WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

MARTIE 2024
ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. MARTIE 2024

1. Applications of the inequality of means to obtain new inequalities in triangle ... pag. 1

D.M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu

2. . Inegalități cu radicali. Inegalitatea lui Minkowski ... pag.11

Nela Ciceu

3. A new year: 2024 ... pag. 12

Bela Kovacs

4. Math Journal ... pag. 25 - pag113

Marin Chirciu

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. Applications of the inequality of means to obtain new inequalities in triangle

By D.M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu

In this paper we present some new and interesting inequalities in triangle they are built using the well-known equalities and inequalities.

Theorem 1.

1.1.) If $u, v, w \in R_+$, then in all triangles ABC holds:

$$u\sin^3 A + v\sin^2 B + w\sin C \geq \frac{11}{2R}\sqrt[11]{\frac{u^2v^3w^6p^6r^6}{2^3\cdot 3^9\cdot R}};$$

1.2.) If $m, n \in R_+$, then in any triangles ABC occurs:

$$m\sin^6\frac{A}{2} + n\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2} \geq \frac{3r^2}{16R^2}\sqrt[3]{\frac{mn^2}{4}};$$

1.3.) If $m, n \in R_+$, then in all triangles ABC holds the inequality:

$$m\sin^4\frac{A}{2} + n\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3r}{8R}\sqrt[3]{\frac{mn^2r}{2R}};$$

1.4.) If $m, n \in R_+$, then in any acute triangle ABC the folowing inequality is true:

$$mtg^2A + ntgBtgC \geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{prn}{p^2-(2R+r)^2}\right)^2\cdot m};$$

1.5.) If $m, n \in R_+$, then in all acute triangle ABC occurs the inequality:

$$mctg^2B + nctgCctgA \geq \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{p^2-(2R+r)^2}{pr}\right)^2\cdot\frac{mn^2}{2}};$$

1.6.) If $m, n \in R_+$, then in all triangles ABC holds:

$$mtg^2\frac{B}{2}+ntg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{m\left(\frac{nr}{2p}\right)^2}\ ;$$

1.7.) If $m, n \in R_+$, then in all acute triangles ABC is true the inequality:

$$mctg^3C+nctgActgB\geq 4\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{n(p^2-(2R+r)^2)}{6pr}\right)^3\cdot m}\ ;$$

1.8.) If $m, n \in R_+$, then in any triangle ABC holds:

$$m\cos^6\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\geq\frac{p}{2R}\sqrt[4]{\frac{mn^3p^2}{27R^2}}\ ;$$

1.9.) If $m, n \in R_+$, then in all triangle ABC holds:

$$mctg^2\frac{A}{2}+ntg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{m\left(\frac{n(p-a)^2}{2pr}\right)^2}\ ;$$

1.10.) If $m, n \in R_+$, then in any triangle ABC holds the inequality:

$$mc^2+nab\geq 3\cdot\sqrt[3]{m(2nprR)^2}\ ;$$

1.11.) If $m, n \in R_+$, then in all accute triangles ABC occurs the inequality:

$$m\cos^3 A+n\cos B\cos C\geq\frac{1}{R}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{n(p^2-(2R+r)^2)}{3}\right)^3\cdot\frac{4m}{R^2}}\ .$$

Proof of 1.1.) We have:

$$u\sin^3 A + v\sin^2 B + w\sin C = \frac{u}{2}\sin^3 A + \frac{u}{2}\sin^3 A + \frac{v}{3}\sin^2 B + \frac{v}{3}\sin^2 B + \frac{v}{3}\sin^2 B +$$

$$+\frac{w}{6}\sin C + \frac{w}{6}\sin C + \frac{w}{6}\sin C + \frac{w}{6}\sin C + \frac{w}{6}\sin C + \frac{w}{6}\sin C \geq$$

$$\geq 11\sqrt[11]{\frac{u^2}{2^2}\cdot\frac{v^3}{3^3}\cdot\frac{w^6}{6^6}\cdot(\sin A\sin B\sin C)^6}\ .$$

Since,

$$\sin A\sin B\sin C = \frac{pr}{2R^2},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.2.) We have:

$$m\sin^6\frac{A}{2} + n\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2} = m\sin^6\frac{A}{2} + \frac{n}{2}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2} + \frac{n}{2}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2} \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{m\cdot\frac{n^2}{2^2}\cdot\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^6}\ .$$

Because,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R},$$

we are done.

Proof of 1.3) We have:

$$m\sin^4\frac{A}{2} + n\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = m\sin^4\frac{A}{2} + \frac{n}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \frac{n}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{m\cdot\frac{n^2}{2^2}\cdot\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^4}\ .$$

Since,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R},$$

the proof is complete.

Proof of 1.4.) We have that:

$$m\cdot tg^2A+n\cdot tgB\cdot tgC=m\cdot tg^2A+\frac{n}{2}\cdot tgB\cdot tgC+\frac{n}{2}\cdot tgB\cdot tgC\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2}{4}\cdot(tgA\cdot tgB\cdot tgC)^2}\ .$$

If we taking account the fact that,

$$tgA\cdot tgB\cdot tgC=\frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2},$$

we obtain the desired inequality.

Proof of 1.5.) We have:

$$m\cdot ctg^2B+n\cdot ctgC\cdot ctgA=m\cdot ctg^2B+\frac{n}{2}\cdot ctgC\cdot ctgA+\frac{n}{2}\cdot ctgC\cdot ctgA\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2}{4}\cdot(ctgA\cdot ctgB\cdot ctgC)^2}\ .$$

Using,

$$ctgA\cdot ctgB\cdot ctgC=\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr},$$

we obtain the given inequlity.

Proof of 1.6.) We have that:

$$m\cdot tg^2\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=m\cdot tg^2\frac{B}{2}+\frac{n}{2}\cdot tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}+\frac{n}{2}\cdot tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2}{2^2}\cdot\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right)^2}\ .$$

Applying the well-known,

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{r}{p},$$

we deduce the conclusion.

Proof of 1.7.) We have:

$$m\cdot ctg^3C+n\cdot ctgA\cdot ctgB=m\cdot ctg^3C+\frac{n}{3}\cdot ctgA\cdot ctgB+\frac{n}{3}\cdot ctgA\cdot ctgB+\frac{n}{3}\cdot ctgA\cdot ctgB\geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{mn^3}{3^3}\cdot(ctgA\cdot ctgB\cdot ctgC)^3}\ .$$

Because,

$$ctgA\cdot ctgB\cdot ctgC=\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr},$$

we are done.

Proof of 1.8.) We have that:

$$m\cos^6\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=m\cos^6\frac{A}{2}+\frac{n}{3}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}+\frac{n}{3}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}+\frac{n}{3}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{m\cdot\frac{n^3}{3^3}\cdot\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^6}\ .$$

Since,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R},$$

we easily deduce the result.

Proof of 1.9.) We have:

$$m\cdot ctg^2\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=m\cdot ctg^2\frac{A}{2}+\frac{n}{2}\cdot tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+\frac{n}{2}\cdot tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2}{2^2}\cdot\left(ctg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right)^2}\ .$$

Using the well-known,

$$ctg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{(p-a)^2}{pr},$$

we obtain the desired result.

Proof of 1.10.) We have:

$$mc^2+nab=mc^2+\frac{nab}{2}+\frac{nab}{2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{m\cdot\frac{n^2}{2^2}\cdot(abc)^2}\ .$$

We use the fact,

$$abc=4RS=4Rpr\,,$$

which yields the result.

Proof of 1.11.) We have:

$$m\cdot\cos^3 A+n\cdot\cos B\cdot\cos C=m\cdot\cos^3 A+\frac{n}{3}\cdot\cos B\cdot\cos C+\frac{n}{3}\cdot\cos B\cdot\cos C+\frac{n}{3}\cdot\cos B\cdot\cos C\geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{mn^3}{3^3}\cdot(\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)^3}\ .$$

Because,

$$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}\,,$$

the proof is complete.

Theorem 2.

2.1). If $x,y\in R_+$, then in all triangle holds:

$$(2x+y)p^2+4(y-2x)Rr+(y-2x)r^2\geq 9\cdot\sqrt[3]{4xy^2p^2R^2r^2}\ ;$$

2.2.). If $x,y\in R_+$, the in all triangle holds:

$$(4R+r)^3x+p^2(y-12xR)\geq 4p\cdot\sqrt[4]{3xp^2y^3r^3}\ ;$$

2.3.). If $x,y\in R_+$, then in all triangles holds:

$$2p(p^2-6Rr-3r^2)x+(p^2+4Rr+r^2)y\geq 8\cdot\sqrt[4]{12x\cdot(pRry)^3}\ ;$$

2.4.) If $m,n\in R_+^*$, then in any acute triangle holds:

$$2\cdot(3m-2n)\cdot R^2+4\cdot R\cdot r\cdot n+(m+n)\cdot r^2+(n-m)\cdot p^2\geq$$
$$\geq\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{m\cdot n^2\cdot R^2\cdot\left(p^2-(2\cdot R+r)^2\right)^2}\ ;$$

2.5.) If $x, y \in R_+$, then in all triangles holds:

$$(px+Ry)p^2+(Ry-3px)r^2+2(2Ry-3px)Rr \geq 8R\sqrt[4]{6R^2(pry)^3x};$$

2.6.) If $m, n \in R_+$, then in any triangle holds:

$$8(2m-n)R^2+(2m+n)r^2+(n-2m)p^2 \geq 9r\cdot\sqrt[3]{4mn^2R^2r}.$$

Proof of 2.1). In any triangle ABC holds:

$$x\sin^2 A+y\sin B\sin C \geq 3\cdot\sqrt[3]{x\left(\frac{ypr}{4R^2}\right)^2}.$$

Indeed,

$$x\sin^2 A+y\sin B\sin C = x\sin^2 A+\frac{y\sin B\sin C}{2}+\frac{y\sin B\sin C}{2} \geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}(\sin A\sin B\sin C)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}\left(\frac{pr}{2R^2}\right)^2},$$

where we use the fact:

$$\sin A\sin B\sin C = \frac{pr}{2R^2}.$$

So,

$$x\sin^2 A+y\sin B\sin C \geq 3\cdot\sqrt[3]{x\left(\frac{ypr}{4R^2}\right)^2},$$

and other two analogous, and by adding we obtain that:

$$x\sum\sin^2 A+y\sum\sin B\sin C \geq 9\cdot\sqrt[3]{x\cdot\frac{y^2p^2r^2}{16R^4}},$$

where we use

$$\sum\sin^2 A = \frac{p^2-4Rr-r^2}{2R^2}, \text{ and}$$

$$\sum\sin B\sin C = \frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}, \text{ and we deduce that:}$$

$$x \cdot \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2} + y \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{xy^2 p^2 r^2}{16R^4}},$$

and after some algebra we obtain the given inequality.

Proof of 2.2.) In any triangle ABC occurs the inequality:

$$xr_a^3 + yr_b r_c \geq 4p \cdot \sqrt[4]{\frac{xp^2 y^3 r^3}{27}}.$$

Indeed,

$$xr_a^3 + yr_b r_c = xr_a^3 + \frac{yr_b r_c}{3} + \frac{yr_b r_c}{3} + \frac{yr_b r_c}{3} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{xy^3}{27}(r_a r_b r_c)^3},$$

and by

$$r_a r_b r_c = p^2 r,$$

we obtain q.e.d.

We write other two inequalities and by adding we deduce that

$$x(r_a^3 + r_b^3 + r_c^3) + y(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) \geq 12p \cdot \sqrt[4]{\frac{xp^2 y^3 r^3}{27}} = 4p \cdot \sqrt[4]{3xp^2 y^3 r^3}.$$

Since:

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R + r)^3 - 12p^2 R, \text{ and}$$

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2,$$

we are done.

Proof of 2.3.). In all triangles ABC holds:

$$a^3 x + bcy = a^3 x + \frac{bcy}{3} + \frac{bcy}{3} + \frac{bcy}{3} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3 b^3 c^3 y^3 x}{3^3}}.$$

We write other two inequalities and we obtain that:

$$(a^3 + b^3 + c^3)x + (ab + bc + ca)y \geq 12 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{abcy}{3}\right)^3 x}.$$

Using:

$$abc = 4pRr, a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 6Rr - 3r^2), \text{ and}$$

$$ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2,$$

then we obtain the conclusion.

Proof of 2.4.) First we prove that:

$$m\cos^2 A + n\cos B\cos C \geq \frac{3}{4R}\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2\left(p^2-(2R+r)^2\right)^2}{R}}.$$

Indeed,

$$m\cos^2 A + \frac{n}{2}\cos B\cos C + \frac{n}{2}\cos B\cos C \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{m\cdot n^2}{2^2}\cdot\left(\cos A\cos B\cos C\right)^2},$$

and since

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2},$$

we get what we said.

Written other two inequalities and adding we deduce that:

$$m\sum\cos^2 A + n\sum\cos B\cos C \geq \frac{9}{4R}\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2\left(p^2-(2R+r)^2\right)^2}{R}},$$

and we taking account that:

$$\sum\cos^2 A = \frac{(2R+r)^2+2R^2-p^2}{2R^2}, \text{ and}$$

$$\sum\cos B\cos C = \frac{p^2+r^2-4R^2}{2R^2},$$

after some algebra we are done.

Proof of 2.5.) In all triangles ABC holds:

$$x\sin^3 A + y\sin B\sin C \geq \frac{2}{R}\cdot\sqrt[4]{\frac{2x\cdot(pry)^3}{27R^2}}.$$

Indeed,

$$x\sin^3 A + y\sin B\sin C = x\sin^3 A + \frac{y\sin B\sin C}{3} + \frac{y\sin B\sin C}{3} + \frac{y\sin B\sin C}{3} \geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{xy^3}{3^3}\cdot(\sin A\sin B\sin C)^3},$$

and since, $\sin A\sin B\sin C = \dfrac{pr}{2R^2}$, we get what we said.

Writing othe two similar inequalities, and than adding we deduce that:

$$x\sum\sin^3 A+y\sum\sin B\sin C\geq\frac{6}{R}\cdot\sqrt[4]{\frac{2x(pry)^3}{27R^2}},$$

and using:

$$\sum\sin^3 A=\frac{p(p^2-3r^2-6Rr)}{4R^3},$$

respectively

$$\sum\sin B\sin C=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2},$$

after some algebra we obtain the conclusion.

Proof of 2.6.) In any triangles ABC holds:

$$m\sin^4\frac{A}{2}+n\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\geq\frac{3r}{8R}\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2r}{2R}}.$$

Indeed,

$$m\sin^4\frac{A}{2}+n\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=m\sin^4\frac{A}{2}+\frac{n}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{n}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2}{2^2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^4},$$

where we taking account that

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R},$$

and we get what we claimed.

We write other two similar which we adding we deduce that:

$$m\sum\sin^4\frac{A}{2}+n\sum\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\geq\frac{9r}{8R}\cdot\sqrt[3]{\frac{mn^2r}{2R}},$$

and than using the formulas:

$$\sum\sin^4\frac{A}{2}=\frac{8R^2+r^2-p^2}{8R^2}, \text{ and}$$

$$\sum\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}=\frac{p^2+r^2-8R^2}{16R^2}.$$

After some algebra we are done.

2. Inegalități cu radicali. Inegalitatea lui Minkowski

de Nela Ciceu, Bacău

Inegalitățile care conțin radicali pot ridica uneori dificultăți în găsirea unor modalități de abordare. În cele ce urmează prezentăm o inegalitate ce poate fi folosită în astfel de situații - inegalitatea lui Minkowski.

O formă utilă este următoarea:

Dacă $a, b, c, x, y, z, p, q, r$ sunt numere reale nenegative, are loc inegalitatea

$$\sqrt{a^2+x^2+p^2}+\sqrt{b^2+y^2+q^2}+\sqrt{c^2+z^2+r^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a+b+c)^2+(x+y+z)^2+(p+q+r)^2}.$$

<u>Demonstrație</u>: Folosind modulul unui numar complex și inegalitatea triunghiului, avem

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2}=|a+\mathrm{i}x|+|b+\mathrm{i}y|+|c+\mathrm{i}z| \geq$$

$$\geq |a+b+c+\mathrm{i}(x+y+z)|=\sqrt{(a+b+c)^2+(x+y+z)^2}.$$

Această inegalitate poate fi demonstrată și prin ridicare la pătrat; după reducerea termenilor asemenea, rămâne de arătat că

$$\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)}+\sqrt{(b^2+y^2)(c^2+z^2)}+\sqrt{(c^2+z^2)(a^2+x^2)} \geq$$

$$\geq ab+bc+ca+xy+yz+zx \quad (1)$$

Conform inegalității lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem $(a^2+x^2)(b^2+y^2) \geq (ab+xy)^2$, și atunci inegalitatea (1) este adevărată.

Trecerea de la doi termeni sub fiecare radical la trei termeni este simplă:

$$\sqrt{a^2+x^2+p^2}+\sqrt{b^2+y^2+q^2}+\sqrt{c^2+z^2+r^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a+b+c)^2+\left(\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{y^2+q^2}+\sqrt{z^2+r^2}\right)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a+b+c)^2+\left(\sqrt{(x+y+z)^2+(p+q+r)^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(a+b+c)^2+(x+y+z)^2+(p+q+r)^2}.$$

Câteva exemple de aplicare a inegalității lui Minkowski:

1. Dacă a, b, c sunt numere reale, atunci

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

Soluție: Avem

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geq\sqrt{(a+c+a-c)^2+(b+b)^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. Dacă $a,b,c>0$, atunci

$$\sqrt{19a^2+2ab+4b^2}+\sqrt{19b^2+2bc+4c^2}+\sqrt{19c^2+2ca+4a^2}\geq 5(a+b+c).$$

Daniel Sitaru, G.M.-B 10/2016

Soluție: Avem

$$\sqrt{19a^2+2ab+4b^2}+\sqrt{19b^2+2bc+4c^2}+\sqrt{19c^2+2ca+4a^2}=$$

$$=\sqrt{18a^2+(a+b)^2+3b^2}+\sqrt{18b^2+(b+c)^2+3c^2}+\sqrt{18c^2+(c+a)^2+3a^2}\geq$$

$$\geq\sqrt{\left(\sqrt{18}(a+b+c)\right)^2+(a+b+b+c+c+a)^2+\left(\sqrt{3}(a+b+c)\right)^2}=5(a+b+c).$$

3. Dacă $x,y,z\geq 0$ cu $x+y+z=xyz$, determinați minimul expresiei

$$\sqrt{\frac{1}{3}x^4+1}+\sqrt{\frac{1}{3}y^4+1}+\sqrt{\frac{1}{3}z^4+1}.$$

George Apostolopoulos, Crux 4/2016

Soluție: Avem

$$\sqrt{\frac{1}{3}x^4+1}+\sqrt{\frac{1}{3}y^4+1}+\sqrt{\frac{1}{3}z^4+1}\geq\sqrt{\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{y^2}{\sqrt{3}}+\frac{z^2}{\sqrt{3}}\right)^2+(1+1+1)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3}+9}.$$

Deoarece $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\geq\frac{9}{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}}=\frac{9xyz}{x+y+z}=9$, rezultă că minimul căutat este 6.

Probleme propuse:

1. Fie a,b,c numere reale pozitive cu $a+b+c=1$. Să se determine minimul expresiei

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}.$$

George Apostolopoulos, Crux 3/2015

2. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitate

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 2\sqrt{3r(r_a+r_b+r_c)}.$$

Dan Ștefan Marinescu și *Leonard Giugiuc*, Crux 4/2015

Indicație: substituțiile Ravi.

3. Să se determine minimul funcției $f(x)=\sqrt{x^2-2mx+n}+\sqrt{x^2-2px+q}$, unde $|m|\leq|n|, |p|\leq |q|$.

Tatiana G. Mîșacova

4. Dacă $x,y,z>0$, atunci

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq\sqrt{x^2-xz+z^2}.$$

United Kingdom 1990

5. Dacă $x,y,z\geq 0$ cu $xy+yz+zx=1$, atunci

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2\geq 6\sqrt{3}.$$

Turcia 2000

6. Dacă $a,b,c\geq 0$ cu $ab+bc+ca=1$, atunci

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

Iran 2008

7. Dacă a,b,c sunt numere reale, atunci

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

8. Dacă a,b,c sunt numere reale cu $a+b+c=abc$, atunci

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}\geq 2\sqrt{3}.$$

9. Dacă a,b,c sunt numere reale cu $ab+bc+ca=1$, atunci

$$\sqrt{a^4+b^2}+\sqrt{b^4+c^2}+\sqrt{c^4+a^2}\geq 2.$$

Titu Zvonaru, Mathematical Reflections 5/2015

10. Dacă x,y sunt numere reale, atunci

$$x^2\sqrt{1+2y^2}+y^2\sqrt{1+2x^2}\geq xy(x+y+\sqrt{2}).$$

Tuymaada 2003

11. Dacă $x,y,z\geq 0$, atunci

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\geq\sqrt{6(x+y+z)}.$$

3. A new year: 2024.

by *Bela Kovacs*, Satu Mare

It is a leap year 2024, therefore it has 366 days. The extra day is the day after February 23, i.e. February 24, and this is called Leap Day, based on historical calendar explanation The remaining days of February are shifted, so it will have 29 days.

Practically acceptable and convenient to call 29 February a leap day.

How many times will we write 2024 down, how many times will we meet see it, read it? And not just in mathematics-related writings. What can we know about the number 2024? Let's investigate it, let's construct it in different ways, let's shape it. Here's a little tutorial on this that can be enriched by the reader.

2024 is an even natural number.

It is a composite number between the nearest prime numbers: $2017 < 2024 < 2027$

Prime factorization: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

Divisors: 1 , 2 , 4 , 8 , 11 , 22 , 23 , 44 , 46 , 88 , 92 , 184 , 253 , 506 , 1012 , 2024.

The number of its proper divisors is 16. The sum of divisors is 4320.

The arithmetic mean of its divisors is 270, which is a natural number, and therefore 2024 is an arithmetic number

The sum of its divisors that are strictly less than the number:

$1 + 2 + 4 + 8 + 11 + 22 + 23 + 44 + 46 + 88 + 92 + 184 + 253 + 506 + 1012 = 2296$;

This is greater than 2024, and is therefore it is an abundant number.

It has an abundance of : $2296 - 2024 = 272$.

The sum of six of its divisors is: $2024 = 1012 + 506 + 253 + 184 + 46 + 23$, therefore it is a semiperfect number.

The 16 divisors can be grouped into two groups of equal sum, each group totalling 2160.

$(1 + 2 + 4 + 8 + 11 + 22 + 88 + 2024) + (23 + 44 + 46 + 92 + 184 + 253 + 506 + 1012) = 2 \cdot 2160$

$= 4320$. Numbers with this property are called Zumkeller numbers.

Divisible by the sum of its digits: $2024 = (2 + 0 + 2 + 4) \cdot 253$

The number 2024 forms with 2295 quasi-amicable numbers, because the sum of the proper divisors of either number is one more than the value of the other number. 2295 also has 16 divisors, and the sum of its proper divisors is 2025.

2024 is an untouchable number, because it is not equal to the sum of the proper divisors of any number less than it.

But is also a practical number, because such that all smaller positive integers can be represented as sums of distinct divisors of 2024.

For example: 2000 = 1012 + 506 + 253 + 184 + 44 + 1,

1000 = 506 + 253 + 184 + 46 + 11 or 500 = 253 + 184 + 46 + 11 + 4 + 2

Can be written in three ways as the sum of two or more consecutive natural numbers, so it is a polite number, its politeness 3. Here it is:

2024 = 77 + 78 + 79 + 80 + 81 + 82 + 83 + 84 + 95 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 +

95 + 96 + 97 + 98 + 99. Here is the sum of 23 consecutive natural numbers.

2024 = 119 + 120 + 121 + 122 + 123 + 124 + 125 + 126 + 127 + 128 + 129 + 130 + 131 + 132 +

133 + 134. Here the sum of 16 consecutive natural numbers.

2024 = 179 + 180+ 181 + 181 + 182 + 183 + 183 + 184 + 184 + 185 + 186 + 187 + 188 + 189. Here we found it as the sum of 11 consecutive natural numbers.

Decomposition into the sum of consecutive even natural numbers:

2024 = 246 + 248 + 250 + 252 + 254 + 256 + 258 + 260

2024 = 174 + 176 + 178 + 180 + 182 + 184 + 186 + 188 + 190 + 192 + 194

2024 = 66 + 68 + 70 + 72 + 74 + 76 + 78 + 80 + 82 + 84 + 86 + 88 + 90 + 92 + 94 + 96 + 98

+ 100 + 102 + 104 + 106 + 108 + 110

Decomposition into sums of consecutive odd natural numbers:

2024 = 1011 + 1013

2024 = 503 + 515 + 507 + 509

2024 = 163 + 165 + 167 + 169 + 171 + 173 + 175 + 177 + 179 + 181 + 183 + 185 + 187 + 189 + 191 + 193 + 195 + 197 + 199 + 201 + 203 + 205

Can be written as the sum of consecutive cube numbers:

2024 = $2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$

Can be written as the sum of consecutive even perfect squares:

2024= $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+14^2+16^2+18^2+20^2+22^2$

Writing down using the powers of 2 in several ways:

2024 = $2^{11}-2^4-2^3$

2024 = $2^{11}-2^5+2^3$

2024 = $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3$

2024 = $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4-2^3$

Written using the powers of 3:

2024 = $3^7-3^5+3^4-3^0$ 2024 = $3^7-3^4-3^4-3^0$

It cannot be decomposed into the sum of two squares.

Can be decomposed into the sum of three squares:

2024 = $2^2+16^2+42^2$ 2024 = $2^2+24^2+38^2$

2024 = $8^2+14^2+42^2$ 2024 = $10^2+18^2+40^2$

2024 = $10^2+30^2+32^2$ 2024 = $16^2+18^2+38^2$

2024 = $18^2+26^2+32^2$

Decomposing to the difference of two square numbers:

2024 = $507^2 - 505^2$ 2024 = $255^2 - 251^2$

2024 = $57^2 - 35^2$ 2024 = $45^2 - 1^2$ based on this last it is a Cunninghan number.

Decomposition of its reciprocal into the sum of two Egyptian fractions:

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2025}+\frac{1}{4098600}=\frac{1}{2025}+\frac{1}{2024\cdot 2025}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2026}+\frac{1}{2050312}=\frac{1}{2026}+\frac{1}{2024\cdot 1013}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2028}+\frac{1}{1026168}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2032}+\frac{1}{514096}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2035}+\frac{1}{377440}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2040}+\frac{1}{258060}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2046}+\frac{1}{188232}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2047}+\frac{1}{180136}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2056}+\frac{1}{130042}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2068}+\frac{1}{95128}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2070}+\frac{1}{91080}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2088}+\frac{1}{66033}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2112}+\frac{1}{48576}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2116}+\frac{1}{46552}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2145}+\frac{1}{35880}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2200}+\frac{1}{25300}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2208}+\frac{1}{24288}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2266}+\frac{1}{18952}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2277}+\frac{1}{18216}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2376}+\frac{1}{13662}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2392}+\frac{1}{13156}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2508}+\frac{1}{10488}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2530}+\frac{1}{10120}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2553}+\frac{1}{9768}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2728}+\frac{1}{7843}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2760}+\frac{1}{7590}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2992}+\frac{1}{6256}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{3036}+\frac{1}{6072}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{3082}+\frac{1}{5896}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{3496}+\frac{1}{4807}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{3960}+\frac{1}{4140}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{4048}+\frac{1}{4048}$$

Decomposition of its reciprocal into the difference of two Egyptian fractions:

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{88}-\frac{1}{92}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{552}-\frac{1}{759}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{966}-\frac{1}{1848}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1012}-\frac{1}{2024}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1056}-\frac{1}{2208}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1288}-\frac{1}{3542}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1320}-\frac{1}{3795}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1495}-\frac{1}{5720}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1518}-\frac{1}{6072}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1540}-\frac{1}{6440}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1656}-\frac{1}{9108}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1672}-\frac{1}{9614}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1771}-\frac{1}{14168}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1782}-\frac{1}{14904}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1840}-\frac{1}{20240}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1848}-\frac{1}{21252}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1903}-\frac{1}{31832}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1932}-\frac{1}{42504}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1936}-\frac{1}{44528}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1960}-\frac{1}{61985}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1978}-\frac{1}{87032}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1980}-\frac{1}{91080}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1992}-\frac{1}{125994} \qquad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{370392}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2001}-\frac{1}{176088} \qquad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2016}-\frac{1}{510048}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2002}-\frac{1}{184184} \qquad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2020}-\frac{1}{1022120}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2008}-\frac{1}{254012} \qquad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2022}-\frac{1}{2046264}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2023}-\frac{1}{4094552}=\frac{1}{2023}-\frac{1}{2023\cdot 2024}$$

As a member in a Pythagorean triple:

$90^2 + 2024^2 = 2026^2$ $\quad 1407^2 + 2024^2 = 2465^2$ $\quad 1518^2 + 2024^2 = 2530^2$

$1632^2 + 2024^2 = 2600^2$ $\quad 2415^2 + 2024^2 = 3151^2$

Written up with factorials:

$$2024 = \frac{8!}{4!}+\frac{6!}{2!}-4!+3!+2! \qquad 2024 = \frac{2!\cdot 14!+7!\cdot 9!}{2!\cdot 5!\cdot 9!}+1!$$

$$2024 = \frac{7!}{2!}-\frac{6!}{2!}-5!-4!+3!+2! \qquad 2024 = 7!-\frac{9!}{5!}+3!+2!$$

$$2024 = 3\cdot 6! - 5! - 4! + 3! + 2! \qquad 2024 = \frac{10!}{6!}-\frac{9!}{5!}+3!+2!$$

Written up with combinations

$$2024 = C_{23}^{2}+C_{23}^{3} \qquad 2024 = C_{5}^{3}+C_{25}^{3}-C_{13}^{3}$$

$$2024 = C_{2}^{2}+C_{3}^{2}+C_{4}^{2}+C_{5}^{2}+\ldots+C_{23}^{2} = C_{24}^{3}$$

This latter is the sum of successive triangular numbers and 2024 as a tetrahedron number.

It is not a square number, not a pentagon number, not a hexagon number, and so on, and we will find it soon enough among the 74-angular numbers. 2024 is the 8th 74-angular number as one of the elements of the series $b_n = 36n^2 - 35n$:

1 , 74 , 219 , 436 , 725 , 1086 , 1519 , **2024** , 2601 , 3250 , ...

Similarly, 2025 is the 9th 58-angular number as a member of the series $c_n = 28n^2 - 27n$:

1 , 58 , 171 , 340 , 565 , 846 , 1183 , 1576 , **2025** , 2530 , , , , ,

Finally, 2023 is the 7th 98-angular number as a member of the series $a_n = 48n^2 - 47n$:

1 , 98 , 291 , 580 , 965 , 1446 , **2023** , 2696 , 3465 , 4330 , . . .

2024 can only be written using one kind of digit:

$$2024 = 7 \cdot (7 \cdot 7 - 7) \cdot 7 - 7 \cdot 7 + 7 + 7 + 7 : 7$$

$$2024 = 88 \cdot (8 + 8 + 8) - 88$$

$$2024 = (333 + 3 + 3 : 3)(3 + 3) + (3 + 3) : 3$$

$$2024 = (1111 - 111 + 11 + 1) \cdot (1 + 1)$$

$$2024 = 2222 - 222 + 22 + 2$$

$$2024 = \frac{3333-333+33+3}{3} \cdot \frac{3+3}{3}$$

$$2024 = \frac{4444-444+44+4}{4} \cdot \frac{4+4}{4}$$

$$2024 = \frac{5555-555+55+5}{5} \cdot \frac{5+5}{5}$$

$$2024 = \frac{6666-666+66+6}{6} \cdot \frac{6+6}{6}$$

$$2024 = \frac{7777-777+77+7}{7} \cdot \frac{7+7}{7}$$

$$2024 = \frac{8888-888+88+8}{8} \cdot \frac{8+8}{8}$$

$$2024 = \frac{9999-999+99+9}{9} \cdot \frac{9+9}{9}$$

Transcribed from a decimal number system to another number system:

$2024_{10} = 11111101000_2$	$2024_{10} = 5621_7$
$2024_{10} = 2202222_3$	$2024_{10} = 3750_8$
$2024_{10} = 133220_4$	$2024_{10} = 2688_9$
$2024_{10} = 31044_5$	$2024_{10} = 1580_{11}$
$2024_{10} = 13212_6$	$2024_{10} = 1208_{12}$

With elements of the Fibonacci sequence:

$2024 = F(2) + F(3) + F(7) + F(9) + F(14) + f(17) = 1 + 2 + 13 + 34 + 377 + 1597$

One solution to the Pell equation $x^2 - 2023y^2 = 1$ is $x = 2024$ and $y = 45$

One solution to the Pell equation $x^2 - 2024y^2 = 1$ is $x = 45$ and $y = 1$.

Another solution: $x = 4049$ and $y = 90$

In inequalities:

$$1936 = 44^2 < 2024 < 45^2 = 2025$$

$$1.1^{79} < 2024 < 1.1^{80}$$

$$\sum_{k=1}^{63} k < 2024 < \sum_{k=1}^{64} k$$

$$\sum_{k=1}^{17} k^2 < 2024 < \sum_{k=1}^{18} k^2$$

$$\sum_{k=1}^{8} k^3 < 2024 < \sum_{k=1}^{9} k^3$$

$$\sum_{k=1}^{209} \sqrt{k} < 2024 < \sum_{k=1}^{210} \sqrt{k}$$

$$\sum_{k=1}^{403} \ln k < 2024 < \sum_{k=1}^{404} \ln k \approx 2024.49$$

$$\sum_{k=1}^{816} \lg k < 2024 < \sum_{k=1}^{817} \lg k \approx 23.4$$

$$2.7176 < \left(1+\frac{1}{2024}\right)^{2024} < 2.718 < e$$

Written with consecutively increasing or decreasing digits:

2024 = 12 · 34 · 5 – 6 + 7 – 8 – 9

2024 = 1234 – 5 + 6 + 789

2024 = 9 + 8 · 7 + 654 · 3 – 2 – 1

2024 = (9 · 8 · 7 + 6 – 5) · 4 + 3 + 2 – 1

Writing natural numbers with digits of 2024, in that order:

1 = (2 + 0 + 2) : 4

2 = 2 + 0 · 2 · 4

3 = 2^0 – 2 + 4

4 = 2 + 0 – 2 + 4

5 = (2 + 0) : 2 + 4

6 = 2 · 0 + 2 + 4

7 = 2 – 0! + 2 + 4

8 = 2 + 0 + 2 + 4

9 = 2 + 0! + 2 + 4

10 = 2 + 0 + 2 · 4

11 = 2 + 0! + 2 · 4

12 = 20 – 2 · 4

(Note: $0! = 1$)

Finally, 2024 = (expressed as fractions with the numbers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 and 14 using elementary operations)

$$2024 = 14 + \frac{2\cdot 4}{3-\frac{2\cdot 4}{3}} + \frac{3\cdot 5}{4-\frac{3\cdot 5}{4}} + \frac{5\cdot 7}{6-\frac{5\cdot 7}{6}} + \frac{11\cdot 13}{12-\frac{11\cdot 13}{12}}$$

2024 with Roman numerals: MMXXIV = MXII + MXII

The year 2024 contains 366 days, 8784 hours, 527040 minutes and 31.622.400 seconds.

Some interesting facts:

2024! (factorial) is an incredibly big number, ending in 503 zero digits, much bigger than googol.

2^{2024} is also a very big number, containing the sequence of 666 number symbols, hence it is called the apocalyptic number

In this article the number 2024 occurs 167 times.

Bibliography: **www.numbersaplenty.com**

Satu Mare, December 30, 2023.

Kovács Béla

Art 5500

Math Journal

-1-

Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema1.

In ΔABC

$$\frac{64}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \le \sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalites, 2/2024

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{8R(4R+r)}{p^2}.$$

Soluție.

$$\sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 = \sum\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{8R(4R+r)}{p^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{8R(4R+r)}{p^2} \overset{(1)}{\le} \frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{8R(4R+r)}{p^2} \le \frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \Leftrightarrow 8R(4R+r)3r^2 \le 4p^2R^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

$8R(4R+r)3r^2 \le 4R^2(16Rr-5r^2) \Leftrightarrow 2(4R+r)3r \le R(16R-5r) \Leftrightarrow 16R^2-29Rr-6r^2 \ge 0 \Leftrightarrow$
$(R-2r)(16R+3r) \ge 0$ evident din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{8R(4R+r)}{p^2} \overset{(1)}{\ge} \frac{64}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{8R(4R+r)}{p^2} \ge \dfrac{64r^2}{3R^2} \Leftrightarrow 8R(4R+r)3R^2 \ge 64p^2r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$8R(4R+r)3R^2 \ge 64r^2(4R^2+4Rr+3r^2) \Leftrightarrow 3R^3(4R+r) \ge 8r^2(4R^2+4Rr+3r^2) \Leftrightarrow$
$12R^4+3R^3r-32R^2r^2-32Rr^3-24r^4 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(12R^3+27R^2r+22Rr^2+12r^3) \ge 0$ evident din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

Problema se poate întări.

In ΔABC

$$\frac{16}{3} \le \sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{8R}{3r}.$$

Remarca.

Se pot scrie inegalitățile:

In ΔABC

$$\frac{64}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \le \frac{16}{3} \le \sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{8R}{3r} \le \frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Remarca.

În aceeași clasă de probleme.

In ΔABC

$$\frac{24R}{r} \le \sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{8R}{r}\left(\frac{2R}{r}-1\right).$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2=\frac{8R(2R-r)}{r^2}.$$

Soluție.

$$\sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2=\sum\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{8R(2R-r)}{r^2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2=\frac{8R(2R-r)}{r^2}=\frac{8R}{r}\left(\frac{2R}{r}-1\right).$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2=\frac{8R(2R-r)}{r^2}\overset{Euler}{\geq}\frac{24R}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$9\sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2\leq\sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

Folosind **Lemele** de mai sus avem sumele:

$\sum\left(\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\right)^2=\frac{8R(4R+r)}{p^2}$ și $\sum\left(\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}\right)^2=\frac{8R(2R-r)}{r^2}$.

Inegalitatea se scrie:

$9\cdot\frac{8R(4R+r)}{p^2}\leq\frac{8R(2R-r)}{r^2}\Leftrightarrow 9r^2(4R+r)\leq p^2(2R-r)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$9r^2(4R+r)\leq\left(16Rr-5r^2\right)(2R-r)\Leftrightarrow 9r(4R+r)\leq(16R-5r)(2R-r)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 16R^2-31Rr-2r^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)(16R+r)\geq 0$ evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema2.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{a}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

MathTime 2/2024

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{(b+c)^2}=\sum\frac{a^2}{a(b+c)^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2}{\sum a}\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{1}=\frac{9}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}\geq\frac{9r}{4}.$$

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$.

Folosind $\sum\frac{x}{(y+z)^2}\geq\frac{9}{4}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum\frac{\frac{r}{r_a}}{\left(\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}\right)^2}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\sum\frac{\frac{1}{r_a}}{r\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{r_a\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}\geq\frac{9r}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ and $\lambda\geq0$ then

$$\sum \frac{a}{(b+\lambda c)^2} \geq \frac{9}{(\lambda+1)^2}.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{(b+\lambda c)^2} = \sum \frac{a^2}{a(b+\lambda c)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{\sum a} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2}{1} = \frac{9}{(\lambda+1)^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problema3.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum \frac{a}{bc+c} \geq \frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, MathTime 2/2024

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc=1$.

Avem $p \geq 3$ și $q \leq \frac{p^2}{3}$, vezi $p=a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3$ și $q=ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{p^2}{3}$.

$$LHS = \sum \frac{a}{bc+c} = \sum \frac{a^2}{abc+ac} = \sum \frac{a^2}{1+ac} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(1+ac)} = \frac{\left(\sum a\right)^2}{3+\sum ac} = \frac{p^2}{3+q} \overset{q\leq\frac{p^2}{3}}{\geq} \frac{p^2}{3+\frac{p^2}{3}} =$$

$$= \frac{3p^2}{9+p^2} \overset{p\geq 3}{\geq} \frac{3}{2} = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{c+\lambda bc} \geq \frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $\lambda = 0$ inegalitatea $\sum \frac{a}{c} \geq 3$ rezultă dinAM-GM.

În continuare luăm $\lambda > 0$.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc = 1$.

Avem $p \geq 3$ și $q \leq \frac{p^2}{3}$, vezi $p = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ și $q = ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{p^2}{3}$.

$$LHS = \sum \frac{a}{c+\lambda bc} = \sum \frac{a^2}{\lambda abc + ac} = \sum \frac{a^2}{\lambda + ac} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(\lambda + ac)} = \frac{\left(\sum a\right)^2}{3\lambda + \sum ac} = \frac{p^2}{3\lambda + q} \overset{q \leq \frac{p^2}{3}}{\geq} \frac{p^2}{3\lambda + \frac{p^2}{3}} =$$

$$= \frac{3p^2}{9\lambda + p^2} \overset{p \geq 3}{\geq} \frac{3}{\lambda + 1} = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema4.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$9\prod(x+yz) \geq 8(xy+yz+zx)^2.$$

Tran Cong Hung,Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2024

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x+y+z = 3, q = xy+yz+zx, r = xyz$.

Avem $q \leq 3$, vezi $q = xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{p^2}{3} = \frac{3^3}{3} = 3$.

$$\prod(x+yz) = xyz + \sum y^2z^2 + xyz\sum x^2 + x^2y^2z^2 = r + \left(q^2 - 2pr\right) + r\left(p^2 - 2q\right) + r^2.$$

Inegalitatea $9\prod(x+yz) \geq 8(xy+yz+zx)^2$ se scrie:

$$9\left(r + q^2 - 2pr + p^2r - 2qr + r^2\right) \geq 8q^2 \Leftrightarrow q^2 + 9r^2 + 9p^2r - 18qr - 18pr + 9r \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(q^2 - 6qr + 9r^2\right) + 3r\left(3p^2 - 6p + 3 - 4q\right) \geq 0 \Leftrightarrow (q-3r)^2 + 3r\left(3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + 3 - 4q\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q-3r)^2 + 3r(12-4q) \geq 0 \Leftrightarrow (q-3r)^2 + 12r(3-q) \geq 0,$$ vezi $q \leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarca.

In ΔABC

$$3\prod\left(r_b r_c+3rr_a\right)\geq 8F^2\left(4R+r\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1\Leftrightarrow\frac{3r}{r_a}+\frac{3r}{r_b}+\frac{3r}{r_c}=3$.

Folosind $9\prod\left(x+yz\right)\geq 8\left(xy+yz+zx\right)^2$ pentru $\left(x,y,z\right)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem:

$$9\prod\left(\frac{3r}{r_a}+\frac{3r}{r_b}\cdot\frac{3r}{r_c}\right)\geq 8\left(\frac{3r}{r_a}\cdot\frac{3r}{r_b}+\frac{3r}{r_b}\cdot\frac{3r}{r_c}+\frac{3r}{r_c}\cdot\frac{3r}{r_a}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$9\cdot(3r)^3\prod\left(\frac{1}{r_a}+\frac{3r}{r_br_c}\right)\geq 8\left(\frac{9r^2}{r_ar_b}+\frac{9r^2}{r_br_c}+\frac{9r^2}{r_cr_a}\right)^2\Leftrightarrow 3\prod\left(r_br_c+3rr_a\right)\geq 8F^2\left(4R+r\right).$$

Am folosit mai sus $r_ar_br_c=rp^2$ și $r_a+r_b+r_c=4R+r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema5.

X.577. Rezolvați în $\mathbf{R}_+$ sistemul

$$\begin{cases} abc=8 \\ 2^a\cdot\frac{b^2+c^2}{a}+2^b\cdot\frac{c^2+a^2}{b}+2^c\cdot\frac{a^2+b^2}{c}=48 \end{cases}.$$

Mihaela Berindeanu, București, RMT 1/2024

Soluție.

$$LHS=\sum 2^a\cdot\frac{b^2+c^2}{a}\overset{SOS}{\geq}\sum 2^a\cdot\frac{2bc}{a}=\sum 2^{a+1}\cdot\frac{bc}{a}=\frac{\sum 2^{a+1}\cdot b^2c^2}{abc}=\frac{\sum 2^{a+1}\cdot b^2c^2}{8}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$=\frac{\sum 2^{a+1}\cdot b^2c^2}{8}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{1}{8}\cdot 3\sqrt[3]{2^{a+b+c+3}\left(abc\right)^4}=\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{2^{a+b+c+3}8^4}=\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{2^{a+b+c+3}2^{3\cdot 4}}=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{2^{a+b+c+3}2^{3\cdot 4}}=\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{2^{a+b+c+15}}=\frac{3}{8}\cdot 2^{\frac{a+b+c+15}{3}}=\frac{3}{8}\cdot 2^{\frac{a+b+c+15}{3}}=\frac{3}{8}\cdot 2^{\frac{a+b+c}{3}+5}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{3}{8}\cdot 2^{\sqrt[3]{abc}+5}=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot 2^{\sqrt[3]{8}+5}=\frac{3}{8}\cdot 2^{2+5}=\frac{3}{2^3}\cdot 2^7=3\cdot 2^4=48=RHS$$, cu egalitate pentru $a=b=c=2$.

Deducem că $\left(a,b,c\right)=\left(2,2,2\right)$ este soluția unică a sistemului.

Remarca.

Rezolvați în $\mathbf{R}_+$ sistemul

$$\begin{cases} abcd = 81 \\ 3^a \cdot \dfrac{b^3+c^3+d^3}{a} + 3^b \cdot \dfrac{c^3+d^3+a^3}{b} + 3^c \cdot \dfrac{d^3+a^3+b^3}{c} + 3^4 \cdot \dfrac{a^3+b^3+c^3}{d} = 2916 \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum 3^a \cdot \frac{b^3+c^3+d^3}{a} \overset{SOS}{\geq} \sum 3^a \cdot \frac{3bcd}{a} = \sum 3^{a+1} \cdot \frac{abcd}{a^2} = \sum 3^{a+1} \cdot \frac{3^4}{a^2} = \sum \frac{3^{a+5}}{a^2} \overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{3^{a+b+c+d+20}}{(abcd)^2}} = 4\sqrt[4]{\frac{3^{a+b+c+d+20}}{(3^4)^2}} = 4\sqrt[4]{\frac{3^{a+b+c+d+20}}{3^8}} = 4\sqrt[4]{3^{a+b+c+d+12}} = 4 \cdot 3^{\frac{a+b+c+d+12}{4}} = 4 \cdot 3^{\frac{a+b+c+d}{4}+3} =$$

$$= 4 \cdot 3^{\frac{a+b+c+d}{4}+3} \geq 4 \cdot 3^{\sqrt[4]{abcd}+3} = 4 \cdot 3^{\sqrt[4]{3^4}+3} = 4 \cdot 3^{3+3} = 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 729 = 2916,$$

cu egalitate pentru $a = b = c = d = 3$.

Deducem că $(a,b,c,d) = (3,3,3,3)$ este soluția unică a sistemului.

Problema6.

Arătați că

$$5^{866} + \left(6 \cdot 5^{432}\right)^2 + \left(8 \cdot 5^{432}\right)^2 < 2^{2023}.$$

Gheorghe Iacob, Pașcani, RMT 1/2024

Soluție.

$$a = 5^{866} + \left(6 \cdot 5^{432}\right)^2 + \left(8 \cdot 5^{432}\right)^2 = 5^{866} + 36 \cdot 5^{2 \cdot 432} + 64 \cdot 5^{2 \cdot 432} = 5^{866} + 100 \cdot 5^{864} = 5^{864}\left(5^2 + 100\right) =$$

$$= 5^{864} \cdot 5^3 = 5^{867} = 5^{3 \cdot 289} = \left(5^3\right)^{289}.$$

$$b = 2^{2023} = 2^{7 \cdot 289} = \left(2^7\right)^{289}.$$

Deoarece $5^3 < 2^7 \Leftrightarrow 125 < 128 \Rightarrow a = \left(5^3\right)^{289} < \left(2^7\right)^{289} = b$.

Deducem că $a < b$.

Remarca.

Fie k număr natural. Comparați numerele

$$a = 5^{6k+2} + \left(6 \cdot 5^{3k}\right)^2 + \left(8 \cdot 5^{3k}\right)^2 \text{ și } b = 2^{7k+7}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$a=5^{6k+2}+\left(6\cdot5^{3k}\right)^2+\left(8\cdot5^{3k}\right)^2=5^{6k+2}+36\cdot5^{3k}+64\cdot5^{3k}=5^{6k+2}+100\cdot5^{3k}=$$
$$=5^{3k}\left(5^2+100\right)=5^{3k}\cdot5^3=5^{3k+3}=\left(5^3\right)^{k+1}.$$

$$b=2^{7k+7}=\left(2^7\right)^{k+1}.$$

Deoarece $5^3<2^7\Leftrightarrow125<128\Rightarrow a=\left(5^3\right)^{k+1}<\left(2^7\right)^{k+1}=b$.

Deducem că $a<b$.

Problema7.

If $a,b,c<1$, $\sum\frac{a^2}{1-a}=4$ then

$$a+b+c\le2.$$

Panagiotis Danousis , MathTime 2/2024

Soluție.

Cu substituția $(a,b,c)=(1-x,1-y,1-z)$ problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $\sum\frac{(1-x)^2}{x}=4$ then $x+y+z\ge1$.

Obținem: $4=\sum\frac{(1-x)^2}{x}=\sum\frac{1-2x+x^2}{x}=\sum\frac{1}{x}-6+\sum x\Leftrightarrow10=\sum\frac{1}{x}+\sum x$.

Rezultă $10=\sum\frac{1}{x}+\sum x\overset{CS}{\ge}\frac{9}{\sum x}+\sum x=\frac{9}{p}+p$.

Din $10\ge p+\frac{9}{p}\Leftrightarrow p^2-10p+9\le0\Leftrightarrow1\le p\le9$.

Din $p\ge1\Rightarrow x+y+z\ge1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2}{3}$.

Remarca.

If $\lambda>0$, $0<a,b,c<\lambda$, $\sum\frac{a^2}{\lambda-a}=4\lambda$ then

$$a+b+c\le2\lambda.$$

Marin Chirciu

Problema8.

O.IX.384. If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a}{bc(b+c)}+\frac{b}{ca(c+a)}+\frac{c}{ab(a+b)}\geq 3.$$

Mihai Vijdeliuc, Baia-Mare, RMT 1/2024

Soluție.

$$LHS=\frac{1}{2}\sum a^2+\sum\frac{a}{bc(b+c)}=\frac{1}{2}\sum a^2+\frac{1}{abc}\sum\frac{a^2}{b+c}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{2}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}+\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(b+c)}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}+\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum a}=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}+\frac{\sum a}{abc}\right)\overset{AM-GM}{\geq}\sqrt{\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}\cdot\frac{\sum a}{abc}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sum a\right)^3}{3abc}}\overset{AM-GM}{\geq}3=RHS,$$

cu egalitate pentru $\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\frac{\sum a}{abc}$ și $\left(\sum a\right)^3=27abc\Leftrightarrow abc\sum a=3$ și $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda+1}+\frac{a}{bc(b+\lambda c)}+\frac{b}{ca(c+\lambda a)}+\frac{c}{ab(a+\lambda b)}\geq\frac{6}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Problema9.

O.VII.543. In ΔABC

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+3\geq\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}.$$

Gheorghe Stoica, Petroșani,RMT 1/2024

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi:

$abc=4Rrp$, $\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și $\sum\frac{b+c}{a}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}+3\geq\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}\Leftrightarrow\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}+3\geq\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}\Leftrightarrow R\geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

If $\lambda\leq 1$ then in ΔABC holds:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+3(2\lambda-1)\geq\lambda\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right).$$

Marin Chirciu

Problema10.

If $x,y\geq -1$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(y+1)^2}\leq\frac{2}{n}(x+y+n).$$

Traian Ianculescu, Mathematical Inequalities 2/2024

Soluție.

Lema.

If $x\geq -1$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}\leq\frac{2x+n}{n}.$$

Soluție.

$$\sqrt[n]{(x+1)(x+1)\underbrace{1\ldots 1}_{n-2}}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{(x+1)+(x+1)+\underbrace{1+\ldots+1}_{n-2}}{n}=\frac{2x+n}{n}$$, cu egalitate pentru $x+1=1\Leftrightarrow x=0$

$$LHS=\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(y+1)^2}\overset{Lema}{\leq}\frac{2x+n}{n}+\frac{2y+n}{n}=\frac{2}{n}(x+y+n)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=0$.

Remarca.

If $x,y,z\geq -1$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{x+1}+\sqrt[n]{y+1}+\sqrt[n]{z+1}\leq\frac{1}{n}(x+y+z+3n).$$

Soluție.

Lema.

If $x\geq -1$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{x+1} \le \frac{x+n}{n}.$$

Soluție.

$$\sqrt[n]{(x+1)\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} \overset{AM-GM}{\le} \frac{(x+1)+\underbrace{1+\ldots+1}_{n-1}}{n} = \frac{x+n}{n}$$, cu egalitate pentru $x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

$$LHS = \sum \sqrt[n]{x+1} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{x+n}{n} = \frac{1}{n}(x+y+z+3n) = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=0$.

Remarca.

If $x, y, z \ge -1$ and $n \in \mathbf{N}, n \ge 2$ then

$$\sqrt[n]{(x+1)^3} + \sqrt[n]{(y+1)^3} + \sqrt[n]{(z+1)^3} \le \frac{3}{n}(x+y+z+n).$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Problema11.

V.581. Determinați perechile de numere $\left(p, \overline{abc}\right)$,unde p este prim, pentru care avem

$$(a+b+c)^3 = p^3 \cdot \overline{abc}.$$

Gheorghe Stoica, Petroșani și Alexandru Blaga, Satu-Mare, RMT 1/2024

Soluție.

Este necesar ca $\overline{abc}$ să fie cub perfect $\Rightarrow \overline{abc} \in \{5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3\}$.

Convine $\left(p, \overline{abc}\right) = (2, 729)$

Remarca.

Determinați perechile de numere $\left(n, \overline{abcd}\right)$,unde n este număr natural, pentru care avem

$$(a+b+c+d)^3 = n^3 \cdot \overline{abcd}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Este necesar ca $\overline{abcd}$ să fie pătrat perfect $\Rightarrow \overline{abcd} \in \{10^3, 11^3, 12^3, \ldots, 21^3\}$.

Pentru $n=1$ și $\overline{abcd} = 17^3 = 4913$ se obține $(4+9+1+3)^3 = 1^3 \cdot 4913$.

Convine $\left(n,\overline{abcd}\right)=(1,4913)$.

Problema12.

X.576. If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$(a+1)(b+1)(c+1)\le 8.$$

Emanuel Munteanu și Ovidiu Pop, Brașov, RMT 1/2024

Soluție.

$$LHS=(a+1)(b+1)(c+1)\overset{AM-GM}{\le}\left[\frac{\sum(a+1)}{3}\right]^3=\left[\frac{\sum a+3}{3}\right]^3\overset{CBS}{\le}\left[\frac{\sqrt{3\sum a^2}+3}{3}\right]^3=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3\cdot 3}+3}{3}\right]^3=\left[\frac{3+3}{3}\right]^3=2^3=8=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ then

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\le 16.$$

Soluție.

$$LHS=\prod(a+1)\overset{AM-GM}{\le}\left[\frac{\sum(a+1)}{4}\right]^4=\left(\frac{\sum a+4}{4}\right)^4\overset{CBS}{\le}\left(\frac{\sqrt{4\sum a^2}+4}{4}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{4\cdot 4}+4}{4}\right)^4=\left(\frac{4+4}{4}\right)^4=2^4=16=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarca.

If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=n$ then

$$(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)\le 2^n.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Problema13.

X.576. If $x,y,z>0$ then

$$\sum \frac{x^3+5}{\sqrt{y}} \geq 18.$$

Cătălin Cristea, Craiova, RMT 1/2024

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^3+5}{\sqrt{y}} \overset{AM-GM}{\geq} \sum \frac{x^3+5}{\frac{y+1}{2}} = 2\sum \frac{x^3+5}{y+1} \overset{AM-GM}{\geq} 2\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{x^3+5}{y+1}} = 6\sqrt[3]{\prod \frac{x^3+5}{x+1}} \overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq} 6\sqrt[3]{\prod 3} = 6\cdot 3 = 18 = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{x^3+5}{x+1} \geq 3 \Leftrightarrow x^3-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$, cu egalitate pentru $x=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum \frac{x^4+7}{\sqrt{y}} \geq 24.$$

Remarca.

If $x,y,z>0$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum \frac{x^n+2n-1}{\sqrt{y}} \geq 6n.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^n+2n-1}{\sqrt{y}} \overset{AM-GM}{\geq} \sum \frac{x^n+2n-1}{\frac{y+1}{2}} = 2\sum \frac{x^n+2n-1}{y+1} \overset{AM-GM}{\geq} 2\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{x^n+2n-1}{y+1}} =$$

$$6\sqrt[3]{\prod \frac{x^n+2n-1}{x+1}} \overset{(1)}{\geq} 6\sqrt[3]{\prod n} = 6\cdot n = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{x^n+2n-1}{x+1} \geq n \Leftrightarrow x^n-nx+n-1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\ldots+(n-2)x+n-1\right) \geq 0$, cu egalitate pentru $x=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema13.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x^3}{2xy + y^2} \geq \frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu, IneMath 2/2024

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^3}{2xy + y^2} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^3}{3\sum\left(2xy + y^2\right)} = \frac{\left(\sum x\right)^3}{3\left(\sum x\right)^2} = \frac{\sum x}{3} = \frac{1}{3} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$\sum \frac{x^n}{2xy + y^2} \geq \frac{1}{3^{n-2}}.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{\frac{2r_a^2}{r_b} + \frac{r_a^3}{r_b^2}} \geq \frac{1}{3r}.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1$.

Folosind $\sum \frac{x^3}{2xy + y^2} \geq \frac{1}{3}$ pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\left(\frac{r}{r_a}\right)^3}{2\frac{r}{r_a} \cdot \frac{r}{r_b} + \left(\frac{r}{r_b}\right)^2} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{\frac{2r_a^2}{r_b} + \frac{r_a^3}{r_b^2}} \geq \frac{1}{3r}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema14.

If $a,b>0$, $a+b=1$ then find min of

$$P=\sqrt{\frac{1-a}{1+7a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+7b}}.$$

Khoi Nguyen Pham, Vietnam,THCS 2/2024

Soluție.

$$P^2=\frac{1-a}{1+7a}+\frac{1-b}{1+7b}+2\sqrt{\frac{1-a}{1+7a}}\cdot\sqrt{\frac{1-b}{1+7b}}=\frac{b}{1+7a}+\frac{a}{1+7b}+2\sqrt{\frac{ab}{(1+7a)(1+7b)}}=$$

$$=\frac{7(a^2+b^2)+1}{(1+7a)(1+7b)}+2\sqrt{\frac{ab}{(1+7a)(1+7b)}}\overset{CS}{\geq}\frac{7\frac{(a+b)^2}{2}+1}{8+49ab}+2\sqrt{\frac{ab}{8+49ab}}=\frac{7\cdot\frac{1}{2}+1}{8+49ab}+2\sqrt{\frac{ab}{8+49ab}}=$$

$$=\frac{9}{2(8+49ab)}+2\sqrt{\frac{ab}{8+49ab}}.$$

Notând $\sqrt{\frac{ab}{8+49ab}}=x\Rightarrow ab=\frac{8x^2}{1-49x^2}\Rightarrow\frac{1-49x^2}{8}=\frac{1}{8+49ab}\overset{ab\leq\frac{1}{4}}{\geq}\frac{4}{81}\Rightarrow x\leq\frac{1}{9}$.

Rezultă $P^2=\frac{9}{2(8+49ab)}+2\sqrt{\frac{ab}{8+49ab}}=\frac{9}{2\cdot\frac{8}{1-49x^2}}+2x=\frac{9(1-49x^2)}{16}+2x\overset{(1)}{\geq}\frac{4}{9}$,

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{9(1-49x^2)}{16}+2x\geq\frac{4}{9}\Leftrightarrow 3969x^2-288x-17\leq 0\Leftrightarrow(9x-1)(441x+17)\leq 0$, vezi $x\leq\frac{1}{9}$.

Din $P^2\geq\frac{4}{9}\Rightarrow P\geq\frac{2}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

Deducem că $\min P=\frac{2}{3}$ pentru $a=b=\frac{1}{2}$.

Remarca.

Let $\lambda\geq 5$ fixed. If $a,b>0$, $a+b=1$ then find min of

$$P=\sqrt{\frac{1-a}{1+\lambda a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+\lambda b}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $\min P = \frac{2}{\sqrt{\lambda+2}}$ pentru $a=b=\frac{1}{2}$.

Problema15.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{1}{a^2+b^2+2} \le \sum \frac{1}{(a+1)^2}.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities2/2024

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$ then

$$\frac{1}{a^2+b^2+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right).$$

Demonstrație.

$\frac{1}{a^2+b^2+2} = \frac{1}{(a^2+1)+(b^2+1)} = \frac{1}{x+y} \overset{CS}{\le} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right)$, cu egalitate pentru

$x=y \Leftrightarrow a=b$.

$$\sum \frac{1}{a^2+b^2+2} \overset{Lema}{\le} \frac{1}{4}\sum\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right) = \frac{1}{2}\sum\frac{1}{a^2+1} \overset{CS}{\le} \frac{1}{2}\sum\frac{1}{\frac{(a+1)^2}{2}} = \sum\frac{1}{(a+1)^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$ then

$$\sum \frac{1}{a^2+b^2+c^2+3} \le \frac{2}{3}\sum\frac{1}{(a+1)^2}.$$

Marin Chirciu

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2+3} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Problema16.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=6$ then

$$\sum\frac{a^4+1}{b^2+1}\geq\frac{51}{5}.$$

Batbold Egshit, Mathematical Inequalities 2/2024

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^4+1}{b^2+1}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2+\left(\sum 1\right)^2}{\sum\left(b^2+1\right)}=\frac{\left(\sum a^2\right)^2+9}{\sum a^2+3}=\frac{t^2+9}{t+3}\overset{(1)}{\geq}\frac{51}{5}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{t^2+9}{t+3}\geq\frac{51}{5}\Leftrightarrow 5t^2-51t-108\geq 0\Leftrightarrow(t-12)(5t+9)\geq 0$, vezi

$$t=\sum a^2\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\frac{6^2}{3}=12.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=6$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^4+\lambda}{b^2+\lambda}\geq\frac{3(\lambda+16)}{\lambda+4}.$$

Marin Chirciu

Problema17.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum x\sqrt{3x^2+6y^2}\geq(x+y+z)^2.$$

Amir Sofi, Kosovo, Mathematcs(College and High School) 2/2024

Soluție.

$$\sum x\sqrt{3x^2+6y^2}=\sum x\sqrt{3x^2+3y^2+3y^2}=\sum x\sqrt{3\left(x^2+y^2+y^2\right)}\overset{CBS}{\geq}\sum x\sqrt{(x+y+z)^2}=$$

$$=\sum x(x+y+y)=\sum x(x+2y)=\sum\left(x^2+2xy\right)=(x+y+z)^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{r_a}\sqrt{\frac{1}{r_a^2}+\frac{2}{r_b^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{3}r^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$.

Folosind $\sum x\sqrt{3x^2+6y^2} \ge (x+y+z)^2$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{r}{r_a}\sqrt{3\left(\frac{r}{r_a}\right)^2+6\left(\frac{r}{r_b}\right)^2} \ge \left(\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}\right)^2 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{r_a}\sqrt{\frac{1}{r_a^2}+\frac{2}{r_b^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{3}r^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema18.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum \frac{2x^2(y+z)}{(x+y)(x+z)} \le x+y+z.$$

Vedula N.Murty, USA

Soluție.

$$\sum \frac{2x^2(y+z)}{(x+y)(x+z)} \le x+y+z \Leftrightarrow \frac{\sum 2x^2(y+z)^2}{(x+y)(y+z)(x+z)} \le x+y+z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum x^2(y+z)^2 \le \sum x\prod(y+z).$$

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $\sum x^2(y+z)^2 = 2q^2-2pr$ și $\prod(y+z)=pq-r$.

Inegalitatea $2\sum x^2(y+z)^2 \le \sum x\prod(y+z)$ se scrie: $2(2q^2-2pr) \le p(pq-r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2q-4q^2+3pr \ge 0$, care rezultă din $p^2 \ge 3q$ și $p^3-4pq+9r \ge 0$,(Schur).

Într-adevăr:

$$p^2q-4q^2+3pr \ge 0 \Leftrightarrow p^2-4q+3\frac{pr}{q} \ge 0 \Leftrightarrow p^3-4pq+3\frac{p^2r}{q} \ge 0 \overset{\frac{p^2}{q}\ge 3}{\Leftrightarrow} p^3-4pq+9r \ge 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarca.

În ΔABC

$$\text{1) } \sum r_a^2 (r_b + r_c)^2 \le 2(4R + r)Rp^2.$$

Soluție.

Folosind $\sum \frac{2x^2(y+z)}{(x+y)(x+z)} \le x + y + z$ pentru $(x, y, z) = (r_a, r_b, r_c)$ obținem:

$$2\sum r_a^2 (r_b + r_c)^2 \le \sum r_a \prod (r_b + r_c) \Leftrightarrow 2\sum r_a^2 (r_b + r_c)^2 \le (4R + r) \cdot 4Rp^2 \Leftrightarrow$$
$$\sum r_a^2 (r_b + r_c)^2 \le 2(4R + r)Rp^2.$$

Egalitatea are lc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$\text{2) } \sum m_a^2 (m_b + m_c)^2 \le (4R + r) \cdot \frac{R^3 p^2}{2r^2}.$$

$$\text{3) } \sum w_a^2 (w_b + w_c)^2 \le (4R + r) \cdot \frac{R^3 p^2}{2r^2}.$$

$$\text{4) } \sum h_a^2 (h_b + h_c)^2 \le (4R + r) \cdot \frac{R^3 p^2}{2r^2}.$$

Dezvltări, Marin Chirciu

Problema19.

If $a, b, c > 0$ then

$$\text{5) } \sum \frac{a^3}{(b+c)^3} \ge \frac{3}{8}.$$

MathTime 2/2024

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^3}{(b+c)^3} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^3}{3^2} \overset{Nesbitt}{\ge} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3^2} = \frac{3}{8} = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarca.

If $a, b, c > 0$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{a^3}{(b+\lambda c)^3} \geq \frac{3}{(\lambda+1)^3}.$$

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $\lambda \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a^n}{(b+\lambda c)^n} \geq \frac{3}{(\lambda+1)^n}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ se obține $\sum \frac{a}{b+\lambda c} \geq \frac{3}{\lambda+1}$, vezi inegalitatea lui Nesbitt.

Pentru $n \geq 2$ se folosește negalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{a^n}{(b+\lambda c)^n} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+\lambda c}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{3}{(\lambda+1)^n} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema20.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=2$ then

$$\sum \frac{x}{xy+2z} \geq \frac{9}{8}.$$

OLM-2020-Bihor

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=2$ then

$$\sum \frac{x-y}{xy+2z} = 0.$$

Demonstrație.

$$\sum \frac{x-y}{xy+2z} = \sum \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} = \sum \frac{x-y}{z^2+xy+yz+zx} \sum \frac{x-y}{(z+x)(z+y)} =$$

$$= \frac{\sum (x-y)(x+y)}{\prod (y+z)} = \frac{\sum (x^2-y^2)}{\prod (y+z)} = 0.$$

$$\sum\frac{x}{xy+2z}\overset{Lema}{=}\frac{1}{2}\sum\frac{x+y}{xy+2z}=\frac{1}{2}\sum\frac{x+y}{xy+(x+y+z)z}=\frac{1}{2}\sum\frac{x+y}{z^2+xy+yz+zx}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\frac{x+y}{(z+x)(z+y)}=\frac{1}{2}\sum\frac{a}{bc}=\frac{1}{2}\frac{\sum a^2}{abc}\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{2}\frac{\sum bc}{abc}=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{2}\frac{9}{\sum a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{8}.$$

Am folosit mai sus: $\sum a=\sum(x+y)=2\sum x=2\cdot 2=4$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$.

Remarca.

If $x,y,z,\lambda>0$, $x+y+z=\lambda$ then

$$\sum\frac{x}{xy+\lambda z}\geq\frac{9}{4\lambda}.$$

Marin Chirciu

Problema21.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum\frac{b}{a}.$$

Titu Andreescu, USA, Mathematical Reflections

Soluție.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}}=2\frac{a}{c}.$$

Se scriu și celelalte două inegalități analoage și se adună.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$(\lambda+1)\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum\frac{a}{b}+\lambda\sum\frac{b}{a}.$$

Marin Chirciu

Problema22.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{a(b+c)}\geq\frac{3}{2}.$$

Darij Grinberg, Mathematical Inequalities

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{a(b+c)}=\sum\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}-\sum\frac{a^2}{a(b+c)}\overset{CS}{\geq}\sum\frac{\frac{(b+c)^2}{2}}{a(b+c)}-\sum\frac{a}{b+c}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}-\sum\frac{a}{b+c}\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}-a\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{4}\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\overset{AM-GM}{\geq}\frac{1}{4}\cdot 6=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $0\leq\lambda\leq 2$ then

$$\sum\frac{b^2+c^2-\lambda a^2}{a(b+c)}\geq\frac{3}{2}(2-\lambda).$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{\cos A}{a^2(b+c)}\geq\frac{3}{4abc}.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

Folosind teorema cosinusului $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ obținem:

$$\sum\frac{\cos A}{a^2(b+c)}=\sum\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a^2(b+c)}=\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{2a^2bc(b+c)}\geq\frac{3}{4abc}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema23.

If $x,y,z>0$, $x+y+x=6$ then

$$\sum\sqrt{x^2+x+4}\geq 3\sqrt{10}.$$

Dinh Hieu, Vietnam,THCS 2/2024

Soluție.

Funcția $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$ este convexă, vezi $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+4}}$, $f''(x)=\dfrac{3}{2\left(x^2+x+4\right)^{3/2}}>0$.

$$LHS=\sum\sqrt{x^2+x+4}\overset{Jensen}{\geq}3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{6}{3}\right)=3f(2)=3\sqrt{10}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2$.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+x=1$ then

$$\sum\sqrt{x^2+x+4}\geq 4.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2+\frac{r}{r_a}+4}\geq 4.$$

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\dfrac{r}{r_a}+\dfrac{r}{r_b}+\dfrac{r}{r_c}=1$.

Folosind $\sum\sqrt{x^2+x+4}\geq 4$ pentru $(x,y,z)=\left(\dfrac{r}{r_a},\dfrac{r}{r_b},\dfrac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\sqrt{\left(\dfrac{r}{r_a}\right)^2+\dfrac{r}{r_a}+4}\geq 4$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\left(\frac{r}{h_a}\right)^2+\frac{r}{h_a}+4}\geq 4.$$

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+x=1$ and $\lambda\geq\dfrac{1}{4}$ then

$$\sum\sqrt{x^2+x+\lambda}\geq\sqrt{9\lambda+4}.$$

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+x=1$ and $0\leq\lambda\leq\dfrac{1}{4}$ then

$$\sum \sqrt{x^2+x+\lambda} \le \sqrt{9\lambda+4}\,.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema24.

If $x, y, z > 0$, $x+y+x=6$ then

$$\sum \sqrt[3]{x^2+2yz} \le 3\sqrt[3]{12}\,.$$

Nikolaos Kallos, Greece, MathTime 2/2024

Soluție.

Notând $(a,b,c)=\left(\sqrt[3]{x^2+2yz}, \sqrt[3]{y^2+2zx}, \sqrt[3]{z^2+2xy}\right)$ obținem

$a^3+b^3+c^3=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2=6^2=36$.

$36=a^3+b^3+c^3 \overset{Holder}{\ge} \dfrac{\left(\sum a\right)^3}{3^2} \Rightarrow \left(\sum a\right)^3 \le 36\cdot 9 \Rightarrow \sum a \le 3\sqrt[3]{12}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\sqrt[3]{12} \Leftrightarrow x=y=z=2$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x+y+x=1$ then

$$\sum \sqrt[3]{\frac{x^2+2yz}{9}} \le 1.$$

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

In ΔABC

$$\sum \sqrt[3]{\frac{\dfrac{1}{rr_a^2}+\dfrac{2}{rr_br_c}}{9}} \le \frac{1}{r}\,.$$

Soluție.

Lema.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\dfrac{r}{r_a}+\dfrac{r}{r_b}+\dfrac{r}{r_c}=1$.

Folosind $\sum \sqrt[3]{\dfrac{x^2+2yz}{9}} \le 1$ pentru $(x,y,z)=\left(\dfrac{r}{r_a}, \dfrac{r}{r_b}, \dfrac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2+2\frac{r}{r_b}\cdot\frac{r}{r_c}}{9}}\le 1 \Leftrightarrow \sum\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{rr_a^2}+\frac{2}{rr_br_c}}{9}}\le\frac{1}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{rh_a^2}+\frac{2}{rh_bh_c}}{9}}\le\frac{1}{r}.$$

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+x=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\ge 2$ then

$$\sum\sqrt[n]{x^2+2yz}\le\sqrt[n]{3^{n-1}}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție.

Notând $(a,b,c)=\left(\sqrt[n]{x^2+2yz},\sqrt[n]{y^2+2zx},\sqrt[n]{z^2+2xy}\right)$ obținem

$a^n+b^n+c^n=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2=1^2=1.$

$$1=a^n+b^n+c^n\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}}\Rightarrow\left(\sum a\right)^n\le 3^{n-1}\Rightarrow\sum a\le\sqrt[n]{3^{n-1}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}}}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Problema25.

If $x,y>0$, $x+y\ge 3$ then

$$\frac{x^3}{(y+1)^2}+\frac{y^3}{(x+1)^2}\ge\frac{27}{25}.$$

Nguyen Nghi, Vietnam,MathTime 2/2024

Soluție.

$$LHS=\frac{x^3}{(y+1)^2}+\frac{y^3}{(x+1)^2}\overset{Radon}{\ge}\frac{(x+y)^3}{(x+1+y+1)^2}=\frac{t^3}{(t+2)^2}\overset{(1)}{\ge}\frac{27}{25}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{t^3}{(t+2)^2} \geq \frac{27}{25} \Leftrightarrow 25t^3 - 27t^2 - 108t - 108 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)\left(25t^2 + 48t + 36\right) \geq 0$, vezi $t = x + y \geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = \frac{3}{2}$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $x, y > 0$, $x + y \geq 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{x^3}{(y+\lambda)^2} + \frac{y^3}{(x+\lambda)^2} \geq \frac{27}{(2\lambda+3)^2}.$$

Remarca.

If $x, y > 0$, $x + y \geq 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{x^4}{(y+\lambda)^3} + \frac{y^4}{(x+\lambda)^3} \geq \frac{81}{(2\lambda+3)^3}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema26.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} \geq \frac{1}{2Rr}.$$

MathTime 2/2024

Soluție.

$$\sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} = \sum \frac{a^2}{a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)} = \frac{4p^2}{2\sum b^2c^2 - \sum a^4} = \frac{4p^2}{16F^2} =$$

$$= \frac{4p^2}{16p^2r^2} = \frac{1}{4r^2} \overset{Euler}{\geq} \frac{1}{2Rr}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} \geq \frac{1}{4r^2}.$$

IneMath

Problema27.

In ΔABC

$$\sum \frac{II_a}{a} \geq 2\sqrt{3}.$$

MathTime 2/2024

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$II_a = 4R\sin\frac{A}{2}.$$

$$\sum \frac{II_a}{a} = \sum \frac{4R\sin\frac{A}{2}}{a} = 4R\sum \frac{\sin\frac{A}{2}}{a} \overset{AM-GM}{\geq} 4R\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{\sin\frac{A}{2}}{a}} = 12R\sqrt[3]{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{abc}} =$$

$$=12R\sqrt[3]{\frac{\frac{r}{4R}}{4Rrp}} = 12R\sqrt[3]{\frac{1}{16R^2 p}} \overset{Mitrinovic}{\geq} 12R\sqrt[3]{\frac{1}{16R^2\frac{3R\sqrt{3}}{2}p}} = 12R\sqrt[3]{\frac{1}{8R^3\left(\sqrt{3}\right)^3}} = 2\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{II_a}{b+c} \geq \sqrt{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Marin Chirciu

Problema28.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{x+y+z}{2xyz}.$$

THCS 2/2024

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{1}{x^2+yz}\le\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Demonstrație.

$\frac{1}{x^2+yz}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{2\sqrt{x^2yz}}=\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, cu egalitate pentru

$x^2=yz$ și $\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Leftrightarrow x=y=z$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{x^2+yz}\le\sum\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}\sum\frac{2}{yz}=\frac{1}{2}\frac{\sum x}{xyz}=\frac{x+y+z}{2xyz}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_a}{r_a^2+r_br_c}\le\frac{1}{2r}.$$

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$.

Folosind $\sum\frac{1}{x^2+yz}\le\frac{x+y+z}{2xyz}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum\frac{1}{\left(\frac{r}{r_a}\right)^2+\frac{r}{r_b}\cdot\frac{r}{r_c}}\le\frac{\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}}{2\frac{r}{r_a}\cdot\frac{r}{r_b}\cdot\frac{r}{r_c}}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\frac{r^2}{r_a^2}+\frac{r^2}{r_br_c}}\le\frac{1}{2\frac{r^3}{r_ar_br_c}}\Leftrightarrow\sum\frac{r_a}{r_a^2+r_br_c}\le\frac{1}{2r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{h_a^2+h_bh_c}\le\frac{1}{2r}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema29.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\left(x^4+y^3+z\right)\geq\sum\frac{x^2+y^2}{z}+3.$$

Problem 2/2, Upper School 2/2024

Soluție.

Avem $\sum\frac{x^2+y^2}{z}=\frac{\sum xy\left(x^2+y^2\right)}{xyz}=\frac{\sum xy\left(x^2+y^2\right)}{1}=\sum xy\left(x^2+y^2\right).$

Inegalitatea se scrie:

$\sum x^4+\sum x^3+\sum x\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)+3$, care rezultă din inegalitatea lui Schur:

$\sum x^r\left(x-y\right)\left(x-z\right)\geq 0$,pentru $x,y,z>0$ și $r>0$.

$\sum x^3+3xyz\geq\sum xy\left(x+y\right)$, pentru $r=1$;pun $xyz=1\Rightarrow\sum x^3\geq\sum xy\left(x+y\right)-3$.

$\sum x^4+xyz\left(x+y+z\right)\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)$, pentru $r=2$; pun $xyz=1\Rightarrow$
$\sum x^4\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)-\sum x$.

Pentru demonstrarea inegalității $\sum x^4+\sum x^3+\sum x\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)+3$, folosind inegalitatea lui Schur este suficient să arătăm că:

$\sum xy\left(x^2+y^2\right)-\sum x+\sum xy\left(x+y\right)-3+\sum x\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum xy\left(x+y\right)\geq 6$, vezi inegalitatea mediilor și $xyz=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\left(x^4+\lambda y^3+z\right)\geq\sum\frac{x^2+y^2}{z}+3\lambda.$$

Marin Chirciu

Problema30.

S.2418.If $x\geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\prod\left(\left(\frac{m_a^{2x+4}}{\left(m_bR+m_cr\right)^{2x}}\right)^2+1\right)\geq\frac{81F^2}{4\left(R+r\right)^{2x}}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania, RMM-42, Autumn-2024

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

Folosind **Lema** pentru $(a,b,c,t)=\left(\frac{m_a^{x+2}}{(m_bR+m_cr)^x},\frac{m_b^{x+2}}{(m_cR+m_ar)^x},\frac{m_c^{x+2}}{(m_aR+m_br)^x},1\right)$ obținem:

$$LHS=\prod\left(\left(\frac{m_a^{x+2}}{(m_bR+m_cr)^{2x}}\right)^2+1\right)\overset{Lema}{\geq}\frac{3}{4}\left(\sum\frac{m_a^{x+2}}{(m_bR+m_cr)^x}\right)^2 1^2=\frac{3}{4}\left(\sum\frac{m_a^x\cdot m_a^{x+2}}{m_a^x(m_bR+m_cr)^x}\right)^2\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{3}{4}\left(\sum\frac{m_a^{2x+2}}{(m_am_bR+m_am_cr)^x}\right)^2=\frac{3}{4}\left(\sum\frac{\left(m_a^2\right)^{x+1}}{(m_am_bR+m_am_cr)^x}\right)^2\overset{Radon}{\geq}\frac{3}{4}\left(\frac{\left(\sum m_a^2\right)^{x+1}}{\sum(m_am_bR+m_am_cr)^x}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{\left(\sum m_a^2\right)^{x+1}}{(R+r)^x\left(\sum m_bm_c\right)^x}\right)^2\overset{SOS}{\geq}\frac{3}{4}\left(\frac{\left(\sum m_bm_c\right)^{x+1}}{(R+r)^x\left(\sum m_bm_c\right)^x}\right)^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\sum m_bm_c}{(R+r)^x}\right)^2\overset{Santalo}{\geq}\frac{3}{4}\left(\frac{3F\sqrt{3}}{(R+r)^x}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{27F^2}{(R+r)^{2x}}=\frac{81F^2}{4(R+r)^{2x}}=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Santalo $\sum m_bm_c\geq 3F\sqrt{3}$.

S.2419. If $x\geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\prod\left(\left(\frac{m_a^{2x+4}}{(m_bR+m_cr)^{2x}}\right)^2+2\right)\geq\frac{81F^2}{(R+r)^{2x}}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $x\geq 0$ and $\lambda>0$ then in ΔABC holds:

In ΔABC

$$\prod\left(\left(\frac{m_a^{2x+4}}{(m_bR+m_cr)^{2x}}\right)^2+\lambda\right)\geq\frac{81\lambda^2F^2}{4(R+r)^{2x}}.$$

Marin Chirciu

Problema31.

O.X.385. Fie $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ fixat. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația

$$\left(1+2^x\right)\left(1+2^{-x}\right)+\left(2+3^x\right)\left(2+3^{-x}\right)+\ldots+\left(n+(n+1)^x\right)\left(n+(n+1)^{-x}\right)=\frac{2n^3+9n^2+13n}{6}.$$

Dorel I. Duca, Cluj-Napoca, RMT 1/2024

Soluție.

Lema.

If $x \in \mathbf{R}$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$\left(1+2^x\right)\left(1+2^{-x}\right)+\left(2+3^x\right)\left(2+3^{-x}\right)+\ldots+\left(n+(n+1)^x\right)\left(n+(n+1)^{-x}\right)\geq\frac{2n^3+9n^2+13n}{6}.$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(k+(k+1)^x\right)\left(k+(k+1)^{-x}\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(k^2+k\left((k+1)^x+(k+1)^{-x}\right)+1\right)=$$

$=\sum_{k=1}^{k=n}\left(k^2+k\cdot 2\sqrt{(k+1)^x(k+1)^{-x}}+1\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(k^2+2k+1\right)=\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^2=\frac{2n^3+9n^2+13n}{6}$, cu egalitate pentru $(k+1)^x=(k+1)^{-x} \Leftrightarrow x=0$

Folosind **Lema** rezultă că ecuația admite soluția unică $x=0$.

Remarca.

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$\left(1+3^x\right)\left(1+3^{-x}\right)+\left(3+5^x\right)\left(3+5^{-x}\right)+\ldots+\left(2n-1+(2n+1)^x\right)\left(2n-1+(2n+1)^{-x}\right)=\frac{4n^3+6n^2+2n}{3}$$

Soluție.

$$\left(1+3^x\right)\left(1+3^{-x}\right)+\left(3+5^x\right)\left(3+5^{-x}\right)+\ldots+\left(2n-1+(2n+1)^x\right)\left(2n-1+(2n+1)^{-x}\right)\geq\frac{4n^3+6n^2+2n}{3}$$

Ecuația admite soluția unică $x=0$.

Remarca.

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$\left(2+4^x\right)\left(2+4^{-x}\right)+\left(4+6^x\right)\left(2+4^{-x}\right)+\ldots+\left(2n+(2n+2)^x\right)\left(2n+(2n+2)^{-x}\right)=\frac{4n^3+12n^2+11n}{3}$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție.

$$\left(2+4^{x}\right)\left(2+4^{-x}\right)+\left(4+6^{x}\right)\left(2+4^{-x}\right)+\ldots+\left(2n+\left(2n+2\right)^{x}\right)\left(2n+\left(2n+2\right)^{-x}\right)\geq\frac{4n^{3}+12n^{2}+11n}{3}$$

Ecuația admite soluția unică $x=0$.

Problema32.

Calculate

$$\frac{\tan 50^{\circ}-\tan 40^{\circ}}{\tan 10^{\circ}}.$$

Elton Papanikola, MathOlymp 2/2024

Soluție.

Folosind $\tan 50^{\circ}=\tan\left(45^{\circ}+5^{\circ}\right)$, $\tan 40^{\circ}=\tan\left(45^{\circ}-5^{\circ}\right)$, $\tan 10^{\circ}=\frac{2\tan 5^{\circ}}{1-\tan^{2}5^{\circ}}$ obținem:

$$\frac{\tan 50^{\circ}-\tan 40^{\circ}}{\tan 10^{\circ}}=\frac{\frac{1+\tan 5^{\circ}}{1-\tan 5^{\circ}}-\frac{1-\tan 5^{\circ}}{1+\tan 5^{\circ}}}{\frac{2\tan 5^{\circ}}{1-\tan^{2}5^{\circ}}}=2.$$

Remarca.

Calculate

1) $$\frac{\tan 46^{\circ}-\tan 44^{\circ}}{\tan 2^{\circ}}.$$

Soluție.

$$\frac{\tan 46^{\circ}-\tan 44^{\circ}}{\tan 2^{\circ}}=\frac{\frac{1+\tan 1^{\circ}}{1-\tan 1^{\circ}}-\frac{1-\tan 1^{\circ}}{1+\tan 1^{\circ}}}{\frac{2\tan 1^{\circ}}{1-\tan^{2}1^{\circ}}}=2.$$

2) $$\frac{\tan 47^{\circ}-\tan 43^{\circ}}{\tan 4^{\circ}}.$$

Soluție.

$$\frac{\tan 47^{\circ}-\tan 43^{\circ}}{\tan 4^{\circ}}=\frac{\frac{1+\tan 2^{\circ}}{1-\tan 2^{\circ}}-\frac{1-\tan 2^{\circ}}{1+\tan 2^{\circ}}}{\frac{2\tan 2^{\circ}}{1-\tan^{2}2^{\circ}}}=2.$$

3) $$\frac{\tan 140^{\circ}-\tan 130^{\circ}}{\tan 10^{\circ}}.$$

Soluție.

$$\frac{\tan 140^\circ-\tan 130^\circ}{\tan 10^\circ}=\frac{\frac{-1+\tan 5^\circ}{1+\tan 5^\circ}-\frac{-1-\tan 5^\circ}{1-\tan 5^\circ}}{\frac{2\tan 5^\circ}{1-\tan^2 5^\circ}}=2.$$

4) $\frac{\tan 70^\circ-\tan 20^\circ}{\tan 50^\circ}$.

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{\tan 70^\circ-\tan 20^\circ}{\tan 50^\circ}=\frac{\frac{1+\tan 25^\circ}{1-\tan 25^\circ}-\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ}}{\frac{2\tan 25^\circ}{1-\tan^2 25^\circ}}=2.$$

Problema33.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum a\sqrt{b^2+c^2}\ge\sqrt{2}\left(ab+bc+ca\right).$$

Daniel Sitaru, RMM1/2024

Soluție

$$LHS=\sum a\sqrt{b^2+c^2}\overset{CS}{\ge}\sum a\sqrt{\frac{(b+c)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum a\left(b+c\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sum bc=$$
$$=\sqrt{2}\left(ab+bc+ca\right)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\left(b+c\right)\sqrt{b^2+c^2}\ge 2\sqrt{2}\left(ab+bc+ca\right).$$

Marin Chirciu

Problema34.

If $a,b,c>0$, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9abc$ then

$$\sum\sqrt[3]{\frac{a}{a+bc}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Arhimede Mathematical Journal, 2014

Soluție.

Lema.

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ este convexă.

Avem $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9abc \Leftrightarrow \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}=9$.

Folosind inegalitatea lui Jensen obținem:

$$f\left(\frac{bc}{a}\right)+f\left(\frac{ca}{b}\right)+f\left(\frac{ab}{c}\right)\geq 3f\left(\frac{\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}}{3}\right)=3f\left(\frac{9}{3}\right)=3f(3)=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=3$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}=9$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\sqrt[3]{\frac{(\lambda+3)a}{\lambda a+bc}}\geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\lambda}}$ este convexă.

Problema35.

If $x,y,z\in\mathbf{R}$ then

$$8\sum x^2-4\sum x+3\geq 4\sum xy.$$

Neculai Stanciu, RMM 1/2024

Soluție.

$$8\sum x^2-4\sum x+3\geq 4\sum xy \Leftrightarrow 2\sum(x-y)^2+\sum(2x-1)^2\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Remarca.

If $x,y,z\in\mathbf{R}$ and $\lambda,n>0$ then

$$\left(2\lambda+4n\right)\sum x^2-4n\sum x+3n\ge 2\lambda\sum xy.$$

Marin Chirciu

Problema36.

J.2356. If $x,y,z>0$, $m,n\ge 0, m+n=1$ then in ΔABC

$$\sum\frac{x\cdot a^m}{\left(y+z\right)h_a^n}\ge\frac{\sqrt[4]{27}}{2^n}\left(\sqrt{F}\right)^{1-2n}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Sorina Tudor, Romania

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}\cdot a\ge\frac{3}{2}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstrație

If $x,y,z>0$, $0\le n\le 1$

$$\sum\frac{x}{y+z}\cdot a^{4n}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{2n}.$$

Crux Math.12/1986,M.S.Klamkin, Canada

Pentru $n=\frac{1}{4}\Rightarrow\sum\frac{x}{y+z}\cdot a\ge\frac{3}{2}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$LHS=\sum\frac{x\cdot a^m}{\left(y+z\right)h_a^n}=\sum\frac{x\cdot a^m\cdot a^n}{\left(y+z\right)\cdot a^n h_a^n}=\sum\frac{x\cdot a^{m+n}}{\left(y+z\right)\cdot\left(ah_a\right)^n}=\sum\frac{x\cdot a^1}{\left(y+z\right)\cdot\left(2F\right)^n}=$$

$$=\frac{1}{\left(2F\right)^n}\sum\frac{x}{y+z}a\overset{Lema}{\ge}\frac{1}{\left(2F\right)^n}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt[4]{27}}{2^n}\left(\sqrt{F}\right)^{1-2n}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $0\le n\le 1$ then in ΔABC

$$\sum\frac{x\cdot a^{3n}}{\left(y+z\right)h_a^n}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{8F}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Problema37.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{AI^2} \geq \frac{3}{R^2}.$$

Marian Ursărescu, Olympic Mathematical Energy,Iași 2018

Solution.

Lemma.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r}{2R}\right).$$

Using **Lemma** we get $\sum \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{4r^2} \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{R^2}$.

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Remark.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{AI^2} \leq \frac{2R - r}{4r^3}.$$

Solution.

Using **Lemma** we get $\sum \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) \overset{Euler}{\leq} \frac{2R - r}{4r^3}$.

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Remark.

In ΔABC

$$\frac{3}{4r^2} \leq \sum \frac{1}{AI^2} \leq \frac{2R - r}{4r^3}.$$

Inequality on the right.

Using **Lemma** we get $\sum \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) \overset{Euler}{\leq} \frac{2R - r}{4r^3}$.

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Inequality from the left.

Using **Lemma** we get $\sum \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{4r^2} \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{R^2}$.

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Remark.

In ΔABC

$$\frac{3}{2Rr} \leq \sum \frac{1}{BI \cdot CI} \leq \frac{3}{4r^2}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Solution.

Using $\frac{3r}{2R} \leq \sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}$ we get:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{3r}{2R} \leq \frac{1}{r^2}\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{r^2}\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{3r}{2R} \leq \sum \frac{1}{BI \cdot CI} \leq \frac{1}{r^2}\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2Rr} \leq \sum \frac{1}{BI \cdot CI} \leq \frac{3}{4r^2}.$$

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Lemma.

In ΔABC

$$\frac{3r}{2R} \leq \sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}.$$

Proof.

Inequality on the right.

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}.$$

Mathematical Gazette 1939, J.M.Child

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3}\left(\sum \sin\frac{A}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Inequality from the left.

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq \frac{3r}{2R}.$$

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \sin^2\frac{A}{2}} = 3\sqrt[3]{\left(\frac{r}{4R}\right)^2} \overset{Euler}{\geq} \frac{3r}{2R}.$$

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Problema38.

Q96. Prove that the equation $x^4+y^4+z^4=2u^2$ has infinite solutions in positive integers .

Florin Rotaru, Focșani, Romania, Sclipirea Minții Nr32/2023

Solution

The infinite set $\left\{(x,y,z,u)=(0,2n,2n,4n^2)\,/\,n\in\mathbf{N}\right\}$ is a solution to the equation $x^4+y^4+z^4=2u^2$.

Remark.

1)Prove that the equation $x^4+y^4=2u^2$ has infinite solutions in positive integers .

Solution

The infinite set $\left\{(x,y,u)=(2n,2n,4n^2)\,/\,n\in\mathbf{N}\right\}$ is a solution to the equation $x^4+y^4=2u^2$.

2)Prove that the equation $x^4+y^4+z^4=3u^2$ has infinite solutions in positive integers .

Solution

The infinite set $\left\{(x,y,z,u)=(2n,2n,2n,4n^2)\,/\,n\in\mathbf{N}\right\}$ is a solution to the equation $x^4+y^4+z^4=3u^2$.

3)Prove that the equation $x_1^4+x_n^4+...+x_k^4=(k-1)u^2$ has infinite solutions in positive integers

Dezvltări,Marin Chirciu, Pitești, Romania

Solution

The infinite set $\left\{(x_1,x_2,...,x_k,u)=(0,2n,2n,...,2n,4n^2)\,/\,n\in\mathbf{N}\right\}$ is a solution to the equation $x_1^4+x_n^4+...+x_k^4=(k-1)u^2$.

Problema38.

V.2024. Arătați că numărul 2024^n se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule distincte, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Mihai Marinca Chirciu, elev București, MathJournal 1/2024

Soluție

Avem $2024=1^2+2^2+5^2+25^2+37^2$ și $2024^2=1^2+2^2+3^2+229^2+2011^2$.

În continuare distingem cazurile n impar și n par.

Dacă n este impar atunci $n=2k+1$, k număr natural.

$$2024^{2k+1}=2024^{2k}\cdot 2024=2024^{2k}\cdot\left(1^2+2^2+5^2+25^2+37^2\right)=$$

$$=2024^{2k}\cdot\left(1^2+2^2+5^2+25^2+37^2\right)=$$

$$=\left(2024^k\cdot 1\right)^2+\left(2024^k\cdot 2\right)^2+\left(2024^k\cdot 5\right)^2+\left(2024^k\cdot 25\right)^2+\left(2024^k\cdot 37\right)^2=$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2.$$

Dacă n este par nenul atunci $n=2k+2$, k număr natural.

$$2024^{2k+2}=2024^{2k}\cdot 2024^2=2024^{2k}\cdot\left(1^2+2^2+3^2+229^2+2011^2\right)=$$

$$=\left(2024^k\cdot 1\right)^2+\left(2024^k\cdot 2\right)^2+\left(2024^k\cdot 3\right)^2+\left(2024^k\cdot 229\right)^2+\left(2024^k\cdot 2011\right)^2=$$

$$=x^2+y^2+z^2+t^2+v^2.$$

Problema39.

S646. If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=2(a+b+c)$ then

$$\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{c^2+4}+\frac{c}{a^2+4}\geq\frac{3}{4}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections 6/2023

Solution

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{b^2+4}\geq\frac{1}{16}(4a-ab).$$

We have $\frac{a}{b^2+4}=\frac{a}{4}\left(1-\frac{b^2}{b^2+4}\right)\overset{AM-GM}{\geq}\frac{a}{4}\left(1-\frac{b^2}{4b}\right)=\frac{a}{4}\left(1-\frac{b}{4}\right)=\frac{1}{16}(4a-ab)$, equally for $b=2$.

Using **Lema** we get:

$$LHS=\sum\frac{a}{b^2+4}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{16}(4a-ab)=\frac{1}{16}\left(4\sum a-\sum ab\right)\overset{\sum ab=2\sum a}{=}\frac{1}{16}\left(4\sum a-2\sum a\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\sum a\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{8}\cdot 6=\frac{3}{4}=RHS,$$

where (1) $\Leftrightarrow\sum a\geq 6$, see $\sum ab=2\sum a$ and $\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum ab\Rightarrow\sum a\geq 6$.

Equality occurs if and only if $a=b=c=2$.

Remark.

If $a,b,c,\lambda>0$, $ab+bc+ca=\lambda(a+b+c)$ then

$$\frac{a}{b^2+\lambda^2}+\frac{b}{c^2+\lambda^2}+\frac{c}{a^2+\lambda^2}\geq\frac{3}{2\lambda}.$$

Marin Chirciu

Solution.

Lema.

If $a,b,c,\lambda>0$ then

$$\frac{a}{b^2+\lambda^2}\geq\frac{1}{2\lambda^3}(2\lambda a-ab).$$

Problema40.

S631. Find all positive integers n for which

$$(n-1)!+(n+1)^2=(n^2-41)(n^2+49).$$

Adrian Andreescu, Dallas, USA, Mathematical Reflections, Nr.5/2023

Solution .

We have: $n=7$ for which $(n-1)!+(n+1)^2=(n^2-41)(n^2+49)$,see $6!+8^2=(49-41)(49+49)\Leftrightarrow$ 784=784.

We prove by mathematical induction that:

$(n-1)!\geq(n^2-41)(n^2+49)-(n+1)^2$,for $n\geq 7$.

We deduce that $n=7$ is the only solution of the problem.

Remark.

Find all positive integers n for which

$$n!+n^2=(n^2-23)(n^2-24).$$

Marin Chirciu

Solution.

We have: $n=6$ for which $n!+n^2=(n^2-23)(n^2-24)$,

see $6!+6^2=(36-23)(36-24)\Leftrightarrow$ 156=156.

We prove by mathematical induction that:

$n!+n^2\geq(n^2-23)(n^2-24)$,for $n\geq 6$.

We deduce that $n=6$ is the only solution of the problem.

Problema41.

U635. Evaluate

$$\int_0^1 \frac{\sin x \sin \pi x}{\cos \frac{2x-1}{2}} dx .$$

Vasile Lupulescu, Universitatea Târgu-Jiu, Romania, Mathematical Reflections,4/2023

Solution .

$$\int_0^1 \frac{\sin x \sin \pi x}{\cos \frac{2x-1}{2}} dx \overset{t=x-\frac{1}{2}}{=} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)\sin \pi\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\cos t} dt = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\sin t \cos \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{2} \cos t\right)\cos \pi t}{\cos t} dt =$$

$$= \underbrace{\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin t \cos \frac{1}{2} \cos \pi t}{\cos t} dt}_{\int_{-a}^{a} f_{odd} = 0} + \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2} \cos t \cos \pi t}{\cos t} dt = 0 + \sin \frac{1}{2} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos \pi t dt = \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \pi t}{\pi}\Bigg|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}{\pi} = \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sin \frac{1}{2} .$$

Remark.

Evaluate

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x \sin 2\pi x}{\cos \frac{4x-1}{4}} dx .$$

Solution .

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x \sin 2\pi x}{\cos \frac{4x-1}{4}} dx = \frac{1}{\pi} \sin \frac{1}{4} .$$

Remark.

Evaluate

$$\int_0^{1/n} \frac{\sin x \sin n\pi x}{\cos \frac{2nx-1}{2n}} dx , n \in \mathbf{N}^* .$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Solution .

$$\int_0^{1/n} \frac{\sin x \sin n\pi x}{\cos \frac{2nx-1}{2n}} dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{1}{2n}.$$

Problema42.

S615. In ΔABC

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \geq \frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-\frac{2r}{R}.$$

Titu Zvonaru, Romania, Mathematical Reflections, Nr.1/2023

Solution .

Wee have $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq \frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-\frac{2r}{R}$.

Using $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right), a^2+b^2+c^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$,

$ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$ and $abc=4Rrp$, the inequality is written:

$$\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp} \geq \frac{8\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}-\frac{2r}{R} \Leftrightarrow \frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}+\frac{2r}{R} \geq \frac{8\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2+r^2-6Rr}{2Rr} \geq \frac{8\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr} \Leftrightarrow p^4+p^2\left(2r^2-18Rr\right)+r^2\left(40R^2+14Rr+r^2\right) \geq 0, (*).$$

Lemma

In ΔABC

$$p^4 \geq 2p^2r(10R-r)-r^2(4R+r)(16R+r).$$

Problema43.

U615. Evaluate

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\sin(\cos x))-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Mircea Becheanu, Canada, Mathematical Reflections1/2023

Solution

Answer:lim= $\frac{-1}{2}$.

The indeterminancy is of form $\frac{0}{0}$ and we use l-Hospital-s rule.

Problema44.

In ΔABC

$$\sum \cos^2\frac{A}{2}\sec\frac{C}{2} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4R}{r}+1\right).$$

Marian Ursărescu

Soluție.

Lema(VASC)

If $x, y, z \ge 0$ then

$$3\left(x^3y+y^3z+z^3x\right) \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

GM 7-8/1992, Vasile Cârtoaje

$$Ms=\sum \cos^2\frac{A}{2}\sec\frac{C}{2}=\sum \cos^2\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sum \cos^3\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\prod \cos\frac{A}{2}} \overset{Lema}{\le} \frac{\left(\sum \cos^2\frac{A}{2}\right)^2}{3\prod \cos\frac{A}{2}}=\frac{\left(\frac{4R+r}{2R}\right)^2}{3\cdot\frac{p}{4R}}=$$

$$=\frac{(4R+r)^2}{3Rp} \overset{(1)}{\le} \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4R}{r}+1\right)=Md,$$

unde (1) $\frac{(4R+r)^2}{3Rp} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4R}{r}+1\right) \Leftrightarrow 3Rp \ge 2\sqrt{3}r(4R+r)$, care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \ge 3\sqrt{3}r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$1)\ \sum \sec^2\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{p}{12R}\left(\frac{R}{r}+2\right)^2.$$

$$2)\ \sum \sin^2\frac{A}{2}\csc\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

$$3)\ \sum \csc^2\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \le 6\left(\frac{R}{2r}\right)^5.$$

$$4)\sum \tan^2\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{3r}\left(\frac{R}{r}-1\right)^2.$$

$$5)\sum \cot^2\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{r}{3p}\left(\frac{2R}{r}-1\right)^4.$$

$$6)\sum \frac{h_a^2}{h_c}\le\frac{9R}{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^3.$$

$$7)\sum \frac{r_a^2}{r_c}\le\frac{9R^2}{4r}\left(\frac{R}{r}-1\right)^2.$$

$$8)\sum \frac{m_a^2}{m_c}\le 9r\left(\frac{R}{2r}\right)^8.$$

$$9)\sum \frac{w_a^2}{w_c}\le 9r\left(\frac{R}{2r}\right)^8.$$

$$10)\sum \frac{s_a^2}{s_c}\le\frac{9R}{2}\left(\frac{R}{2r}\right)^6.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema45.

J.472. If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=1$ then

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2.$$

An Zhenping, China, Mathematical Reflections, Nr1.2019

Soluție.

Folosind numere complexe obținem:

$$Ms=\sum a\sqrt{b^2+1}=\sum a|b+i|=\sum|ab+ai|\ge|ab+bc+ca+(a+b+c)i|=$$

$$=\sqrt{(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2}\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)}=\sqrt{1+3}=2=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă

1)If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=1$ and $\lambda\ge 0$ then

$$a\sqrt{b^2+\lambda}+b\sqrt{c^2+\lambda}+c\sqrt{a^2+\lambda}\ge\sqrt{1+3\lambda}.$$

2)If $a,b,c,d>0$ such that $ab+bc+cd+da=1$ then

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{d^2+1}+d\sqrt{a^2+1}\geq\sqrt{5}.$$

3)If $a,b,c,d>0$ such that $ab+bc+cd+da=1$ then

$$a\sqrt{b^2+2}+b\sqrt{c^2+2}+c\sqrt{d^2+2}+d\sqrt{a^2+2}\geq 3.$$

4)If $a,b,c,d>0$ such that $ab+bc+cd+da=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$a\sqrt{b^2+\lambda}+b\sqrt{c^2+\lambda}+c\sqrt{d^2+\lambda}+d\sqrt{a^2+\lambda}\geq\sqrt{1+4\lambda}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema46.

MH-83. Let a,b,c,d be the lengths the sides of a quadrilateral. Prove that

$$\sum\sqrt{\frac{b+c+d-a}{a}}>4.$$

Dorin Marghidanu, Arhimede Mathematical Journal, Vol.7,No.2, Autumn 2020

Soluție.

Lema.

Let a,b,c,d be the lengths the sides of a quadrilateral. Prove that

$$\sqrt{\frac{b+c+d-a}{a}}\geq\frac{2\sqrt{2}(b+c+d-a)}{a+b+c+d}.$$

Demonstrație.

Cu inegalitatea mediilor(GM-HM) obținem:

$\sqrt{\frac{b+c+d-a}{a}\cdot 2}\geq\frac{2}{\frac{a}{b+c+d-a}+\frac{1}{2}}=\frac{4(b+c+d-a)}{a+b+c+d}$, cu egalitate pentru

$\frac{b+c+d-a}{a}=2\Leftrightarrow b+c+d=3a$, de unde rezultă $\sqrt{\frac{b+c+d-a}{a}}\geq\frac{2\sqrt{2}(b+c+d-a)}{a+b+c+d}$.

$$Ms=\sum\sqrt{\frac{b+c+d-a}{a}}\geq\sum\frac{2\sqrt{2}(b+c+d-a)}{a+b+c+d}=4\sqrt{2}>4=Md$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă patrulaterul este pătrat.

Remarca.

1)Let a,b,c,d,e be the lengths the sides of a pentagon. Prove that

$$\sum\sqrt{\frac{b+c+d+e-a}{a}}\geq 6\sqrt{2}.$$

2)Let a,b,c,d,e be the lengths the sides of a pentagon. Prove that

$$\sum\sqrt{\frac{b+c+d+e-2a}{a}}\geq 4\sqrt{3}.$$

3)Let a,b,c,d,e,f be the lengths the sides of a hexagon. Prove that

$$\sum\sqrt{\frac{b+c+d+e+f-a}{a}}\geq 8\sqrt{2}.$$

4)Let $a_1,a_2,\dots,a_n$ be the lengths the sides of a polygon. Prove that

$$\sum\sqrt{\frac{a_2+\dots+a_n-a_1}{a_1}}\geq (2n-4)\sqrt{2}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema47.

Determinate

$$\Omega=\int_0^{2\pi}\frac{x+\tan(\sin x)}{2+\cos x}dx.$$

Florică Anastase, RMM-25, 2021

Soluție.

Folosind $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ obținem:

$$\Omega=\int_0^{2\pi}\frac{x+\tan(\sin x)}{2+\cos x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi-x+\tan(\sin(2\pi-x))}{2+\cos(2\pi-x)}dx=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi-x+\tan(\sin(-x))}{2+\cos(-x)}dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi-x-\tan(\sin x)}{2+\cos x}dx.$$

Adunând $\Omega=\int_0^{2\pi}\frac{x+\tan(\sin x)}{2+\cos x}dx$ și $\Omega=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi-x-\tan(\sin x)}{2+\cos x}dx$ obținem:

$$\Omega+\Omega=\int_0^{2\pi}\left[\frac{x+\tan(\sin x)}{2+\cos x}+\frac{2\pi-x-\tan(\sin x)}{2+\cos x}\right]dx=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi}{2+\cos x}dx=\frac{2\pi^2}{\sqrt{3}}$$, care rezultă din:

$$I=\int\frac{dx}{2+\cos x}\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{2+\cos x}dx = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}}.$$

Problema48.

Evaluate the indefinite integral:

$$\int \frac{x^2-2}{\left(x^4+5x^2+4\right)\arctan\left(x+\frac{2}{x}\right)}dx.$$

Yen Tung Chung, THCS 4/2021

Soluție.

Cu substituția $x+\frac{2}{x}=t$ obținem:

$$I=\int \frac{x^2-2}{\left(x^4+5x^2+4\right)\arctan\left(x+\frac{2}{x}\right)}dx=\int \frac{1-\frac{2}{x^2}}{\left[\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+1\right]\arctan\left(x+\frac{2}{x}\right)}dx=\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)\arctan t}=$$

$$=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C .$$

În final deducem că $\int \frac{x^2-2}{\left(x^4+5x^2+4\right)\arctan\left(x+\frac{2}{x}\right)}dx=\ln\left|\arctan\left(x+\frac{2}{x}\right)\right|+C$.

Remarcă.

Let $\lambda>0$ fixed. Evaluate the indefinite integral:

$$\int \frac{x^2-\lambda}{\left(x^4+(2\lambda+1)x^2+\lambda^2\right)\arctan\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)}dx,\ x\in(0,\infty).$$

Marin Chirciu

Problema49.

If $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ find A^n, $n\in\mathbf{N}$.

Anh Tran, Matematika 4/2021

Soluție.

Avem $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=B+2I_2$.

Folosind formula binomului lui Newton obținemm:

$$A^n=\left(B+2I_2\right)^n=C_n^0B^n\left(2I_2\right)^0+C_n^1B^{n-1}\left(2I_2\right)^1+C_n^2B^{n-2}\left(2I_2\right)^2+\ldots+C_n^nB^0\left(2I_2\right)^n=$$

$$=B\left(1+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^{n-1}C_n^{n-1}\right)+2^nC_n^nI_2=B\left(\left(1+2\right)^n-2^n\right)+2^nI_2=$$

$$=B\left(3^n-2^n\right)+2^nI_2=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2^n-3^n\\ 2\cdot3^n-2^{n+1} & 2\cdot3^n-2^n\end{pmatrix}.$$

În final $A^n=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2^n-3^n\\ 2\cdot3^n-2^{n+1} & 2\cdot3^n-2^n\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}$.

Remarcă.

If $A=\begin{pmatrix}a-1 & -1\\ 2 & a+2\end{pmatrix}$ find $A^n, n\in\mathbf{N}$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$A^n=\begin{pmatrix}2a^n-\left(a+1\right)^n & a^n-\left(a+1\right)^n\\ 2\left(a+1\right)^n-2a^n & 2\left(a+1\right)^n-a^n\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}.$$

Problema50.

Solve in real numbers

$$\begin{cases}ax+by=5\\ ax^2+by^2=9\\ ax^3+by^3=17\\ ax^4+by^4=33\end{cases}.$$

SSMA, 5/2018

Soluție.

Se impune condiția $xy\left(x-y\right)\neq0$.

Din primele două ecuații , cu regula lui Cramer obținem:

Avem $a=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & y\\ 9 & y^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & y\\ x^2 & y^2\end{vmatrix}}=\dfrac{5y-9}{x\left(y-x\right)}$.

Din cele două ecuații de la mijloc, cu regula lui Cramer obținem:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}9 & y^2\\ 17 & y^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x^2 & y^2\\ x^3 & y^3\end{vmatrix}}=\frac{9y-17}{x^2(y-x)}.$$

Din ultimele două ecuații , cu regula lui Cramer obținem:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}17 & y^3\\ 33 & y^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x^3 & y^3\\ x^4 & y^4\end{vmatrix}}=\frac{17y-33}{x^3(y-x)}.$$

Rezultă

$$\begin{cases}5xy=9(x+y)-17\\ 9xy=17(x+y)-33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\text{și}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}.$$

În final obținem:

Soluție. $(a,b,x,y)\in\{(2,1,2,1),(1,2,1,2)\}$.

Remarcă.

1)Let $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers

$$\begin{cases}ax+by=2\lambda+1\\ ax^2+by^2=(\lambda+1)^3+\lambda^3\\ ax^3+by^3=(\lambda+1)^4+\lambda^4\\ ax^4+by^4=(\lambda+1)^5+\lambda^5\end{cases}.$$

Soluție. $(a,b,x,y)\in\{(\lambda+1,\lambda,\lambda+1,\lambda),(\lambda,\lambda+1,\lambda,\lambda+1)\}$.

2)Let $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers

$$\begin{cases}ax+by=2\lambda+1\\ ax^2+by^2=4\lambda+1\\ ax^3+by^3=8\lambda+1\\ ax^4+by^4=16\lambda+1\end{cases}.$$

Soluție. $(a,b,x,y)\in\{(1,\lambda,1,2),(\lambda,1,2,1)\}$.

3)Let $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers

$$\begin{cases} ax+by=2\lambda+1 \\ ax^2+by^2=(\lambda+1)^2+\lambda^2 \\ ax^3+by^3=(\lambda+1)^3+\lambda^3 \\ ax^4+by^4=(\lambda+1)^4+\lambda^4 \end{cases}.$$

Soluție. $(a,b,x,y)\in\{(1,1,\lambda,\lambda+1),(1,1,\lambda+1,\lambda)\}$.

4)Let $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers

$$\begin{cases} ax+by=(\lambda+1)^2+\lambda^2 \\ ax^2+by^2=(\lambda+1)^3+\lambda^3 \\ ax^3+by^3=(\lambda+1)^4+\lambda^4 \\ ax^4+by^4=(\lambda+1)^5+\lambda^5 \end{cases}.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție. $(a,b,x,y)\in\{(\lambda,\lambda+1,\lambda,\lambda+1),(\lambda+1,\lambda,\lambda+1,\lambda)\}$.

Problema51.

Let n be a positive integer. Prove that if n is a multiple of 3, then $(X^2-1)^n-1$

is divisible by X^4-X^2+1.

Kunihiko Chikaya, Enjoy Solving Mathematics 3/2021

Soluție.(Marcel Țena).

Fie r o rădăcină a polinomului $g=X^4-X^2+1$.

Din $r^4-r^2+1=0$ obținem $r^6+1=0$, $r^2=1$, $r^2-1=r^4$.

Punând $n=3k$ și $f=(X^2-1)^{3k}-1$ rezultă $f(r)=(r^2-1)^{3k}-1=(r^4)^{3k}-1=r^{12}-1=1-1=0$.

Deducem că polinomul f este divizibil cu polinomul g, în inelul polinoamelor $\mathbf{Z}[X]$.

Remarcă.

1)Let n be a positive integer. Prove that if n is a multiple of 3, then $(X^4-1)^n-1$

is divisible by X^8-X^4+1.

Soluție.

Fie r o rădăcină a polinomului $g=X^8-X^4+1$.

Din $r^8 - r^4 + 1 = 0$ obținem $r^{12} + 1 = 0$, $r^{24} = 1$, $r^4 - 1 = r^8$.

Punând $n = 3k$ și $f = \left(X^4 - 1\right)^{3k} - 1$ rezultă $f\left(r\right) = \left(r^4 - 1\right)^{3k} - 1 = \left(r^8\right)^{3k} - 1 = r^{24} - 1 = 1 - 1 = 0$.

Deducem că polinomul f este divizibil cu polinomul g, în inelul polinoamelor $\mathbf{Z}\left[X\right]$.

2)Let n be a positive integer. Prove that if n is a multiple of 3, then $\left(X^3 - 1\right)^n - 1$

is divisible by $X^6 - X^3 + 1$.

Soluție.

Fie r o rădăcină a polinomului $g = X^6 - X^3 + 1$.

Din $r^6 - r^3 + 1 = 0$ obținem $r^9 + 1 = 0$, $r^{18} = 1$, $r^3 - 1 = r^6$.

Punând $n = 3k$ și $f = \left(X^3 - 1\right)^{3k} - 1$ rezultă $f\left(r\right) = \left(r^3 - 1\right)^{3k} - 1 = \left(r^6\right)^{3k} - 1 = r^{18} - 1 = 1 - 1 = 0$.

Deducem că polinomul f este divizibil cu polinomul g, în inelul polinoamelor $\mathbf{Z}\left[X\right]$.

3)Let m and n be a positive integers. Prove that if n is a multiple of 3, then $\left(X^m - 1\right)^n - 1$

is divisible by $X^{2m} - X^m + 1$.

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție.

Fie r o rădăcină a polinomului $g = X^{2m} - X^m + 1$.

Din $r^{2m} - r^m + 1 = 0$ obținem $r^{3m} + 1 = 0$, $r^{6m} = 1$, $r^m - 1 = r^{2m}$.

Punând $n = 3k$ și $f = \left(X^m - 1\right)^{3k} - 1$ rezultă $f\left(r\right) = \left(r^m - 1\right)^{3k} - 1 = \left(r^{2m}\right)^{3k} - 1 = r^{6m} - 1 = 1 - 1 = 0$.

Deducem că polinomul f este divizibil cu polinomul g, în inelul polinoamelor $\mathbf{Z}\left[X\right]$.

Problema52.

Find

$$\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Vasile Mircea Popa, Romania,RMM11/2020

Soluție.

$$\Omega=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{n}{1}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}}+...+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{n}{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int_0^1 x^{\frac{-1}{3}}dx=\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^1=\frac{3}{2}.$$

Deducem că $\Omega=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{3}{2}$.

Remarcă.

Find

$$\Omega=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{\sqrt[p]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[p]{n}}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}},\ p\in\mathbf{N}, p\geq 2.$$

Marin Chirciu

$$\Omega=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{\sqrt[p]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[p]{n}}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}=\frac{p}{p-1}.$$

Problema53.

S:E20.199. Solve in integers

$$\sqrt{x^2-2021}+\sqrt{2089-x^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2+19}.$$

Cristina Vijdeliuc și Mihai Vijdeliuc , Baia Mare, SGM 5/2020

Soluție.

Din condițiile de existență: $x^2-2021\geq 0$ și $2089-x^2\geq 0$ obținem: $2021\leq x^2\leq 2089$,(1).

Avem $\sqrt{2089-x^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2+19}-\sqrt{x^2-2021}\geq 0$, de unde $\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2+19}-\sqrt{x^2-2021}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2+19}\geq\sqrt{x^2-2021}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{5}\right)^2+19\geq x^2-2021\Leftrightarrow 24x^2\leq 25(19+2021)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2\leq 25\cdot 85 \Leftrightarrow |x|\leq 5\sqrt{85}$, (2).

Din (1), (2) și $x \in \mathbf{Z}$ obținem $x^2 = 2025 \Leftrightarrow |x| = 45$.

Reciproc $x = \pm 45$ verifică ecuația.

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-45, 45\}$.

Remarcă.

1)Let n be a non-zero fixed integer. Solve in integers

$$\sqrt{x^2 + 4 - (9n)^2} + \sqrt{(9n)^2 + 64 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 + 19}.$$

Soluție. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-9n, 9n\}$.

2)Solve in integers

$$\sqrt{x^2 - 2048} + \sqrt{2320 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 144}.$$

Soluție.Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-48, 48\}$.

3)Let n be a non-zero fixed integer. Solve in integers

$$\sqrt{x^2 + 16^2 - (16n)^2} + \sqrt{(16n)^2 + 16 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 + 12^2}.$$

Soluție. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-16n, 16n\}$.

4)Let n be a non-zero fixed integer. Solve in integers

$$\sqrt{x^2 + 16^2 - n^2} + \sqrt{n^2 + 16 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{16x}{n}\right)^2 + 12^2}.$$

Dezvltări,Chirciu Marin

Soluție.Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-n, n\}$.

Problema54.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ și $15^{x_{n+2}} = 12^{x_{n+1}} + 9^{x_n}, \forall n \geq 0$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător și mărginit.

b) Calculați $\Omega = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Marian Ursărescu, Romania, RMM 9/2020

Soluție.

a) Vom demonstra prin inducție matematică că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător și mărginit .

Monotonia.

Din $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ obținem $x_2 = 1$.

Fie $P(n): x_{n+1} \geq x_n, n \geq 0$.

Avem $P(1): x_2 \geq x_1 > x_0$, adevărat .

Presupunem $x_0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1}$ și arătăm că $x_{n+1} \leq x_{n+2}$.

Într-adevăr:

Avem $15^{x_{n+2}} = 12^{x_{n+1}} + 9^{x_n} \geq 12^{x_n} + 9^{x_{n-1}} = 15^{x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+2} \geq x_{n+1}$ adevărat.

Rezultă că $P(n)$ adevărat, $\forall n \geq 0$.

Mărginirea.

Avem $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Fie $P(n): x_n < 2, n \geq 0$.

Avem $x_0, x_1, x_2 < 2$.

Presupunem: $x_k < 2$, pentru $0 \leq k \leq n+1$ și arătăm că $x_{n+2} < 2$.

Într-adevăr:

$15^{x_{n+2}} = 12^{x_{n+1}} + 9^{x_n} < 12^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow x_{n+2} < 2$.

Rezultă că $P(n)$ adevărat, $\forall n \geq 0$.

b) Deoarece șirul este șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător și mărginit superior, conform teoremei lui Weierstrass, rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Deducem că există $l \in \mathbf{R}$ astfel încât $l = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Trecând la limită în relația de recurență $15^{x_{n+2}} = 12^{x_{n+1}} + 9^{x_n}$, $\forall n \geq 0$ obținem:

$15^l = 12^l + 9^l \Leftrightarrow l = 2$.

Rezultă că că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și are limita $l = \lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Remarcă.

Fie $a > b > c > 1$ numere pitagorice.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $0 < x_0 < x_1 < 2$ și $a^{x_{n+2}} = b^{x_{n+1}} + c^{x_n}, \forall n \geq 0$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător și mărginit.

b) Calculați $\Omega = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Marin Chirciu

Soluție.

a)Vom demonstra prin inducție matematică.

b) $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Problema55.

If $a,b,c > 0$ such that $ab+bc+ca = 3$ then

$$a+b+c \geq abc + 2\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}}.$$

Nguyen Van Canh, Vietnam, RMM 3/2020

Soluție.

Folosind condiția din ipoteză $ab+bc+ca = 3$ omogenizăm inegalitatea din concluzie:

$$a+b+c \geq abc + 2\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}} \Leftrightarrow \sum a \geq abc + 2\sqrt{\frac{1}{3}\sum b^2c^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum a \sum bc \geq 3abc + 6\sqrt{\frac{1}{9}\sum bc \sum b^2c^2} \Leftrightarrow \sum bc(b+c) \geq 6\sqrt{\frac{1}{9}\sum bc \sum b^2c^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum bc(b+c)\right]^2 \geq 4\sum bc \sum b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\sum b^2c + \sum bc^2\right)^2 \geq 4\sum bc \sum b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum b^2c + \sum bc^2\right)^2 \geq 4\sum bc \sum b^2c^2, \text{ (1)}.$$

Pentru demonstrarea inegalității(1) folosim inegalitatea $(x+y)^2 \geq 4xy$, pentru $x = \sum b^2c, y = \sum bc^2$.

$$Ms = \left(\sum b^2c + \sum bc^2\right)^2 \geq 4\sum b^2c \cdot \sum bc^2 \overset{(2)}{\geq} 4\sum bc \sum b^2c^2 = Md, \text{ unde (2) } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum b^2c \cdot \sum bc^2 \geq \sum bc \sum b^2c^2 \Leftrightarrow \sum b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 + abc\sum a^3 \geq \sum b^3c^3 + abc\sum bc(b+c) \Leftrightarrow$$
$$abc\sum a^3 + 3a^2b^2c^2 \geq abc\sum bc(b+c) \Leftrightarrow \sum a^3 + 3abc \geq \sum bc(b+c), \text{(inegalitatea Schur)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema56.

B.46.In acute ΔABC

$$\sqrt{6(1+\cos A\cos B\cos C)}\geq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Leonard Giugiuc, Crux Mathematicorum ,Vol46(7), Sep2020

Soluție.

Folosind identitățile $\prod\cos A=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$ și $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}$ inegalitatea se scrie:

$\sqrt{6\left[1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right]}\geq\frac{p}{R}\Leftrightarrow 6\left[1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right]\geq\frac{p^2}{R^2}\Leftrightarrow p^2\geq 3r(4R+r)$, care rezultă

din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sqrt{2(1+\cos A\cos B\cos C)}\geq 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Soluție.

Folosind identitățile $\prod\cos A=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$ și $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$ inegalitatea se scrie:

$\sqrt{2\left[1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right]}\geq\frac{3r}{R}\Leftrightarrow 2\left[1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right]\geq\frac{9r^2}{R^2}\Leftrightarrow p^2\geq 4Rr+19r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

1) $\sqrt{\frac{3}{2}(1+\cos A\cos B\cos C)}\geq\frac{27}{4}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

2) $\sqrt{6(1+\cos A\cos B\cos C)}\leq\frac{1}{2}\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

3) $\sqrt{\frac{3}{2}(1+\cos A\cos B\cos C)}\leq\frac{27}{32}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$.

4) $\sqrt{2(1+\cos A\cos B\cos C)} \le \frac{3}{16}\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}$.

Dezvltări,Marin Chirciu

Problema57.

U520. Evaluate

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos 2x)...(1-\cos nx)}{\sin^{2n} x}$$

Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam,MathRefl 3/2020

Solution.

We have $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{kx}{2}}{\sin^2 x} = \frac{k^2}{2}$.

We get $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos 2x)...(1-\cos nx)}{\sin^{2n} x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\sin^2 x}\frac{(1-\cos 2x)}{\sin^2 x}...\frac{(1-\cos nx)}{\sin^2 x} =$

$= \frac{1^2}{2}\cdot\frac{2^2}{2}\cdot...\cdot\frac{n^2}{2} = \frac{(1\cdot 2\cdot ...\cdot n)^2}{2^n} = \frac{(n!)^2}{2^n}$.

Problema58.

If $a_1 = 1$ and $a_n = n(1+a_{n-1})$, $\forall n \ge 2$, find

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)...\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Mathematical Olympiads 3/2020

Soluție.

Limita este egală cu e.

Deoarece $a_{n+1} = (n+1)(1+a_n)$ rezultă $\frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} = \frac{(n+1)(1+a_n)}{(n+1)a_n} = \frac{(1+a_n)}{a_n} = 1+\frac{1}{a_n}$.

Obținem $\prod\left(1+\frac{1}{a_k}\right) = \prod\frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!a_1} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$.

Apoi din $a_{n+1} = (n+1)(1+a_n)$ avem $a_{n+1} = (n+1)a_n + (n+1)$, de unde

$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)a_n + (n+1)}{(n+1)!} = \frac{a_n+1}{n!}$ și de aici $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n+1}{n!} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!}$.

Obținem $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}-\frac{a_k}{k!}\right)=\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_1}{1!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$, de unde $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

În final rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\prod\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e.$$

Remarca.

If $a_1=a>0$ and $a_n=n(a+a_{n-1})$, $\forall n\geq 2$, find

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{a_1}\right)\left(1+\frac{a}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{a_n}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty}\prod\left(1+\frac{a}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{k!}=ae.$$

Problema59.

Find

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{2}{x}}+\ldots+x^{\frac{2020}{x}}-2020\right)}{\ln x}.$$

Matematical Olympiads 3/2020

Soluție.

Folosim limita remarcabilă $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Obținem $\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{2}{x}}+\ldots+x^{\frac{2020}{x}}-2020\right)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}+e^{2\frac{\ln x}{x}}+\ldots+e^{2020\frac{\ln x}{x}}-2020\right)}{\ln x}=$

$\lim_{t\to o}\frac{e^t+e^{2t}+\ldots+e^{2020t}-2020}{t}=\lim_{t\to o}\left(\frac{e^t-1}{t}+\frac{e^{2t}-1}{2t}\cdot 2+\ldots+\frac{e^{2020t}-1}{2020t}\cdot 2020\right)=$

$1+2+...+2020=\dfrac{2020\cdot 2021}{2}$.

Remarca.

Find

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{2}{x}}+...+x^{\frac{n}{x}}-n\right)}{\ln x}\text{, unde } n\in\mathbf{N}^*.$$

Soluție.

Obținem $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{2}{x}}+...+x^{\frac{n}{x}}-n\right)}{\ln x}=1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{4}{x}}+...+x^{\frac{n^2}{x}}-n^2\right)}{\ln x}\text{,unde } n\in\mathbf{N}^*.$$

Soluție.

Obținem $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{4}{x}}+...+x^{\frac{n^2}{x}}-n^2\right)}{\ln x}=1+4+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{8}{x}}+...+x^{\frac{n^3}{x}}-n^3\right)}{\ln x}\text{, unde } n\in\mathbf{N}^*.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{8}{x}}+...+x^{\frac{n^3}{x}}-n^2\right)}{\ln x}=1+8+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Problema59

Find all positive integers n such that

$$\Omega(n)=n^7+n^6+n^5+n^3+2n^2+2n+1$$

is a prime number.

RMM 3/2020

Soluție.

Avem $\Omega(n)=n^7+n^6+n^5+n^3+2n^2+2n+1=n^5\left(n^2+n+1\right)+n\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)=$

$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^5+n+1\right)$.

No such $n\in\mathbf{N}$ exist.

Remarcă.

1)Find all positive integers n such that

$$\Omega(n)=n^8+n^7+n^6+n^3+2n^2+2n+1$$

is a prime number.

Soluție.

We have $\Omega(n)=n^8+n^7+n^6+n^3+2n^2+2n+1=n^6\left(n^2+n+1\right)+n\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)=$

$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^6+n+1\right)$.

No such $n\in\mathbf{N}$ exist.

2)Let $k\in\mathbf{N}$. Find all positive integers n such that

$$\Omega(n)=n^{k+2}+n^{k+1}+n^k+n^3+2n^2+2n+1$$

is a prime number.

Dezvltări,Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

We have $\Omega(n)=n^{k+2}+n^{k+1}+n^k+n^3+2n^2+2n+1=n^k\left(n^2+n+1\right)+n\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)=$

$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^k+n+1\right)$.

For $k=0$ we have $\Omega(n)=\left(n^2+n+1\right)\left(n+2\right)\Rightarrow\Omega(0)=2$ is a prime number.

For $k\in\mathbf{N}^*$ no such $n\in\mathbf{N}$ exist.

Problema60.

27815. Fie $u\in\mathbf{R}$ fixat. Rezolvați în mulțimea numere reale ecuația

$$\sqrt{\left(2^x+\sin^2 u\right)\left(2^{-x}+\sin^2 u\right)}+\sqrt{\left(2^x+\cos^2 u\right)\left(2^{-x}+\cos^2 u\right)}=3.$$

Traian Tămâian, Carei, Satu Mare, GM 3/2020

Soluție.

Folosind inegalitatea CBS obținem:

$\sqrt{\left(2^x+\sin^2 u\right)\left(2^{-x}+\sin^2 u\right)} \geq 1+\sin^2 u$, cu egalitate pentru $x=0$, (1).

$\sqrt{\left(2^x+\cos^2 u\right)\left(2^{-x}+\cos^2 u\right)} \geq 1+\cos^2 u$, cu egalitate pentru $x=0$, (2).

Adunând inegalitățile (1) și (2) obținem

$\sqrt{\left(2^x+\sin^2 u\right)\left(2^{-x}+\sin^2 u\right)}+\sqrt{\left(2^x+\cos^2 u\right)\left(2^{-x}+\cos^2 u\right)} \geq 3$, cu egalitate pentru $x=0$.

Deducem că ecuația are soluția unică $x=0$.

Remarca.

1)Fie $u \in \mathbf{R}$ fixat. Rezolvați în mulțimea numere reale ecuația

$$\sqrt[3]{\left(1+\sin^2 u\right)\left(3^x+\sin^2 u\right)\left(3^{-x}+\sin^2 u\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 u\right)\left(3^x+\cos^2 u\right)\left(3^{-x}+\cos^2 u\right)}=3.$$

Deducem că ecuația are soluția unică $x=0$.

2)Fie $a>0, u \in \mathbf{R}$ numere fixate. Rezolvați în mulțimea numere reale ecuația

$$\sqrt[3]{\left(1+\sin^2 u\right)\left(a^x+\sin^2 u\right)\left(a^{-x}+\sin^2 u\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 u\right)\left(a^x+\cos^2 u\right)\left(a^{-x}+\cos^2 u\right)}=3.$$

Deducem că ecuația are soluția unică $x=0$.

3)Fie $a>0$ și $\lambda, \mu \geq 0$ numere fixate astfel încât $\lambda+\mu=1$. Rezolvați în mulțimea numere reale ecuația

$$\sqrt[3]{(1+\lambda)\left(a^x+\lambda\right)\left(a^{-x}+\lambda\right)}+\sqrt[3]{(1+\mu)\left(a^x+\mu\right)\left(a^{-x}+\mu\right)}=3.$$

Dezvltări,Marin Chirciu

Deducem că ecuația are soluția unică $x=0$.

Problema61.

If $a, b, c>0$, $abc(a+b+c)=3$ then

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

Boris Colakovic, MathTime 2/2024

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

$3=abc(a+b+c) \geq 3abc \cdot 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1 \Rightarrow r \leq 1$.

$pr=3$ și $r\le 1\Rightarrow p\ge 3$.

$q^2=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3rp=3\cdot 3=9\Rightarrow q^2\ge 9\Rightarrow q\ge 3$.

$(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$.

Inegalitatea se scrie $pq-r\ge 8\overset{pr=3}{\Leftrightarrow} pq-\frac{3}{p}\ge 8\overset{q\ge 3}{\Leftrightarrow} 3p-\frac{3}{p}\ge 8\Leftrightarrow 3p^2-8p-3\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-3)(3p+1)\ge 0$, vezi $p\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Rezolvați în $\mathbf{R}_+^*$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} xyz(x+y+z)=3 \\ (x+y)(y+z)(z+x)=8 \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Arătăm că $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8$,cu egalitate pentru $x=y=z=1$.

Deducem că $(x,y,z)=(1,1,1)$ este soluția unică a sistemului.

Problema62.

S.2464. If $m\ge 0$, $M\in Int(\Delta ABC)$, $d_a=d(M,BC)$, $d_b=d(M,CA)$, $d_c=d(M,AB)$ then

$$\sum\frac{a^{2m+1}}{d_a}\ge 2^{2m+1}\left(\sqrt{3}\right)^{3-m}F^m.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu,Claudia Nănuți, Romania,RMM-42, Autumn-2024

Soluție.

Avem $F_1=[MBC]=\frac{ad_a}{2}$, $F_2=[MCA]=\frac{bd_b}{2}$, $F_3=[MAB]=\frac{cd_c}{2}$ și $F_1+F_2+F_3=F$.

$$LHS=\sum\frac{a^{2m+1}}{d_a}=\sum\frac{a^{2m+2}}{ad_a}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{3^{m-1}\sum 2F_1}\overset{I-W}{\ge}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{m+1}}{3^{m-1}\cdot 2F}=2^{2m+1}\left(\sqrt{3}\right)^{3-m}F^m=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Ionescu-Weitzenbock: $a^2+b^2+c^2\ge 4F\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

X.250. If $x,y\ge 0$, $x+y=4$ then in ΔABC holds:

$$\left(a^x+b^y+c^x\right)\left(a^y+b^x+c^y\right)\geq 48S^2.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare, Recreații Matematice 1/2024

Soluție.

Folosind inegalitatea CBS obținem:

$$LHS=\left(a^x+b^y+c^x\right)\left(a^y+b^x+c^y\right)\geq\left(\sqrt{a^x}\sqrt{a^y}+\sqrt{b^y}\sqrt{b^x}+\sqrt{c^x}\sqrt{c^y}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{a^{x+y}}+\sqrt{b^{x+y}}+\sqrt{c^{x+y}}\right)^2=\left(\sqrt{a^4}+\sqrt{b^4}+\sqrt{c^4}\right)^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\overset{I-W}{\geq}\left(4S\sqrt{3}\right)^2=$$

$$=48S^2=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea Ionescu-Weitzenbock $a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x=y=2$.

Remarca.

1)If $x,y\geq 0$, $x+y=8$ then in ΔABC holds:

$$\left(a^x+b^y+c^x\right)\left(a^y+b^x+c^y\right)\geq 256S^4.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea CBS și inegalitatea lui Goldner $a^4+b^4+c^4\geq 16S^2$.

2)If $x,y\geq 0$, $x+y=4n$, $n\in\mathbf{N}$ then in ΔABC holds:

$$\left(a^x+b^y+c^x\right)\left(a^y+b^x+c^y\right)\geq 3^{2-n}\cdot\left(4S\right)^{2n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea CBS și inegalitatea Ionescu-Weitzenbock $a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$.

Problema63.

S.2462. If $x,y,z>0$, then in ΔABC holds:

$$\sum\frac{ayz}{h_a}\leq\frac{R}{2F}\left(x+y+z\right)^2.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, Romania, RMM-42, Autumn-2024

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{ayz}{h_a}=\sum\frac{a^2yz}{ah_a}=\sum\frac{a^2yz}{2F}=\frac{1}{2F}\sum a^2yz\overset{Leibniz}{\leq}\frac{1}{2F}\left(x+y+z\right)^2R^2=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Leibniz: $\sum a^2yz \le (x+y+z)^2 R^2$, vezi:

If $x, y, z \in \mathbf{R}$ and M is an arbitrary point, then in ΔABC holds:

$(x+y+z)(xMA^2 + yMB^2 + zMC^2) \ge yza^2 + zxb^2 + xyc^2$.

For $M \equiv O \Rightarrow (x+y+z)(xOA^2 + yOB^2 + zOC^2) \ge yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(xR^2 + yR^2 + zR^2) \ge yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 R^2 \ge yza^2 + zxb^2 + xyc^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, then in ΔABC holds:

$$\sum \frac{yz}{h_a^2} \le \frac{R^2}{4F^2}(x+y+z)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{yz}{h_a^2} = \sum \frac{a^2yz}{a^2h_a^2} = \sum \frac{a^2yz}{4F^2} = \frac{1}{4F^2}\sum a^2yz \overset{Leibniz}{\le} \frac{1}{4F^2}(x+y+z)^2 R^2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema64.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum yz \sum \frac{1}{y+z} \le \frac{3}{2}\sum x.$$

Panagiotis Danousis, MathTime 2/2024

Soluție.

Datorită omogenității putem lua $\sum x = 1$.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x+y+z = 1, q = xy+yz+zx, r = xyz$.

Inegalitatea $\sum yz \sum \frac{1}{y+z} \le \frac{3}{2}$ se scrie $q\frac{p^2+q}{pq-r} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow q\frac{1+q}{q-r} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - q + 3r \le 0$, care rezultă din $r \le \frac{q}{9}$, vezi $pq \ge 9r$ și $p = 1$.

Rămâne să arătăm că:

$2q^2 - q + 3\cdot\frac{q}{9} \le 0 \Leftrightarrow q \le \frac{1}{3}$, vezi $p^2 \ge 3q$ și $p = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarca.

In ΔABC

$$1)\ \sum \frac{1}{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}} \le \frac{3p^2}{2(4R+r)}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$.

Folosind $\sum yz \sum \frac{1}{y+z} \le \frac{3}{2}\sum x$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{r}{r_b}\cdot\frac{r}{r_c} \sum \frac{1}{\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}} \le \frac{3}{2}\sum \frac{r}{r_a} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}} \le \frac{3p^2}{2(4R+r)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$2)\ \sum \frac{1}{h_b h_c} \sum \frac{1}{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} \le \frac{3}{2r}.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Problema65.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cos^{2024} A}{\cos^{2022} B + \cos^{2022} C} \ge \frac{3}{8}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2024

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\cos^{2024} A}{\cos^{2022} B + \cos^{2022} C} \overset{Cebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum \cos^2 A \sum \frac{\cos^{2022} A}{\cos^{2022} B + \cos^{2022} C} \overset{(1)}{\ge} \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\sum \frac{x}{y+z} \overset{Nesbitt}{\ge}$$

$\overset{Nesbitt}{\geq} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8} = RHS$.

Am folosit mai sus $\sum \cos^2 A \geq \frac{3}{4}$, vezi: $\sum \cos^2 A = \frac{6R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{2R^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{3}{4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

1)If $n \in \mathbf{N}$ then in ΔABC holds:

$$\sum \frac{\cos^{n+2} A}{\cos^n B + \cos^n C} \geq \frac{3}{8}.$$

Soluție.

.

Am folosit mai sus $\sum \cos^2 A \geq \frac{3}{4}$, vezi: $\sum \cos^2 A = \frac{6R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{2R^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{3}{4}$.

2)If $n \in \mathbf{N}$ and $\lambda \geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum \frac{\cos^{n+2} A}{\cos^n B + \lambda \cos^n C} \geq \frac{3}{4(\lambda + 1)}.$$

Soluție.

Am folosit mai sus $\sum \cos^2 A \geq \frac{3}{4}$, vezi: $\sum \cos^2 A = \frac{6R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{2R^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{3}{4}$.

3)If $n \in \mathbf{N}$ and $\lambda \geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum \frac{\sin^{n+2} \frac{A}{2}}{\sin^n \frac{B}{2} + \lambda \sin^n \frac{C}{2}} \geq \frac{3}{4(\lambda + 1)}.$$

Soluție.

Am folosit mai sus $\sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{4}$, vezi: $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R} \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{4}$.

4)If $n \in \mathbf{N}$ and $\lambda \geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum \frac{\cot^{n+2} \frac{A}{2}}{\cot^n \frac{B}{2} + \lambda \cot^n \frac{C}{2}} \geq \frac{9}{\lambda + 1}.$$

Soluție.

Am folosit mai sus $\sum \cot^2\frac{A}{2}\geq 9$, vezi: $\sum \cot^2\frac{A}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}\overset{Gerretsen}{\geq} 9$.

5)If $n\in\mathbf{N}$ and $\lambda\geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum\frac{\tan^{n+2}\frac{A}{2}}{\tan^n\frac{B}{2}+\lambda\tan^n\frac{C}{2}}\geq\frac{1}{\lambda+1}.$$

Soluție.

Am folosit mai sus $\sum \tan^2\frac{A}{2}\geq 1$, vezi: $\sum \tan^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}\overset{Gerretsen}{\geq} 1$.

6)If $n\in\mathbf{N}$ and $\lambda\geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum\frac{\sec^{n+2}\frac{A}{2}}{\sec^n\frac{B}{2}+\lambda\sec^n\frac{C}{2}}\geq\frac{4}{\lambda+1}.$$

Soluție.

Am folosit mai sus $\sum \sec^2\frac{A}{2}\geq 4$, vezi: $\sum \sec^2\frac{A}{2}=\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{p^2}\overset{Gerretsen}{\geq} 4$.

7)If $n\in\mathbf{N}$ and $\lambda\geq 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum\frac{\csc^{n+2}\frac{A}{2}}{\csc^n\frac{B}{2}+\lambda\csc^n\frac{C}{2}}\geq\frac{4}{\lambda+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Am folosit mai sus $\sum \csc^2\frac{A}{2}\geq 12$, vezi: $\sum \csc^2\frac{A}{2}=\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\overset{Gerretsen}{\geq} 12$.

Problema66.

If $a,b>0$ then

$$9a^2+7b+\frac{81}{2a+7b}\geq 16a+9.$$

Panagiotis Danousis,MathTime 2/2024

Soluție.

$$9a^2+7b+\frac{81}{2a+7b}\geq 9(2a-1)+7b+\frac{81}{2a+7b}=18a-9+7b+\frac{81}{2a+7b}=$$

$$=16a-9+(2a+7b)+\frac{81}{2a+7b}\overset{AM-GM}{\geq}16a-9+2\sqrt{(2a+7b)\cdot\frac{81}{2a+7b}}=16a-9+2\cdot 9=$$

$=16a+9=RHS$, cu egalitate pentru $a^2=2a-1$ și $2a+7b=\dfrac{81}{2a+7b}\Leftrightarrow a=1$ și $2a+7b=9$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$(\lambda+1)a^2+\lambda b+\frac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}\geq(2\lambda+1)a+\lambda+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=(\lambda+1)a^2+\lambda b+\frac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}\geq(\lambda+1)(2a-1)+\lambda b+\frac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}=2\lambda a-\lambda+2a-1+\lambda b+\frac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}=$$

$$=(2\lambda+1)a-\lambda-1+(a+\lambda b)+\frac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}\overset{AM-GM}{\geq}(2\lambda+1)a-\lambda-1+2\sqrt{(a+\lambda b)\cdot\frac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}}=$$

$$=(2\lambda+1)a-\lambda-1+2\cdot(\lambda+1)=(2\lambda+1)a+\lambda+1=RHS,$$

cu egalitate pentru $a^2=2a-1$ și $a+\lambda b=\dfrac{(\lambda+1)^2}{a+\lambda b}\Leftrightarrow a=1$ și $a+\lambda b=\lambda+1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$ pentru $\lambda>0$ și $a=1$ pentru $\lambda=0$.

Problema67.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Vu Long, Vietnam, THCS 2/2024

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}a}{a+3b}.$$

Demonstrație.

$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}a}{a+3b} \Leftrightarrow (a+3b)^2 \geq 8(ab+b^2) \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{2\sqrt{2}a}{a+3b} = 2\sqrt{2}\sum \frac{a^2}{a^2+3ab} \overset{CS}{\geq} 2\sqrt{2}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+3ab\right)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\sum a^2 + 3\sum ab} \overset{SOS}{\geq} 2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{\lambda ab+b^2}} \geq \frac{2a\sqrt{\lambda+1}}{\lambda a+(\lambda+2)b}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{\lambda ab+b^2}} \geq \frac{2a\sqrt{\lambda+1}}{\lambda a+(\lambda+2)b}.$$

Problema68.

G.458. If $a,b,c>0$, $a+b+c=a^5+b^5+c^5$ then

$$a^3+b^3+c^3 \leq 3.$$

Cristina și Mihai Vijdeliuc, Recreații Matematice 1/2024

Soluție.

Avem $a+b+c=a^5+b^5+c^5=\frac{a^6}{a}+\frac{b^6}{b}+\frac{c^6}{c} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq \frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a+b+c} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 \geq \left(a^3+b^3+c^3\right)^2 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \leq a+b+c$, (1).

Apoi $a+b+c=a^5+b^5+c^5 \overset{Holder}{\geq} \frac{(a+b+c)^5}{3^4} \Rightarrow 81(a+b+c)\geq(a+b+c)^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 81\geq(a+b+c)^4 \Rightarrow a+b+c\leq 3$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow a^3+b^3+c^3\leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=a^{6n-1}+b^{6n-1}+c^{6n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}\leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Avem $a+b+c=a^{6n-1}+b^{6n-1}+c^{6n-1}=\frac{a^{6n}}{a}+\frac{b^{6n}}{b}+\frac{c^{6n}}{c}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}\right)^2}{a+b+c} \Rightarrow$

$a+b+c\geq\frac{\left(a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}\right)^2}{a+b+c} \Rightarrow a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}\leq a+b+c$, (1).

Apoi $a+b+c=a^{6n-1}+b^{6n-1}+c^{6n-1} \overset{Holder}{\geq} \frac{(a+b+c)^{6n-1}}{3^{6n-2}} \Rightarrow 3^{6n-2}(a+b+c)\geq(a+b+c)^{6n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{6n-2}\geq(a+b+c)^{6n-2} \Rightarrow a+b+c\leq 3$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}\leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema69.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{x^{2n-1}}{1+y(1+z)}\geq 1.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece,MathTime2/2024, Problem(106)

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x+y+z=3, q = xy+yz+zx \le 3, r = xyz \le 1$.

$$LHS = \sum \frac{x^{2n-1}}{1+y(1+z)} = \sum \frac{x^{2n}}{x+xy(1+z)} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum(x+xy+xyz)} = \frac{p^{2n}}{3^{2n-2}(p+q+3r)} \overset{pqr-Method}{\ge}$$

$$\overset{pqr-Method}{\ge} \frac{3^{2n}}{3^{2n-2}(3+3+3\cdot 1)} = \frac{9}{9} = RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ and $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{x^{2n-1}}{1+\lambda y(1+z)} \ge \frac{3}{2\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Problema70.

If $x, y, z, t > 0$, $x+y+z+t=4$ then

$$\sum \frac{1}{1+x^2} \ge 2.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2024

Soluție.

Lema.

If $x > 0$ then

$$\frac{1}{1+x^2} \ge 1-\frac{x}{2}.$$

Demonstrație.

$\frac{1}{1+x^2} \ge 1-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x(x-1)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $x=1$.

$$\sum \frac{1}{1+x^2} \ge \sum\left(1-\frac{x}{2}\right) = 4-\frac{1}{2}\sum x = 4-\frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = t = 1$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ and $0 \le \lambda \le 1$ then

$$\sum \frac{1}{\lambda + x^2} \ge \frac{3}{\lambda + 1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x > 0$ and $0 \le \lambda \le 1$ then

$$\frac{1}{\lambda + x^2} \ge \frac{\lambda + 3 - 2x}{(\lambda + 1)^2}.$$

Problema71.

U.2472 If $t, u \ge 0$, $x, y, z > 0$ then in ΔABC holds:

$$\sum \frac{y+z}{x} b^t c^u \ge 2^{1+t+u} \left(\sqrt[4]{3}\right)^{4-t-u} \left(\sqrt{F}\right)^{t+u}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Flaviu Cristian Verde, Romania, RMM-42, Autumn-2024

Soluție

$$LHS = \sum \frac{y+z}{x} b^t c^u \overset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{\prod \frac{y+z}{x} b^t c^u} = 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}(abc)^{t+u}} \overset{Cesaro}{\ge}$$

$$\overset{Cesaro}{\ge} 3\sqrt[3]{8(abc)^{t+u}} = 6(abc)^{\frac{t+u}{3}} \overset{Carlitz}{\ge} 6\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{t+u}{3}} = 6\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{t+u}{3}} = 2^{1+t+u}\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4-t-u}\left(\sqrt{F}\right)^{t+u} = RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Carlitz: $abc \ge \left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema72.

If $a, b, c > 0$ then

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \ge \frac{4a}{a+b}.$$

Halit Shehu, Mathematics(College and High School) 2/2024

Soluție.

$$LHS = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \overset{(1)}{\ge} \frac{4a}{a+b} = RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{4a}{a+b} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ și $a = b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarca.

If $a,b,c > 0$ then

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a}.$$

Marin Chirciu

Lema.

If $a,b,c > 0$ then

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

Soluție.

$$LHS = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \overset{(1)}{\geq} \frac{4a}{a+b} = RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{4a}{a+b} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ și $a = b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** se adună inegalitățile de forma $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$ și se obține concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Problema73.

If $a,b,c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{1}{b^2 + c^2} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2024

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{b^2 + c^2} \overset{AM-GM}{\leq} \sum \frac{1}{2bc} = \frac{\sum a}{2abc} \overset{abc=1}{=} \frac{a+b+c}{2} = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+d^2}+\frac{1}{d^2+a^2}\le\frac{ab+bc+cd+da}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{b^2+c^2}\overset{AM-GM}{\le}\sum\frac{1}{2bc}=\frac{\sum ab}{2abcd}\overset{abcd=1}{=}\frac{ab+bc+cd+da}{2}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarca.

Solve in positive real numbers :

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+d^2}+\frac{1}{d^2+a^2}=\frac{1}{2}\\ ab+bc+cd+da=4\\ abcd=1\end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{1}{b^2+c^2}\overset{AM-GM}{\le}\sum\frac{1}{2bc}=\frac{\sum ab}{2abcd}=\frac{ab+bc+cd+da}{2}=\frac{1}{2}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$.

Remarca.

Solve in positive real numbers :

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}=\frac{3}{2}\\ a+b+c=3\\ abc=1\end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{1}{b^2+c^2}\overset{AM-GM}{\le}\sum\frac{1}{2bc}=\frac{\sum a}{2abc}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema74.

JP.197 Solve for real numbers:

$$6\sqrt[3]{2x^2-2x+1}+4\sqrt[4]{3x^3-2x^4}=2x^5-5x+13.$$

Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam, RMM, Autumn Edition 2019

Soluţie:

Domeniul de definiție este $D=\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt[3]{2x^2-2x+1}=\sqrt[3]{\left(2x^2-2x+1\right)\cdot 1\cdot 1}\le\frac{\left(2x^2-2x+1\right)+1+1}{3}=\frac{2x^2-2x+3}{3},$$

cu egalitate pentru $2x^2-2x+1=1$.

$$\sqrt[4]{3x^3-2x^4}=\sqrt[4]{\left(3x^3-2x^4\right)\cdot 1\cdot 1\cdot 1}\le\frac{\left(3x^3-2x^4\right)+1+1+1}{4}=\frac{3x^3-2x^4+3}{4},$$

cu egalitate pentru $3x^3-2x^4=1$.

$$2x^5-5x+13=6\sqrt[3]{2x^2-2x+1}+4\sqrt[4]{3x^3-2x^4}\le 6\cdot\frac{2x^2-2x+3}{3}+4\cdot\frac{3x^3-2x^4+3}{4}=$$

$=9-4x+4x^2+3x^3-2x^4$, de unde rezultă că:

$$2x^5-5x+13\le 9-4x+4x^2+3x^3-2x^4 \Leftrightarrow 2x^5+2x^4-3x^3-4x^2-x+4\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(2x^3+6x^2+7x+4\right)\le 0.$$

Deducem din cele de mai sus că $x=1$ este soluția unică a ecuației date.

Remarca.

1)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+4\sqrt[4]{4x^3-3x^4}=x^5-4x+10.$$

Soluţie: $x=1$.

2)Fie $a\ge 0$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+4\sqrt[4]{4x^3-3x^4}=ax^5+(1-5a)x+4a+6.$$

Soluţie: $x=1$.

3)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+4\sqrt[4]{4x^3-3x^4}=x+6.$$

Soluţie: $x=1$.

4)Fie $a\geq 1, n\geq 1$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$3\sqrt[3]{nx^2-nx+1}+4\sqrt[4]{(n+1)x^3-nx^4}=ax^5+(3-5a)x+4(a+1).$$

Soluţie: $x=1$

5)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$3\sqrt[3]{x^2-x+1}+4\sqrt[4]{2x^3-x^4}=x^5-2x+8.$$

Soluţie: $x=1$.

6)Fie $a\geq 1$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$3\sqrt[3]{x^2-x+1}+4\sqrt[4]{2x^3-x^4}=ax^5+(3-5a)x+4(a+1).$$

Soluţie: $x=1$.

7)Fie $n\geq 1$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$3\sqrt[3]{nx^2-nx+1}+4\sqrt[4]{(n+1)x^3-nx^4}=x^5-2x+8.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu, Pitești

Soluţie: $x=1$.

Problema75.

Fie $x, y, z>0$ astfel încât $x+y+z=3$. Determinați minimul

$$P=\frac{x^3}{y\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^3}{z\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^3}{x\sqrt{z^3+8}}.$$

Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam, 20-RMM Spring Edition 2021

Remarca.

Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = 3$. Determinați minimul

$$P = \frac{x^3}{\sqrt{y^4 + 8y}} + \frac{y^3}{\sqrt{z^4 + 8z}} + \frac{z^3}{\sqrt{x^4 + 8x}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

Dacă $x > 0$, atunci

$$\sqrt{x^4 + 8x} \le x^2 + 2$$

Demonstrație.

Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt{x\left(x^3+8\right)} = \sqrt{x(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \sqrt{\left(x^2+2x\right)\left(x^2-2x+4\right)} \le \frac{\left(x^2+2x\right)+\left(x^2-2x+4\right)}{2} =$$

$= x^2 + 2$, cu egalitate dacă $x^2 + 2x = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Solutie alternativă.

$\sqrt{x^4+8x} \le x^2+2 \Leftrightarrow x^4+8x \le \left(x^2+2\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x = 1$

$$P = \frac{x^3}{\sqrt{y^4+8y}} + \frac{y^3}{\sqrt{z^4+8z}} + \frac{z^3}{\sqrt{x^4+8x}} \ge \frac{x^3}{y^2+2} + \frac{y^3}{z^2+2} + \frac{z^3}{x^2+2}$$

Remarca.

Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 3$. Determinați minimul

$$T = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \sum \frac{1}{b^2 + c^2 + bc}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Dacă $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge \frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}.$$

Problema76.

Dacă $x, y, z > 0$ și $x + y + z = 1$ arătați că:

a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$.

b) $\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{2}{y}\right)\left(1+\frac{2}{z}\right) \geq 343$.

c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1000}{27}$.

d) $\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(y+\frac{2}{y}\right)\left(z+\frac{2}{z}\right) \geq \left(\frac{19}{3}\right)^3$.

Art of Problem Solving

Remarca.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ și $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ arătați că:

a') $\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq (1+n)^n$.

b') $\left(1+\frac{k}{x_1}\right)\left(1+\frac{k}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{k}{x_n}\right) \geq (1+kn)^n$, $k > 0$.

c') $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geq \left(n+\frac{1}{n}\right)^n$.

d') $\left(x_1+\frac{k}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{k}{x_2}\right)\ldots\left(x_n+\frac{k}{x_n}\right) \geq \left(kn+\frac{1}{n}\right)^n$, $k \geq 1$.

Marin Chirciu

Soluție.

b') Pentru $x > 0$ căutăm o inegalitate de forma: $1+\frac{k}{x} \geq \frac{a}{1+bx}$, (1), punând condiția ca $\frac{1}{n}$ să fie rădăcină dublă pentru ecuația atașată:

$bx^2 + (bk - a + 1)x + k = 0$. Obținem $\begin{cases} a = (kn+1)^2 \\ b = kn^2 \end{cases}$, (2).

Atunci $(1) \Leftrightarrow (nx-1)^2 \geq 0$, pentru a și b din (2).

$$M_s=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{k}{x_i}\right)\overset{(1)}{\geq}\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{1+bx_i}=\frac{a^n}{\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)}\overset{(3)}{\geq}\frac{a^n}{\left(\frac{n+b}{n}\right)^n}=\left(\frac{na}{n+b}\right)^n\overset{(2)}{=}\left[\frac{n(kn+1)^2}{n+kn^2}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{n(kn+1)^2}{n(kn+1)}\right]^n=(kn+1)^n=M_d$$, unde (3) este adevărată din inegalitatea mediilor:

$$\frac{(1+bx_1)+(1+bx_2)+...+(1+bx_n)}{n}\geq\sqrt[n]{(1+bx_1)(1+bx_2)...(1+bx_n)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n+b}{n}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)}\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)\leq\left(\frac{n+b}{n}\right)^n\Leftrightarrow\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)}\geq\frac{1}{\left(\frac{n+b}{n}\right)^n}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{n}$.

d') Pentru $x>0$ căutăm o inegalitate de forma: $x+\frac{k}{x}\geq\frac{a}{1+bx}$, punând condiția ca $x=\frac{1}{n}$ să fie rădăcină dublă pentru ecuația atașată: $bx^3+x^2+(bk-a)x+k=0$.

Avem $x+\frac{k}{x}\geq\frac{a}{1+bx}$, cu a și b din (2) și $(1)\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\left[bx+\frac{2b+n}{n}\right]\geq 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=\frac{1}{n}$.

$$M_s=\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{k}{x_i}\right)\overset{(1)}{\geq}\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{1+bx_i}=\frac{a^n}{\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)}\overset{(3)}{\geq}\frac{a^n}{\left(\frac{n+b}{n}\right)^n}=\left(\frac{na}{n+b}\right)^n\overset{(2)}{=}\left[\frac{n\cdot\frac{(kn^2+1)^2}{2n}}{n+\frac{kn^3-n}{2}}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{(kn^2+1)^2}{kn^3+n}\right]^n=\left[\frac{(kn^2+1)^2}{n(kn^2+1)}\right]^n=\left[\frac{kn^2+1}{n}\right]^n=\left(kn+\frac{1}{n}\right)^n=M_d,$$

unde (3) este adevărată din inegalitatea mediilor:

$$\frac{(1+bx_1)+(1+bx_2)+...+(1+bx_n)}{n}\geq\sqrt[n]{(1+bx_1)(1+bx_2)...(1+bx_n)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n+b}{n}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)}\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)\leq\left(\frac{n+b}{n}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+bx_i)}\geq\frac{1}{\left(\frac{n+b}{n}\right)^n}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{n}$.

Problema77.

Să se rezolve în numere reale sistemul:

$$\begin{cases} ab+bc+ca=1 \\ a^2-2b^2=1 \\ 2b^2-3c^2=1 \end{cases}.$$

Poland, 2008

Soluție.

Observăm că dacă $(a,\ b,\ c)$ este o soluție a sistemului atunci și $(-a,\ -b,\ -c)$ este soluție.

Există $x,\ y,\ z\in(0,\ \pi)$ astfel încât $a=\operatorname{ctg}x,\ \ b=\operatorname{ctg}y,\ \ c=\operatorname{ctg}z$.

Din ecuația întâi avem $\operatorname{ctg}z=c=\frac{1-ab}{a+b}=\frac{1-\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}=-\operatorname{ctg}(x+y)=\operatorname{ctg}(-x-y)\Rightarrow$ $\Rightarrow z=k\pi-x-y,\ \ k\in\boldsymbol{Z}$. Convine $k=1$. Rezultă $x+y+z=\pi$.

Din ecuația a doua avem $\operatorname{ctg}^2 x-2\operatorname{ctg}^2 y=1\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 x}-1-2\left(\frac{1}{\sin^2 y}-1\right)=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sin^2 y}\Rightarrow\frac{1}{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{\sin y}.$$

Din ecuația a treia avem $\frac{\sqrt{2}}{\sin y}=\frac{\sqrt{3}}{\sin z}$. Rezultă $\frac{1}{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{\sin y}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(x+y)}$.

Rezultă $\cos x=\frac{2}{\sqrt{6}},\ \ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Rightarrow\operatorname{ctg}x=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}$.

Apoi $\sin y=\frac{2}{\sqrt{6}},\ \ \cos y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Rightarrow\operatorname{ctg}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. În final $c=\frac{1-ab}{a+b}=\frac{1-1}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=0$.

Deducem că mulțimea soluțiilor este $S=\left\{\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right);\ \left(-\sqrt{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\right\}$.

Remarca.

Să se rezolve în numere reale sistemul:

$$\begin{cases} ab+bc+ca=1 \\ 3a^2-4b^2=1 \\ 4b^2-5c^2=1 \end{cases}.$$

Poland, 2010

Soluție.

$$\frac{3}{\sin^2 x}=\frac{4}{\sin^2 y}=\frac{5}{\sin^2 z}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=\frac{2}{\sin y}=\frac{\sqrt{5}}{\sin(x+y)}.$$

Obținem: $\operatorname{ctg} x=\frac{3}{\sqrt{11}},\quad \operatorname{ctg} y=\frac{2}{\sqrt{11}},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{\sqrt{11}}$. Mulțimea soluțiilor este:

$$S=\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\ \frac{2}{\sqrt{11}},\ \frac{1}{\sqrt{11}}\right);\ \left(-\frac{3}{\sqrt{11}},\ -\frac{2}{\sqrt{11}},\ -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right\}.$$

Remarca.

Să se rezolve în numere reale sistemul:

$$\begin{cases} ab+bc+ca=1\\ na^2-(n+1)b^2=1\\ (n+1)b^2-(n+2)c^2=1\end{cases},\ \text{unde}\ \ n\geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Dacă $(a,\ b,\ c)$ este soluție pentru sistem atunci și $(-a,\ -b,\ -c)$ este soluție.

Există $x,\ y,\ z\in(0,\ \pi)$ astfel încât $a=\operatorname{ctg} x,\ \ b=\operatorname{ctg} y,\ \ c=\operatorname{ctg} z$.

Presupunem $a+b\neq 0$ (dacă $a+b=0$, din prima ecuație avem $ab=1$, fals pe *R*).

Rezultă $\operatorname{ctg} z=c=\frac{1-ab}{a+b}=\frac{1-\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}=-\operatorname{ctg}(x+y)=\operatorname{ctg}(-x-y)$.

Convine $x+y+z=\pi$.

Din ecuația a doua avem

$$n\operatorname{ctg}^2 x-(n+1)\operatorname{ctg}^2 y=1\Rightarrow n\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)-(n+1)\left(\frac{1}{\sin^2 y}-1\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{n}{\sin^2 x}=\frac{n+1}{\sin^2 y}\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{\sin x}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sin y}.$$

Din ecuația a treia avem

$$(n+1)\operatorname{ctg}^2 y-(n+2)\operatorname{ctg}^2 z=1\Rightarrow(n+1)\left(\frac{1}{\sin^2 y}-1\right)-(n+2)\left(\frac{1}{\sin^2 z}-1\right)=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\frac{n+1}{\sin^2 y}=\frac{n+2}{\sin^2 z}\Rightarrow\frac{\sqrt{n+1}}{\sin y}=\frac{\sqrt{n+2}}{\sin z}$. Avem $\sin z=\sin(\pi-x-y)=\sin(x+y)$.

Obținem $\frac{\sqrt{n}}{\sin x}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sin y}=\frac{\sqrt{n+2}}{\sin(x+y)}$.

Avem: $\begin{cases}\sqrt{n}\sin y=\sqrt{n+1}\sin x\\ \sqrt{n}\sin(x+y)=\sqrt{n+2}\sin x\end{cases}$.

$$\sqrt{n}\sin(x+y)=\sqrt{n+2}\sin x\Rightarrow\sqrt{n}(\sin x\cos y+\sin y\cos x)=\sqrt{n+2}\sin x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}\sin x\cos y+\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}\sin x}{\sqrt{n}}\cdot\cos x=\sqrt{n+2}\sin x\Rightarrow\sqrt{n}\cos y=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cos^2 y=n+2+(n+1)\cos^2 x-2\sqrt{(n+1)(n+2)}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(1-\sin^2 y)=n+2+(n+1)\cos^2 x-2\sqrt{(n+1)(n+2)}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\left(1-\frac{(n+1)\sin^2 x}{n}\right)=n+2+(n+1)\cos^2 x-2\sqrt{(n+1)(n+2)}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-(n+1)\sin^2 x=n+2+(n+1)\cos^2 x-2\sqrt{(n+1)(n+2)}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\cos x=n+3\Rightarrow\cos x=\frac{n+3}{2\sqrt{(n+1)(n+2)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\frac{(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)}}=\frac{\sqrt{3n^2+6n-1}}{2\sqrt{(n+1)(n+2)}}\Rightarrow\operatorname{ctg}x=\frac{n+3}{\sqrt{3n^2+6n-1}}=a.$$

Obținem: $\sin y=\frac{\sqrt{3n^2+6n-1}}{2\sqrt{n(n+2)}}$, $\cos y=\frac{n+1}{2\sqrt{n(n+2)}}\Rightarrow\operatorname{tg}y=\frac{n+1}{\sqrt{3n^2+6n-1}}=b$.

Rezultă: $c=\frac{1-ab}{a+b}=\frac{n-1}{\sqrt{3n^2+6n-1}}$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este:

$$S=\left\{\left(\frac{n+3}{\sqrt{3n^2+6n-1}},\frac{n+1}{\sqrt{3n^2+6n-1}},\frac{n-1}{\sqrt{3n^2+6n-1}}\right);\left(\frac{-(n+3)}{\sqrt{3n^2+6n-1}},\frac{-(n+1)}{\sqrt{3n^2+6n-1}},\frac{-(n-1)}{\sqrt{3n^2+6n-1}}\right)\right\}.$$

Problema78.

Dacă $x,\ y\ge 0$ și $x+y=2$ arătați că $x^2y^2(x^2+y^2)\le 2$ ”

Irlanda 2000

Soluție: Notăm $xy = P;\ x^2+y^2=4-2P$; inegalitatea se scrie:

$P^2(4-2P)\le 2 \Leftrightarrow P^2(2-P)\le 1 \Leftrightarrow P^3-2P+1\ge 0 \Leftrightarrow (P-1)(P^2-P-1)\ge 0$, evident

deoarece $P-1\le 0$ și $P^2-P-1<0$;

într-adevăr: $2=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\le 1\Rightarrow P\le 1\Rightarrow P-1\le 0;\ P^2-P-1=P\underbrace{(P-1)}_{\le 0}-1<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=1$.

Remarca.

Dacă $x,\ y\ge 0$ astfel încât $x+y=2$ și $n\in \boldsymbol{N}^*$ atunci $x^n y^n(x^2+y^2)\le 2$.

Marin Chirciu, Pitesti

Soluție:

Cu notația de mai sus inegalitatea se scrie:

$P^n(4-2P)\le 2 \Leftrightarrow P^n(2-P)\le 1 \Leftrightarrow P^{n+1}-2P^n+1\ge 0 \Leftrightarrow P^{n+1}+1\ge 2P^n$, adevărată din:

$P^{n+1}+1\ge 2\sqrt{P^{n+1}}\overset{(1)}{\ge} 2P^n$, unde $(1)\Leftrightarrow \sqrt{P^{n+1}}\ge P^n \Leftrightarrow P^{n+1}\ge P^{2n} \Leftrightarrow P^{n-1}\le 1$, evident deoarece $P\le 1$
. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=1$.

Remarca.

Dacă $x,\ y\ge 0$ și $x+y=2$ arătați că $x^3y^3(x^3+y^3)\le 2$.

India 2008

Soluție:

Notăm $xy=P;\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8-6P;\ P\le 1$; inegalitatea se scrie:
$P^3(8-6P)\le 2 \Leftrightarrow P^3(4-3P)\le 1 \Leftrightarrow 3P^4-4P^3+1\ge 0 \Leftrightarrow (P-1)^2(3P^2+2P+1)\ge 0$.

Egalitatea pentru $x=y=1$.

Remarca.

Dacă $x,\ y\ge 0$ astfel încât $x+y=2$ și $n\in \boldsymbol{N},\ n\ge 3$ atunci $x^n y^n(x^3+y^3)\le 2$.

Marin Chirciu, Pitesti

Soluție:

Cu notația de mai sus inegalitatea se scrie: $P^n(8-6P)\le 2 \Leftrightarrow P^n(4-3P)\le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3P^{n+1}-4P^n+1\ge 0 \Leftrightarrow (P-1)(3P^n-P^{n-1}-P^{n-2}-...-P^2-P-1)\ge 0$, evident, deoarece
$P-1\le 0$ și $3P^n-P^{n-1}-P^{n-2}-...-P^2-P-1\le 0$;

Într-adevăr: $3P^n - P^{n-1} - P^{n-2} - P^{n-3} - \ldots - P^2 - P - 1 =$

$= \underbrace{\left(P^n - P^{n-1}\right)}_{\le 0} + \underbrace{\left(P^n - P^{n-2}\right)}_{\le 0} + \underbrace{\left(P^n - P^{n-3}\right)}_{\le 0} - \ldots - P^2 - P - 1 \le 0$, pentru $n \ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = 1$.

Problema79.

In ΔABC

$$\sum bc \cdot \sin\frac{A}{2} \ge 2S\sqrt{3}.$$

Marius Stănean, Zalău, G.M. 1/2016

Lema.

În triunghiul *ABC* există relația: $\sum bc \cdot f\left(\frac{A}{2}\right) \ge \alpha \cdot S$, unde:

$(f,\ \alpha) \in \left\{\left(\sin,\ 2\sqrt{3}\right),\ \left(\cos,\ 6\right),\ \left(\text{tg},\ 4\right),\ \left(\text{ctg},\ 12\right),\ \left(\sec,\ 8\right),\ \left(\text{cosec},\ 8\sqrt{3}\right)\right\}$.

Demonstrația se face utilizând inegalitatea mediilor, identități remarcabile în triunghi și inegalitățile lui Mitrinovič și Euler.

1) $\sum bc \cdot \sin\frac{A}{2} \ge 2\sqrt{3} \cdot S$.

Soluție:

Cu inegalitatea mediilor și $abc = 4Rrp$, $\prod \sin\frac{A}{2} = \frac{r}{4R}$ și $S = rp$ obținem:

$$M_s = \sum bc\sin\frac{A}{2} \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod\sin\frac{A}{2}} = 3\sqrt[3]{16R^2r^2p^2 \cdot \frac{r}{4R}} = 3\sqrt[3]{4Rr^3p^2} \overset{(1)}{\ge} 2\sqrt{3}rp = M_d,$$

unde $(1) \Leftrightarrow 9R \ge 2p\sqrt{3} \Leftrightarrow p \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (inegalitatea lui Mitrinovič).

2) $\sum bc \cdot \cos\frac{A}{2} \ge 6S$.

Soluție:

Cu inegalitatea mediilor și $abc = 4Rrp$, $\prod \cos\frac{A}{2} = \frac{p}{4R}$ și $S = rp$ obținem:

$$M_s = \sum bc\sin\frac{A}{2} \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod\cos\frac{A}{2}} = 3\sqrt[3]{16R^2r^2p^2 \cdot \frac{p}{4R}} = 3\sqrt[3]{4Rr^2p^3} \overset{(2)}{\ge} 6rp = M_d,$$

unde $(2) \Leftrightarrow 4R \ge 8r \Leftrightarrow R \ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

3) $\sum bc\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq 4S$.

Soluție:

Cu inegalitatea mediilor și $abc=4Rrp$, $\prod \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$ și $S=rp$ obținem:

$$M_s=\sum bc\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod \operatorname{tg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{16R^2r^2p^2\cdot\frac{r}{p}}=3\sqrt[3]{16R^2r^3p}\overset{(3)}{\geq}4rp=M_d,$$

unde $(3)\Leftrightarrow 27R^2\geq 4p^2\Leftrightarrow p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (inegalitatea lui Mitrinovič).

4) $\sum bc\cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geq 12S$.

Soluție:

Cu inegalitatea mediilor și $abc=4Rrp$, $\prod \operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p}{r}$ și $S=rp$ obținem:

$$M_s=\sum bc\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{16R^2r^2p^2\cdot\frac{p}{r}}=3\sqrt[3]{16R^2rp^3}\overset{(4)}{\geq}12rp=M_d,$$

unde $(4)\Leftrightarrow R^2\geq 4r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$ (inegalitatea lui Euler).

5) $\sum bc\cdot \sec\frac{A}{2}\geq 8S$.

Soluție:

Cu inegalitatea mediilor și $abc=4Rrp$, $\prod \sec\frac{A}{2}=\frac{4R}{p}$ și $S=rp$ obținem:

$$M_s=\sum bc\sec\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}}=3\sqrt[3]{16R^2r^2p^2\cdot\frac{4R}{p}}=3\sqrt[3]{16\cdot 4R^3r^2p}\overset{(5)}{\geq}8rp=M_d,$$

unde $(5)\Leftrightarrow 27R^3\geq 8rp^2\Leftrightarrow p^2\leq\frac{27R^2}{8r}$, adevărată din inegalitatea lui Mitrinovič și inegalitatea lui Euler,

într-adevăr $p^2\leq\frac{27R^2}{4}\overset{(2)}{\leq}\frac{27R^3}{8r}$, unde $(2)\Leftrightarrow R\geq 2r$.

6) $\sum bc\cdot \operatorname{cosec}\frac{A}{2}\geq 8\sqrt{3}\cdot S$.

Soluție:

Cu inegalitatea mediilor și $abc=4Rrp$, $\prod \sec\frac{A}{2}=\frac{4R}{p}$ și $S=rp$ obținem:

$$M_s=\sum bc\,\text{cosec}\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}}=3\sqrt[3]{16R^2r^2p^2\cdot\frac{4R}{r}}=3\sqrt[3]{16\cdot 4R^3rp^2}\overset{(6)}{\geq}8\sqrt{3}\cdot rp=M_d,$$

unde $(6)\Leftrightarrow 9R^3\geq 8\sqrt{3}r^2p\Leftrightarrow p\leq\frac{9R^3}{8\sqrt{3}r^2}$, adevărată din inegalitatea lui Mitrinovič și inegalitatea lui Euler, într-adevăr $p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R\overset{(3)}{\leq}\frac{9R^3}{8\sqrt{3}r^2}\frac{27R^3}{8r}$, unde $(3)\Leftrightarrow R^2\geq 4r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$.

Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral, în fiecare din inegalitățile de mai sus.

Problema80.

1. Să se arate că în orice triunghi *ABC* avem:

a) $\prod\left(\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\right)=\frac{4R}{p}$.

Soluție:

Folosind formula $\text{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem:

$$\prod\left(\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\right)=\prod\left(\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}+\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\right)=$$

$$=\prod\sqrt{\frac{p-a}{p}}\cdot\left(\sqrt{\frac{p-c}{p-b}}+\sqrt{\frac{p-b}{p-c}}\right)=\prod\left(\sqrt{\frac{p-a}{p}}\cdot\frac{p-c+p-b}{\sqrt{p-b}\cdot\sqrt{p-c}}\right)=$$

$$=\prod\left(\sqrt{\frac{p-a}{p}}\cdot\frac{a}{\sqrt{p-b}\cdot\sqrt{p-c}}\right)=\frac{abc}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{4RS}{pS}=\frac{4R}{p}.$$

b) $\prod\left(\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\right)\geq\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$.

Soluție:

Folosind a) și inegalitatea lui Mitrinovič: $p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$ obținem concluzia, cu egalitate pentru triunghiul echilateral.

c) $\prod\left(\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)\geq\frac{8}{27}$.

Soluție:

Folosind $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$ și b) obținem:

$$\prod\left(\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\geq\prod\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2}{2}\overset{b)}{\geq}\frac{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right]^2}{8}=\frac{8}{27}.$$

d) $\prod\left(\operatorname{tg}^n\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^n\frac{C}{2}\right)\geq\frac{8}{\left(\sqrt{3}\right)^{3n}}$, unde $n\in\boldsymbol{N}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție:

Pentru $n=0$ se obține identitate, $8=8$.

Pentru $n=1$ se obține b).

Pentru $n\geq 2$ folosim inegalitatea $x^n+y^n\geq\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$ care rezultă din inegalitatea lui Holder:

$$\left(x^n+y^n\right)\underbrace{(1+1)(1+1)...(1+1)}_{\text{de } n-1 \text{ ori } (1+1)}\geq(x+y)^n.$$

Obținem: $\prod\left(\operatorname{tg}^n\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^n\frac{C}{2}\right)\geq\prod\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^n}{2^{n-1}}\overset{b)}{\geq}\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{3n}}{\left(2^{n-1}\right)^3}=\frac{8}{\left(\sqrt{3}\right)^{3n}}.$

2. Să se arate că în orice triunghi *ABC* au loc relațiile:

a) $\prod\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=\frac{4Rp}{r^2}.$

Soluție:

Folosind formula $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem:

$$\prod\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=\prod\left(\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}+\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}\right)=$$

$$=\prod\sqrt{\frac{p}{p-a}}\cdot\left(\sqrt{\frac{p-b}{p-c}}+\sqrt{\frac{p-c}{p-b}}\right)=\prod\left(\sqrt{\frac{p}{p-a}}\cdot\frac{p-b+p-c}{\sqrt{p-b}\cdot\sqrt{p-c}}\right)=$$

$$=\prod\left(\sqrt{\frac{p}{p-a}}\cdot\frac{a}{\sqrt{p-b}\cdot\sqrt{p-c}}\right)=\frac{p^3\cdot abc}{\left(\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)^3}=\frac{p^3\cdot 4RS}{S^3}=\frac{4Rp}{r^2}.$$

b) $\prod\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\geq\left(2\sqrt{3}\right)^3.$

Soluție:

Se folosește a), inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$ și inegalitatea lui Mitrinovič: $p \geq 3\sqrt{3}r$. Obținem:

$\frac{4Rp}{r^2} \geq \frac{8r \cdot 3\sqrt{3}r}{r^2} = \left(2\sqrt{3}\right)^3$.

c) $\prod\left(\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right) \geq 216$.

Soluție:

Se folosește inegalitatea: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ și b).

d) $\prod\left(c\operatorname{tg}^n\frac{B}{2} + c\operatorname{tg}^n\frac{C}{2}\right) \geq 8\left(\sqrt{3}\right)^{3n}$, unde $n \in \boldsymbol{N}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție:

Pentru $n = 0$ se obține identitate, $8 = 8$.

Pentru $n = 1$ se obține b).

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea $x^n + y^n \geq \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$ și analog 1. d) se obține concluzia.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites2/2024.
7. Konstantinos Geronikolas, Greece, MathTime 2/2024.
8. Tran Cong Hung,Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2024.
9. Mihaela Berindeanu, București, RMT 1/2024.
10. Gheorghe Iacob, Pașcani, RMT 1/2024.
11. Panagiotis Danousis , MathTime 2/2024.
12. Gheorghe Stoica, Petroșani,RMT 1/2024.
13. Traian Ianculescu, Mathematical Inequalities 2/2024.
14. Alexandru Blaga, Satu-Mare, RMT 1/2024.
15. Ovidiu Pop, Brașov,RMT 1/2024.
16. Emanuel Munteanu, Brașov,RMT 1/2024.
17. Cătălin Cristea, Craiova, RMT 1/2024.
18. Khoi Nguyen Pham, Vietnam,THCS 2/2024.
19. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities2/2024.

20. Batbold Egshit, Mathematical Inequalities 2/2024.
21. Amir Sofi, Kosovo, Mathematcs(College and High School) 2/2024.
22. Vedula N.Murty, USA, Mathematical Inequalities 2/2024.
23. Titu Andreescu, USA, Mathematical Reflections.
24. Darij Grinberg, Mathematical Inequalities.
25. Dinh Hieu, Vietnam,THCS 2/2024.
26. Nikolaos Kallos, Greece, MathTime 2/2024.
27. Nguyen Nghi, Vietnam,MathTime 2/2024.
28. Problem 2/2, Upper School 2/2024.
29. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania, RMM-42, Autumn-2024.
30. Dorel I. Duca, Cluj-Napoca, RMT 1/2024.
31. Elton Papanikola, MathOlymp 2/2024.
32. Daniel Sitaru , Romania, RMM-1/2024.
33. Neculai Stanciu, Romania , RMM-1/2024.
34. Arhimede Mathematical Journal, 2014.
35. M.S.Klamkin, Canada, Crux Math.12/1986.
36. Marian Ursărescu, Olympic Mathematical Energy,Iași 2018.
37. J.M.Child, Mathematical Gazette 1939.
38. Florin Rotaru, Focșani, Sclipirea Minții Nr32/2023.
39. Mihai Marinca Chirciu, elev București, MathJournal 1/2024.
40. Nguyen Viet Hung,Vietnam, Mathematical Reflections6/2023.
41. Adrian Andreescu, Dallas, USA, Mathematical Reflections 5/2023.
42. Mircea Becheanu, Canada, Mathematical Reflections 1/2023.
43. Vasile Cârtoaje ,Ploiești, GM 7-8/1992.
44. Titu Zvonaru, Comănești, Mathematical Reflections 1/2023.
45. Vasile Lupulescu, Universitatea Târgu-Jiu, Mathematical Reflections 4/2023.
46. Sorina Tudor, Romania, RMM-1/2024.
47. An Zhenping, China, Mathematical Reflections,1/2019.
48. Dorin Marghidanu, Arhimede Mathematical Journal, Vol.7,No.2, Autumn 2020.
49. Florică Anastase, RMM-25, 2021.
50. Yen Tung Chung, THCS 4/2021.
51. Anh Tran, Matematika 4/2021.
52. Vasile Mircea Popa, Romania,RMM11/2020.
53. Cristina Vijdeliuc, Baia Mare,SGM 5/2020.
54. Mihai Vijdeliuc , Baia Mare,SGM 5/2020.
55. Nguyen Van Canh, Vietnam, RMM 3/2020.
56. Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections 3/2020.
57. Leonard Giugiuc, Crux Mathematicorum ,Vol46(7), Sep2020.
58. Claudia Nănuți, Romania,RMM-42, Autumn-2024.
59. Traian Tămâian, Carei, Satu Mare, GM 3/2020.
60. Kunihiko Chikaya, Enjoy Solving Mathematics 3/2021.
61. Marcel Țena, Enjoy Solving Mathematics 3/2021.
62. Boris Colakovic, MathTime 2/2024.
63. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2024.
64. Vu Long, Vietnam, THCS 2/2024.
65. Flaviu Cristian Verde, Romania, RMM-42, Autumn-2024.
66. Halit Shehu, Mathematics(College and High School) 2/2024
67. Hoang Le Nhat Tung,Vietnam, 20-RMM Spring Edition 2021.
68. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

69. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 5500

1 Martie 2024