt{x}<1+x$.

Solution by author. a)We have

$$\sqrt{x}+\frac{(x-1)^2}{2(x+1)}<\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}\cdot\frac{(x-1)^2}{2(x+1)}+\frac{(x-1)^4}{4(x+1)^2}<\frac{x^2+1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+6x+1}{4(x+1)}>\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{x}-1)^4}{4(x+1)}>0,\ \text{true}$$

b)We have

$$x+1-\sqrt{x}>\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\Leftrightarrow x^2+3x+1-2\sqrt{x}(x+1)>\frac{x^2+1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x\sqrt{x}+6x-4\sqrt{x}+1>0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)^4>0,\ \text{true}$$

Also solved by Ángel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

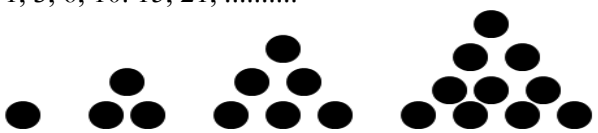


„ Cel mai important lucru e să vrei ceea ce poți. ”
Andre Malraux (1901-1976)

6. Caleidoscop matematic

1. Numere triunghiulare

Numărul de bile cu care putem alcătui un triunghi echilateral îl numim număr triunghiular. De exemplu, 1, 3, 6, 10. 15, 21, ...



Puteți spune care este al zecelea număr triunghiular ?

2. O problemă cu un ... testament.

Un general roman, înainte de a pleca la război, a lăsat un testament pentru soția sa care aştepta un copil. Astfel, în testament se menționa că dacă ea va naşte un băiat atunci să-i dea lui două treimi din avere iar ea să ia o treime din avere. Dacă însă, va naşte o fată, să i se dea fetei o treime din avere iar mama să ia două treimi. Cum generalul muri în scurt timp iar soția născu doi gemeni, un băiat şi o fată, cum credeți că ar trebui să se împartă averea cât mai aproape de dorința generalului ?

3. Cum este mai bine să plătiți ?

Dacă vi se oferă modalitatea de a vă achiziționa un produs în valoare de 500 de euro , cum credeți că este mai convenabil, să plătiți cash sau să plătiți azi 1 euro şi apoi timp de 10 de luni să plătiți în fiecare lună dublul sumei plătită în luna precedentă?

4. Pornind de la o problemă propusă de *D.M. Bătinețu-Giurgiu* şi *Neculai Stanciu* în G.M.-B, nr. 12/2013, prezentăm soluțiile (obținute cu ajutorul calculatorului) pentru următoarele două probleme:

a)Să se determine cifrele $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,$ distincte două câte două, astfel încât $\overline{abcde}=f\cdot\overline{ghij}$:

17082 = 3x5694 20457 = 3x6819 20754 = 3x6918 24507 = 3x8169
27504 = 3x9168 15628 = 4x3907 28156 = 4x7039 36508 = 4x9127
34902 = 6x5817 21658 = 7x3094 28651 = 7x4093 65128 = 7x9304
65821 = 7x9403

b)Să se determine cifrele $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,$ distincte două câte două, astfel încât $\overline{abcde}=\overline{fg}\cdot\overline{hij}$:

15678 = 39x402 16038 = 27x594 16038 = 54x297 17820 = 36x495
17820 = 45x396 19084 = 52x367 26910 = 78x345 32890 = 46x715
58401 = 63x927

Titu Zvonaru, Comăneşti.

5. În G.M.-B, nr. 12/2013, *D.M. Bătineţu-Giurgiu* şi *Neculai Stanciu* au propus următoarea problemă:

''Determinaţi două numere naturale $\overline{abcde}$ şi $\overline{fghij}$ astfel încât $2\cdot\overline{abcde}=\overline{fghij}$ şi în scrierea celor două numere să se utilizeze toate cifrele de la 0 la 9.''

În numărul 6-7-8/2014 al aceleiaşi reviste a apărut soluţia acestei probleme, obţinându-se exemplul $2\times 13485 = 26970$.

În SM, nr. 14 din 2014, *Roxana Mihaela Stanciu* şi *Nela Ciceu* au prezentat toate soluţiile. Deoarece există trei omisiuni, revenim cu soluţiile obţinute de data asta cu ajutorul calculatorului. Acelaşi program ne permite obţinerea tuturor soluţiilor pentru problemele înrudite, înlocuind factorul 2 cu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

26970 = 2x13485	27096 = 2x13548	27690 = 2x13845	29076 = 2x14538
29370 = 2x14685	29670 = 2x14835	29706 = 2x14853	29730 = 2x14865
30972 = 2x15486	32970 = 2x16485	37092 = 2x18546	37290 = 2x18645
41358 = 2x20679	41538 = 2x20769	41586 = 2x20793	46158 = 2x23079
53418 = 2x26709	53814 = 2x26907	54138 = 2x27069	54186 = 2x27093
54618 = 2x27309	58134 = 2x29067	58146 = 2x29073	58614 = 2x29307
61458 = 2x30729	61584 = 2x30792	61854 = 2x30927	62970 = 2x31485
64158 = 2x32079	65418 = 2x32709	65814 = 2x32907	69702 = 2x34851
70296 = 2x35148	70962 = 2x35481	76290 = 2x38145	76902 = 2x38451
90276 = 2x45138	90372 = 2x45186	90762 = 2x45381	92370 = 2x46185
93702 = 2x46851	96270 = 2x48135	96702 = 2x48351	97026 = 2x48513
97032 = 2x48516	97062 = 2x48531	97230 = 2x48615	97302 = 2x48651
50382 = 3x16794	53082 = 3x17694	61749 = 3x20583	69174 = 3x23058
91746 = 3x30582	96174 = 3x32058		
60948 = 4x15237	68940 = 4x17235	69408 = 4x17352	81576 = 4x20394
81756 = 4x20439	86940 = 4x21735	94068 = 4x23517	94860 = 4x23715
67290 = 5x13458	67920 = 5x13584	69270 = 5x13854	72690 = 5x14538
72930 = 5x14586	73290 = 5x14658	76920 = 5x15384	79230 = 5x15846
79320 = 5x15864	92670 = 5x18534	92730 = 5x18546	93270 = 5x18654
98532 = 7x14076			
83672 = 8x10459	83752 = 8x10469	84296 = 8x10537	84632 = 8x10579
84736 = 8x10592	85392 = 8x10674	85432 = 8x10679	85936 = 8x10742
86352 = 8x10794	87456 = 8x10932	87536 = 8x10942	87624 = 8x10953
87632 = 8x10954	96584 = 8x12073	98456 = 8x12307	98760 = 8x12345
95742 = 9x10638	95823 = 9x10647	97524 = 9x10836	

Titu Zvonaru, Comăneşti.

Pe un aeroport este depistat un om de ştiinţă având asupra lui o bombă care vroia să se îmbarce într-un avion pentru a ajunge la o conferinţă. Luat la întrebări de securitatea aeroportului, de ce are asupra lui bomba, acesta răspunde.

- Staţi să vedeţi. Ştiaţi că probabilitatea ca cineva să se urce într-un avion cu o bombă este de 1 la 1000?
- Ei bine, şi? Vroiaţi să urcaţi într-un avion şi să-l aruncaţi în aer?
- Nicidecum. Nu aţi înţeles. Pentru siguranţa mea şi a celorlalţi m-am gândit să urc eu cu o bombă căci statistic vorbind acum, probabilitatea ca două persoane să urce cu bombe în acelaşi avion este de 1 la 1000000, aşadar suntem mult mai în siguranţă acum căci, probabilitatea ca cineva să urce cu o bombă este acum de 1 la 1000000.



„ Nu rosti cuvinte aspre căci se vor îndrepta împotriva ta.
Cuvintele spuse la mânie rănesc, iar răul se întoarce. ”
Buddha(cca 623-543 î.e.n)



7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 17** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 18** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Octombrie 2016**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



RĂSPUNSURI CALEIDOSCOP MATEMATIC NR 17:

1. Observăm că un număr triunghiular are forma $\frac{n(n+1)}{2}$. Pentru n =1 se obţine primul număr 1. Pentru n = 2 se obţine al doilea număr, 3. Pentru n = 3 se obţine al treilea număr triunghiular şi anume 6.
Aşadar, pentru n = 10 se obţine al zecelea număr care este $\frac{10\cdot 11}{2}=55$.

2. Din testament reiese clar dorinţa generalului ca băiatul să primească de două ori mai mult decât mama, iar mama de două ori mai mult decât fiica. Atunci, averea se poate împărţi în şapte părţi. Astfel, băiatul primeşte patru părţi, mama două părţi iar fata o parte.
O soluţie care ar putea să o avantajeze pe mamă ar fi ca ea să primească exact o treime din moştenire (căci o treime este mai mult decât două părţi din şapte) şi atunci copii primesc restul de două treimi din avere într-o cotă de 4 la 1, astfel, $\frac{8}{15}$ din avere primeşte băiatul iar fata $\frac{2}{15}$, căci $\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

3. Calculând suma dată pentru a doua variantă se obţine $1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{10}=2^{11}-1$ sumă ce depăşeşte 2000 euro, mai precis 2047 euro. Prin urmare, este convenabilă prima variantă de a plăti cu 500 de euro cash.

„ Cea mai înverşunată luptă este cu tine însuți.
Te afli în ambele tabere."
Voltaire(1694-1778)



RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Liceul Teoretic Pogoanele, Buzău.
Clasa a V-a: 25p. Condruz Andreea, Tudorică Alexandru ; 19p. Trifan Cătălin; Brancoveanu Ştefan, Mihalaşcu Cătălin, Stirbu Denisa, Vasile Adina;
Clasa a VI-a: 23p. Manea Petronela; 16p. Constantin Ionuț, Filip Mihaela, Trifan Cătălina;
Clasa a XI-a : 26p. Velicu Andreea; 20p. Enea Bogdan; Lupu Nicolae; **Prof. Stănescu Ion.**

Scoala Gimnazială cu clasele I-VIII, nr. 3 Cugir, Alba
Clasa a V-a: 20p**.** Andreiuc Răzvan, Neag Răzvan, Negrea Ciprian; **Prof. Călugăr Monica;**
Clasa a VI-a: 26p**.** Fernandes Daria, Ilca Georgiana, Roşu Iulia, Vetişan Alexandru, Schadi Andreas, Isarie Diana, Căprariu Adnana; **Prof. Țârlea Anca Stela;**
Clasa a VII-a: 28p**.** Dicu Andrei, Dînşorean Denisa**; Clasa a VIII-a:** 67p**.** Bel Luana, 40p. Lazăr Ariana; **Prof. Mariana Mitea.**

Colegiul " Vasile Lovinescu", Fălticeni, Suceava
Clasa a XI-a: 24p. Geoşanu Neculai, Tăbârcea Constantin; Boicu Răzvan; **Clasa a XII-a:** 50p. Mogarzan Elisabeth, Nistor Vanda; **Prof. Elena Ciobîcă**.

Colegiul Economic Buzău
Clasa a X-a: 27p**.** Aldea Aurel; **Clasa a XI-a:** 41p. Stere Elena; **Clasa a XII-a :** 40p. Dodan Marius; **Prof. Constantin Dinu;**

Şcoala Şerban Cioculescu, Găeşti, Dâmbovița
Clasa a VI-a: 23p. Gainar Maria, Ioniță Alexandra, Ioniță Adriana, Olteanu Adrian, Nae Vanesa, Dinu Lidia, Popescu Radu ; **Prof. Florin Stănescu**

Şcoala " Mihai Viteazu", Târgoviște, Dâmbovița
Clasa a VI-a : 23p. Pleşa Ştefan, **Prof. Gabriela Stănescu;**

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VII-a: 47p. Ducu Sabina, Troana Adriana.**Prof. Iuliana Traşcă.**

Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu", Buzău
Clasa a X-a: 38p. Cană Cornel, Grigore Daniel, Toboş Valentin. **Clasa a XI-a:** 41p. Preda Mădălin, Dinu Cristina Bianca. **Clasa a XII-a :**46p. Ilie Ştefania, Marin Valentina, Ion Mihaela,Costache Adrian, Roman Corina, Stupinaru Cosmin, Zincă Andreea. **Prof. Stan Adrian.**

Liceul Tehnologic "Sfântul Mucenic Sava", Berca, Buzău
Clasa a IV-a: 40p. Ilie Andrei, Duran Bianca, Badea Rareş, Tudor Irina, Păpătoiu Paul, Hoacă Ştefan ; **Prof. Gabriela- Nicoleta Lupşan;**

Scoala Gimnazială „ Căpitan Aviator M. T. Bădulescu", Buzău
Clasa a IV-a: 30p. Petrişor Alexandra, Răpițeanu Carol, Bălan Alexandru, Păunescu Andrei, Zevedei Ariana, Coman Călin. **Prof. Cristian Cosmin Lupşan.**

Colegiul Național "Frații Buzești", Craiova, Dolj
Clasa a VIII-a : 31p : Vasilescu Andrei, **Prof. Ionescu Maria.**

Colegiul National " Vasile Alecsandri " Galati
Clasa a VI-a : 29p. Buleti Daria – Alexandra, **Prof. Romeo Zanfir.**



Apărută într-o ediție de excepție la Editura Paralela 45, cartea domnului profesor Florin Stănescu , „Inegalități integrale “, are scopul de a prezenta o parte din activitatea domnului profesor în domeniul inegalităților integrale. Se evidențiază problemele de calcul al unor limite de șiruri integrale, probleme de monotonie, convexitate sau rezolvarea de aplicații ale teoremei de medie.

Multe din problemele selectate au fost deja publicate de autor sau de colegi în reviste de specialitate sau au fost date la olimpiade și concursuri naționale și internaționale.

Fiecare din capitolele cărții conține suficiente probleme , care pe deasupra au și rezolvări complete, ce vin în ajutorul elevilor de la clasele de matematică-informatică, care se pregătesc pentru olimpiadele județene sau naționale de matematică.

Format: tip manual, nr. pag. 200.

Pentru comenzi, puteți solicita informații la adresa de e_mail:

florin.florinstanescu@yahoo.com

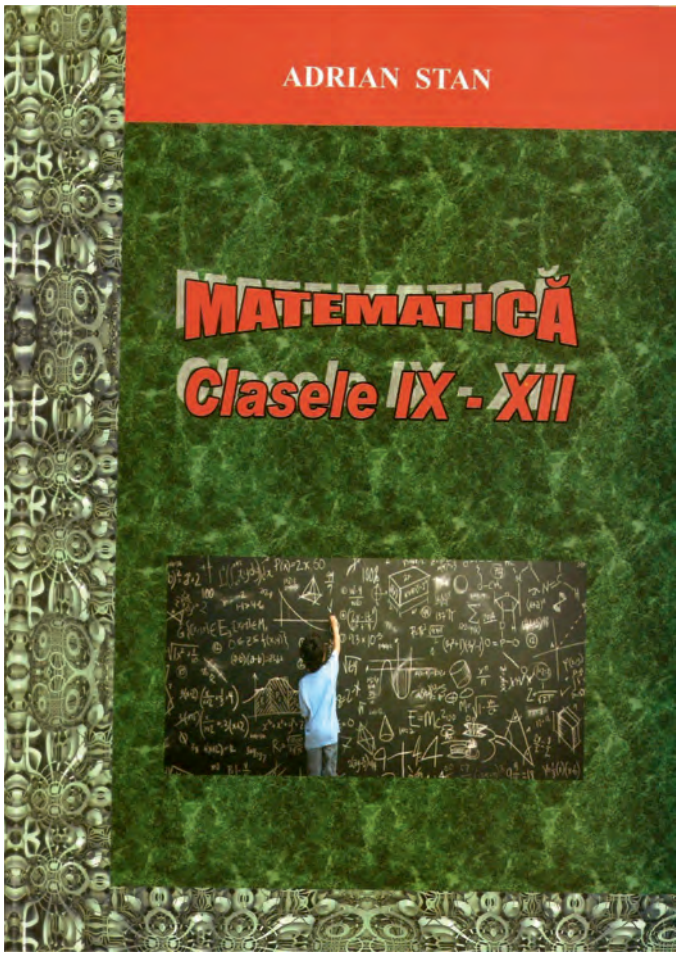
Cartea Matematică, clasele IX - XII apărută la Editura Editgraph la începutul anului școlar, vine în sprijinul elevilor de la liceele tehnologice cu o multitudine de exerciții organizate pe fiecare din capitolele din programa școlară M2 - tehnologic.

Pentru fiecare capitol există suficiente exerciții rezolvate care vin în sprijinul elevilor pentru înțelegerea cunoștințelor și aprofundarea a cât mai multor tipuri de exerciții.

Ea este utilă și pentru elevii care se pregătesc pentru bacalaureat întrucât la sfîrșitul cărții se regăsesc subiecte de bacalaureat pentru recapitularea cunoștințelor. Subiectul I recapitulează cunoștințele din clasele IX - X, subiectul II, recapitulează cunoștințele de algebră clasa a XI-a și a XII-a, iar subiectul III recapitulează cunoștințele de analiză din clasa a XI-a și a XII-a .

Cartea este de asemenea însoțită de sinteze de teorie matematică, clasele IX- XII.

Format: tip manual, nr. pag. 320;



REVISTA SCLIPIREA MINŢII
NR. 17 ANUL IX - APRILIE 2016

Cuprins

1. Istoria matematicii

Gheorghe Lazăr și Gheorghe Asachi, ctitorii învățământului românesc de Adrian Stan 1

2. Articole şi note matematice

Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul ” formulei de integrare prin părți”, IV de Elena și Constantin Ciobîcă 3

Despre Limba română, Statistică, și alte câteva lucruri importante de Daniel Văcaru 5

Asupra unor inegalități în triunghi de Vasile Jiglău 7

Profesorul Dumitru Bătinețu Giurgiu la 80 de ani de Mihály Bencze şi Neculai Stanciu 9

3. Probleme rezolvate 10

4. Probleme propuse 34

5. Quickies 43

6. Caleidoscop matematic 45

7. Poşta redacţiei 47

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

LEI 11 RON