

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. SOLUTION TO A PROBLEM IN
"MATHEMATICAL MONTHLY AMERICAN" MAGAZINE ... PAG. 2
George Florin Șerban
2. DEZVOLTĂRI DIN O. BOTTEMA ... PAG. 4
Marin Chirciu
3. SOLUȚII PENTRU UNELE PROBLEME DIN MATHEMATICAL REFLECTIONS...PAG.10
Nela Ciceu și Roxana Mihaela Stanciu
4. ASUPRA UNOR DESCOMPUNERI n-FIBONACCI... PAG. 15
Stan Ilie
5. PĂTRATE MAGICE PITAGOREICE ... PAG. 22
Stan Ilie
6. ASUPRA UNOR INEGALITĂȚI ÎN TRIUNGHI... PAG. 24
Cantemir Iliescu
7. COORDONATE BARICENTRICE... PAG. 32
Oprea Elena Georgiana
8. ÎNVĂȚĂTREA PRIN DESCOPERIRE LA MATEMATICĂ...PAG.34
Florea Maria Luminița
9. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2016 ... PAG. 35
Manea Cosmin și Petrica Dragoș
10. PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2016... PAG.44
Conf. dr. Gheorghe PROCOPIUC, Universitatea Tehnică Iași
11. MODEL EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ NOIEMBRIE 2016... PAG. 45
12. MODEL BAC MATEMATICĂ NOIEMBRIE 2016... PAG. 47

1. SOLUTION TO A PROBLEM IN “MATHEMATICAL MONTHLY AMERICAN” MAGAZINE

By **George-Florin Serban** , Pedagogical High School ”D.P.Perpessicius”
 , Braila , Romania

This problem is a generalization of Trajan Lalescu string.

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) = \frac{1}{e}. \quad (\text{Traian Lalescu})$$

11935. Proposed by D.M.Batinetu-Giurgiu, “Matei Basarab” National College, Bucharest, Romania, Anastasios Kotronis, Athens, Greece, and Neculai Stanciu, “George Emil Palade” School, Buzau, Romania.

Let f be a function from Z^+ to R^+ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = a$, where $a > 0$. Find

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1} f(k)} - \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f(k)} \right).$$

Solved by Profesor : **George-Florin Serban** , Pedagogical High School , Braila , Romania.

Proposition: Let the string of numbers $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = x \in (0, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = y$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = x \ln y$.

$$\text{Solution: } \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \left[\left(1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} \right)^{\frac{n(a_{n+1} - a_n)}{a_n}} \right], \quad \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \ln \left[\left(1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} \right)^{\frac{n(a_{n+1} - a_n)}{a_n}} \right],$$

$$\frac{a_n}{n} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = (a_{n+1} - a_n) \ln \left[\left(1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} \right) \right], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n} = 1 - 1 = 0,$$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} \right) \right] = \ln e = 1$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) \ln \left[\left(1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} \right) \right], \text{ then}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = x(\ln y).$$

Application: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{f(1)f(2)\cdots f(n+1)} - \sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}) = l$, $a_n = \sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}$,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{f(1)f(2)\cdots f(n)}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1)f(2)\cdots f(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{f(1)f(2)\cdots f(n)}$$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = a \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{e}, \text{ because } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ (Cauchy d'Alembert).}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{f(1)f(2)\cdots f(n+1)}}{\sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n+1]{f(1)f(2)\cdots f(n)}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{f(1)f(2)\cdots f(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{e}{a} \cdot \frac{a}{e} \cdot 1 = 1,$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{f(1)f(2)\cdots f(n+1)}}{\sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n+1)}{\sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}} \right)^{\frac{n}{n+1}},$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(a \cdot 1 \cdot \frac{e}{a} \right)^1 = e.$$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{f(1)f(2)\cdots f(n+1)} - \sqrt[n]{f(1)f(2)\cdots f(n)}) = l = x(\ln y) = \frac{a}{e} \cdot (\ln e) = \frac{a}{e},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1} f(k)} - \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f(k)} \right) = \frac{a}{e}.$$

2. DEZVOLTĂRI DIN O. BOTTEMA

Marin Chirciu¹

În „Geometric Inequalities” de O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrović și P. M. Vasić, apărută la Groningen, Olanda în 1969, în capitolul 6: „Inegalități cu laturi, înălțimi și raze în triunghi”, paginile 65-66 se găsesc următoarele inegalități în triunghi: 6.21, 6.22, 6.23, 6.24.

Articolul prezintă dezvoltări ale acestora.

$$6.21: a) \frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r}.$$

E. A. Bokov, Matematika V. Škole 4/1966

$$\text{Soluție: } h_a = \frac{2S}{a}, r = \frac{S}{p}; M_s = \sum \frac{1}{h_a - 2r} = \sum \frac{1}{\frac{2S}{a} - \frac{2S}{p}} = \frac{1}{2S} \sum \frac{ap}{p-a} = \frac{p}{2rp} \sum \frac{a}{p-a} =$$

$$= \frac{1}{2r} \cdot \frac{2(2R-r)}{r} = \frac{2R-r}{r^2} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{3}{r} = M_d. \text{ Egalitate pentru triunghiul echilateral.}$$

$$b) \sum \frac{1}{h_a - r} \geq \frac{3}{2r}.$$

$$\text{Soluție: } h_a = \frac{2S}{a}, r = \frac{S}{p}; M_s = \sum \frac{1}{h_a - r} = \sum \frac{1}{\frac{2S}{a} - \frac{S}{p}} = \frac{1}{S} \sum \frac{ap}{2p-a} = \frac{p}{rp} \sum \frac{a}{b+c} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{1}{r} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2r} = M_d. \text{ Egalitate pentru triunghiul echilateral.}$$

$$c) \sum \frac{1}{h_a - nr} \geq \frac{3}{3-n} \cdot \frac{1}{r}, \text{ unde } 0 \leq n \leq 2.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Soluție: $M_s = \sum \frac{1}{h_a - r} = \sum \frac{1}{\frac{2S}{a} - n \cdot \frac{S}{p}} = \frac{1}{S} \sum \frac{a p}{2p - na} = \frac{1}{rp} \sum \frac{a}{2p - na} = \frac{1}{r} \sum \frac{a}{2p - na} \stackrel{Berg}{\geq}$

$$\stackrel{Bergstrom}{\geq} \frac{1}{r} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{\sum a(2p-na)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{2p\sum a - n\sum a^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{2p^2 - n\sum a^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{(a+b+c)^2 - n\sum a^2} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + 2\sum bc - n\sum a^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{(1-n)\sum a^2 + 2\sum bc} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{3-n} \cdot \frac{1}{r} = M_d,$$

unde (1) $\frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{(1-n)\sum a^2 + 2\sum bc} \geq \frac{3}{3-n} \Leftrightarrow (3-n)\sum a^2 + (6-2n)\sum bc \geq (3-3n)\sum a^2 +$

$+ 6\sum bc \Leftrightarrow 2n\sum a^2 \geq 2n\sum bc$, evident. Egalitate pentru triunghiul echilateral sau pentru $n=0$.

Obs. Pentru $n=2$ se obține a). Pentru $n=1$ se obține b).

6.22: a) $\frac{h_a+r}{h_a-r} + \frac{h_b+r}{h_b-r} + \frac{h_c+r}{h_c-r} \geq 6$.

C. Coșniță și F. Turtoiu, cdp București 1965

Soluție: Folosim $h_a = \frac{2S}{a}$, $r = \frac{S}{p} \Rightarrow M_s = \sum \frac{\frac{2S}{a} + \frac{S}{p}}{\frac{2S}{a} - \frac{S}{p}} = \sum \frac{2p+a}{2p-a} = \sum \frac{2p+a}{b+c} =$

$$= \sum \frac{2a+b+c}{b+c} = \sum \left(1 + \frac{2a}{b+c} \right) = 3 + 2 \sum \frac{a}{b+c} \stackrel{Nesbitt}{\geq} 3 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 6 = M_d$$

b) $\sum \frac{h_a - nr}{h_a - nr} \geq 3 \cdot \frac{3+n}{3-n}$, unde $0 \leq n \leq 2$.

Dezvoltare, Marin Chirciu

Soluție: $\sum \frac{\frac{2S}{a} + n \cdot \frac{S}{p}}{\frac{2S}{a} - n \cdot \frac{S}{p}} = \sum \frac{2p+na}{2p-na} = \sum \frac{2p-na+2na}{2p-na} = \sum \left(1 + \frac{2na}{2p-na} \right) =$

$$\begin{aligned}
&= 3 + 2n \cdot \sum \frac{a}{b+c+(1-n)a} = 3 + 2n \cdot \sum \frac{a^2}{ab+ac+(1-n)a^2} \stackrel{(CS)}{\geq} 3 + 2n \cdot \frac{(\sum a)^2}{2\sum bc + (1-n)\sum a^2} = \\
&= 3 + 2n \cdot \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{(1-n)\sum a^2 + 2\sum bc} \stackrel{(1)}{\geq} 3 + 2n \cdot \frac{3}{3-n} = \frac{9-3n+6n}{3-n} = \frac{9+3n}{3-n} = 3 \cdot \frac{3+n}{3-n},
\end{aligned}$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{(1-n)\sum a^2 + 2\sum bc} \geq \frac{3}{3-n} \Leftrightarrow 2n\sum a^2 \geq 2n\sum bc$, evident.

Obs. Pentru $n=1$ se obține a).

6.23:a) Pentru $k > 0$, $M_k \left(\frac{h_a - r}{h_a + r_a}, \frac{h_b - r}{h_b + r_b}, \frac{h_c - r}{h_c + r_c} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}$,

unde $M_k(x, y, z) = \left(\frac{x^k + y^k + z^k}{3} \right)^{\frac{1}{k}}$.

R. Z. Djordjević, Yugoslavia, 1969

Soluția 1. Avem $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $k=1 \Rightarrow \sum \frac{h_a - r}{h_a + r_a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}$.

$$M_s = \sum \frac{h_a - r}{h_a + r_a} = \sum \frac{\frac{2S}{a} - \frac{S}{p-a}}{\frac{2S}{a} + \frac{S}{p-a}} = \sum \frac{\frac{2p-a}{ap}}{\frac{a(p-a)}{a(p-a)}} = \sum \frac{p-a}{p} = \frac{1}{p} \sum (p-a) = \frac{1}{p} \cdot p = 1.$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie: $1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}} \Leftrightarrow 1 \geq 27 \cdot \frac{4r^2}{27R^2} \Leftrightarrow R^2 \geq 4r^2$, evident din inegalitatea lui Euler.

Pentru $k=2 \Rightarrow \left[\frac{\sum \left(\frac{h_a - r}{h_a + r_a} \right)^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}$.

$$M_s = \left[\frac{\sum \left(\frac{p-a}{p} \right)^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(1)}{\geq} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\sum \frac{p-a}{p} \right)^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \stackrel{(2)}{\geq} \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}, \text{ unde (1) rezultă din}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \text{ și (2) } \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ inegalitatea lui Euler.}$$

$$\text{Pentru } k = n, n \geq 2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\frac{\sum \left(\frac{h_a - r}{h_a + r_a} \right)^n}{3} \right]^{\frac{1}{n}} \geq \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}.$$

$$\left[\frac{\sum \left(\frac{h_a - r}{h_a + r_a} \right)^n}{3} \right]^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{\left(\sum \frac{h_a - r}{h_a + r_a} \right)^n}{3^{n-2} \cdot 3} \right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{3^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \stackrel{(2)}{\geq} \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}, \text{ unde inegalitatea lui Holder:}$$

$$\frac{x^n}{1} + \frac{y^n}{1} + \frac{z^n}{1} \geq \frac{(x+y+z)^n}{3^{n-2}(1+1+1)} \text{ și (2) } \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ inegalitatea lui Euler.}$$

Soluția 2.

Folosim inegalitatea lui Jensen. $f'(x) = kx^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$, $f(x) = x^k$ este convexă

$$\text{pentru } k \geq 1 \Rightarrow \frac{x^k + y^k + z^k}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^k, x = \frac{h_a - r}{h_r + r} \text{ și } \sum x = 1.$$

$$\frac{\sum \left(\frac{h_a - r}{h_a + r_a} \right)^k}{3} \geq \left(\frac{\sum \frac{h_a - r}{h_a + r_a}}{3} \right)^k = \left(\frac{1}{3} \right)^k.$$

$$\left[\frac{\sum \left(\frac{h_a - r}{h_a + r_a} \right)^k}{3} \right]^{\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}}.$$

$$\text{b) Pentru } k \in \mathbb{N}^* \text{ demonstrați că: } M_k \left(\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a}, \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r_b}, \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r_c} \right) \geq \left(\frac{4r^2}{27R^2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

Soluție:

$$\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a} = \frac{\frac{2S}{a} - 2 \cdot \frac{S}{p}}{\frac{2S}{a} + 2 \cdot \frac{S}{p-a}} = \frac{\frac{2p-2a}{ap}}{\frac{2p-2a+2a}{a(p-a)}} = \frac{2(p-a)(p-a)}{2p^2} = \left(\frac{p-a}{p}\right)^2.$$

$$x = \frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a} = \left(\frac{p-a}{p}\right)^2, \sum x = \sum \left(\frac{p-a}{p}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

$$M_s = \left[\frac{1}{3} \sum \left(\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \geq \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\sum \frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a} \right)^k}{3^{k-2}(1+1+1)} \right]^{\frac{1}{k}} = \left[\frac{1}{3^k} \cdot \left(\sum \left(\frac{p-a}{p} \right)^2 \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{3^k} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{3^{2k}} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 \geq \left(\sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}} \right)^2 = \left(\frac{4r^2}{27R^2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$c) M_k \left(\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a}, \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r_b}, \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r_c} \right) \geq \left(\frac{2r}{27R} \right)^{\frac{2}{3}}, \text{ pentru } k \in \mathbb{N}^*.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

Soluție: Se folosește b) și inegalitatea lui Euler. Pentru $x = \frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a}, y = \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r_b}, z = \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r_c}$

$$\text{Avem } M_k(x, y, z) = \left[\frac{1}{3} \cdot \sum \left(\frac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \geq \left(\frac{1}{3} \right)^2 \geq \left(\sqrt[3]{\frac{2r}{27R}} \right)^2 \geq \left(\sqrt[3]{\frac{4r^2}{27R^2}} \right)^2.$$

$$6.24: a) \frac{h_a - r_a}{h_a + r_a} + \frac{h_b - r_b}{h_b + r_b} + \frac{h_c - r_c}{h_c + r_c} \leq 0.$$

C. Coșniță și F. Turtoiu, cdp București 1965

Soluție: Folosim $h_a = \frac{2S}{a}$, $r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow M_s = \sum \frac{\frac{2S}{a} - \frac{S}{p-a}}{\frac{2S}{a} + \frac{S}{p-a}} = \sum \frac{2p-3a}{2p-a} = \sum \frac{b+c-2a}{b+c} =$

$$= \sum \left(1 - \frac{2a}{b+c} \right) = 3 - 2 \sum \frac{a}{b+c} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\leq} 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0 = M_d.$$

b) $\sum \frac{h_a - nr_a}{h_a + nr_a} \leq 3 \cdot \frac{1-n}{1+n}$, unde $0 \leq n \leq 2$.

Dezvoltare Marin Chirciu

Soluție: $M_s = \sum \frac{\frac{2S}{a} - n \cdot \frac{S}{p-a}}{\frac{2S}{a} + n \cdot \frac{S}{p-a}} = \sum \frac{2p-2a-na}{2p-2a+na} = \sum \frac{2p-2a+na-2na}{2p-2a+na} =$

$$= \sum \left(1 - \frac{2na}{2p-2a+na} \right) = 3 - 2n \sum \frac{a}{2p-2a+na} \stackrel{(1)}{\leq} 3 - 2n \cdot \frac{3}{n+1} = 3 \cdot \frac{1-n}{1+n} = M_d,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a}{2p-2a+na} \geq \frac{3}{n+1}$, care rezultă din

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{2p-2a+na} &= \sum \frac{a}{a+b+c-2a+na} = \sum \frac{a}{\underbrace{b+c-a}_{>0} + \underbrace{na}_{\geq 0}} = \sum \frac{a}{b+c+(n-1)a} = \\ &= \sum \frac{a^2}{ab+ac+(n-1)a^2} \stackrel{(CS)}{\geq} \frac{(\sum a)^2}{2\sum bc + (n-1)\sum a^2} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{(n-1)\sum a^2 + 2\sum bc} \stackrel{(2)}{\geq} \frac{3}{n+1}, \end{aligned}$$

unde (2) $\Leftrightarrow (n+1)\sum a^2 + (2n+2)\sum bc \geq (3n-3)\sum a^2 + 6\sum bc \Leftrightarrow (4-2n)\sum a^2 \geq (4-2n)\sum bc$, evident pentru $n \leq 2$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral sau pentru $n=0$.

Bibliografie:

1. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda.
2. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

3. SOLUȚII PENTRU UNELE PROBLEME DIN MATHEMATICAL REFLECTIONS

Nela Ciceu și Roxana Mihaela Stanciu

J355. Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 9.$$

Proposed by Anant Mudgal, India

Soluție:

J355. După omogenizare, inegalitatea este echivalentă cu

$$4\sum a\sum a^2 - 3\sum a^3 \geq (\sum a)^3 \Leftrightarrow 3\sum a^2b + 3\sum ab^2 \geq 6abc,$$

adevărată cu inegalitatea mediilor.

J359. The midline of triangle ABC , parallel to side BC , intersects the triangle's circumcircle at B' and C' . Evaluate the length of segment $B'C'$ in terms of triangle ABC 's side-lengths.

Proposed by Dorin Andrica and Dan Ștefan Marinescu, România

Soluție:

J359. Notând cu x, y segmentele cuprinse între mijloacele laturilor și cercul circumscris, avem sistemul:

$$x(a/2+y) = b^2/4, \quad y(a/2+x) = c^2/4$$

Adunând și scăzând cele două ecuații obținem:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}(x+y) + 2xy &= \frac{b^2+c^2}{4}, \quad a(x-y) = \frac{b^2-c^2}{2} \\ a^2(x-y)^2 &= \frac{(b^2-c^2)^2}{4} \Leftrightarrow a^2(x+y)^2 - 4a^2xy = \frac{(b^2-c^2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Trebuie să rezolvăm ecuația de gradul 2 cu necunoscuta $x+y$

$$\begin{aligned} a^2(x+y)^2 + a^3(x+y) - \frac{a^2(b^2+c^2)}{2} - \frac{(b^2-c^2)^2}{4} &= 0 \\ x+y &= \frac{-a^3 + \sqrt{a^6 + 2a^4(b^2+c^2) + a^2(b^2-c^2)^2}}{2a^2} \\ B'C' &= \frac{\sqrt{a^4 + 2a^2(b^2+c^2) + (b^2-c^2)^2}}{2a}. \end{aligned}$$

J360. In triangle ABC , let AA' and BB' be the angle bisectors of $\angle A$ and $\angle B$. Prove that

$$\frac{A'B'}{ab \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{1}{(b+c) \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)} + \frac{1}{(c+a) \sin \left(\frac{A}{2} + B\right)}.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Soluție:

J360. Notații obișnuite. Cu teorema bisectoarei și formula pentru lungimea bisectoarei avem

$$IA' = \frac{abc \cos \frac{A}{2}}{s(b+c)}, IA = \frac{bc \cos \frac{A}{2}}{s}.$$

Aplicând teorema sinusurilor obținem:

$$\frac{a}{\sin \left(A + \frac{B}{2}\right)} = \frac{w_b}{\sin C} \Rightarrow \frac{1}{(b+c) \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)} = \frac{2c \cos \frac{B}{2}}{(a+c)(b+c) \sin C}. \quad (1)$$

Folosind inegalitatea lui Ptolemeu în patrulaterul $IA'CB'$ rezultă

$$\begin{aligned} A'B' \cdot IC &\leq CB' \cdot IA' + CA' \cdot IB' \Leftrightarrow A'B' \cdot \frac{ab \cos \frac{C}{2}}{s} \leq \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{abc \cos \frac{A}{2}}{s(b+c)} + \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{abc \cos \frac{B}{2}}{s(a+c)} \\ \Leftrightarrow A'B' &\leq \frac{abc \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \right)}{(a+c)(b+c) \cos \frac{C}{2}} \Leftrightarrow \frac{A'B'}{ab \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{2c \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \right)}{(a+c)(b+c) \sin C} \quad (2) \end{aligned}$$

Din (1) și (2) rezultă concluzia.

J361. Solve in positive integers the equation

$$\frac{x^2 - y}{8x - y^2} = \frac{y}{x}.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution:

If $x, y \geq 5$, then by AM-GM inequality we have

$$x^3 + y^3 \geq 5x^2 + 5y^2 \geq 10xy > 9xy,$$

so we not obtain solutions.

Let $y \leq 4$. It remains to solve the equations

$$x^3 - 9x + 1 = 0; x^3 - 18x + 8 = 0; x^3 - 27x + 27 = 0; x^3 - 36x + 64 = 0.$$

We obtain the solutions $(2,4), (4,2)$.

J362. Let a, b, c, d be real numbers such that $abcd = 1$. Prove that the following inequality holds:

$$ab + bc + cd + da \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$$

Proposed by Mircea Becheanu, University of Bucharest, România

Solution:

By AM-GM inequality we have

$$\begin{aligned} 1/c^2 + 1/d^2 &\geq 2/(cd) = 2ab; \quad 1/d^2 + 1/a^2 \geq 2/(ad) = 2bc \\ 1/a^2 + 1/b^2 &\geq 2/(ab) = 2cd; \quad 1/b^2 + 1/c^2 \geq 2/(bc) = 2da. \end{aligned}$$

Adding up the inequalities from above we obtain the desired inequality.

J363. Solve in integers the system of equations

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z(x + y) &= 10 \\ y^2 + z^2 - x(y + z) &= 6 \\ z^2 + x^2 - y(z + x) &= -2 \end{aligned}$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution:

Adding the equations we obtain

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 14 \quad (1)$$

Subtracting we obtain

$$\begin{aligned}(x - y)(x + y + z) &= -8 \\ (y - z)(x + y + z) &= 12 \\ (z - x)(x + y + z) &= -4\end{aligned} \quad (2)$$

Since $14=1+4+9$ we deduce that one of the expressions $x-y$, $y-z$, $z-x$ is ± 3 . By the system (2) yields:

i) $y - z = 3$, $x + y + z = 4$, $x - y = -2$, $z - x = -1$, so we obtain the solution $(1, 3, 0)$.

ii) $y - z = -3$, $x + y + z = -4$, $x - y = 2$, $z - x = 1$, and we obtain the solution $(1, -3, 0)$.

J364. Consider a triangle ABC with circumcircle ω . Let O be the center of ω and let D, E, F be the midpoints of minor arcs BC, CA, AB respectively. Let DO intersect ω again at a point A' . Define B' and C' similarly. Prove that

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} \leq 1.$$

Note that $[X]$ denotes the area of figure X .

Proposed by Taimur Khalid, Coral Academy of Science, Las Vegas, USA

Solution:

Since $EFB'C'$ is rectangle, yields immediately that $EF = B'C'$ and $\Delta A'B'C' \equiv \Delta DEF$.

By $\angle EOF = 2(\angle EBA + \angle FCA) = B + C$, we obtain $EF = 2R \cos\left(\frac{A}{2}\right)$.

The inequality to prove becomes

$$\begin{aligned}abc &\leq 8R^3 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C \leq \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \leq 1, \text{ which is well-known.}\end{aligned}$$

J365. Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be nonnegative real numbers such that $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Find the minimum possible value of

$$\sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{2x_2 + 1} + \dots + \sqrt{nx_n + 1}.$$

Proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

Solution:

We shall prove that if $a, b \geq 0$, then $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$.

We have

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} &\geq 1 + \sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow 1+a+1+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1+1+a+b+2\sqrt{1+a+b} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(1+a)(1+b)} &\geq \sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow ab \geq 0. \end{aligned}$$

By induction yields that if $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, then

$$\sqrt{1+a_1} + \sqrt{1+a_2} + \dots + \sqrt{1+a_n} \geq n-1 + \sqrt{1+a_1+a_2+\dots+a_n}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+2x_2} + \dots + \sqrt{1+nx_n} &\geq n-1 + \sqrt{1+x_1+2x_2+\dots+nx_n} = \\ &= n-1 + \sqrt{2+x_2+2x_3+\dots+(n-1)x_n} \geq n-1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

The minimum occurs for $x_1 = 0, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$.

4. ASUPRA UNOR DESCOMPUNERI n -FIBONACCI

-- STUDIU DE SPECIALITATE--

Prof. Stan Ilie

Colegiul Tehnic “Anghel Saligny”, Roşiorii de Vede, Teleorman

Despre numerele din şirul lui Fibonacci (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...) sau şirul creşterilor naturale, se cunosc multe proprietăţi:

- Şir recurent definit prin relaţia $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pentru $n \geq 2$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.
- Raportul de aur pentru $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, cu n cât mai mare
- Orice termen Fibonacci se scrie ca sumă de numere prime. Şi multe altele!

Pornind, ca idee, de la ultima proprietate, ne întrebăm dacă:

- a) Orice număr prim se poate scrie folosind termeni distincţi Fibonacci?
- b) Orice număr natural se descompune în sumă de termeni distincţi Fibonacci?

Studiem problema mai generală de la punctul b)...poate găsim răspunsuri şi pentru a)!

Aşadar $f_0=0$, $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_4=3$, $f_5=5$, $f_6=8$, $f_7=13$, $f_8=21$, $f_9=34$, $f_{10}=55$...

Câteva descompuneri şi observaţii...

$$1=1+0,$$

$$2=1+1,$$

$$3=2+1, 4=3+1,$$

$$5=3+2, 6=5+1, 7=5+2,$$

$$8=5+3, 9=8+1, 10=8+2, 11=8+3, 12=8+3+1$$

$$13=8+5, 14=13+1, 15=13+2, 16=13+3, 17=13+3+1, 18=13+5, 19=13+5+1, 20=13+5+2$$

$$21=13+8...$$

Pentru o privire mai de ansamblu, folosim calculatorul şi scriem două programe ajutătoare.

Acestea generează descompunerile numerelor naturale utilizând metoda Greedy.

Primul afişează aceste descompuneri.

Algoritm

n este numărul maxim până la care vrem să urmărim descompunerea

f -vector pentru termenii Fibonacci

inițializări

generare şi afişare termeni Fibonacci

afişare descrescătoare a descompunerilor

Sfârşit algoritm

```

Free Pascal IDE
File Edit Search Run Compile Debug Tools Options Window Help
hyfib2.pas
program desc_in_nr_fibo;
var i,j,nf,n,m,nr:integer;
    f:array[0..100] of integer;
begin
    m:=2;n:=1300;
    f[0]:=0;f[1]:=1;i:=1;
    while f[i]<n do begin
        inc(i);
        f[i]:=f[i-1]+f[i-2];
    end;
    nf:=i-1;
    for i:=0 to nf do write(f[i],' ');
    for j:=n downto m do begin
        nr:=j; nf:=i-1;
        write(nr,'=');
        while f[nf]>0 do begin
            if nr>f[nf] then begin
                write('+' ,f[nf]);
                nr:=nr-f[nf];
                nf:=nf-1;end;
            else nf:=nf-1;
            end;
        writeln;
    end;
end.
5:8
F1 Help F2 Save F3 Open Alt+F9 Compile F9 Make Alt+F10 Local menu

```

Free Pascal IDE	Free Pascal IDE	Free Pascal IDE	Free Pascal IDE
25=+21+3+1	50=+34+13+3	75=+55+13+5+2	100=+89+8+3
24=+21+3	49=+34+13+2	74=+55+13+5+1	99=+89+8+2
23=+21+2	48=+34+13+1	73=+55+13+5	98=+89+8+1
22=+21+1	47=+34+13	72=+55+13+3+1	97=+89+8
21=+21	46=+34+8+3+1	71=+55+13+3	96=+89+5+2
20=+13+5+2	45=+34+8+3	70=+55+13+2	95=+89+5+1
19=+13+5+1	44=+34+8+2	69=+55+13+1	94=+89+5
18=+13+5	43=+34+8+1	68=+55+13	93=+89+3+1
17=+13+3+1	42=+34+8	67=+55+8+3+1	92=+89+3
16=+13+3	41=+34+5+2	66=+55+8+3	91=+89+2
15=+13+2	40=+34+5+1	65=+55+8+2	90=+89+1
14=+13+1	39=+34+5	64=+55+8+1	89=+89
13=+13	38=+34+3+1	63=+55+8	88=+55+21+8+3+1
12=+8+3+1	37=+34+3	62=+55+5+2	87=+55+21+8+3
11=+8+3	36=+34+2	61=+55+5+1	86=+55+21+8+2
10=+8+2	35=+34+1	60=+55+5	85=+55+21+8+1
9=+8+1	34=+34	59=+55+3+1	84=+55+21+8
8=+8	33=+21+8+3+1	58=+55+3	83=+55+21+5+2
7=+5+2	32=+21+8+3	57=+55+2	82=+55+21+5+1
6=+5+1	31=+21+8+2	56=+55+1	81=+55+21+5
5=+5	30=+21+8+1	55=+55	80=+55+21+3+1
4=+3+1	29=+21+8	54=+34+13+5+2	79=+55+21+3
3=+3	28=+21+5+2	53=+34+13+5+1	78=+55+21+2
2=+2	27=+21+5+1	52=+34+13+5	77=+55+21+1
	26=+21+5	51=+34+13+3+1	76=+55+21

Am afișat descompunerile numerelor până la $21=f_8$ (calculatorul a făcut-o până la 100).

Acestea sunt exemple pentru prima parte a demonstrației prin inducție.

Presupunem adevărată P_k

P_k : Toate numerele mai mici ca f_k pot fi scrise ca sume de f_i neconsecutive.

Verificăm P_{k+1}

Orice număr x se află între 2 termeni Fibonacci consecutivi.

Fie $f_{k+1} < x < f_{k+2}$

Avem $x = f_{k+1} + (x - f_{k+1})$

$f_{k+1} - f_{k+1} < x - f_{k+1} < f_{k+2} - f_{k+1} = f_k$ deci $x - f_{k+1} < f_k$ care se poate, conform P_k , descompune.

Rezultă P_{k+1} adevărată. qed

Rezultatele programului anterior ne induc întrebarea:

“Există un număr maxim de termeni Fibonacci la descompunerea oricărui număr natural?”

Folosim al doilea program pentru a afișa doar numerele unde crește necesarul de termeni Fibonacci.

Algoritm

n este numărul maxim până la care vrem să urmărim descompunerea

f-vector pentru termenii Fibonacci

a-vector pentru păstrarea numărului de termeni Fibonacci necesar fiecărui număr inițializări

generare termeni Fibonacci

completare vector a

afișarea primelor valori ale lui a unde crește numărul termenilor necesari

Sfârșit algoritm

The screenshot shows the Free Pascal IDE with a Pascal program named 'byfibo3.pas'. The program calculates the number of Fibonacci terms needed to represent numbers up to 10,000,000. The output window displays the results for numbers where the count increases.

```

program desc_in_nr_fibo;
const n=10000000;
var i,j,k,nf,m,nr,na:longint;
    f:array[0..1000] of longint;
    a:array[0..n] of byte;

begin
  m:=2;
  for k:=0 to n do a[k]:=0;
  f[0]:=0;f[1]:=1;i:=1;

  while f[i]<n do begin
    inc(i);
    f[i]:=f[i-1]+f[i-2];
  end;
  nf:=i-1;
  for j:=n downto m do begin
    nr:=j; nf:=i-1;
    while f[nf]>0 do begin
      if nr>=f[nf] then begin
        a[j]:=a[j]+1;
        nr:=nr-f[nf];
        nf:=nf-1;end
      else nf:=nf-1;
    end;
  end;
  na:=0;
  for k:=0 to n do
    if a[k]=na then begin
      writeln(k,'--',a[k],' ');
      na:=na+1;end;
  end.
  
```

Output:

```

0--0
2--1
4--2
12--3
33--4
88--5
232--6
609--7
1596--8
4180--9
10945--10
28656--11
75024--12
196417--13
514228--14
1346268--15
3524577--16
9227464--17
  
```

Găsim șirul $\{s_n\}$ 0,1,4,12,33,88,232,609,1596,4180...

Încercăm să găsim regula de generare:

n	s_n	Regulă
0	0	
1	1	
2	4	
3	12	$4*3$
4	33	$12*3-3$
5	88	$33*3-11$
6	232	$88*3-32$
7	609	$232*3-87$
8	1596	$609*3-231$
9	4180	

Deducem regula $s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} + 1$

Regulă ce se verifică și pentru următorii termeni ai șirului s_n .

O relație recurentă (desigur...doar folosește termeni Fibonacci!), o relație frumoasă și interesantă dar nu o relație facilă!

Privind din nou șirul $\{s_n\}$ 0,1,4,12,33,88,232,609,1596,4180..., observăm că este format din numere aflate în preajma unor numere Fibonacci!

Mai exact 1-1, 2-1, 5-1, 13-1, 34-1, 89-1,...

Adică $f_1-1, f_3-1, f_5-1, f_7-1, f_9-1, f_{11}-1, \dots, f_{2n+1}-1$ pentru n număr natural

Deci $\{s_n\} = \{f_{2n+1}-1\}$

Putem așadar enunța:

Este nevoie de n termeni Fibonacci la scrierea ca sumă pentru numere $\geq f_{2n+1}-1$.

Sau reformulând mai riguros:

În intervalul $[f_{2n+1}-1, f_{2n+3}-1)$, există numere ce necesită n termeni Fibonacci în descompunerea lor ca sumă.

Dar în matematică, și nu numai(!), afirmațiile trebuie susținute cu demonstrații!

$0=f_0$	$12=f_6+f_4+f_2$	$25=f_8+f_4+f_2$
$1=f_1$	$13=f_7$	$26=f_8+f_5$
$1=f_2$	$14=f_7+f_2$	$27=f_8+f_5+f_2$
$2=f_3$	$15=f_7+f_3$	$28=f_8+f_5+f_3$

3= f_4	16= f_7+f_4	29= f_8+f_6
4= f_4+f_2	17= $f_7+f_4+f_2$	30= $f_8+f_6+f_2$
5= f_5	18= f_7+f_5	31= $f_8+f_6+f_3$
6= f_5+f_2	19= $f_7+f_5+f_2$	32= $f_8+f_6+f_4$
7= f_5+f_3	20= $f_7+f_5+f_3$	33= $f_8+f_6+f_4+f_2$
8= f_6	21= f_8	34= f_9
9= f_6+f_2	22= f_8+f_2	35= f_9+f_2
10= f_6+f_3	23= f_8+f_3	36= f_9+f_3
11= f_6+f_4	24= f_8+f_4	37= f_9+f_4

Tabelul de mai sus poate fi considerat bun pentru prima parte a unei demonstrații prin inducție pentru $n=2,3,4$

Presupunem că $f_{2n+1}-1$ este primul număr ce are nevoie de n termeni Fibonacci.

$$f_{2n+1}-1=f_{2n}+f_{2n-2}+f_{2n-4}+\dots+f_4+f_2$$

Următoarele numere naturale, se obțin cu $1,2,\dots,n$ termeni Fibonacci

$$f_{2n+3}-1=f_{2n+2}+f_{2n+1}=f_{2n+2}+f_{2n}+f_{2n-2}+f_{2n-4}+\dots+f_4+f_2. \text{ Adică } n+1 \text{ termeni. qed}$$

Să încercăm să folosim și diferențe nu doar sume! Poate reușim obținerea unei relații cu un număr fix de termeni în descompunere.

$$12 \text{ era primul număr ce necesita } 3 \text{ termeni în descompunere } 12=f_6+f_4+f_2$$

$$\text{Acum poate fi scris cu doar } 2: 12=13-1=f_7-f_2$$

$$17 \text{ însă se scrie tot } 17=13+3+1.$$

Cu ajutorul programului de mai jos – program neoptimizat – putem determina numărul de termeni Fibonacci necesar în descompunerea de forma $f_{i1} \pm f_{i2} \pm f_{i3} \pm f_{i4} \pm f_{i5} \pm \dots$

```

program
desc_in_suma_alternanta_de_nr_fibonacci_max_5;
var i,j,k,l,i5,nf,m,n:longint;
    f:array[0..1000] of longint;
    s:array[0..400000000] of integer;
begin
n:=400000000;m:=46;
for k:=0 to 1000 do f[k]:=0;
for k:=0 to n do begin s[k]:=0;end;
f[0]:=0;f[1]:=1;
m:=42;
//generare vector f cu termeni fibonacci
for i:=2 to m do begin
f[i]:=f[i-1]+f[i-2];
s[f[i]]:=1;
end;
//fj+fi sau fj-fi
nf:=m-4;
for i:=1 to nf do
for j:=i to nf do begin
s[f[i]+f[j]]:=2;
s[f[j]-f[i]]:=-2;
end;
//fk+-fj+-fi
for i:=1 to nf-2 do
for j:=i+1 to nf-1 do
for k:=j+1 to nf do begin
s[f[k]+f[j]+f[i]]:=3;

```

```

s[f[k]+f[j]-f[i]]:=-3;
s[f[k]-f[j]+f[i]]:=-3;
s[f[k]-f[j]-f[i]]:=-3;
end;
//fl+-fk+-fj+-fi

for i:=1 to nf-3 do
  for j:=i+1 to nf-2 do
    for k:=j+1 to nf-1 do
      for l:=k+1 to nf do begin

s[f[l]+f[k]+f[j]+f[i]]:=4;
s[f[l]+f[k]+f[j]-f[i]]:=-4;
s[f[l]+f[k]-f[j]+f[i]]:=-4;
s[f[l]+f[k]-f[j]-f[i]]:=-4;
s[f[l]-f[k]+f[j]+f[i]]:=-4;
s[f[l]-f[k]+f[j]-f[i]]:=-4;
s[f[l]-f[k]-f[j]+f[i]]:=-4;
s[f[l]-f[k]-f[j]-f[i]]:=-4;
if f[l]-f[k]-f[j]-f[i]<0 then
s[-f[l]+f[k]+f[j]+f[i]]:=-4 else
s[f[l]-f[k]-f[j]-f[i]]:=-4;
end;

//fi5+-fl+-fk+-fl+-fj+-fi
for i:=1 to nf-4 do
  for j:=i+1 to nf-3 do
    for k:=j+1 to nf-2 do
      for l:=k+1 to nf-1 do
        for i5:=l+1 to nf do begin
s[f[i5]+f[l]+f[k]+f[j]+f[i]]:=5; s[f[i5]+f[l]+f[k]+f[j]-
f[i]]:=-5;
s[f[i5]+f[l]+f[k]-f[j]+f[i]]:=-5;s[f[i5]+f[l]+f[k]-f[j]-
f[i]]:=-5;
s[f[i5]+f[l]-f[k]+f[j]+f[i]]:=-5;s[f[i5]+f[l]-f[k]+f[j]-
f[i]]:=-5;
s[f[i5]+f[l]-f[k]-f[j]+f[i]]:=-5;
if f[i5]-f[l]-f[k]-f[j]-f[i]<0 then s[-
f[i5]+f[l]+f[k]+f[j]+f[i]]:=-5 else
s[f[i5]-f[l]-f[k]-f[j]-f[i]]:=-5;

if f[i5]-f[l]-f[k]-f[j]+f[i]<0 then s[-f[i5]+f[l]+f[k]+f[j]-
f[i]]:=-5 else
s[f[i5]-f[l]-f[k]-f[j]+f[i]]:=-5;
s[f[i5]-f[l]-f[k]+f[j]-f[i]]:=-5;s[f[i5]-f[l]-
f[k]+f[j]+f[i]]:=-5;
s[f[i5]-f[l]+f[k]-f[j]-f[i]]:=-5;s[f[i5]-f[l]+f[k]-
f[j]+f[i]]:=-5;
s[f[i5]-f[l]+f[k]+f[j]-f[i]]:=-5;
if f[i5]-f[l]-f[k]-f[j]-f[i]<0 then s[-
f[i5]+f[l]+f[k]+f[j]+f[i]]:=-5 else
s[f[i5]-f[l]-f[k]-f[j]-f[i]]:=-5;
end;
for i:=0 to 2000 do if s[i]=0 then write(i,'-');
end.

```

Pentru $f_{i1} \pm f_{i2}$ obținem $n=4$ ca fiind primul număr ce necesită 2 termeni Fibonacci.

Pentru $f_{i1} \pm f_{i2} \pm f_{i3}$ obținem $n=17$ ca fiind primul număr ce necesită 3 termeni Fibonacci.

Pentru $f_{i1} \pm f_{i2} \pm f_{i3} \pm f_{i4}$ obținem $n=72$ ca fiind primul număr ce necesită 4 termeni Fibonacci.

Pentru $f_{i1} \pm f_{i2} \pm f_{i3} \pm f_{i4} \pm f_{i5}$ obținem $n=305$ ca fiind primul număr ce necesită 5 termeni Fibonacci.

Se pare că nici cu această descompunere nu vom avea un număr fix de termeni...

$f_0=0, f_1=1, f_2=1, f_3=2, f_4=3, f_5=5, f_6=8, f_7=13, f_8=21, f_9=34, f_{10}=55$

Să construim intervalele $I_1, I_2, I_3, I_4, \dots, I_k$ ce necesită $1, 2, 3, 4, \dots, k$ termeni Fibonacci în descompunere.

$f_4=3=2+1=f_3+f_2$ este ultimul număr (cel mai mic ultim număr...) ce se scrie ca suma a 2 termeni consecutivi Fibonacci.

$I_1=\{0, 1, 2, 3\}$ evident.

$4=1+3=f_2+f_4$ este primul ce necesită 2 termeni Fibonacci.

Fie $A=N \setminus I_1=\{4, 5, \dots\}$ Din aceasta vom alege multimea I_2 .

Cum

$\{f_5-3, \dots, f_5+3\} \cap \{f_6-3, \dots, f_6+3\} \neq \emptyset$

$(\{5-3, \dots, 5+3\} \cap \{8-3, \dots, 8+3\} \neq \emptyset$ adică $\{2, \dots, 8\} \cap \{5, \dots, 11\} \neq \emptyset)$ și

$\{f_6-3, \dots, f_6+3\} \cap \{f_7-3, \dots, f_7+3\} \neq \emptyset$

$(\{8-3, \dots, 8+3\} \cap \{13-3, \dots, 13+3\} \neq \emptyset$ adică $\{5, \dots, 11\} \cap \{10, \dots, 16\} \neq \emptyset)$ iar

$\{f_7-3, \dots, f_7+3\} \cap \{f_8-3, \dots, f_8+3\} = \emptyset$

$(\{13-3, \dots, 13+3\} \cap \{21-3, \dots, 21+3\} = \emptyset$ adică $\{10, \dots, 16\} \cap \{18, \dots, 24\} = \emptyset) \Rightarrow$

$B=\{f_5-3, \dots, f_5+3\} \cup \{f_6-3, \dots, f_6+3\} \cup \{f_7-3, \dots, f_7+3\} = \{f_5-3, \dots, f_7+3\} = \{5-3, \dots, 13+3\} = \{2, 16\}$

$I_2=A \cap B=\{4, 5, \dots, 16\}$

Similar se construiește I_3 pornind de la

$\{16+1, \dots, f_8, f_8 \pm 16, \dots, f_9 \pm 16, \dots, f_{10} \pm 16\}$

$\{17, \dots, 21, \dots, 21+16, \dots, 34-16, \dots, 34+16, \dots, 55-16, \dots, 55+16\} = \{17, \dots, 71\}$ și

Vom avea: $I_1=\{0, 1, 2, 3\}$, $I_2=\{4, 5, \dots, 16\}$, $I_3=\{17, \dots, 71\}$, $I_4=\{72, \dots, 304\}$, $I_5=\{305, \dots, 1291\}$ și

Observăm că: $I_1=\{0, \frac{1}{2}f_3-1, \dots, \frac{1}{2}f_6-1\}$, $I_2=\{\frac{1}{2}f_6, \dots, \frac{1}{2}f_9-1\}$, $I_3=\{\frac{1}{2}f_9, \dots, \frac{1}{2}f_{12}-1\}$,

$I_4=\{\frac{1}{2}f_{12}, \dots, \frac{1}{2}f_{15}-1\}$, $I_5=\{\frac{1}{2}f_{15}, \dots, \frac{1}{2}f_{18}-1\}$

Singurul care pare că nu se încadrează, direct, în regulă este I_1 .

O scurtă analiză și o mică ajustare conduc la $I_0=\{\frac{1}{2}f_0, \dots, \frac{1}{2}f_3-1\}$ și $I_1=\{\frac{1}{2}f_3, \dots, \frac{1}{2}f_6-1\}$ respectiv

$I_0=\{0\}$ și $I_1=\{1, 2, 3\}$

În general $I_k=\{\frac{1}{2}f_{3k}, \dots, \frac{1}{2}f_{3(k+1)}-1\}$ pentru orice număr k natural.

I_0 are un element ($1=f_1$), I_1 are 3 elemente ($3=f_4$), I_2 are $13=f_7$, I_3 are $55=f_{10}$,...

În general $\text{card}(I_k)=f_{3k+1}$

Altfel enunțat: **Oricare dintre cele f_{3k+1} numere naturale din intervalul $[\frac{1}{2}f_{3k}, \frac{1}{2}f_{3(k+1)})$,**

necesită maxim k termeni Fibonacci în descompunerea în sumă pseudoalternantă.

Concluzii studiu:

Orice număr întreg n se descompune ca sume respective diferențe de termeni Fibonacci.

Numărul acestora este dependent de mărimea lui n .

5.PĂTRATE MAGICE PITAGOREICE

Prof. Stan Ilie

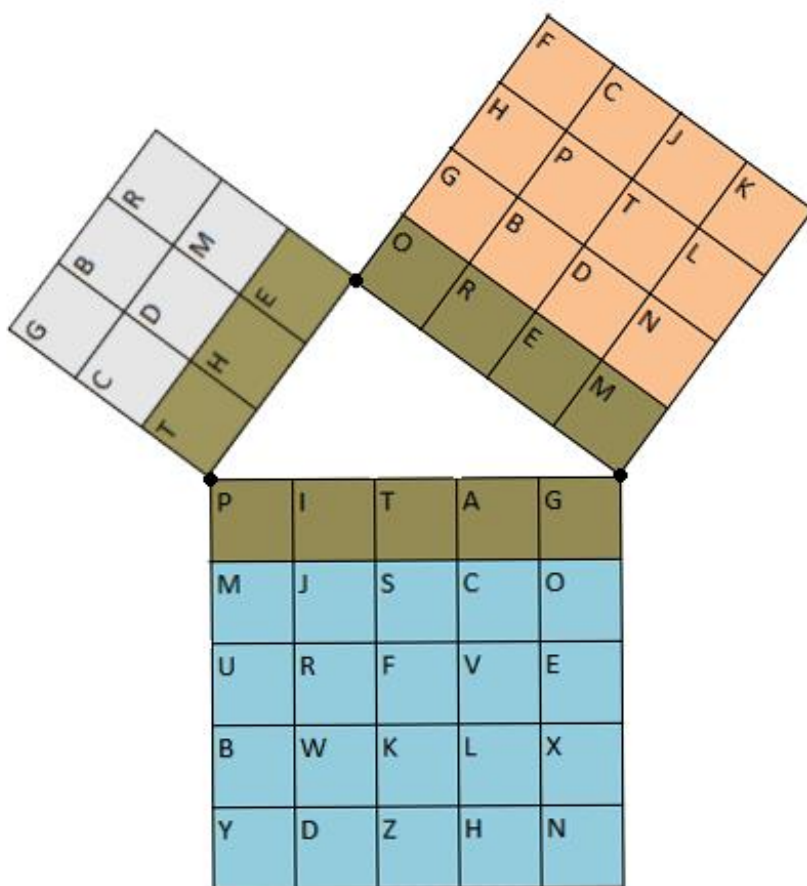
Un pătrat magic are aceeași sumă pe fiecare linie, coloană sau diagonală. Fiecărei litere din pătrate îi corespunde un număr conform descrierii ce urmează.

Trei numere naturale, ce verifică teorema lui Pitagora, determină o tripletă pitagoreică.

Toate răspunsurile se află în triunghiul dintre pătrate!

Fiecărei litere din pătrate îi corespunde un număr natural conform descrierii ce urmează.

Unele numere au mai multe descrieri.



A Produsul maxim a două laturi

B Numărul punctelor determinate de intersecția laturilor, înălțimilor, medianelor
Produsul dintre raza cercului circumscris și una dintre catete

C Ipoteenuza+una dintre catete

- Numărul unghiurilor ascuțite ce apar datorită triunghiului median
- D** Aria triunghiului; Perimetrul triunghiului median
- Numărul triunghiurilor echivalente determinate de punctul G și laturi
- E** Ipotezuza + cealaltă catetă
- Pătratul uneia dintre catete
- F** Numărul total al laturilor, înălțimilor, medianelor, bisectoarelor și mediatoarelor distincte
- G** Numărul triunghiurilor determinate de laturi și înălțimi; Cea mai mică latură
- H** Numărul laturilor reprezentate prin numere prime
- Numărul unghiurilor ascuțite
- Raza cercului exînscriș corespunzător celei mai mici catete
- I** Perimetrul triunghiurilor determinate de liniile mijlocii
- Suma catetelor primelor două triunghiuri pitagoreice ce nu sunt asemenea
- J** Minimul produsului a două laturi
- Perimetrul triunghiului
- K** Numărul perechilor de unghiuri complementare
- Numărul unghiurilor drepte; Raza cercului înscriș
- L** Suma catetelor primului triunghi pitagoreic ce are aria și perimetrul reprezentate prin același număr
- M** Media aritmetică a minimului și maximului laturilor
- Numărul punctelor de intersecție al laturilor, înălțimilor
- N** Produsul a două laturi
- Numărul triunghiurilor determinate de mediane cu laturile
- O** Pătratul celeilalte catete
- Aria pătratului ce are ca latură una dintre catete
- P** Numărul poligoanelor din figura geometrică determinată de triunghi și triunghiul median
- R** Diametrul cercului circumscris
- Cea mai mare latură
- S** Suma pătratelor catetelor; Pătratul ipotenuzei
- Aria pătratului ce are ca latură ipotenuza
- T** Numărul punctelor de intersecție determinate de laturi, mediane
- Suma catetelor celui mai mic triunghi pitagoreic
- U** Numărul punctelor determinate de intersecția laturilor, medianelor, bisectoarelor
- Suma catetelor celui de al treilea triunghi pitagoreic (ca arie)
- V** Suma catetelor celor mai mici două (ca suprafață) triunghiuri pitagoreice
- W** Lungimea totală a liniilor din figura determinată de triunghi și triunghiul său median
- X** Numărul punctelor de intersecție determinate de laturi, înălțimi, bisectoare, mediane
- Y** Suma razelor cercurilor exînscrișe și a laturilor corespunzătoare
- Z** Suma diametrelor următoarelor trei cercuri: înscriș, circumscris și exînscriș corespunzător ipotenuzei.

6. ASUPRA UNOR IDENTITĂȚI ÎN TRIUNGHI

Prof. Cantemir Iliescu¹

Considerăm triunghiul ABC și notăm: a, b, c - lungimile laturilor, $p = \frac{a+b+c}{2}$ - semiperimetrul, S - aria, $R = \frac{abc}{4S}$ - raza cercului circumscris, $r = \frac{S}{p}$ - raza cercului înscris, $r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{(p-b)(p-c)}{r}$ și analogele - razele cercurilor exînscrie, $S_A = 2S \cdot \operatorname{ctg} A$, $S_B = 2S \cdot \operatorname{ctg} B$, $S_C = 2S \cdot \operatorname{ctg} C$.

Presupunem cunoscute următoarele relații valabile în orice triunghi:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (teorema sinusurilor).}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ și analogele (teorema cosinusului).}$$

$$\sum \cos A = \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{R+r}{R}.$$

$$\sum \cos^2 A = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\sum \sin^2 A = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\sum ab = ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$$\sum r_a = r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

$$\sum r_a r_b = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$$

$$r_a r_b r_c = rp^2$$

În continuare, ne propunem să demonstrăm o serie de identități valabile în orice triunghi:

¹ Profesor, Școala Gimnazială „Matei Basarab”, Pitești.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sum \text{ctgActg}B &= \text{ctgActg}B + \text{ctgBctg}C + \text{ctgCctg}A = \text{ctg}B \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) + \frac{\cos C}{\sin C} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = \\
 &= \frac{1}{\sin A \sin C} \left[\frac{\cos B}{\sin B} \cdot \sin(A+C) + \cos C \cos A \right] = \frac{1}{\sin A \sin C} [\cos B + \cos C \cos A] = \\
 &= \frac{1}{\sin A \sin C} [-\cos(A+C) + \cos C \cos A] = \\
 &= \frac{1}{\sin A \sin C} [-\cos A \cos C + \sin A \sin C + \cos C \cos A] = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sum \frac{\cos C}{\sin A \sin B} &= \sum \frac{-\cos(A+B)}{\sin A \sin B} = \sum \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \sum (1 - \text{ctgActg}B) = \\
 &= 3 - \sum \text{ctgActg}B = 3 - 1 = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \sum \frac{(\cos^2 A + \cos^2 B) \cos C}{\sin A \sin B} &= \sum \frac{-\cos(A+B)}{\sin A \sin B} (\cos^2 A + \cos^2 B) = \\
 &= \sum \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\sin A \sin B} (\cos^2 A + \cos^2 B) = \\
 &= \sum (1 - \text{ctgActg}B) [(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - \cos^2 C] = \\
 &= \sum (1 - \text{ctgActg}B) [(1 - 2 \cos A \cos B \cos C) - \cos^2 C] = \\
 &= (1 - 2 \cos A \cos B \cos C) \sum (1 - \text{ctgActg}C) - \sum \cos^2 C + \sum \text{ctgActg}B \cos^2 C = \\
 &= 2(1 - 2 \cos A \cos B \cos C) - (1 - 2 \cos A \cos B \cos C) + \cos A \cos B \cos C \sum \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = \\
 &= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad S_A &= 2S \text{ctg}A = 2S \frac{\cos A}{\sin A} = 2S \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\frac{a}{2R} \cdot 2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc \cos A \quad \text{și} \quad \text{analoagele.} \\
 S_A &= p(p-a) - (p-b)(p-c) = \frac{S \cdot p}{r_a} - \frac{S^2}{r_b r_c} = \frac{S(pr_b r_c - Sr_a)}{r_a r_b r_c} = r_b r_c - r r_a
 \end{aligned}$$

$$5. \quad S_B + S_C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = a^2 \text{ și analoagele.}$$

$$6. \quad \sum S_A S_B = 4S^2 \cdot \sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 4S^2.$$

$$7. \quad \sum a^2 S_A = \sum (S_B + S_C) S_A = 2 \cdot \sum S_A S_B = 8S^2.$$

$$8. \quad \sum a S_A = 2S \cdot \sum 2R \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = 4RS \cdot \sum \cos A = 4RS \cdot \frac{R+r}{R} = 4S(R+r).$$

$$9. \quad \sum S_A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 4R^2 \frac{\sum \sin^2 A}{2} = 4R^2 \frac{2(1 + \cos A \cos B \cos C)}{2} = 4R^2 (1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\sum S_A = \frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{2} = \frac{4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr)}{2} = p^2 - r^2 - 4Rr$$

de unde se poate deduce:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \text{ și } \cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr - 4R^2}{4R^2}.$$

$$10. \quad \sum a^2 S_A \cos^2 A = \sum (S_B + S_C) S_A \cos^2 A = \sum S_A S_B (\cos^2 A + \cos^2 B) =$$

$$= \sum S_A S_B [(1 - 2 \cos A \cos B \cos C) - \cos^2 C] =$$

$$= (1 - 2 \cos A \cos B \cos C) \cdot \sum S_A S_B - \sum S_A S_B \cos^2 C =$$

$$= 4S^2 (1 - 2 \cos A \cos B \cos C) - 4S^2 \cos A \cos B \cos C \cdot \sum \frac{\cos C}{\sin A \sin B} =$$

$$= 4S^2 (1 - 4 \cos A \cos B \cos C).$$

$$11. \quad \sum a^2 S_A \cos A = \sum (S_B + S_C) S_A \cos A = \sum S_A S_B (\cos A + \cos B) =$$

$$= \sum S_A S_B \left(\frac{R+r}{R} - \cos C \right) = \frac{R+r}{R} \cdot \sum S_A S_B - \sum S_A S_B \cos C =$$

$$= 4S^2 \frac{R+r}{R} - 4S^2 \cos A \cos B \cos C \cdot \sum \frac{1}{\sin A \sin B} =$$

$$= 4S^2 \left(\frac{R+r}{R} - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \cdot \sum \frac{1}{ab} \right) = 4S^2 \left(\frac{R+r}{R} - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \cdot \frac{a+b+c}{abc} \right) =$$

$$= 4S^2 \left(\frac{R+r}{R} - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \cdot \frac{2p}{4RS} \right) = 4S^2 \left(\frac{R+r}{R} - \frac{2R \cos A \cos B \cos C}{r} \right).$$

$$12. \sum a^2 S_A \cos^2 B \cos^2 C = \sum (S_B + S_C) S_A \cos^2 B \cos^2 C = \sum S_A S_B (\cos^2 A + \cos^2 B) \cos^2 C =$$

$$= 4S^2 \cos A \cos B \cos C \cdot \sum \frac{(\cos^2 A + \cos^2 B) \cos C}{\sin A \sin C} = 4S^2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$13. \sum a^2 S_A \cos B \cos C = \sum a^2 \cdot 2S \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cos B \cos C = 4RS \cos A \cos B \cos C \cdot \sum a =$$

$$= 8pRS \cos A \cos B \cos C = \frac{8RS^2}{r} \cos A \cos B \cos C.$$

$$14. \sum a S_A \cos A = \sum a \cdot 2S \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cos A = 4RS \cdot \sum \cos^2 A = 4RS(1 - 2 \cos A \cos B \cos C).$$

$$15. \sum a S_A \cos B \cos C = \sum a \cdot 2S \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cos B \cos C = 12RS \cos A \cos B \cos C.$$

$$16. \sum a^2 S_A \cos^2 (B-C) = \sum a^2 S_A (\cos B \cos C + \sin B \sin C)^2 =$$

$$= \sum a^2 S_A \cos^2 B \cos^2 C + 2 \cdot \sum a^2 S_A \cos B \cos C \sin B \sin C + \sum a^2 S_A \sin^2 B \sin^2 C =$$

$$= 4S^2 \cos A \cos B \cos C + 2 \cdot \sum a^2 2S \frac{\cos A}{\sin A} \cos B \cos C \frac{b}{2R} \frac{c}{2R} + \sum a^2 S_A \frac{b^2}{4R^2} \frac{c^2}{4R^2} =$$

$$= 4S^2 \cos A \cos B \cos C + 24RS \frac{abc}{4R^2} \cos A \cos B \cos C + \frac{a^2 b^2 c^2}{16R^4} \cdot \sum S_A =$$

$$= 4S^2 \cos A \cos B \cos C + 24S^2 \cos A \cos B \cos C + 4S^2 (1 + \cos A \cos B \cos C) =$$

$$= 4S^2 (1 + 8 \cos A \cos B \cos C).$$

$$17. \sum a^2 S_A \cos (B-C) = \sum a^2 S_A (\cos B \cos C + \sin B \sin C) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum a^2 S_A \cos B \cos C + \sum a^2 S_A \sin B \sin C = \frac{8RS^2}{r} \cos A \cos B \cos C + \frac{abc}{4R^2} \sum a S_A = \\
&= \frac{8RS^2}{r} \cos A \cos B \cos C + \frac{4S^2(R+r)}{R} = 4S^2 \left(\frac{R+r}{R} + \frac{2R \cos A \cos B \cos C}{r} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18. \quad \sum a^3 S_A &= 4RS \cdot \sum a^2 \cos A = 4RS \cdot \sum (S_B + S_C) \cos A = \\
&= 4RS \cdot \sum S_A (\cos B + \cos C) = 4RS \cdot \sum S_A \left(\frac{R+r}{R} - \cos A \right) = \\
&= 4RS \cdot \left(\frac{R+r}{R} \sum S_A - \sum S_A \cos A \right) = 4S(R+r)(p^2 - r^2 - 4Rr) - 4RS \sum bc \cos^2 A = \\
&= 4S(R+r)(p^2 - r^2 - 4Rr) - 4RS \left(\sum bc - \sum bc \sin^2 A \right) = \\
&= 4S(R+r)(p^2 - r^2 - 4Rr) - 4RS \left(\sum bc - \frac{abc p}{2R^2} \right) = \\
&= 4S \left[(R+r)(p^2 - r^2 - 4Rr) - R(p^2 + r^2 + 4Rr) + 2rp^2 \right] = \\
&= 4rS(3p^2 - 8R^2 - 6Rr - r^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
19. \quad \sum a^3 S_A \cos A &= 4RS \cdot \sum a^2 \cos^2 A = 4RS \cdot \sum (S_B + S_C) \cos^2 A = \\
&= 4RS \cdot \sum S_A (\cos^2 B + \cos^2 C) = 4RS \cdot \sum S_A (1 - 2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 A) = \\
&= 4RS \cdot \sum S_A (\sin^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C) = 4RS \left[\sum S_A \sin^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C \sum S_A \right] = \\
&= 4RS \left[\frac{1}{4R^2} \sum a^2 S_A - 2 \cos A \cos B \cos C \sum S_A \right] = \frac{2S}{R} \left[4S^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C (p^2 - r^2 - 4Rr) \right] = \\
&= \frac{2S}{R} \left[4S^2 - (p^2 - r^2 - 4Rr - 4R^2)(p^2 - r^2 - 4Rr) \right]
\end{aligned}$$

$$20. \quad \sum a^3 S_A \cos B \cos C = 4RS \cos A \cos B \cos C \cdot \sum a = 8RS p \cos A \cos B \cos C$$

$$21. \quad \sum a^4 S_A = 4R^2 \cdot \sum a^2 S_A \sin^2 A = 4R^2 \cdot \sum a^2 S_A (1 - \cos^2 A) =$$

$$\begin{aligned}
&= 4R^2 \left(\sum a^2 S_A - \sum a^2 S_A \cos^2 A \right) = 4R^2 \left[8S^2 - 4S^2 (1 - 4 \cos A \cos B \cos C) \right] = \\
&= 16R^2 S^2 (1 + 4 \cos A \cos B \cos C) = 8S^2 (a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2) = 16S^2 (p^2 - r^2 - 4Rr - 3R^2).
\end{aligned}$$

$$22. \sum r_a^2 = \left(\sum r_a \right)^2 - 2 \sum r_a r_b = (4R + r)^2 - 2p^2$$

23. Construim ecuația de gradul al treilea cu soluțiile r_a, r_b, r_c :

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - rp^2 = 0$$

și înlocuind obținem

$$\left(\sum r_a \right)^3 - (4R + r) \left(\sum r_a \right)^2 + p^2 \sum r_a - 3rp^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum r_a \right)^3 &= (4R + r) \left(\sum r_a \right)^2 - p^2 \sum r_a + 3rp^2 = \\
&= (4R + r)^3 - 2p^2 (4R + r) - p^2 (4R + r) + 3rp^2 = (4R + r)^3 - 12Rp^2.
\end{aligned}$$

$$24. \sum \frac{1}{r_a} = \frac{\sum r_b r_c}{r_a r_b r_c} = \frac{p^2}{rp^2} = \frac{1}{r}$$

$$25. \sum \frac{1}{r_a^2} = \left(\sum \frac{1}{r_a} \right)^2 - 2 \frac{\sum r_a}{r_a r_b r_c} = \frac{1}{r^2} - \frac{8R + 2r}{rp^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{S^2}$$

26. Cu ecuația de la exemplul 23 obținem:

$$3 - (4R + r) \sum \frac{1}{r_a} + p^2 \sum \frac{1}{r_a^2} - rp^2 \sum \frac{1}{r_a^3} = 0.$$

$$\sum \frac{1}{r_a^3} = \frac{1}{r} \sum \frac{1}{r_a^2} - \frac{4R + r}{rp^2} \sum \frac{1}{r_a} + \frac{3}{rp^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{S^2} - \frac{4R + r}{rp^2} + \frac{3}{p^2} \right) = \frac{p^2 - 12Rr}{rS^2}$$

$$27. \sum S_A r_a = \sum (r_b r_c - r r_a) r_a = 3r_a r_b r_c - r \sum r_a^2 = 3rp^2 - r \left[(4R + r)^2 - 2p^2 \right] = r \left[5p^2 - (4R + r)^2 \right]$$

$$28. \sum S_A r_a^2 = \sum (r_b r_c - r r_a) r_a^2 = r_a r_b r_c \sum r_a - r \sum r_a^3 = rp^2 (4R + r) - r \left[(4R + r)^3 - 12Rp^2 \right] =$$

$$= r \left[p^2 (16R + r) - (4R + r)^3 \right].$$

$$29. \sum \frac{S_A}{r_a} = \sum \frac{r_b r_c - r r_a}{r_a} = \sum \frac{r_b r_c}{r_a} - 3r = r_a r_b r_c \sum \frac{1}{r_a^2} - 3r = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r} - 3r = \frac{p^2 - 5r^2 - 8Rr}{r}$$

$$30. \sum \frac{S_A}{r_a^2} = \sum \frac{r_b r_c - r r_a}{r_a^2} = \sum \frac{r_b r_c}{r_a^2} - r \sum \frac{1}{r_a} = r_a r_b r_c \sum \frac{1}{r_a^3} - 1 = \frac{p^2 - 12Rr}{r^2} - 1 = \frac{p^2 - r^2 - 12Rr}{r^2}$$

$$31. \sum a^2 r_a = \sum (S_B + S_C) r_a = \sum S_A (r_b + r_c) = \sum S_A (4R + r - r_a) = (4R + r) \sum S_A - \sum S_A r_a = \\ = (4R + r) (2p^2 - 2r^2 - 8Rr) - r \left[5p^2 - (4R + r)^2 \right] = p^2 (8R - 3r) - r (4R + r)^2.$$

$$32. \sum a S_A r_a \cos A = 4RS \sum r_a \cos^2 A = 4RS \left(\sum r_a - \sum r_a \sin^2 A \right) = 4RS \left(4R + r - \frac{1}{4R^2} \sum a^2 r_a \right) = \\ = 4RS \left(4R + r - \frac{p^2 (8R - 3r) - r (4R + r)^2}{4R^2} \right) = \frac{S}{R} \left[(4R + r) (2R + r)^2 - p^2 (8R - 3r) \right].$$

$$33. \sum a S_A r_a \cos B \cos C = 4RS \cos A \cos B \cos C \sum r_a = 4RS (4R + r) \cos A \cos B \cos C$$

$$34. \sum a^2 \frac{1}{r_a} = \sum (S_B + S_C) \frac{1}{r_a} = \sum S_A \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = \sum S_A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right) = \frac{1}{r} \sum S_A - \sum S_A \frac{1}{r_a} = \\ = \frac{1}{r} (2p^2 - 2r^2 - 8Rr) - \frac{p^2 - 5r^2 - 8Rr}{r} = \frac{p^2 + 3r^2}{r}$$

$$35. \sum \frac{a S_A \cos A}{r_a} = 4RS \sum \frac{\cos^2 A}{r_a} = 4RS \left(\sum \frac{1}{r_a} - \sum \frac{\sin^2 A}{r_a} \right) = 4RS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4R^2} \sum \frac{a^2}{r_a} \right) = \\ = 4RS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4R^2} \cdot \frac{p^2 + 3r^2}{r} \right) = \frac{p (4R^2 - p^2 - 3r^2)}{R}.$$

$$36. \sum \frac{a S_A \cos B \cos C}{r_a} = 4RS \cos A \cos B \cos C \sum \frac{1}{r_a} = 4Rp \cos A \cos B \cos C$$

$$37. \sum a^2 r_a^2 = \sum (S_B + S_C) r_a^2 = \sum S_A (r_b^2 + r_c^2) = \sum S_A \left[(4R + r)^2 - 2p^2 - r_a^2 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(4R+r)^2 - 2p^2 \right] \sum S_A - \sum S_A r_a^2 = \left[(4R+r)^2 - 2p^2 \right] (p^2 - r^2 - 4Rr) - r \left[p^2 (16R+r) - (4R+r)^3 \right] = \\
&= p^2 \left[(4R+r)^2 - r(16R+r) \right] - r(4R+r)^3 - 2p^4 + 2p^2 r(4R+r) + r(4R+r)^3 = \\
&= p^2 (16R^2 - 8Rr) - 2p^4 + p^2 (8Rr + 2r^2) = 2p^2 (8R^2 + r^2 - p^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
38. \sum a^2 S_A r_a &= \sum a^2 (r_b r_c - r r_a) r_a = r_a r_b r_c \sum a^2 - r \sum a^2 r_a^2 = \\
&= r p^2 (2p^2 - 2r^2 - 8Rr) - 2r p^2 (8R^2 + r^2 - p^2) = 4r p^2 (p^2 - r^2 - 4R^2 - 4Rr).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
39. \sum a S_A r_a &= \frac{1}{r} \sum a S_A (p-b)(p-c) = \frac{p^2}{r} \sum a S_A - \frac{p}{r} \sum (ab+ac) S_A + \frac{4RS}{r} \sum S_A = \\
&= \frac{p^2}{r} 4rp(R+r) - \frac{p}{r} \sum bc(S_B + S_C) + \frac{4Rrp}{r} (p^2 - r^2 - 4Rr) = \\
&= 4p^3(R+r) - 8p^3R + 4pR(p^2 - r^2 - 4Rr) = 4rp(p^2 - Rr - 4R^2).
\end{aligned}$$

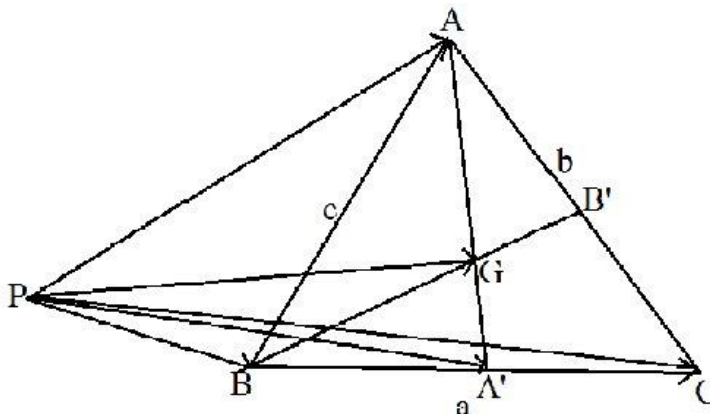
7. COORDONATE BARICENTRICE

- STUDIU DE SPECIALITATE -

Oprea Elena Georgiana- Liceul Tehnologic “Puiești” Vaslui

Definiția 1. [1] $A, B \in d$ fiind două puncte fixate ale unei drepte d , pentru un punct $M \in d$ numerele unic determinate $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\alpha + \beta = 1$ și $\overrightarrow{PM} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB}$, pentru orice punct $P \in d$, se numesc *coordonatele baricentrice absolute* (sau ponderile) punctului M în raport cu reperul afin $R_a = (A, B)$.

Propoziția 1. [1] Fie ABC un triunghi cu laturile a, b, c și P un punct din planul triunghiului, atunci coordonatele baricentrice absolute ale centrului de greutate sunt $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



Demonstrație. Căutăm α, β, γ cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$ astfel încât

$$\overrightarrow{PG} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC}.$$

Ținând cont că $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GA'}} = 2$, avem

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{GA'}.$$

Deci

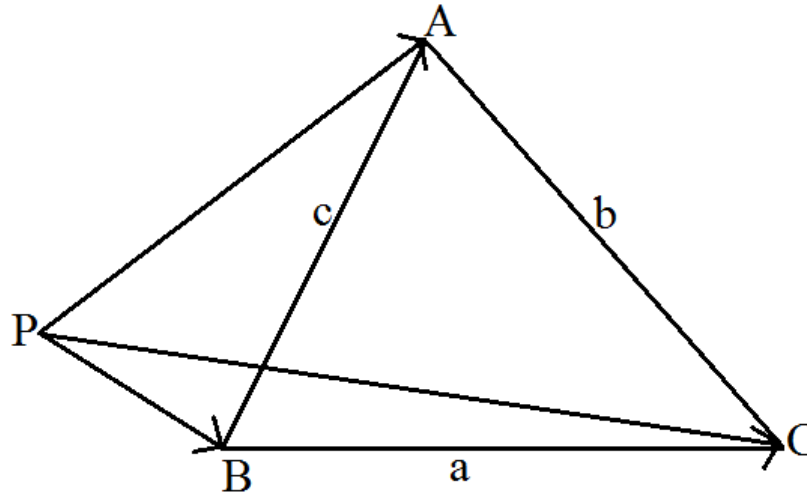
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PA} + 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PA'}) = \overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PG} + 2\frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \Rightarrow 3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}. \end{aligned}$$

Astfel

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}.$$

Deci coordonatele baricentrice ale centrului de greutate sunt $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Propoziția 2.[1] Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c și P un punct din planul triunghiului. Atunci coordonatele baricentrice ale vârfurilor triunghiului sunt $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$.



Demonstrație. Pentru a determina coordonatele baricentrice ale punctului A , căutăm scalarii α, β, γ cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$ astfel încât $\overrightarrow{PA} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC}$. Obținem $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ deci $A(1, 0, 0)$.

Pentru a determina coordonatele baricentrice ale punctului B , căutăm scalarii α, β, γ cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$ astfel încât $\overrightarrow{PB} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC}$. Obținem $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ deci $B(0, 1, 0)$.

Pentru a determina coordonatele baricentrice ale punctului C , căutăm scalarii α, β, γ cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$ astfel încât $\overrightarrow{PC} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC}$. Obținem $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$ deci $C(0, 0, 1)$.

Bibliografie

- Chiș, M., Smale, *Coordonate baricentrice*, ([http : ==www.viitori olimpic.ro=uploads= attachdata=681725==coordinate baricentrice:pdf](http://www.viitori.ro/uploads/attachdata/681725/coordinate_baricentrice.pdf)).
- C., Coandă, *Gazeta matematică*, nr. 8, 2005.
- N., Teodorescu, *Culegere de probleme pentru concursurile de matematică*, vol. 5, București, 1977.
- <https://prezi.com/que6exwocfjc/iaccoordonate-baricentrice/>.

8. ÎNVĂȚATREA PRIN DESCOPERIRE LA MATEMATICĂ

Prof. Florea Maria Luminița- Școala Gimnazială „Sf. Andrei” Vaslui

Scopul predării matematicii este de a-i face pe elevi să gândească și mijlocul îl reprezintă rezolvarea problemelor care cer un anumit grad de creați. Relativ la condițiile pedagogice pe care trebuie să le îndeplinească problema se subliniază:

- să aibă sens și să fie adresată în cel mai oportun moment din punctul de vedere al elevului;

- să țină seama de cunoștințele însușite anterior de elevi, să trezească interesul, să fie clar enunțată, să solicite efort din partea elevului.

Problematizarea având o sferă de existență comună cu conversația euristică, întrebările frontale sau individuale utilizate în etapa de pregătire a introducerii unei noțiuni sau chiar în etapa prezentării materialului nou, se adresează gândirii sau raționamentului și determină situații conflictuale numite situații – problemă.

Organizarea acestor situații-problemă trebuie să fie astfel încât întrebările să apară în mintea elevului fără ca acestea să fie formulate de către profesor.

Evenimentele implicate în rezolvarea de probleme sunt:

- prezentarea problemei;
- elevul definește problema, adică distinge caracteristicile esențiale ale situației, își însușește enunțul, găsește legătura între date;
- elevul își formulează ipoteze care pot fi aplicate în vederea găsirii unei soluții;
- realizează verificarea ipotezelor sau a câtorva ipoteze succesive, până găsește una care să-l ducă la soluția căutată.

Dintre toate patrulaterale de perimetru dat, să se afle cel de arie maximă.

Soluție:

De la început, elevul își pune întrebările:

- Care este necunoscuta? Un patrulater.
- Care sunt datele? Perimetrul patrulaterului este dat.
- Care este condiția? Patrulaterul căutat trebuie să aibă aria mai mare.
- Care patrulater are aria cea mai mare ? Este de așteptat ca elevul să fi auzit că, dintre toate figurile cu același perimetru, pătratul are aria cea mai mare. Așadar, ipoteza de lucru construită este pătratul iar elevul va demonstra valoarea ei de adevăr.

Pentru ușurarea demersului de rezolvare se poate recurge la rezolvarea unei probleme asemănătoare. Este posibil ca elevului să-i vină ideea că, dacă pătratul are o situație privilegiată în cadrul patrulaterelor, el trebuie, în virtutea aceluiași fapt, să aibă o situație privilegiată și printre cercuri.

Elevul nu a rezolvat încă problema inițială, dar a făcut anumite progrese considerând în mod corect respectiva situație.

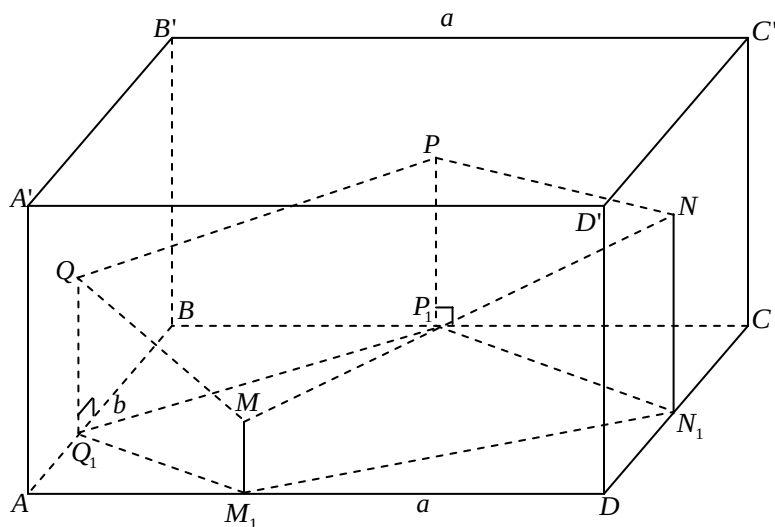
Prin aplicarea în predare a problematizării, rezultatul final este întotdeauna descoperirea soluției problemei puse. Ea solicită elevul să gândească, îi pune la încercare voința, îi dezvoltă imaginația și-i îmbogățește experiența rezolvării de diverse probleme.

9. REZOLVARE PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2016

WWW.MATEINFO.RO

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AD = a$; $AB = b$; $AA' = c$; $AC' = d$. Se iau punctele distincte M, N, P, Q care aparțin fețelor $(ADD' A')$, $(DD' C' C)$, $(BB' C' C)$ respectiv $(AA' B' B)$. Să se demonstreze că: $\frac{P_{ABCD}}{2} < P < 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$, unde $P = MN + NP + PQ + QM$

Prof. Manea Cosmin si Petrica Dragos, Pitesti



Demonstrație autor:

$$P_{ABCD} = 2a + 2b \Rightarrow \frac{P_{ABCD}}{2} = a + b$$

$$P = MN + PN + PQ + QM$$

Fie M_1, N_1, P_1, Q_1 , - proiecțiile punctelor M, N, P respectiv Q pe planul $(ABCD)$.

Deoarece $PP_1 \perp (ABCD)$, $NN_1 \perp (ABCD)$, $MM_1 \perp (ABCD)$, $QQ_1 \perp (ABCD)$, avem că segmentele $[MM_1]$, $[NN_1]$, $[PP_1]$, $[QQ_1]$ sunt coplanare două câte două.

$$\text{Avem: } MQ + PQ > MP \geq M_1P_1$$

Pe de altă parte $M_1P_1 \geq DC = b$ (se arată ușor).

În concluzie, din ultimele două relații

$$\Rightarrow MQ + PQ > M_1P_1 \geq b \Rightarrow MQ + PQ > b.$$

Analog, se arată:
$$\begin{cases} PQ + PN > a \\ PN + MN > b \\ MN + QM > a \end{cases}$$
 . Însușind cele patru relații, membru cu membru

$$\Rightarrow 2(MN + PN + PQ + MQ) > 2a + 2b \Leftrightarrow P > \frac{P_{ABCD}}{2}.$$

Arătăm în continuare că: $MN + PN + PQ + QM < 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$, cu $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Avem:

$$(MN + PN + PQ + QM)^2 = [(MN + PN) + (PQ + QM)]^2 \leq 2[(MN + PN)^2 + (PQ + QM)^2] \leq 2 \cdot [2 \cdot (MN^2 + PN^2) + 2 \cdot (PQ^2 + QM^2)] =$$

$$4 \cdot (MN^2 + PN^2 + PQ^2 + MQ^2) \Rightarrow P^2 \leq 4 \cdot (MN^2 + PN^2 + PQ^2 + MQ^2); (\alpha)$$

În cele ce urmează, vom arăta că $4 \cdot (MN^2 + PN^2 + PQ^2 + MQ^2) < 8 \cdot (a^2 + b^2 + 2c^2)$, de unde va rezulta imediat concluzia.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (MN^2 + PN^2 + PQ^2 + MQ^2) &= 4 \cdot [(NN_1 - MM_1)^2 + M_1N_1^2 + (PP_1 - NN_1)^2 + \\ &+ P_1N_1^2 + (PP_1 - QQ_1)^2 + P_1Q_1^2 + (QQ_1 - MM_1)^2 + Q_1M_1^2] = 4 \cdot [(NN_1 - MM_1)^2 + \\ &+ (PP_1 - NN_1)^2 + (PP_1 - QQ_1)^2 + (QQ_1 - MM_1)^2] + 4(M_1D^2 + DN_1^2 + P_1C^2 + \end{aligned}$$

$$+ N_1 C^2 + BQ_1^2 BP_1^2 + + AQ_1^2 + AM_1^2); \text{ Notăm } AM_1 = x; DN_1 = y; P_1 C = z;$$

$$BQ_1 = t; x, y, z, t \in IR.$$

În continuare, suma va fi:

$$4 \cdot [(NN_1 - MM_1)^2 + (PP_1 - NN_1)^2 + (PP_1 - QQ_1)^2 + (QQ_1 - MM_1)^2] +$$

$$+ 4 \cdot [(a-x)^2 + y^2 + z^2 + (b-y)^2 + t^2 + (a-z)^2 + (b-t)^2 + x^2]$$

$$\text{Fie } S_1 = 4 \cdot [(NN_1 - MM_1)^2 + (PP_1 - NN_1)^2 + (PP_1 - QQ_1)^2 + (QQ_1 - MM_1)^2] \text{ și}$$

$$S_2 = 4 \cdot [x^2 + (a-x)^2 + y^2 + (b-y)^2 + z^2 + (a-z)^2 + t^2 + (b-t)^2]$$

Avem inegalitățile consecutive :

$$NN_1 \leq c \Rightarrow NN_1 - MM_1 < c$$

$$MM_1 \leq c \Rightarrow MM_1 - NN_1 < c \Rightarrow -c < NN_1 - MM_1 < c \Leftrightarrow |NN_1 - MM_1| < c \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(NN_1 - MM_1)^2} < c \Leftrightarrow (NN_1 - MM_1)^2 < c^2$$

Analog, se demonstrează și relațiile omoloage, de unde prin însumarea lor, vom avea:

$$4[(NN_1 - MM_1)^2 + (PP_1 - NN_1)^2 + (PP_1 - QQ_1)^2 + (QQ_1 - MM_1)^2] <$$

$$< 4 \cdot 4c^2 = 16c^2 \Leftrightarrow S_1 < 16c^2; (i)$$

De asemenea, avem:

$$AM_1 < AD \Leftrightarrow x < a \Leftrightarrow 2x^2 < 2ax \Leftrightarrow x^2 + a^2 - 2ax + x^2 < a^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (a-x)^2 < a^2;$$

$$DN_1 < DC \Leftrightarrow y < b \Leftrightarrow 2y^2 < 2by \Leftrightarrow b^2 - 2by + y^2 + y^2 < b^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + (b-y)^2 < b^2;$$

Analog, se demonstrează că: $z^2 + (a-z)^2 < a^2$ și $t^2 + (b-t)^2 < b^2$

$$\text{Prin însumare: } 4[x^2 + (a-x)^2 + y^2 + (b-y)^2 + z^2 + (a-z)^2 + t^2 + (b-t)^2] <$$

$$< 4(a^2 + b^2 + a^2 + b^2) \Rightarrow S_2 < 8(a^2 + b^2); (ii)$$

Din (i) și (ii) $\Rightarrow S_1 + S_2 < 8(a^2 + b^2 + c^2 + c^2) \Leftrightarrow S_1 + S_2 < 8(c^2 + d^2) \Leftrightarrow$

$$4(MN^2 + PN^2 + PQ^2 + MQ^2) < 8(c^2 + d^2) \quad (\beta)$$

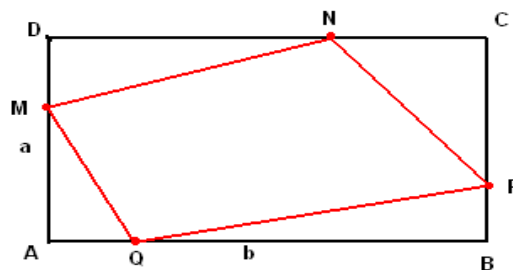
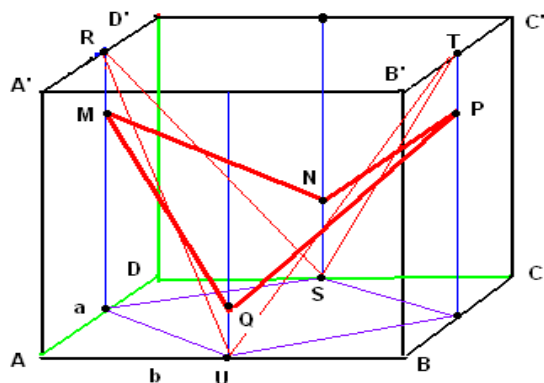
Din (α) și $(\beta) \Rightarrow P^2 < 8(c^2 + d^2) \Leftrightarrow P < 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$.

Reunind concluziile găsite, rezultă: $\frac{P_{ABCD}}{2} < P < 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$.

Observație: În cazul în care $ABCD A' B' C' D'$ -este cub $\Leftrightarrow a = b = c$, relația găsită mai sus, devine:
 $2a < P < 4a\sqrt{2}$.

Alte soluții:

1) PROF. ANGHEL VALENTIN



$P = MN + NP + PQ + QM$, are valoare minimă dacă punctele : M, N, P, Q , sunt coplanare situate într-un plan paralel cu planul bazei. În acest caz sunt evidente inegalitățile :
 $AM < MQ, MD < MN, DN < MN, NC < NP, CP < NP, PB < PQ, BQ < PQ, AQ < MQ$

Prin adunarea acestor inegalități se obține $2a + 2b < 2MN + 2NP + 2PQ + 2QM$, de unde rezultă

prima parte a inegalității $\frac{P_{ABCD}}{2} < P$

Pentru a demonstra partea a doua a inegalității se ține seama că perimetrul patrulaterului

$MNPQ$,înscriș în dreptunghiul $ABCD$, este maxim dacă punctele M, N, P, Q , reprezintă mijloacele laturilor dreptunghiului . Atunci suma $P = MN + NP + PQ + QM$ poate fi maximă dacă punctele : M, N, P, Q , sunt situate pe segmentele determinate de mijloacele perechilor de laturi ale paralelipipedului $[AD], [A'D']; [DC], [D'C']; [BC], [B'C']; [AB], [A'B']$

$$\text{Rezultă inegalitățile : } MN \leq RS = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2} \quad , \quad NP \leq ST = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2} \quad ,$$

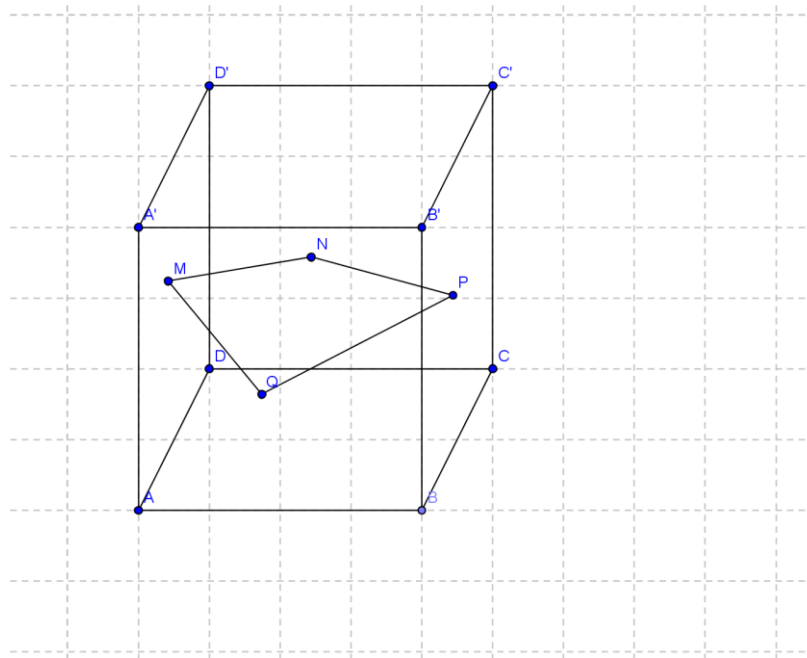
$$PQ \leq TU = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2} \quad \text{și} \quad QM \leq UR = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2}$$

Adunând aceste inegalități rezultă

$$P = MN + NP + PQ + QM \leq 4\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 3c^2} =$$

$$2\sqrt{d^2 + c^2 + 2c^2} < 2\sqrt{d^2 + d^2 + 2c^2} = 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$$

S-a ținut seama că $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ și $c^2 < d^2$



2) PROF. FLORIN PARASCHIV

Daca M, N, P -necoliniare, atunci $MN + NP > MP$

$M \in (A'ADD')$, $P \in (B'BCC')$, iar $(A'ADD')$ si $(B'BCC')$ sunt plane paralele.

Distanța dintre 2 plane paralele este lungimea perpendicularei dintr-un punct al unui plan pe celălalt plan.

Distanța dintre $(A'ADD')$ si $(B'BCC')$ este a .

Deci $MP \leq a \Rightarrow MN + NP > a$

Analog M, Q, P -necoliniare, atunci $MQ + QP > MP \Rightarrow MQ + QP > a$

$$\left. \begin{array}{l} MQ + QP > a \\ MN + NP > a \end{array} \right\} \Rightarrow 2a < MN + NP + MQ + QP$$

Daca M, N, Q -necoliniare, atunci $MN + MQ > QN$

$N \in (D'DCC')$, $Q \in (A'ABB')$, iar $(D'DCC')$ si $(A'ABB')$ sunt plane paralele.

Distanța dintre $(D'DCC')$ si $(A'ABB')$ este b .

Deci $QN \leq b \Rightarrow MN + MQ > b$

Analog N, Q, P -necoliniare, atunci $NP + PQ > QN \Rightarrow NP + PQ > b$

$$\left. \begin{array}{l} MN + MQ > b \\ NP + PQ > b \end{array} \right\} \Rightarrow 2b < MN + NP + MQ + QP$$

$$\frac{P_{ABCD}}{2} = \frac{2a + 2b}{2} < \frac{MN + NP + PQ + MQ + MN + NP + PQ + MQ}{2} = \frac{2(MN + NP + PQ + MQ)}{2} = MN + NP + PQ + MQ = P$$

$$\text{Deci } \frac{P_{ABCD}}{2} < P$$

$$P \leq P_{ACC'A'} = AC + CC' + C'A' + A'A = \sqrt{a^2 + b^2} + c + \sqrt{a^2 + b^2} + c = 2(\sqrt{a^2 + b^2} + c)$$

Vom arata ca $\sqrt{a^2 + b^2} + c < \sqrt{2(d^2 + c^2)}$, unde $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} + c < \sqrt{2(d^2 + c^2)} &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + c < \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 4c^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2c\sqrt{a^2 + b^2} < \\ < 2a^2 + 2b^2 + 4c^2 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 3c^2 > 2c\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 9c^4 + 2a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6b^2c^2 > \\ > 4a^2c^2 + 4b^2c^2 &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 9c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 > 0, \text{ ceea ce este adevarat pentru orice numere } \\ a, b, c > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Deci } P \leq 2(\sqrt{a^2 + b^2} + c) < 2\sqrt{2(d^2 + c^2)}$$

In concluzie $\frac{P_{ABCD}}{2} < P < 2\sqrt{2(d^2 + c^2)}$

3) PROF. STAN ILIE, ROSIORII DE VEDE

Proiectăm MNPQ pe baza ABCD a paralelipipedului ABCDA'B'C'D'.

Obținem M'N'P'Q' și relațiile $MN \geq M'N'$, $NP \geq N'P'$, $PQ \geq P'Q'$, $QM \geq Q'M'$ (α) respectiv

$M'N' > M'D$, $M'N' > N'D$, $N'P' > N'C$, $N'P' > P'C$, $P'Q' > P'B$, $P'Q' > Q'B$, $Q'M' > Q'A$, $Q'M' > M'A$ (β)

După însumarea relațiilor (α) găsim $P_{M'N'P'Q'} \leq P_{MNPQ}$ iar pentru cele din (β) $\Rightarrow$

$2(M'N' + N'P' + P'Q' + Q'M') > AB + BC + CD + DA$ adică $2P_{M'N'P'Q'} > P_{ABCD}$ sau $\frac{1}{2}P_{ABCD} < P_{M'N'P'Q'}$

Așadar $\frac{1}{2}P_{ABCD} < P_{MNPQ}$

Fie $D_1 \in D'D$ aî $MD_1 + D_1N$ să fie minim. Avem desigur $MN < MD_1 + D_1N$

Din desfășurarea fețelor laterale ale paralelipipedului se înțelege că M, D_1 și N sunt coliniare. Analog pentru C_1 , B_1 , A_1

Avem $P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + QM < MD_1 + D_1N + NC_1 + C_1P + PB_1 + B_1Q + QA_1 + A_1M < < D'A + AB' + B'C + CD' > (linia roșie) = 2(D'A + AB') = 2(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2})$

Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz $(mx + ny)^2 \leq (m^2 + n^2)(x^2 + y^2)$, cu $m = n = 1$, $x = \sqrt{a^2 + c^2}$, $y = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow 2(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}) \leq 2\sqrt{2(a^2 + b^2 + 2c^2)} = 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$

Avem deci $\frac{1}{2}P_{ABCD} < P_{MNPQ} < 2\sqrt{2(c^2 + d^2)}$

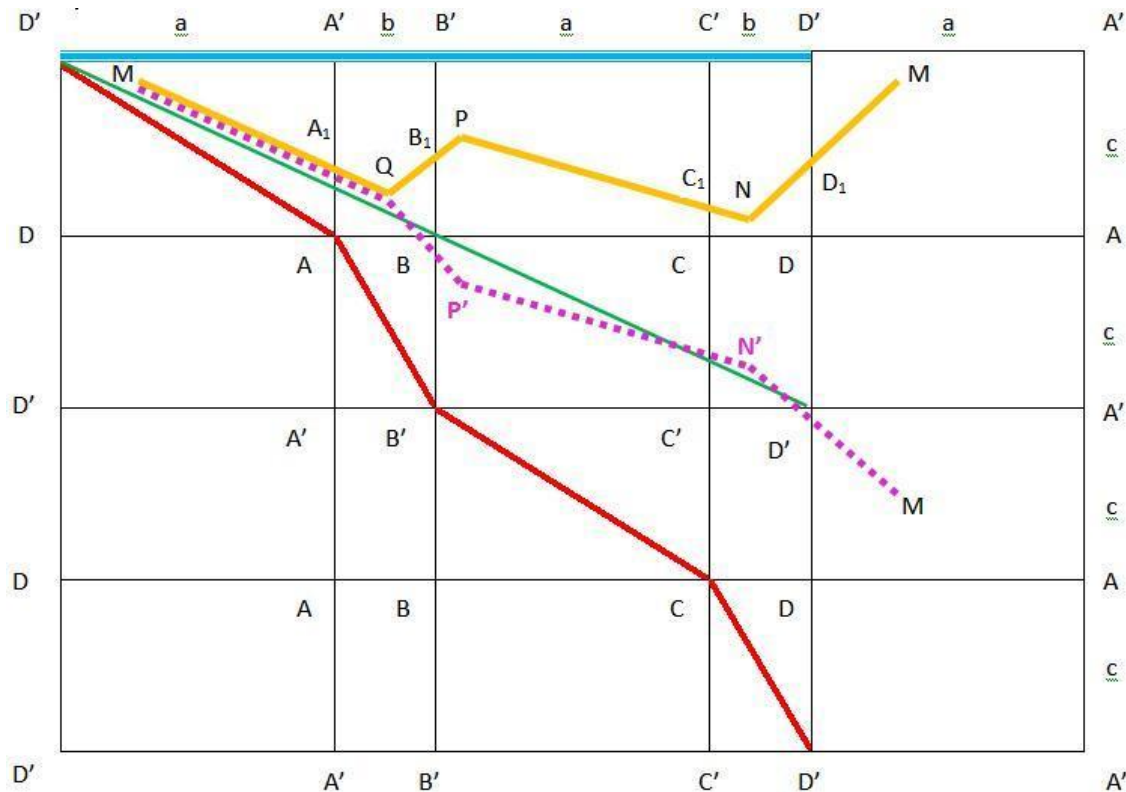
Interpretarea desfășurării din figura ce urmează:

Cu linie albastră groasă este cazul MNPQ coincide cu D'C'B'A'.

Cu linie verde este cazul $M = D'$, $N = D'$, $P = B$, $Q = B$.

Cu linie roșie este cazul $M = D'$, $N = C$, $P = B'$, $Q = A$.

Cu linie portocalie este proiecția de lungime minimă a lui MNPQ pe fețele paralelipipedului.



4) PROF. STAN ANA GABRIELA DOINA, DRĂCȘĂNEI TELEORMAN

$A(0,0,0)$; $B(b,0,0)$; $C(b,a,0)$; $D(0,a,0)$; $A'(0,0,c)$; $B'(b,0,c)$; $C'(b,a,c)$; $D'(0,a,c)$;

$M(0,y_M,z_M)$; $N(x_N,a,z_N)$; $P(b,y_P,z_P)$; $Q(x_Q,0,z_Q)$; $M'(0,y_M,0)$; $N'(x_N,a,0)$; $P'(b,y_P,0)$;
 $Q'(x_Q,0,0)$;

$0 < z_M, z_N, z_P, z_Q < c$, $0 < y_M, y_P < a$, $0 < x_N, x_Q < b$, în ideea că punctele M, N, P, Q nu se găsesc pe laturile paralelipipedului.

Folosim $MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}$ și analoagele pentru NP, PQ, QM .

Prelucrând MN avem

$$MN = \sqrt{x_N^2 + (a - y_M)^2 + (z_M - z_N)^2} < \sqrt{x_N^2} + \sqrt{(a - y_M)^2} + \sqrt{(z_M - z_N)^2} < x_N + a - y_M + c$$

respectiv

$$MN > \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = M'N' > \sqrt{(x_M - x_N)^2} = x_N \text{ respectiv } MN > a - y_M$$

Obținem $\frac{a+xN-yM}{2} < MN < xN + a - yM + c$ și în mod analog $\frac{b-xN+a-yP}{2} < NP < b - xN + a - xP + c$,

$$\frac{b-xQ+xP}{2} < PQ < b - xQ + xP + c, \quad \frac{xQ+yM}{2} < QM < xQ + yM + c$$

Însumând relațiile anterioare obținem: $a+b < MN+NP+PQ+QM < 2a+2b+4c$

$$\frac{2a+2b}{2} < MN+NP+PQ+QM < 4a+4b+4c - 2(a+b) \text{ adică}$$

$$\frac{1}{2}P_{ABCD} < P_{MNPQ} < P_{ABCD A'B'C'D'} - P_{ABCD} \text{ (relatie mai puternică decât cea propusă inițial)}$$

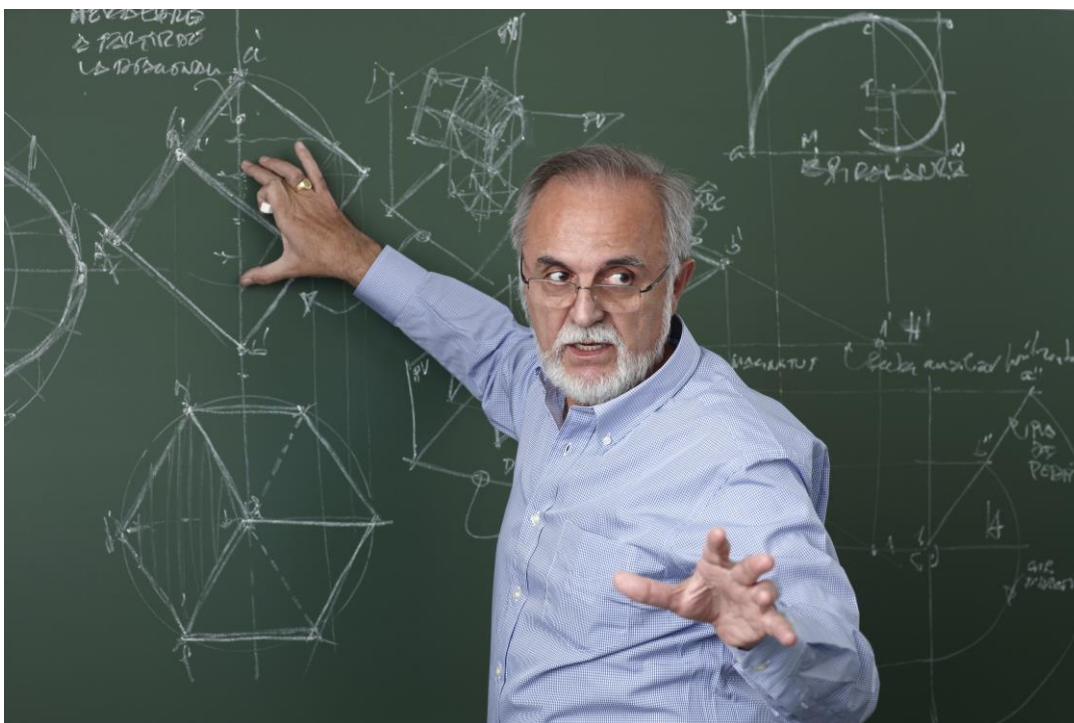
10. PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2016

Conf. dr. Gheorghe PROCOPIUC, Universitatea Tehnică Iași

Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele interioare AA_1 , BB_1 , CC_1 ale triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului în punctele A_2 , B_2 , C_2 .

Să se demonstreze dubla inegalitate

$$3(4r)^n \leq AA_2^n + BB_2^n + CC_2^n \leq 3(2R)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$



11. MODEL PENTRU LUNA NOIEMBRIE 2016

EVALUARE NAȚIONALĂ LA MATEMATICĂ

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

- (5p) 1. Rezultatul calculului $10 - 2 : 2$ este egal cu....
- (5p) 2. Numerele întregi din intervalul $[-6; 7]$ sunt în număr de
- (5p) 3. Patru kilograme de mere costă 10 lei. Trei kilograme de mere de aceeași calitate costă ... lei.
- (5p) 4. Un triunghi echilateral are latura de lungime 6m. Aria triunghiului este egală cu... m^2
- (5p) 5. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$. Dacă $AB = AA' = 3m$, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor prisme este egală cu ... m.
- (5p) 6. Numărul elevilor din clasa a VIII-a a unei școli și notele obținute la teza la matematică sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Nota obținută	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	3	4	7	5	5	2

Numărul elevilor din clasă este egal cu....

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

- (5p) 1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$.
- (5p) 2. Media aritmetică a două numere naturale este 10 și unul dintre numere este cu 8 mai mare decât celălalt. Determinați cele două numere.
- (5p) 3. În vacanță, Mihai a economisit o sumă de bani. După ce a cheltuit două cincimi din această sumă, lui Mihai i-au mai rămas 72 de lei. Calculați suma de bani pe care a economisit-o Mihai în vacanță.
4. Prețul unui telefon mobil a scăzut cu 10% și, după o săptămână, noul preț a scăzut cu 15%. După cele două modificări de preț, telefonul costă 153 lei.
- (5p) a) Arătați că prețul inițial al telefonului a fost de 200 de lei.
- (5p) b) Cu ce procent din prețul inițial s-a micșorat prețul produsului după cele două ieftiniri?
- (5p) 5. Calculați $x^2 + \frac{1}{x^2}$, știind că $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 14$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. **Figura 1** reprezintă schița unei grădini formată dintr-un dreptunghi $ABCD$ care are lungimea $AB=80$ m și lățimea de $BC=40$ m și dintr-un semicerc de diametru $[DC]$. E este mijlocul arcului CD .

(5p) a) Grădina este înconjurată de un gard. Calculați lungimea acestui gard.

(5p) b) Verificați dacă aria grădinii este mai mare decât 5712m^2 ($3,14 < \pi < 3,15$).

(5p) c) O vrăbie zboară din punctul A la punctul C , apoi la punctul E și se întoarce la punctul A . Aflați distanța parcursă de această vrăbie.

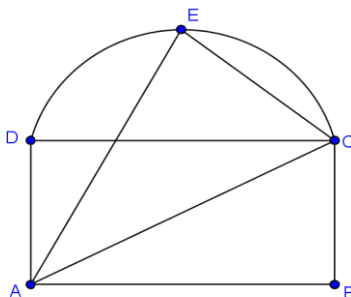


Figura 1

2. În figura 2 avem $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB=12$ cm, $BC = CD = DA = 6$ cm și un punct E astfel încât $EA \perp (ABC)$, $EA=6$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului $[AC]$;

b) Aflați lungimea segmentului $[EC]$;

c) Arătați că $BC \perp (EAC)$.

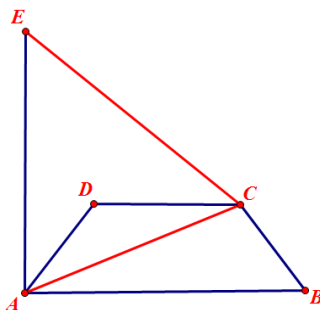


Figura 2

BAREMUL VA APAREA ÎN CEL MAI SCURT TIMP PE <https://www.facebook.com/www.mateinfo.ro/>

12. MODEL PENTRU LUNA NOIEMBRIE 2016

BAC MATEMATICĂ MATE-INFO

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- (5p) 1. Calculați $\sqrt[3]{64} + \log_2 \sqrt{64}$.
- (5p) 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x-1}$. Să se calculeze $f(2) + f(3) + \dots + f(10)$
- (5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2 - 6x} = 3x$.
- (5p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{8, 9, 10, \dots, 40\}$ acesta să fie divizibil cu 4.
- (5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ și $\vec{v} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.
- (5p) 6. Într-un triunghi ABC se cunosc $AB = 12$, $BC = 8$, $AC = 6$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -x+1 \\ 2x-1 & -x+1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$.
- (5p) a) Să se calculeze $A(-1) + A(1)$.
- (5p) b) Notăm matricea $A(-1) \times A(1) = B \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine B^n , $n \geq 1$.
- (5p) c) Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^n A(k)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
- $$x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
- (5p) a) Să se arate că $x * y = (2x-1)(2y-1) + \frac{1}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- (5p) b) Să se verifice dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție asociativă pe $\mathbb{R}$.
- (5p) c) Să se demonstreze că $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-2} (2x-1)^n + \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. . Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{(ax+b)^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine a și b , numere reale, astfel încât dreapta $y = \frac{1}{4}x + 1$ să fie asimptotă la graficul funcției.

(5p) b) Pentru a și b găsiți la a). să se stabilească domeniul maxim de definiție al funcției și apoi să se studieze monotonia funcției.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} \cdot f(x) \right)^{f(x)}$.

2. Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b, & x > 1 \end{cases}$, astfel încât F să fie o primitivă pentru

o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(5p) a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Pentru $a = -1$ și $b = 3$ aflați funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(5p) c) Calculați $\int e^{2x}(x^2 - x + 1)dx$