



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2017 (EN/RO)... pag.2

Marin Chirciu

2. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2017 ... pag. 3

Mănescu Avram Corneliu

Alte soluții date de :

*Gheorghe Alexe, George-Florin Șerban Roxana, Marin Chirciu, Octavian Stroe,
Buzea Gabriela, Mihaela Stanciu, Nela Ciceu, Constantin Telteu, Gheorghe Procopiuc,
Codreanu Ioan Viorel, Alexandru Elena - Marcela*

3. THE NUMBERS of FIBONACCI and LUCAS – IDENTITIES
- PROOFS WITH FEW WORDS... pag.12

Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu

4. O NOUĂ INEGALITATE ALGEBRICĂ ȘI APLICAȚII ALE EI ÎN TRIUNGHI... pag.20

Marin Chirciu

5. APLICAȚII ALE FUNCȚIEI LYAPUNOV LA REZOLVAREA
PROBLEMELOR DIFUZIEI DE CĂLDURĂ

Apostol Georgiana Maria

1. PROBLEMA LUNII NOIEMBRIE 2017



Determinați toate numerele reale pozitive a și b pentru care

$$\frac{ab}{ab+n} + \frac{a^2b}{a^2+nb} + \frac{ab^2}{b^2+na} = \frac{1}{n+1}(a+b+ab), \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prof. Marin Chirciu, Pitesti

Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data **de 2.12.2017** pe adresa de e-mail
revista@mateinfo.ro

2. SOLUȚII PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2017



Se dă un triunghi ABC , numerele reale strict pozitive m, n, p și punctele $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$ astfel încât $\frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p}$, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m}$. Să se arate că dreptele BB' , CC' sunt perpendiculare dacă și numai dacă

$$(m - n + p)AB^2 + (m + n - p)AC^2 = (m + n + p + \frac{2np}{m})BC^2.$$

Prof. Mănescu Avram Corneliu

Soluție autor: Folosim coordonatele complexe. Alegem originea O în centrul cercului

circumscriștriunghiului ABC , considerăm și punctul $A' \in [BC]$ astfel încât $\frac{BA'}{A'C} = \frac{p}{n}$, deci

$O(0)$, $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$, $|z_1 - z_2| = c$, $|z_2 - z_3| = a$, $|z_3 - z_1| = b$ (cu notațiile uzuale). Avem $a^2 = (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = |z_2|^2 + |z_3|^2$

$- (z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2)$, de unde

$$z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 = 2R^2 - a^2 \text{ (și analoagele).}$$

Fie $M_1(u)$, $M_2(v)$; afixul punctului M care împarte segmentul M_1M_2 în raportul k este

$$z = \frac{u + kv}{1 + k}.$$

Rezultă $A\left(\frac{nz_2 + pz_3}{n + p}\right)$, $B\left(\frac{pz_3 + mz_1}{p + m}\right)$, $C\left(\frac{mz_1 + nz_2}{m + n}\right)$. Avem și

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{p}{n} \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{n}{m} = 1,$$

deci, conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente într-un punct G . Să determinăm $g = z(G)$, afixul lui G . Din relația lui Van Aubel avem

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{n}{m} + \frac{p}{m} = \frac{n + p}{m}.$$

Se deduce

$$g = \frac{z_1 + \frac{n+p}{m} \cdot \frac{nz_2 + pz_3}{n+p}}{1 + \frac{n+p}{m}} = \frac{mz_1 + nz_2 + pz_3}{m + n + p}.$$

Dreptele BB' , CC' sunt perpendiculare dacă și numai dacă $GB^2 + GC^2 = BC^2$, egalitate care se transcrie în complex $|g - z_2|^2 + |g - z_3|^2 = a^2$ sau $2|g|^2 - g(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) - \bar{g}(z_2 + z_3) + |z_2|^2 + |z_3|^2 = a^2$ (*). Calculăm

$$|g|^2 = g\bar{g} = \frac{mz_1 + nz_2 + pz_3}{m+n+p} \cdot \frac{m\bar{z}_1 + n\bar{z}_2 + p\bar{z}_3}{m+n+p} = R^2 - \frac{npa^2 + mpb^2 + mnc^2}{(m+n+p)^2},$$

$$g(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) + \bar{g}(z_2 + z_3) = 4R^2 - \frac{m(b^2 + c^2) + (n+p)a^2}{m+n+p}, \quad |z_2|^2 = |z_3|^2 = R^2,$$

valori care se substituie în (*). Se efectuează calculele, se grupează termenii asemenea, se revine la notațiile $a = BC$ și analogele și se obține astfel egalitatea din enunț.

Alte soluții

1. Prof. Gheorghe Alexe, Braila

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BB'} &= \frac{p}{m+p} \overrightarrow{BC} + \frac{m}{m+p} \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{CC'} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{BB'} = \frac{p}{m+p} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{m}{m+p} \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{BB'} &= -\overrightarrow{AB} + \frac{p}{m+p} \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CC'} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos A = AB \cdot AC \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}, \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} &= |\overrightarrow{BB'}| |\overrightarrow{CC'}| = (-\overrightarrow{AB} + \frac{p}{m+p} \overrightarrow{AC}) (\frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}), \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} &= \frac{-n}{m+n} AB^2 + [1 + \frac{pn}{(m+n)(m+p)}] \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{-p}{m+p} AC^2, \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} &= \frac{-n}{m+n} AB^2 + [1 + \frac{pn}{(m+n)(m+p)}] \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + \frac{-p}{m+p} AC^2, \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} &= [\frac{-n}{m+n} + \frac{1}{2} (1 + \frac{pn}{(m+n)(m+p)})] AB^2 + [\frac{-p}{m+p} + \frac{1}{2} (1 + \frac{pn}{(m+n)(m+p)})] AC^2 - \frac{1}{2} (1 + \frac{pn}{(m+n)(m+p)}) BC^2, \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} &= \frac{m(m-n+p)}{2(m+n)(m+p)} AB^2 + \frac{m(m-p+n)}{2(m+n)(m+p)} AC^2 - \frac{m(m+n+p + \frac{2np}{m})}{2(m+n)(m+p)} BC^2, \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} &= \frac{m}{2(m+n)(m+p)} [(m-n+p)AB^2 + (m-p+n)AC^2 - (m+n+p + \frac{2np}{m})BC^2], \\ BB' \perp CC' &\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0 \Leftrightarrow (m-n+p)AB^2 + (m-p+n)AC^2 - (m+n+p + \frac{2np}{m})BC^2 = 0. \\ &\Leftrightarrow (m-n+p)AB^2 + (m+n-p)AC^2 = (m+n+p + \frac{2np}{m})BC^2. \\ \overrightarrow{BB'} &\neq \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{CC'} \neq \overrightarrow{0}, \quad \Rightarrow B' \in (AC), C' \in (AB). \end{aligned}$$

Observatie: Din $B' \in [AC], C' \in [AB]$ si $m, n, p \in (0, \infty) \Rightarrow B' \in (AC), C' \in (AB)$.

2. Prof. George-Florin Șerban, Brăila

$AA' \cap BB' \cap CC' = \{M\}$. În $\triangle ABC$ aplic teorema lui Ceva, $\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1$, $\frac{n}{m} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{m}{p} = 1$,

$\frac{BA'}{CA'} = \frac{p}{n}$. În $\triangle ABB'$ aplic teorema lui Menelaos, transversala C', M, C $\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BM}{B'M} \cdot \frac{B'C}{AC} = 1$,

$\frac{n}{m} \cdot \frac{BM}{B'M} \cdot \frac{m}{m+p} = 1$, $\frac{BM}{B'M} = \frac{m+p}{n}$, $\frac{BM}{BB'} = \frac{m+p}{m+n+p}$. În $\triangle ACC'$ aplic teorema lui Menelaos,

transversala B', M, B $\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CM}{C'M} \cdot \frac{C'B}{AB} = 1$, $\frac{p}{m} \cdot \frac{CM}{C'M} \cdot \frac{m}{m+n} = 1$, $\frac{CM}{C'M} = \frac{m+n}{p}$, $\frac{CM}{CC'} = \frac{m+n}{m+n+p}$.

În $\triangle ABC$ aplic teorema lui Stewart $BB'^2 \cdot AC = BC^2 \cdot AB' + AB^2 \cdot B'C - AB' \cdot B'C \cdot AC$,

$$BB'^2 \cdot AC = \frac{BC^2 \cdot AC \cdot p}{m+p} + \frac{AB^2 \cdot AC \cdot m}{m+p} - \frac{AC^3 \cdot mp}{(m+p)^2},$$

$$BB'^2 = \frac{(m+p)p \cdot BC^2 + (m+p)m \cdot AB^2 - AC^2 \cdot mp}{(m+p)^2}. \text{ În } \triangle ABC \text{ aplic teorema lui Stewart}$$

$$CC'^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AC' + AC^2 \cdot BC' - AC' \cdot BC' \cdot AB,$$

$$CC'^2 \cdot AB = \frac{BC^2 \cdot AB \cdot n}{m+n} + \frac{AC^2 \cdot AB \cdot m}{m+n} - \frac{AB^3 \cdot mn}{(m+n)^2},$$

$$CC'^2 = \frac{(m+n)n \cdot BC^2 + (m+n)m \cdot AC^2 - AB^2 \cdot mn}{(m+n)^2}, \quad MB = \frac{BB' \cdot (m+p)}{m+n+p}, \quad MC = \frac{CC' \cdot (m+n)}{m+n+p}.$$

$$BB' \perp CC' \Leftrightarrow \triangle MBC, \quad m(\angle BMC) = 90^\circ, \text{ teorema lui Pitagora, } BM^2 + MC^2 = BC^2.$$

$$BM^2 + MC^2 = BC^2, \quad \frac{BB'^2 \cdot (m+p)^2}{(m+n+p)^2} + \frac{CC'^2 \cdot (m+n)^2}{(m+n+p)^2} = BC^2,$$

$$(mp + p^2)BC^2 + (m^2 + mp)AB^2 - AC^2mp + (mn + n^2)BC^2 + (m^2 + mn)AC^2 - AB^2mn = BC^2(m+n+p)^2$$

$$(mp + p^2 + mn + n^2)BC^2 + (m^2 + mp - mn)AB^2 + (m^2 + mn - mp)AC^2 = BC^2(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp)$$

$$(m^2 + mp - mn)AB^2 + (m^2 + mn - mp)AC^2 = BC^2(m^2 + mn + 2np + mp),$$

$$m(m - n + p)AB^2 + m(m + n - p)AC^2 = BC^2(m^2 + mn + 2np + mp),$$

$$(m - n + p)AB^2 + (m + n - p)AC^2 = BC^2(m + n + p + \frac{2np}{m}), \text{ c.c.t.d}$$

$$\text{Deci } BB' \perp CC' \Leftrightarrow \triangle MBC, \quad m(\angle BMC) = 90^\circ, \text{ teorema lui Pitagora, } BM^2 + MC^2 = BC^2,$$

$$(m - n + p)AB^2 + (m + n - p)AC^2 = BC^2(m + n + p + \frac{2np}{m}).$$

3. Prof. Marin Chirciu și prof. Octavian Stroe, Colegiul Național „Zinca Golescu” din Pitești

$$\text{Din } \frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p} \text{ rezultă } \overrightarrow{BB'} = \frac{m}{m+p} \overrightarrow{BA} + \frac{p}{m+p} \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Din } \frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m} \text{ rezultă } \overrightarrow{CC'} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{Avem } \overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{m+p} \overrightarrow{BA} + \frac{p}{m+p} \overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\frac{m}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CB} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + mn \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + pm \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + np \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - mn \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - pm \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - np \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 AB \cdot AC \cdot \cos A - mn AB \cdot BC \cdot \cos B - pm BC \cdot AC \cdot \cos C - np BC^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} - mn \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2} - pm \cdot \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2} - np \cdot BC^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - mn + mp) AB^2 + (m^2 + mn - mp) AC^2 = (m^2 + mn + mp + 2np) BC^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m - n + p) AB^2 + (m + n - p) AC^2 = \left(m + n + p + \frac{2np}{m} \right) BC^2.$$

Cu aceasta demonstrația este încheiată.

4. Prof. Buzea Gabriela, Școala Gimnazială Nr. 56, București

Folosind relațiile din ipoteză obținem

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p} \Rightarrow CB' = \frac{mb}{m+p} \text{ și } AB' = \frac{pb}{m+p}$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m} \Rightarrow AC' = \frac{nc}{m+n} \text{ și } C'B = \frac{mc}{m+n}$$

Fie $BB' \cap CC' = \{T\}$, iar $AT \cap BC = \{A'\}$.

În triunghiul ABC, $AA' \cap BB' \cap CC' = \{T\}$, aplicăm teorema lui Ceva

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \Rightarrow \frac{n}{m} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{m}{p} = 1 \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{p}{n} \Rightarrow BA' = \frac{pa}{n+p} \text{ și } A'C = \frac{na}{n+p}.$$

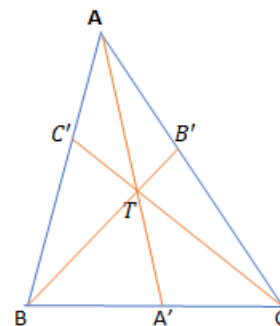
În triunghiul ABC, $AA' \cap BB' \cap CC' = \{T\}$, aplicăm teorema lui Van Aubel și obținem

$$\frac{BT}{TB'} = \frac{BC'}{C'A} + \frac{BA'}{A'C} \Rightarrow \frac{BT}{TB'} = \frac{m}{n} + \frac{p}{n} \Rightarrow \frac{BT}{BB'} = \frac{m+p}{m+n+p} \Rightarrow BT^2 = \left(\frac{m+p}{m+n+p} \right)^2 BB'^2, (1).$$

În triunghiul ABC, aplicăm teorema lui Stewart și obținem

$$BB'^2 \cdot AC = AB^2 \cdot B'C + BC^2 \cdot AB' - CB' \cdot B'A \cdot AC \Rightarrow$$

$$BB'^2 \cdot b = c^2 \cdot \frac{mb}{m+p} + a^2 \cdot \frac{pb}{m+p} - \frac{mb}{m+p} \cdot \frac{pb}{m+p} \cdot b \Rightarrow$$



$$BB'^2 = \frac{c^2m(m+p) + a^2p(m+p) - mpb^2}{(m+p)^2}, (2).$$

Din (1) și (2) obținem că

$$BT^2 = \frac{c^2m(m+p) + a^2p(m+p) - mpb^2}{(m+n+p)^2}.$$

Analog, obținem

$$CT^2 = \frac{b^2m(m+n) + a^2n(m+n) - mnc^2}{(m+n+p)^2}.$$

Din $\left. \begin{array}{l} BB' \perp CC' \\ BB' \cap CC' = \{T\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta BTC, \\ BT^2 + CT^2 = BC^2 \end{array} \right.$ obținem că

$$c^2m(m+p) + a^2p(m+p) - mpb^2 + b^2m(m+n) + a^2n(m+n) - mnc^2 = a^2(m+n+p)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2m^2 + c^2mp + a^2mp + a^2p^2 - mpb^2 + b^2m^2 + b^2mn + a^2mn + a^2n^2 - mnc^2 = a^2m^2 + a^2n^2 + a^2p^2 + 2a^2mn + 2a^2np + 2a^2mp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2(m^2 - mn + mp) + b^2(m^2 + mn - mp) = a^2(m^2 + mn + mp + 2np)$$

$$\Leftrightarrow c^2(m - n + p) + b^2(m + n - p) = a^2\left(m + n + \frac{2np}{m}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m - n + p)AB^2 + (m + n - p)AC^2 = \left(m + n + p + \frac{2np}{m}\right)BC^2.$$

5. Prof. Nela Ciceu, Roșiori, Bacău și prof. Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

Avem

$$CB' = \frac{mb}{m+p}, BA' = \frac{pb}{m+p}, AC' = \frac{NC}{m+N}, C'B = \frac{mc}{m+n},$$

$$(B'C')^2 = \frac{n^2c^2}{(m+n)^2} + \frac{p^2b^2}{(m+p)^2} - \frac{2npbc}{(m+n)(m+p)} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Rezultă că

$$BB' \perp CC' \Leftrightarrow BC^2 + (B'C')^2 = (BC')^2 + B'C^2$$

$$a^2 + \frac{n^2c^2}{(m+n)^2} + \frac{p^2b^2}{(m+p)^2} - \frac{np(b^2 + c^2 - a^2)}{(m+n)(m+p)} = \frac{m^2c^2}{(m+n)^2} + \frac{m^2b^2}{(m+p)^2}$$

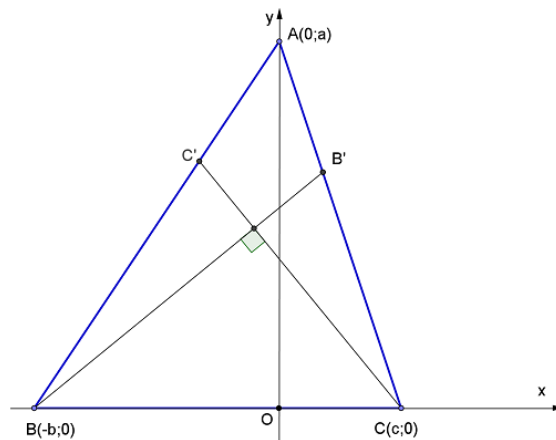
$$\frac{(m^2 - n^2)c^2}{(m+n)^2} + \frac{npc^2}{(m+n)(m+p)} + \frac{(m^2 - p^2)b^2}{(m+p)^2} + \frac{npb^2}{(m+n)(m+p)} = a^2 + \frac{npa^2}{(m+n)(m+p)}$$

$$\frac{(m - n)c^2}{m+n} + \frac{npc^2}{(m+n)(m+p)} + \frac{(m - p)b^2}{m+p} + \frac{npb^2}{(m+n)(m+p)} = \frac{(m^2 + mn + mp + 2pn)a^2}{(m+n)(m+p)}$$

$$(m^2 + mp - mn)c^2 + (m^2 + mn - mp)b^2 = (m^2 + mn + np + 2np)a^2$$

$$(m+n-p)b^2 + (m+p-n)c^2 = (m+n+p + \frac{2np}{m})a^2$$

6.. Prof. Constantin Telteu



Luând latura $[BC]$ pe axa Ox și înălțimea din A pe axa Oy , avem:

$AB^2 = a^2 + b^2$; $AC^2 = a^2 + c^2$; $BC^2 = (b+c)^2$, care înlocuite în relația dată în enunț, după câteva calcule, conduce la relația **echivalentă**:

$$a^2 m^2 - nb^2(m+p) - pc^2(m+n) - bc(m^2 + mn + mp + 2np) = 0 \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem: $\frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p} \Rightarrow x_{B'} = \frac{c + \frac{m}{p} \cdot 0}{1 + \frac{m}{p}} = \frac{pc}{m+p}$; $y_{B'} = \frac{0 + \frac{m}{p} \cdot a}{1 + \frac{m}{p}} = \frac{ma}{m+p}$;

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{m}{n} \Rightarrow x_{C'} = \frac{-b + \frac{m}{n} \cdot 0}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{-bn}{m+n}$$
; $y_{C'} = \frac{0 + \frac{m}{n} \cdot a}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{ma}{m+n}$.

$$m_{CC'} = \frac{y_{C'} - y_C}{x_{C'} - x_C} = \frac{-ma}{bn + cn + cm}$$
; $m_{BB'} = \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{ma}{pc + pb + mb}$.

Condiția de perpendicularitate din enunț este **echivalentă** cu:

$$m_{CC'} \cdot m_{BB'} = -1 \Leftrightarrow m^2 a^2 = (bn + cn + cm)(pc + pb + mb) \Leftrightarrow (1).$$

7. Conf. dr. Gheorghe PROCOPIUC, Universitatea Tehnică Iași

Soluție: Notăm:

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{p}{m} = \alpha, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m} = \beta.$$

Cum $AB' + B'C = b$ și $AC' + C'B = c$, deducem că:

$$AB' = \frac{\alpha}{1+\alpha}b, \quad b' = B'C = \frac{1}{1+\alpha}b, \quad AC' = \frac{\beta}{1+\beta}c, \quad c' = C'B = \frac{1}{1+\beta}c. \quad (1)$$

Relația din enunț este atunci echivalentă cu

$$(1 - \alpha + \beta)b^2 + (1 + \alpha - \beta)c^2 = (1 + \alpha + \beta + 2\alpha\beta)a^2. \quad (2)$$

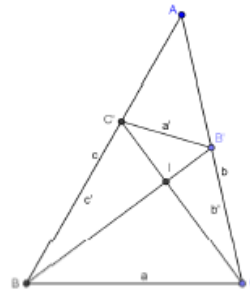


Fig. 1

Din triunghiul $AB'C'$ avem (Fig. 1): $B'C'^2 = AC'^2 + AB'^2 - 2AB' \cdot AC' \cos A$. Dar $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$ și cu (1), notând $a' = B'C'$, găsim că

$$a'^2 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}b^2 + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}c^2 - \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}(b^2 + c^2 - a^2).$$

De aici deducem că:

$$a^2 + a'^2 = b'^2 + c'^2 - \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)}[(1-\alpha+\beta)b^2 + (1+\alpha-\beta)c^2 - (1+\alpha+\beta+2\alpha\beta)a^2]. \quad (3)$$

Dacă $BB' \perp CC'$ atunci $a^2 + a'^2 = b'^2 + c'^2$, sau

$$BC^2 + B'C'^2 = BC'^2 + CB'^2. \quad (4)$$

Într-adevăr, din triunghiurile dreptunghice IAB , $IA'B'$, IBC' și ICB' avem:

$$BC^2 + B'C'^2 = IB^2 + IC^2 + IB'^2 + IC'^2 = BC'^2 + CB'^2.$$

Din (3) rezultă atunci (2).

Reciproc, dacă are loc (2), din (3) rezultă (4). În acest caz $BB' \perp CC'$. Într-adevăr, notând $\theta = m(\widehat{BIC})$, avem:

$$BC^2 = IB^2 + IC^2 - 2IB \cdot IC \cos \theta, \quad B'C'^2 = IB'^2 + IC'^2 - 2IB' \cdot IC' \cos \theta,$$

$$BC'^2 = IB^2 + IC'^2 + 2IB \cdot IC' \cos \theta, \quad CB'^2 = IB'^2 + IC^2 + 2IB' \cdot IC \cos \theta,$$

cu care (4) devine:

$$(IB \cdot IC + IB' \cdot IC' + IB \cdot IC' + IB' \cdot IC) \cos \theta = 0.$$

Dar $IB \cdot IC + IB' \cdot IC' + IB \cdot IC' + IB' \cdot IC \neq 0$, deci $\cos \theta = 0$, adică $\theta = 90^\circ$.

8. Prof. Codreanu Ioan-Viorel

Dreptele BB' și CC' sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\overrightarrow{BB'} \times \overrightarrow{CC'} = 0$

Din $\frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p}$ și $\frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m}$ rezulta

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} + \frac{m}{p}\overrightarrow{BA}}{1 + \frac{m}{p}} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m}\overrightarrow{BC}}{1 + \frac{n}{m}}$$

sau

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{p\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{BA}}{p+m} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{CC'} = \frac{m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{BC}}{m+n}$$

$$\text{Avem } \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0 \Leftrightarrow \frac{p\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{BA}}{p+m} \cdot \frac{m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{BC}}{m+n} = 0$$

$$\Leftrightarrow pm \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + pn BC^2 + m^2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + mn \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow pm \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + pn BC^2 + m^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + mn \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow pm \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2} + pn BC^2 + m^2 \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + mn \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow mpBC^2 + mpAC^2 - mpAB^2 + 2pnBC^2 - m^2AB^2 - m^2AC^2 + m^2BC^2 + mnAB^2 + mnBC^2 - mnAC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + mp - mn)AB^2 + (m^2 + mn - mp)AC^2 = (m^2 + mn - mp + 2mp)BC^2$$

$$\Leftrightarrow (m - n + p)AB^2 + (m + n - p)AC^2 = (m + n + p + \frac{2np}{m})BC^2$$

9. Prof. Alexandru Elena - Marcela, Școala Gimnazială „Ion Irimescu” Fălticeni, jud. Suceava

Teoremă: Fie $ABCD$ un patrulater convex. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $AC \perp BD$;

(ii) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Demonstrație:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $AC \perp BD$ rezultă

$$AB^2 + CD^2 = (AO^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2) = (AO^2 + OD^2) + (OB^2 + OC^2) = AD^2 + BC^2$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Fie $\alpha = m(\angle BOA)$. Atunci:

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos \alpha$$

$$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2CO \cdot DO \cdot \cos \alpha$$

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot DO \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2BO \cdot CO \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

Folosind ultimele patru egalități și relația (ii) se obține:

$$(BO \cdot AO + CO \cdot DO + AO \cdot DO + BO \cdot CO) \cos \alpha = 0. \text{ Rezultă } \cos \alpha = 0, \text{ adică } AC \perp BD.$$

(Probleme practice de geometrie, Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff, Ed. Tehnică Buc. 1990, pag.20-pag.21)

$$\begin{aligned} \frac{CB'}{BA} &= \frac{m}{p} \Rightarrow \frac{CB'}{BA+CB'} = \frac{m}{m+p} \Rightarrow \frac{CB'}{AC} = \frac{m}{m+p} \Rightarrow AC = \frac{m+p}{m} \cdot CB' \\ \frac{AC'}{CB} &= \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{AC'+CB'}{CB} = \frac{m+n}{m} \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{m+n}{m} \Rightarrow AB = \frac{m+n}{m} \cdot CB' \\ T. \cos. &\Rightarrow BC'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A, \text{ dar } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ \Rightarrow BC'^2 &= AB'^2 + AC'^2 - \cancel{2AB' \cdot AC'} \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{\cancel{2AB \cdot AC}} \\ BC^2 + \left(AB'^2 + AC'^2 - \frac{AB' \cdot AC' \cdot AB}{AB \cdot AC} - \frac{AB' \cdot AC' \cdot AC}{AB \cdot AC} + \frac{AB' \cdot AC' \cdot BC^2}{AB \cdot AC} \right) &= BC'^2 + BC^2 \\ BC^2 + \frac{p^2}{m^2} \cdot CB'^2 + \frac{n^2}{m^2} \cdot CB'^2 - \frac{p}{m} \cdot CB' \cdot \frac{n}{m} \cdot CB' \cdot \frac{m+p}{m+n} \cdot \frac{CB'}{CB} - \frac{p}{m} \cdot CB' \cdot \frac{n}{m} \cdot CB' \cdot \frac{m+n}{m+p} \cdot \frac{CB'}{CB} + \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{m+p}{m} \cdot \frac{CB'}{(m+n) \cdot CB} = \frac{m+p}{m+n} \cdot \frac{CB'}{CB} \\ + \frac{p}{m} \cdot CB' \cdot \frac{n}{m} \cdot CB' \cdot \frac{BC^2}{(m+n) \cdot CB} \cdot \frac{m}{(m+p) \cdot CB} &= \frac{m^2}{(m+n)^2} AB^2 + \frac{m^2}{(m+p)^2} AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 + \frac{p^2}{m^2} \cdot \frac{m^2}{(m+p)^2} AC^2 + \frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} AB^2 - \frac{np}{m+n} \cdot \frac{m+p}{(m+p)} \cdot \frac{AC^2}{(m+p)^2} - \frac{np}{m+p} \cdot \frac{m+n}{(m+n)} \cdot \frac{AB^2}{(m+n)^2} + \\ + \frac{np}{(m+n)(m+p)} \cdot BC^2 &= \frac{m^2}{(m+n)^2} AB^2 + \frac{m^2}{(m+p)^2} AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 \left(1 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} \right) &= \frac{m^2}{(m+n)^2} AB^2 - \frac{n^2}{(m+n)^2} AB^2 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} AB^2 + \frac{m^2}{(m+p)^2} AC^2 - \frac{p^2}{(m+p)^2} AC^2 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 \frac{m^2 + mp + mn + np + np}{(m+n)(m+p)} &= \frac{(m-n)(m+n)}{(m+n)^2} AB^2 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} AB^2 + \frac{(m-p)(m+p)}{(m+p)^2} AC^2 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 \frac{m^2 + mn + mp + 2np}{(m+n)(m+p)} &= \frac{m-n}{m+n} AB^2 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} AB^2 + \frac{m-p}{m+p} AC^2 + \frac{np}{(m+n)(m+p)} AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 (m^2 + mn + mp + 2np) &= (m^2 - mn + mp - np + np) AB^2 + (m^2 - mp + mn + p + np) AC^2 \\ BC^2 \cdot m(m+n+p + \frac{2np}{m}) &= m(m-n+p) AB^2 + m(m-p+n) AC^2 \quad | : m \\ BC^2 (m+n+p + \frac{2np}{m}) &= (m-n+p) AB^2 + (m-p+n) AC^2. \end{aligned}$$

c.c.t.d.

3. THE NUMBERS of FIBONACCI and LUCAS - IDENTITIES - PROOFS WITH FEW WORDS – (I)

By Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu



Fibonacci
(1175 -1240)



François-Édouard-Anatole Lucas
(1842 – 1891)

$$F_0 = 0, F_1 = 1,$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{F})$$

$$L_0 = 2, L_1 = 1,$$

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{L})$$

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

$$r_1 = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, r_2 = \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$(x_n)_{n \geq 0}$, **Fibonacci-Lucas'** s sequence

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n, \forall n \in \mathbb{N},$$

If $x_0 = 0 = F_0, x_1 = 1 = F_1$, then $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ so:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n), \forall n \in \mathbf{N} \text{ (Binet, 1843),}$$

If $x_0 = 2 = L_0, x_1 = 1 = L_1$, then $A = B = 1$, so

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Note that:

$$\alpha + \beta = 1 \text{ and } \alpha\beta = -1,$$

*

*

*

1. IDENTITIES

1.1. $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Lucas, 1876).}$

Proof. $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}, \forall k \in \mathbf{N}^*,$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_k &= \sum_{k=1}^n F_{k+2} - \sum_{k=1}^n F_{k+1} = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} F_k - \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

1.2. $\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Proof. $L_k = L_{k+2} - L_{k+1}, \forall k \in \mathbf{N},$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k &= \sum_{k=1}^n L_{k+2} - \sum_{k=1}^n L_{k+1} = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} L_k - \sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

1.3. $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Proof. $F_k \cdot F_{k+1} = F_k (F_k + F_{k-1}) = F_k^2 + F_k F_{k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n F_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^n F_k^2 + \sum_{k=1}^n F_{k-1} F_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n F_k^2 = \sum_{k=1}^n F_k F_{k+1} - \sum_{k=1}^n F_{k-1} F_k =$$

$$= \sum_{k=1}^n F_k F_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} F_k F_{k+1} = F_n F_{n+1} - F_0 F_1 = F_n F_{n+1}, \text{ sau I.M.}$$

$$1.4. \sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Proof. $L_k \cdot L_{k+1} = L_k (L_k + L_{k-1}) = L_k^2 + L_k L_{k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n L_k L_{k+1} = \sum_{k=1}^n L_k^2 + \sum_{k=1}^n L_k L_{k-1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n L_k^2 = \sum_{k=1}^n L_k L_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} L_k L_{k+1} =$$

$$= L_n L_{n+1} - L_0 L_1 = L_n L_{n+1} - 2.$$

$$1.5. \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Lucas, 1876).}$$

Proof. $F_{2k-1} = F_{2k} - F_{2k-2}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = \sum_{k=1}^n F_{2k} - \sum_{k=1}^n F_{2k-2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n F_{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$1.6. \sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Lucas, 1876).}$$

Proof. $F_{2k} = F_{2k+1} - F_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n F_{2k} = \sum_{k=1}^n F_{2k+1} - \sum_{k=1}^n F_{2k-1} =$$

$$= F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$1.7. \sum_{k=1}^n L_{2k-1} = L_{2n} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Proof. $L_{2k-1} = L_{2k} - L_{2k-2}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n L_{2k-1} = \sum_{k=1}^n L_{2k} - \sum_{k=1}^n L_{2(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^n L_{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} L_{2k} = L_{2n} - L_0 = L_{2n} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$1.8. \sum_{k=1}^n L_{2k} = L_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Proof. $L_{2k} = L_{2k+1} - L_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^n L_{2k} &= \sum_{k=1}^n L_{2k+1} - \sum_{k=1}^n L_{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n L_{2k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} L_{2k+1} = L_{2n+1} - L_1 = L_{2n} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

1.9. $\sum_{k=0}^n F_{k+i} = F_{n+i+2} - F_{i+1}, \forall n, i \in \mathbf{N}.$

Proof. $F_{k+i+1} = F_{k+i+2} - F_{k+i}, \forall k, i \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n F_{k+i} = \sum_{k=0}^n F_{k+i+2} - \sum_{k=0}^n F_{k+i+1} = F_{n+i+2} - F_{i+1}.$$

1.10. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)^2 + \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 = \frac{1}{5}(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n) +$
 $+\frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1}) = \frac{1}{5}(\alpha^{2n} + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n} + \beta^{2n+2}) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{2n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \cdot \alpha^{2n+1} + \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \cdot \beta^{2n+1}\right) =$
 $= \frac{1}{5}(\sqrt{5} \cdot \alpha^{2n+1} - \sqrt{5} \cdot \beta^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = F_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

1.11. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N} \text{ (Lucas, 1876).}$

Proof. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = \frac{1}{5}\left((\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2\right) =$
 $= \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2} - 2(\alpha\beta)^{n+1} + 2(\alpha\beta)^{n-1}) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha^{2n} + \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{n-1}(1 - (\alpha\beta)^2)\right) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{2n} + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\beta^{2n}\right) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{2n} + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\beta^{2n}\right) = \frac{1}{5}(\sqrt{5}\alpha^{2n} - \sqrt{5}\beta^{2n}) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

1.12. $\alpha^{n+1} = \alpha \cdot F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof.
$$\begin{aligned} \alpha \cdot F_{n+1} + F_n &= \frac{\alpha}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} + \alpha^n) - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n(1 + \alpha\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{n+1} = \\ &= \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = \alpha^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

1.13. $\beta^{n+1} = \beta \cdot F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof.
$$\begin{aligned} \beta \cdot F_{n+1} + F_n &= \frac{\beta}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}\beta - \beta^{n+2} + \alpha^n - \beta^n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+2} + \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^n \cdot (1 + \alpha\beta) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^n \cdot (\beta^2 + 1) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\beta^{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^{n+1} \cdot \left(\frac{\beta^2 + 1}{\beta}\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^{n+1} \cdot (-\sqrt{5}) = \beta^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

1.14. $L_n F_n = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof.
$$F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n) = F_n L_n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

1.15. $F_n + F_{n+2} = L_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof.
$$\begin{aligned} F_n + F_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n + \alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \beta^{n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}\alpha^{n+1} - (-\sqrt{5})\beta^{n+1}) = \\ &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = L_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

1.16. $F_{n+4} - F_n = L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof.
$$F_{n+4} - F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+4} - \beta^{n+4} - \alpha^n + \beta^n) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n (\alpha^4 - 1) - \beta^n (\beta^4 - 1)) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) - \beta^n (\beta^2 - 1)(\beta^2 + 1)) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n+2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \beta^{n+2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{5} \alpha^{n+2} + \sqrt{5} \beta^{n+2}) = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = L_{n+2}.
\end{aligned}$$

1.17. $L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $L_n + L_{n+2} = \alpha^n + \beta^n + \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + \beta^{n+1} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) =$

$$= \sqrt{5} \alpha^{n+1} - \sqrt{5} \beta^{n+1} = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = 5F_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

1.18. $F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, k \leq n$ (Catalan, 1879).

Proof. $F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 = \frac{1}{5} (\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}) (\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) - \frac{1}{5} (\alpha^n - \beta^n)^2 =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} (\alpha^{2n} - \alpha^{n-k} \beta^{n+k} - \alpha^{n+k} \beta^{n-k} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2\alpha^n \beta^n) = \\
&= \frac{1}{5} (-(\alpha\beta)^n \alpha^{-k} \beta^k - (\alpha\beta)^n \alpha^k \beta^{-k} + 2(\alpha\beta)^n) = \\
&= \frac{1}{5} (-(\alpha\beta)^n (\alpha\beta)^{-k} \beta^{2k} - (\alpha\beta)^n \alpha^{2k} (\alpha\beta)^{-k} + (-1)^n 2) = \\
&= \frac{1}{5} ((-1)^{n+1} (-1)^k \beta^{2k} + (-1)^{n+1} (-1)^k + 2(-1)^n) = \\
&= \frac{1}{5} ((-1)^{n+k+1} (\alpha^{2k} + \beta^{2k}) + 2(-1)^n), \text{ but,} \\
F_k^2 &= \frac{1}{5} (\alpha^k - \beta^k)^2 = \frac{1}{5} (\alpha^{2k} + \beta^{2k} - 2(\alpha\beta)^k) = \frac{1}{5} (\alpha^{2k} + \beta^{2k}) - \frac{2}{5} (-1)^k \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \alpha^{2k} + \beta^{2k} &= 5F_k^2 - 2(-1)^{k+1} = 5F_k^2 + 2(-1)^k \Leftrightarrow \frac{\alpha^{2k} + \beta^{2k}}{5} = \frac{5F_k^2 + 2(-1)^k}{5}.
\end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}
F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 &= (-1)^{n+k+1} F_k^2 + \frac{2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1}}{5} = \\
&= (-1)^{n+k+1} F_k^2 + \frac{2}{5} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = (-1)^{n+k+1} F_k^2.
\end{aligned}$$

1.19. $\alpha^m F_{n-m+1} + \alpha^{m-1} F_{n-m} = \alpha^n, \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq m.$

Proof. $\alpha^m F_{n-m+1} + \alpha^{m-1} F_{n-m} = \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m+1} - \beta^{n-m+1}) + \frac{\alpha^{m-1}}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^m \beta^{n-m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{m-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{m-1} \beta^{n-m}}{\sqrt{5}} = \\
&= \frac{\alpha^n (\alpha + \alpha^{-1})}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{m-1} \beta^{n-m}}{\sqrt{5}} (\alpha \beta + 1) = \alpha^n \cdot \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{\sqrt{5}} = \alpha^n.
\end{aligned}$$

1.20. $\beta^m \cdot F_{n-m+1} + \beta^{m-1} \cdot F_{n-m} = \beta^n, \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq m.$

Proof. $\beta^m \cdot F_{n-m+1} + \beta^{m-1} \cdot F_{n-m} = \beta^m \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m+1} - \beta^{n-m+1}) +$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{\beta^{m-1}}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}) = \frac{\beta^m \alpha^{n-m+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^{m-1} \alpha^{n-m}}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} = \\
&= -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\beta^{m-1} \alpha^{n-m}}{\sqrt{5}} (\alpha \beta + 1) = -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) = -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \right) = \\
&= -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})^2 + 4}{2(1-\sqrt{5})} = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10-2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{5}-1)} = \beta^n.
\end{aligned}$$

1.21. $\alpha^{-n} = (-1)^{n+1} \cdot (\alpha F_n - F_{n+1}), \forall n \in \mathbf{N}.$

Proof. $(-1)^{n+1} \cdot (\alpha F_n - F_{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (\alpha(\alpha^n - \beta^n) - \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \alpha \beta^n - \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \beta^n (\beta - \alpha) = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \beta^n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \beta^n (-\sqrt{5}) = (-1)^{n+2} \beta^n = \\
&= (-1)^n \beta^n = (\alpha \beta)^n \beta^n = \alpha^n \beta^{2n} = \alpha^n \cdot \left(\frac{-1}{\alpha} \right)^{2n} = \alpha^{-n}.
\end{aligned}$$

1.22. $L_{2m} L_{2n} = L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2, \forall m, n \in \mathbf{N}, m \geq n$ (Wall, 1964).

Proof. $L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2 = (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n})^2 + (\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})^2 =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + 2(\alpha \beta)^{m+n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} - 2(\alpha \beta)^{m-n} = \\
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}}{\alpha^{2n}} + \frac{\beta^{2m}}{\beta^{2n}} + 2(\alpha \beta)^{m-n} ((\alpha \beta)^{2n} - 1) = \\
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m} \beta^{2n} + \alpha^{2n} \beta^{2m}}{(\alpha \beta)^{2n}} = \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m} \beta^{2n} + \alpha^{2n} \beta^{2m} = \\
&= \alpha^{2m} (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{2m} (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = L_{2m} L_{2n}.
\end{aligned}$$

1.23. $L_{2m}L_{2n} = 5F_{m+n}^2 + L_{m-n}^2, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$. (Wall, 1964).

Proof. $5F_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 = (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n})^2 + (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})^2 =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} - 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} + 2(\alpha\beta)^{m-n} =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} + 2(\alpha\beta)^{m-n}(1 - (\alpha\beta)^{2n}) =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}}{\alpha^{2n}} + \frac{\beta^{2m}}{\beta^{2n}} = \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}}{(\alpha\beta)^{2n}} =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m} = \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) =$
 $= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = L_{2m}L_{2n}.$

1.24. $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (Lucas, 1876).

Proof. $5F_{2n}^2 + 2 = (\alpha^{2n} - \beta^{2n})^2 + 2 = \alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2(\alpha\beta)^{2n} + 2 =$
 $= L_{4n} + 2 - 2(-1)^{2n} = L_{4n}.$

1.25. $L_{4n+2} = 5F_{2n+1}^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}$ (Lucas, 1876).

Proof. $5F_{2n+1}^2 - 2 = (\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})^2 - 2 = \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2(\alpha\beta)^{2n+1} - 2 =$
 $= L_{4n+2} - 2 - 2(-1)^{2n+1} = L_{4n+2}.$

1.26. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n} + L_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$ (Koshy, 1999).

Proof. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n +$
 $+ \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{n+1} = L_{2n} + L_{2n+2} + 2(\alpha\beta)^n(\alpha\beta + 1) = L_{2n} + L_{2n+2}.$

1.27. $F_m \cdot L_n + F_n \cdot L_m = 2F_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ (Blazej, 1975).

Proof. $F_m \cdot L_n + F_n \cdot L_m = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^m + \beta^m) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \alpha^n\beta^m + \alpha^m\beta^n - \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m - \beta^{m+n}) =$
 $= \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = 2F_{m+n}.$

4. O NOUĂ INEGALITATE ALGEBRICĂ ȘI APLICAȚII ALE EI ÎN TRIUNGHI

Marin Chirciu, Pitești¹

(În legătură cu articolul „O inegalitate algebrică și aplicații ale ei în triunghi” din Revista Electronică Mateinfo.ro Octombrie 2017)

Articolul pornește de la o inegalitate algebrică mai tare decât cea din articolul de mai sus și obține relații de forma

$$E^2 \geq F(R, r),$$

unde E este o expresie care depinde de elemente ale triunghiului.

Lemă.

Dacă $x, y, z > 0$ atunci $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 + 9 \geq 2(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

Soluție.

Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\sum \frac{x^2}{y^2} + 2\sum \frac{y}{x} + 9 \geq 2\sum \frac{x}{y} + 2\sum \frac{y}{x} + 6 \Leftrightarrow \sum \frac{x^2}{y^2} + 3 \geq 2\sum \frac{x}{y} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 \geq 0, \text{ evidentă.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Aplicații în triunghi.

Aplicația 1.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (a, b, c)$ și ținem seama

$$\text{că } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2p \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rrp} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} \geq \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} = 10 - \frac{2r}{R} \text{ u}$$

nde inegalitatea de mai sus rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, (G).

Aplicația 2.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}\right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Folosim teorema sinusurilor și **Aplicația 1.**

Aplicația 3.

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Folosim $h_a = \frac{2S}{a}$ și **Aplicația 1.**

Aplicația 4.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (r_a, r_b, r_c)$ și ținem seama

$$\text{că } (r_a + r_b + r_c) \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = (4R + r) \cdot \frac{1}{r} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 5.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right)^2 + \frac{12r}{R} \geq 15.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$ și ținem seama

$$\text{că } (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \cdot \frac{1}{2Rr} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{Rr} = 12 - \frac{6r}{R}$$

Aplicația 6.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} \right)^2 + \frac{12r}{R} \geq 15.$$

Soluție.

Folosim teorema sinusurilor și **Aplicația 5.**

Aplicația 7.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{p-a}{p-b} + \frac{p-b}{p-c} + \frac{p-c}{p-a} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (p-a, p-b, p-c)$ și ținem seama

$$\text{că } (p-a + p-b + p-c) \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) = p \cdot \frac{4R+r}{rp} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 8.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{r_a^2}{r_b^2} + \frac{r_b^2}{r_c^2} + \frac{r_c^2}{r_a^2} \right)^2 + 23 \geq \frac{16R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (r_a^2, r_b^2, r_c^2)$ și ținem seama

$$\begin{aligned} \text{că } (r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) \left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \right) &= \left[(4R+r)^2 - 2p^2 \right] \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2 p^2} \geq \\ &\geq (3p^2 - 2p^2) \cdot \frac{16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2 p^2} = \frac{8R}{r} - 7, \text{ unde inegalitatea rezultă din inegalitatea lui} \end{aligned}$$

Doucet $(4R+r)^2 \geq 3p^2$, (D) și Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, (G).

Aplicația 9.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}, \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama

$$\text{că } \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}} \right) = \frac{4R+r}{p} \cdot \frac{p}{r} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 10.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 23 \geq \frac{16R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}, \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}, \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right)$, ținem seama

$$\begin{aligned} \text{că } \left(\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} \right) &= \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2} \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2} \stackrel{(D+G)}{\geq} \\ &\geq \frac{3p^2 - 2p^2}{p^2} \cdot \frac{16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2} = \frac{8R}{r} - 7. \end{aligned}$$

Aplicația 11.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama

$$\begin{aligned} \text{că} \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \right) &= \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} \stackrel{(G)}{\geq} \\ &\geq \left(1 - \frac{r}{2R} \right) \cdot \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} = \frac{2(2R-r)^2}{Rr}. \end{aligned}$$

Aplicația 12.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(\cos^2 \frac{A}{2}, \cos^2 \frac{B}{2}, \cos^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama

$$\text{că} \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right) \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \right) = \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Aplicația 13.

În triunghiul ascuțitunghic ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B} + \frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos A} \right)^2 + 9 \geq \left(2 + \frac{2r}{R} \right) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (\cos A, \cos B, \cos C)$ și ținem seama

$$\text{că} (\cos A + \cos B + \cos C) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \right) = \left(1 + \frac{r}{R} \right) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

Aplicația 14.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{a \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{b \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{b \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{c \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{c \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(a \operatorname{tg} \frac{A}{2}, b \operatorname{tg} \frac{B}{2}, c \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum a \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{a \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = 2(2R-r) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4Rr^2} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 15.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{a \sin^2 \frac{A}{2}}{b \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{b \sin^2 \frac{B}{2}}{c \sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{c \sin^2 \frac{C}{2}}{a \sin^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq 8 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \left(2 - \frac{r}{R} \right)^2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(a \sin^2 \frac{A}{2}, b \sin^2 \frac{B}{2}, c \sin^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\begin{aligned} \sum a \sin^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{a \cdot \sin^2 \frac{A}{2}} &= p \left(1 - \frac{r}{R} \right) \cdot \frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 6Rr) + r^3(4R+r)}{4Rr^3p} = \\ &= \frac{(R-r)[p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)]}{4R^2r^3} \stackrel{(G)}{\geq} 4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \left(2 - \frac{r}{R} \right)^2. \end{aligned}$$

Aplicația 16.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{ar_a}{br_b} + \frac{br_b}{cr_c} + \frac{cr_c}{ar_a} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (ar_a, br_b, cr_c)$ și ținem seama că

$$\sum ar_a \sum \frac{1}{ar_a} = 2p(2R-r) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4Rr^2p} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 17.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_ar_a}{h_br_b} + \frac{h_br_b}{h_cr_c} + \frac{h_cr_c}{h_ar_a} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (h_ar_a, h_br_b, h_cr_c)$ și ținem seama că

$$\sum h_ar_a \sum \frac{1}{h_ar_a} = \frac{r}{2R} [p^2 + (4R+r)^2] \cdot \frac{4R+r}{rp^2} = \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Aplicația 18.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{h_b \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{h_b \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{h_c \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{h_c \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}, h_b \operatorname{tg} \frac{B}{2}, h_c \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{r}{2Rp} \left[p^2 + (4R+r)^2 \right] \cdot \frac{4R+r}{rp} = \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Aplicația 19.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{h_b \operatorname{ctg} \frac{B}{2}} + \frac{h_b \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{h_c \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} + \frac{h_c \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{h_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, h_b \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, h_c \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{2Rr} \cdot \frac{2R-r}{rp} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 20.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \sin^2 \frac{A}{2}}{h_b \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{h_b \sin^2 \frac{B}{2}}{h_c \sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{h_c \sin^2 \frac{C}{2}}{h_a \sin^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \sin^2 \frac{A}{2}, h_b \sin^2 \frac{B}{2}, h_c \sin^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a \sin^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{r(4R+r)}{2R} \cdot \frac{2R}{r^2} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 21.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \cos^2 \frac{A}{2}}{h_b \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{h_b \cos^2 \frac{B}{2}}{h_c \cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{h_c \cos^2 \frac{C}{2}}{h_a \cos^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \cos^2 \frac{A}{2}, h_b \cos^2 \frac{B}{2}, h_c \cos^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a \cos^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2}{2R} \cdot \frac{2R(4R+r)}{rp^2} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 22.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{h_b \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{h_b \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{h_c \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{h_c \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}, h_b \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}, h_c \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{2R-r}{r^2} \cdot \frac{r}{2Rp^2} \left[p^2(r-8R) + (4R+r)^3 \right] \stackrel{\text{Doucet}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Doucet}}{\geq} \frac{2R-r}{2Rrp^2} \cdot \left[p^2(r-8R) + 3p^2(4R+r) \right] = \frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Aplicația 23.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{h_b \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{h_b \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}}{h_c \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{h_c \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}}{h_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \left(2 - \frac{2r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right).$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}, h_b \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}, h_c \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\begin{aligned} \sum h_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} &= \frac{p^2(p^2+r^2-12Rr)}{2Rr^2} \cdot \frac{2R(4R+r)-p^2}{rp^2} = \\ &= \frac{p^2+r^2-12Rr}{2Rr^2} \cdot \frac{2R(4R+r)-p^2}{r} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{2Rr^2} \cdot \frac{2R(4R+r)-4R^2-4Rr-3r^2}{r} = \\ &= \frac{4r(R-r)}{2Rr^2} \cdot \frac{4R^2-2Rr-3r^2}{r} = 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right). \end{aligned}$$

Aplicația 24.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a + 2r_a}{h_b + 2r_b} + \frac{h_b + 2r_b}{h_c + 2r_c} + \frac{h_c + 2r_c}{h_a + 2r_a} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R + r}{p} \right)^2 \right].$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (h_a + 2r_a, h_b + 2r_b, h_c + 2r_c)$ și ținem seama că

$$\sum (h_a + 2r_a) \sum \frac{1}{h_a + 2r_a} = \frac{p^2 + (4R + r)^2}{2R} \cdot \frac{4R + r}{p^2} = \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R + r}{p} \right)^2 \right].$$

Aplicația 25.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a - r}{r_b - r} + \frac{r_b - r}{r_c - r} + \frac{r_c - r}{r_a - r} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R - r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (r_a - r, r_b - r, r_c - r)$ și ținem seama că

$$\sum (r_a - r) \sum \frac{1}{r_a - r} = 2(2R - r) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4Rr^2} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R - r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 26.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a - r}{h_b - r} + \frac{h_b - r}{h_c - r} + \frac{h_c - r}{h_a - r} \right)^2 + \frac{9r}{R} \geq \frac{27}{2}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (h_a - r, h_b - r, h_c - r)$ și ținem seama că

$$\begin{aligned} \sum (h_a - r) \sum \frac{1}{h_a - r} &= \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2R} \cdot \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{r(p^2 + r^2 + 2Rr)} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \cdot \frac{p^2 - r^2 - Rr}{Rr} \geq \\ &\stackrel{(G)}{\geq} \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2 - r^2 - Rr}{Rr} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{3}{4} \cdot \frac{15R - 6r}{R} = \frac{45}{4} - \frac{9r}{R}. \end{aligned}$$

Aplicația 27.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a - 2r}{h_b - 2r} + \frac{h_b - 2r}{h_c - 2r} + \frac{h_c - 2r}{h_a - 2r} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R - r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (h_a - 2r, h_b - 2r, h_c - 2r)$ și ținem seama că

$$\sum (h_a - 2r) \sum \frac{1}{h_a - 2r} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{2R} \cdot \frac{2R - r}{r^2} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R - r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 28.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{r_b \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{r_b \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{r_c \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{r_c \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{r_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 23 \geq \frac{16R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(r_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}, r_b \operatorname{tg} \frac{B}{2}, r_c \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\begin{aligned} \sum r_a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{r_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}} &= \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p} \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2 p} \stackrel{(G+D)}{\geq} \frac{3p^2 - 2p^2}{p^2} \cdot \frac{16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2} = \\ &= \frac{8R}{r} - 7. \end{aligned}$$

Aplicația 29.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{r_b \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{r_b \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}}{r_c \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{r_c \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}}{r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}, r_b \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}, r_c \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{r_a \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2}{r} \cdot \frac{4R+r}{p^2} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 30.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a \sin^2 \frac{A}{2}}{r_b \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{r_b \sin^2 \frac{B}{2}}{r_c \sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{r_c \sin^2 \frac{C}{2}}{r_a \sin^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq 4 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right).$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(r_a \sin^2 \frac{A}{2}, r_b \sin^2 \frac{B}{2}, r_c \sin^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\begin{aligned} \sum r_a \sin^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{r_a \sin^2 \frac{A}{2}} &= \frac{2R(4R+r) - p^2}{2R} \cdot \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^3} \stackrel{(Gerretsen)}{\geq} \\ &\stackrel{(G)}{\geq} \frac{2R(4R+r) - 4R^2 - 4Rr - 3r^2}{2R} \cdot \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 12Rr}{r^3} = \frac{4R^2 - 2Rr - 3r^2}{2R} \cdot \frac{4r(R-r)}{r^2} = \\ &= 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right). \end{aligned}$$

Aplicația 31.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a \cos^2 \frac{A}{2}}{r_b \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{r_b \cos^2 \frac{B}{2}}{r_c \cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{r_c \cos^2 \frac{C}{2}}{r_a \cos^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(r_a \cos^2 \frac{A}{2}, r_b \cos^2 \frac{B}{2}, r_c \cos^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum r_a \cos^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{r_a \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2}{2R} \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{rp^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} = 10 - \frac{2r}{R} \quad \mathbf{A}$$

Aplicația 32.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a \sec^2 \frac{A}{2}}{r_b \sec^2 \frac{B}{2}} + \frac{r_b \sec^2 \frac{B}{2}}{r_c \sec^2 \frac{C}{2}} + \frac{r_c \sec^2 \frac{C}{2}}{r_a \sec^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(r_a \sec^2 \frac{A}{2}, r_b \sec^2 \frac{B}{2}, r_c \sec^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum r_a \sec^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{r_a \sec^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{p^2} \cdot \frac{2R-r}{2Rr} \stackrel{\text{Doucet}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Doucet}}{\geq} \frac{p^2(r-8R) + 3p^2(4R+r)}{p^2} \cdot \frac{2R-r}{2Rr} = (4R+4r) \cdot \frac{2R-r}{2Rr} = \frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Aplicația 33.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a \csc^2 \frac{A}{2}}{r_b \csc^2 \frac{B}{2}} + \frac{r_b \csc^2 \frac{B}{2}}{r_c \csc^2 \frac{C}{2}} + \frac{r_c \csc^2 \frac{C}{2}}{r_a \csc^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(r_a \csc^2 \frac{A}{2}, r_b \csc^2 \frac{B}{2}, r_c \csc^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum r_a \csc^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{r_a \csc^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{r} \cdot \frac{1}{2R} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} = 10 - \frac{2r}{R}$$

Aplicația 34.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \csc^2 \frac{A}{2}}{h_b \csc^2 \frac{B}{2}} + \frac{h_b \csc^2 \frac{B}{2}}{h_c \csc^2 \frac{C}{2}} + \frac{h_c \csc^2 \frac{C}{2}}{h_a \csc^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq 8 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \left(2 - \frac{r}{R} \right)^2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(h_a \csc^2 \frac{A}{2}, h_b \csc^2 \frac{B}{2}, h_c \csc^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\begin{aligned} \sum h_a \csc^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \csc^2 \frac{A}{2}} &= \frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 6Rr) + r^3(4R + r)}{2Rr^2} \cdot \frac{R - r}{2Rr} = \\ &= \frac{(R - r)[p^2(p^2 + 2r^2 - 12Rr) + r^3(4R + r)]}{4R^2r^3} \stackrel{(G)}{\geq} 4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \left(2 - \frac{r}{R} \right)^2. \end{aligned}$$

Aplicația 35.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a(p-a)}{b(p-b)} + \frac{b(p-b)}{c(p-c)} + \frac{c(p-c)}{a(p-a)} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (a(p-a), b(p-b), c(p-c))$ și ținem seama că

$$\sum a(p-a) \sum \frac{1}{a(p-a)} = 2r(4R+r) \cdot \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4Rrp^2} = \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right]. \quad \text{Aplicația 36.}$$

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)h_a}{(p-b)h_b} + \frac{(p-b)h_b}{(p-c)h_c} + \frac{(p-c)h_c}{(p-a)h_a} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = ((p-a)h_a, (p-b)h_b, (p-c)h_c)$ și ținem seama că

$$\sum (p-a)h_a \sum \frac{1}{(p-a)h_a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{2R} \cdot \frac{2R-r}{r^2p} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 37.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\sin^2 \frac{A}{2}}{(p-b)\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{(p-b)\sin^2 \frac{B}{2}}{(p-c)\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{(p-c)\sin^2 \frac{C}{2}}{(p-a)\sin^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((p-a)\sin^2 \frac{A}{2}, (p-b)\sin^2 \frac{B}{2}, (p-c)\sin^2 \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (p-a) \sin^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(p-a) \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{rp}{2R} \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{r^2 p} \stackrel{(G)}{\geq} 10 - \frac{2r}{R}.$$

Aplicația 38.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a) \cos^2 \frac{A}{2}}{(p-b) \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{(p-b) \cos^2 \frac{B}{2}}{(p-c) \cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{(p-c) \cos^2 \frac{C}{2}}{(p-a) \cos^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((p-a) \cos^2 \frac{A}{2}, (p-b) \cos^2 \frac{B}{2}, (p-c) \cos^2 \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (p-a) \cos^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(p-a) \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2R-r}{2Rr} \cdot \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{p^2} \stackrel{\text{Doucet}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Doucet}}{\geq} \frac{2R-r}{2Rr} \cdot \frac{p^2(r-8R) + 3p^2(4R+r)}{p^2} = \frac{2R-r}{2Rr} \cdot (4R+4r) = \frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Aplicația 39.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{(p-b) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{(p-b) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{(p-c) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{(p-c) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{(p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 7 \geq \frac{8R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}, (p-b) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}, (p-c) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{r(4R+r)}{p} \cdot \frac{p}{r^2} = 1 + \frac{4R}{r}.$$

Aplicația 40.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{(p-b) \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{(p-b) \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}}{(p-c) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{(p-c) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}}{(p-a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 39 \geq \frac{24R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((p-a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}, (p-b) \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}, (p-c) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (p-a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(p-a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{p(p^2-12Rr)}{r^2} \cdot \frac{(4R+r)^3-12Rp^2}{rp^3} =$$

$$\frac{p^2-12Rr}{r^2} \cdot \frac{(4R+r)^3-12Rp^2}{rp^2} \stackrel{(G+D)}{\geq} \frac{16Rr-5r^2-12Rr}{r^2} \cdot \frac{3p^2(4R+r)-12Rp^2}{rp^2} = \frac{12R}{r} - 15.$$

Aplicația 41.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a) \sec^2 \frac{A}{2}}{(p-b) \sec^2 \frac{B}{2}} + \frac{(p-b) \sec^2 \frac{B}{2}}{(p-c) \sec^2 \frac{C}{2}} + \frac{(p-c) \sec^2 \frac{C}{2}}{(p-a) \sec^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((p-a) \sec^2 \frac{A}{2}, (p-b) \sec^2 \frac{B}{2}, (p-c) \sec^2 \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (p-a) \sec^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(p-a) \sec^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{p} \cdot \frac{p}{2Rr} \stackrel{(G)}{\geq} 10 - \frac{2r}{R}.$$

Aplicația 42.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a) \csc^2 \frac{A}{2}}{(p-b) \csc^2 \frac{B}{2}} + \frac{(p-b) \csc^2 \frac{B}{2}}{(p-c) \csc^2 \frac{C}{2}} + \frac{(p-c) \csc^2 \frac{C}{2}}{(p-a) \csc^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq 4 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right).$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((p-a) \csc^2 \frac{A}{2}, (p-b) \csc^2 \frac{B}{2}, (p-c) \csc^2 \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (p-a) \csc^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(p-a) \csc^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2+r^2-12Rr}{r^2} \cdot \frac{2R(4R+r)-p^2}{2Rr} \stackrel{(Gerresten)}{\geq}$$

$$\stackrel{(G)}{\geq} \frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{r^2} \cdot \frac{2R(4R+r)-4R^2-4Rr-3r^2}{2Rr} = \frac{4r(R-r)}{r^2} \cdot \frac{4R^2-2Rr-3r^2}{2Rr} =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right).$$

Aplicația 43.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a+2r_a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{(h_b+2r_b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{(h_b+2r_b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{(h_c+2r_c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{(h_c+2r_c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{(h_a+2r_a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a + 2r_a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}, (h_b + 2r_b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}, (h_c + 2r_c) \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și
că

$$\sum (h_a + 2r_a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a + 2r_a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r - 8R) + (4R + r)^3}{p^2} \cdot \frac{2R - r}{2Rr} \stackrel{\text{Doucet}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Doucet}}{\geq} \frac{p^2(r - 8R) + 3p^2(4R + r)}{p^2} \cdot \frac{2R - r}{2Rr} = (4R + 4r) \cdot \frac{2R - r}{2Rr} = \frac{2(R + r)(2R - r)}{Rr}.$$

Aplicația 44.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a + 2r_a) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{(h_b + 2r_b) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}} + \frac{(h_b + 2r_b) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{(h_c + 2r_c) \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} + \frac{(h_c + 2r_c) \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{(h_a + 2r_a) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a + 2r_a) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, (h_b + 2r_b) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, (h_c + 2r_c) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\sum (h_a + 2r_a) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a + 2r_a) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = \frac{p(p^2 + r^2 + 4Rr)}{2Rr} \cdot \frac{1}{p} \stackrel{(G)}{\geq} 10 - \frac{2r}{R}.$$

Aplicația 45.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a + 2r_a) \sin^2 \frac{A}{2}}{(h_b + 2r_b) \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b + 2r_b) \sin^2 \frac{B}{2}}{(h_c + 2r_c) \sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c + 2r_c) \sin^2 \frac{C}{2}}{(h_a + 2r_a) \sin^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 23 \geq \frac{16R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a + 2r_a) \sin^2 \frac{A}{2}, (h_b + 2r_b) \sin^2 \frac{B}{2}, (h_c + 2r_c) \sin^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\sum (h_a + 2r_a) \sin^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a + 2r_a) \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{2R} \cdot \frac{2R(p^2 - 2r^2 - 8Rr)}{r^2 p^2} \stackrel{(\text{Doucet} + \text{Gerretsen})}{\geq}$$

$$\stackrel{(\text{D} + \text{G})}{\geq} \frac{3p^2 - 2p^2}{p^2} \cdot \frac{16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2 p^2} = \frac{8R}{r} - 7.$$

Aplicația 46.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a + 2r_a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{(h_b + 2r_b) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b + 2r_b) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{(h_c + 2r_c) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c + 2r_c) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{(h_a + 2r_a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \left(8 + \frac{2r}{R} \right) \left[\frac{2R}{r} - \left(\frac{4R + r}{p} \right)^2 \right]$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a + 2r_a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}, (h_b + 2r_b) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}, (h_c + 2r_c) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\begin{aligned} \sum (h_a + 2r_a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a + 2r_a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} &= \\ &= \frac{(4R+r)^4 + p^2(r^2 - 8Rr - 48R^2)}{2Rp^2} \cdot \left[\frac{2R}{r^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right] \stackrel{(G)}{\geq} \left(8 + \frac{2r}{R} \right) \left[\frac{2R}{r} - \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Aplicația 47.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a + 2r_a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}}{(h_b + 2r_b) \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b + 2r_b) \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}}{(h_c + 2r_c) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c + 2r_c) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}}{(h_a + 2r_a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a + 2r_a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}, (h_b + 2r_b) \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}, (h_c + 2r_c) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\begin{aligned} \sum (h_a + 2r_a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a + 2r_a) \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}} &= \frac{p^2(p^2 + r^2 - 8Rr)}{2Rr^2} \cdot \frac{2R-r}{p^2} \stackrel{(G)}{\geq} \\ &\geq \frac{2(2R-r)^2}{Rr}. \end{aligned}$$

Aplicația 48.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a + 2r_a) \operatorname{csc}^2 \frac{A}{2}}{(h_b + 2r_b) \operatorname{csc}^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b + 2r_b) \operatorname{csc}^2 \frac{B}{2}}{(h_c + 2r_c) \operatorname{csc}^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c + 2r_c) \operatorname{csc}^2 \frac{C}{2}}{(h_a + 2r_a) \operatorname{csc}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{12r}{R} \geq 15.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a + 2r_a) \operatorname{csc}^2 \frac{A}{2}, (h_b + 2r_b) \operatorname{csc}^2 \frac{B}{2}, (h_c + 2r_c) \operatorname{csc}^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\begin{aligned} \sum (h_a + 2r_a) \operatorname{csc}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a + 2r_a) \operatorname{csc}^2 \frac{A}{2}} &= \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2}{2Rr^2} \cdot \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{4Rp^2} \stackrel{(G+D)}{\geq} \\ &\geq \frac{p^2(16Rr - 5r^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2 \cdot 3p^2}{2Rr^2} \cdot \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{4Rp^2} = 12 - \frac{6r}{R}. \end{aligned}$$

Aplicația 49.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a - 2r) \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{(h_b - 2r) \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{(h_b - 2r) \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{(h_c - 2r) \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{(h_c - 2r) \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{(h_a - 2r) \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{4r}{R} \geq 11.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a - 2r) \operatorname{tg} \frac{A}{2}, (h_b - 2r) \operatorname{tg} \frac{B}{2}, (h_c - 2r) \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și

$$\sum (h_a - 2r) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a - 2r) \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{r(p^2 + r^2 + 4Rr)}{2Rp} \cdot \frac{p}{r^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} \stackrel{(G)}{\geq} 10 - \frac{2r}{R}.$$

Aplicația 50.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a - 2r) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{(h_b - 2r) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}} + \frac{(h_b - 2r) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{(h_c - 2r) \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} + \frac{(h_c - 2r) \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{(h_a - 2r) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right).$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a - 2r) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, (h_b - 2r) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, (h_c - 2r) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\sum (h_a - 2r) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a - 2r) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} \cdot \frac{2R(4R + r) - p^2}{2Rr} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{16Rr - 5r^2 + r^2 - 12Rr}{r^2} \cdot \frac{2R(4R + r) - 4R^2 - 4Rr - 3r^2}{2Rr} = \\ &= \frac{4r(R - r)}{r^2} \cdot \frac{4R^2 - 2Rr - 3r^2}{2Rr} = 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{4R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} - 3 \right). \end{aligned}$$

Aplicația 51.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a - 2r) \cos^2 \frac{A}{2}}{(h_b - 2r) \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b - 2r) \cos^2 \frac{B}{2}}{(h_c - 2r) \cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c - 2r) \cos^2 \frac{C}{2}}{(h_a - 2r) \cos^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 23 \geq \frac{16R}{r}.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a - 2r) \cos^2 \frac{A}{2}, (h_b - 2r) \cos^2 \frac{B}{2}, (h_c - 2r) \cos^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\sum (h_a - 2r) \cos^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a - 2r) \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{2R} \cdot \frac{2R[(4R + r)^2 - 2p^2]}{r^2 p^2} \stackrel{(G)}{\geq}$$

$$= \frac{16Rr - 5r^2 - 2r^2 - 8Rr}{2R} \cdot \frac{2R(3p^2 - 2p^2)}{r^2 p^2} = \frac{8R}{r} - 7.$$

Aplicația 52.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{(h_b - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{(h_c - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{(h_a - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R + r}{p} \right)^2 \right].$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}, (h_b - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}, (h_c - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\begin{aligned} \sum (h_a - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a - 2r) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} &= \frac{r^2 [p^2 + (4R + r)^2]}{2Rp^2} \cdot \frac{4R + r}{r^2} = \\ &= \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R + r}{p} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Aplicația 53.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a - 2r) \sec^2 \frac{A}{2}}{(h_b - 2r) \sec^2 \frac{B}{2}} + \frac{(h_b - 2r) \sec^2 \frac{B}{2}}{(h_c - 2r) \sec^2 \frac{C}{2}} + \frac{(h_c - 2r) \sec^2 \frac{C}{2}}{(h_a - 2r) \sec^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + \frac{12r}{R} \geq 15.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left((h_a - 2r) \sec^2 \frac{A}{2}, (h_b - 2r) \sec^2 \frac{B}{2}, (h_c - 2r) \sec^2 \frac{C}{2} \right)$, apoi

$$\begin{aligned} \sum (h_a - 2r) \sec^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{(h_a - 2r) \sec^2 \frac{A}{2}} &= \frac{p^2 (p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2 (4R + r)^2}{2Rp^2} \cdot \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{4Rr^2} \stackrel{(G)}{\geq} \\ &\stackrel{(G)}{\geq} \frac{p^2 (16Rr - 5r^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2 \cdot 3p^2}{2Rp^2} \cdot \frac{16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr}{4Rr^2} = 12 - \frac{6r}{R}. \end{aligned}$$

Aplicația 54.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{b^2 \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{b^2 \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{c^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{c^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{a^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq 8 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \left(2 - \frac{r}{R} \right).$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(a^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}, b^2 \operatorname{tg} \frac{B}{2}, c^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum a^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{1}{a^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = 4p(R-r) \cdot \frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 6Rr) + r^3(4R+r)}{16R^2r^3p} \stackrel{(G)}{\geq} 4\left(\frac{R}{r}-1\right)\left(2-\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{Aplicați}$$

a 55.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2 r_a}{b^2 r_b} + \frac{b^2 r_b}{c^2 r_c} + \frac{c^2 r_c}{a^2 r_a} \right)^2 + 9 \geq 8 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \left(2 - \frac{r}{R} \right)^2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = (a^2 r_a, b^2 r_b, c^2 r_c)$ și ținem seama că

$$\sum a^2 r_a \sum \frac{1}{a^2 r_a} = 4p(R-r) \cdot \frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 6Rr) + r^3(4R+r)}{16R^2r^3p} \stackrel{(G)}{\geq} 4\left(\frac{R}{r}-1\right)\left(2-\frac{r}{R}\right)^2.$$

Aplicația 56.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2 \sec^2 \frac{A}{2}}{b^2 \sec^2 \frac{B}{2}} + \frac{b^2 \sec^2 \frac{B}{2}}{c^2 \sec^2 \frac{C}{2}} + \frac{c^2 \sec^2 \frac{C}{2}}{a^2 \sec^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \frac{4(2R-r)^2}{Rr}, \text{ unde } n \leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(a^2 \sec^2 \frac{A}{2}, b^2 \sec^2 \frac{B}{2}, c^2 \sec^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum a^2 \sec^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{a^2 \sec^2 \frac{A}{2}} = 8R(2R-r) \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2r^2} \stackrel{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}.$$

Aplicația 57.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2 \csc^2 \frac{A}{2}}{b^2 \csc^2 \frac{B}{2}} + \frac{b^2 \csc^2 \frac{B}{2}}{c^2 \csc^2 \frac{C}{2}} + \frac{c^2 \csc^2 \frac{C}{2}}{a^2 \csc^2 \frac{A}{2}} \right)^2 + 9 \geq \left(4 + \frac{r}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

Dezvoltări, Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x, y, z) = \left(a^2 \csc^2 \frac{A}{2}, b^2 \csc^2 \frac{B}{2}, c^2 \csc^2 \frac{C}{2} \right)$ și ținem seama că

$$\sum a^2 \csc^2 \frac{A}{2} \sum \frac{1}{a^2 \csc^2 \frac{A}{2}} = 8R(4R+r) \cdot \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2p^2} = \left(2 + \frac{r}{2R} \right) \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$$

La fiecare din inegalitățile din triunghi de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. Romanian Mathematical Magazine 2017, Founding Editor Daniel Sitaru, Romanian Mathematical Society, Mehedinți Branch.
2. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

5. APLICAȚII ALE FUNCȚIEI LYAPUNOV LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DIFUZIEI DE CĂLDURĂ

Prof. Apostol Georgiana Maria
Școala Gimnazială Valea Mare, Dâmbovița

Fie $X = L^1(\Omega)$ spațiul funcțiilor integrabile pe Ω , Ω un domeniu mărginit și măsurabil în $\mathbb{R}^n$ și fie definit un operator A precum urmează:

(*) $D(A) = \{u \in L^1(\Omega) : \rho(u) \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta \rho(u) \in L^1(\Omega)\}$ și $Au = -\Delta \rho(u)$ pentru $u \in D(A)$,

(**) $W^{1,1}(\Omega)$ este spațiul Sobolev al funcțiilor μ pe Ω pentru care $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$,

$1 \leq i \leq N$, cu norma lui obișnuită,

$\|u\| = \int_{\Omega} |u(x)| dx < +\infty$, $W_0^{1,1}(\Omega)$ este închiderea lui $C_0^\infty(\Omega)$ în $W^{1,1}(\Omega)$, $\Delta \rho(u)$ este laplacianul lui $\rho(u)$ în sensul distribuțiilor.

Lema 1. Operatorul A definit de (*) și (**) este m -acretiv. Această lema este datorată lui Brezis și Strauss.

Teorema 1: Fie A aplicația acretivă pe X , care satisface condiția de imagine pe X , $S(t)$ semigrupul de contracții generat de $-A$ pe $\overline{D(A)}$, unde $\overline{D(A)}$ – închiderea topografică a operatorului A . Funcționala φ este slab inferior semicontinuă, β este un graf maximal monoton în $\mathbb{R}$, satisfăcând $R(\varphi) \subset D(\varphi)$, unde $R(\varphi)$ este imaginea aplicației φ

Dacă sunt satisfăcute condițiile:

$$I_\lambda(\overline{D(A)} \cap D(\varphi)) \subset \overline{D(A)} \cap D(\varphi), (\forall) \lambda > 0$$

$$\varphi(I_\lambda x) + \lambda \beta^0(\varphi(I_\lambda x)) \leq \varphi(x), (\forall) x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi)$$

atunci $\varphi(S(t)x) \leq V(t)$, $(\forall) t \in [0, +\infty)$, unde $V(t)$ este unica soluție a problemei cu valori inițiale $0 \in v' + \beta(v)$, $v(0) = \varphi(x)$,

Din lema 1 și teorema 1 rezultă că $-A$ generează un semigrup de contracții $S(t)$ în $L^1(\Omega)$ și că pentru fiecare $u_0 \in \overline{D(A)}$, $u(t) = S(t)u_0$ este soluția atenuată a problemei difuziei:

$$\varphi \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \rho(u) = 0 \text{ în } \Omega \times (0, \infty)$$

$$\rho(u) = 0 \text{ pe } \partial\Omega \times (0, \infty) \text{ și}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ în } \Omega.$$

Comportamentul asimptotic al acestei soluții când $t \rightarrow \infty$ depinde de funcția ρ din definiția lui A. În funcție de comportamentul diferit al lui ρ , vom obține diferite comportamente ale soluției u când $t \rightarrow \infty$

Lema 2. Fie A operatorul m -acretiv definit de (*) și (**) și fie că ρ să satisfacă lema 1. Dacă $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ și $u \in D(A)$ este soluția lui $u - \lambda \Delta \rho(u) = f$, unde $L^p(\Omega)$ este spațiul funcțiilor p -integrabile, atunci

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.1)$$

$$\text{Dacă } \rho'(r) \geq c|r|^{\alpha-1}, c > 0, \alpha > 0 \quad (2.2)$$

$$\text{atunci } \int_{\Omega} |u|^p dx + \lambda c_1 \int_{\Omega} |u|^{p+\alpha-1} dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.3)$$

și pentru $N \geq 3$ atunci

$$\int_{\Omega} |u|^p dx + \lambda c_2 \left(\int_{\Omega} |u|^{(p+\alpha-1)N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/N} \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.4)$$

unde c_1 și c_2 sunt constante pozitive independente de p .

Demonstrație: Fie $\delta > 0$ și $\rho_{\delta}(r) = \rho(r) + \delta r$, atunci ρ_{δ} satisface relația :

$$\rho \in C(R) \cap C^1(R \setminus \{0\}), \text{ cu } \rho(0) = 0, \rho'(x) \geq 0, (\forall) x \neq 0$$

și ρ_{δ}^{-1} este Lipschitz continuă în R .

$$\text{Fie } f \in L^p(\Omega) \text{ și fie } u_{\delta} \text{ soluția lui } u_{\delta} - \lambda \Delta \rho_{\delta}(u_{\delta}) = f \quad (2.5)$$

Vom începe prin a demonstra estimările (2.1), (2.3) și (2.4) pentru u_{δ} . Înmulțind (2.5) cu $\Psi_M(u_{\delta})$ unde:

$$\Psi_M(x) = \begin{cases} |x|^{p-1} \operatorname{sgn} x, & \text{pentru } |x| \leq M, \\ M^{p-1} \operatorname{sgn} x, & \text{pentru } |x| > M. \end{cases}$$

integrând peste Ω și folosind inegalitatea lui Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{p-1}{p} b^{\frac{p}{p-1}}$ în dreapta, găsim că:

$$\int_{\{|u_{\delta}| \leq M\}} |u_{\delta}|^p dx - \lambda p \int_{\Omega} \Delta \rho_{\delta}(u_{\delta}) \Psi_M(u_{\delta}) dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.6)$$

când $\{|u_{\delta}| \leq M\}$ indică mulțimea $\{x : |u_{\delta}(x)| \leq M\}$.

Din $\rho_{\delta}(u_{\delta}) \in W_0^{1,1}(\Omega)$ și ρ_{δ}^{-1} este continuă Lipschitz rezultă că $(u_{\delta}) \in W_0^{1,1}(\Omega)$ și că $\Delta \rho_{\delta}(u_{\delta}) = \rho_{\delta}'(u_{\delta}) \Delta u_{\delta}$.

Integrând termenul din mijloc din (2.6) prin părți $\Rightarrow$

$$\int_{\{|u_{\delta}| \leq M\}} |u_{\delta}|^p dx + \lambda p(p-1) \int_{\{|u_{\delta}| \leq M\}} \rho_{\delta}'(u_{\delta}) |u_{\delta}|^{p-2} |\nabla u_{\delta}|^2 dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.7)$$

Cum $\rho_{\delta}' = \rho' + \delta$ putem înlocui ρ_{δ}' cu ρ' în (2.7) fără a schimba inegalitatea.

Făcând aceasta și lăsând $M \rightarrow \infty$ în (2.7), găsim:

$$\int_{\Omega} |u_{\delta}|^p dx + \lambda p(p-1) \int_{\Omega} \rho'(u_{\delta}) |u_{\delta}|^{p-2} |\nabla u_{\delta}|^2 dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.8)$$

și, cum $\rho' \geq 0$, avem :

$$\int_{\Omega} |u_{\delta}|^p dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.9)$$

Din (2.8) și din egalitatea :

$$|v|^{p+\alpha-3} |\Delta v|^2 = \frac{2}{(p+\alpha-1)^2} \left| \Delta v^{(p+\alpha-1)/2} \right|^2 \text{ rezultă că:}$$

$$\int_{\Omega} |u_{\delta}|^p dx + \frac{4\lambda p(p-1)}{(p+\lambda-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u_{\delta}^{\frac{p+\alpha-1}{2}} \right|^2 dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.10)$$

Acum, pentru că Ω este finit și u_δ dispare în $\delta\Omega(u_\delta \in W_0^{1,1}(\Omega))$ rezultă, utilizând inegalitatea lui Poincare că:

$$C_0 \int_{\Omega} |u_\delta|^{p+\alpha-1} dx \leq \int_{\Omega} \left| \nabla u_\delta^{\frac{p+\alpha-1}{2}} \right|^2 dx \quad (2.11)$$

Combinând (2.10) și (2.11) aflăm:

$$\int_{\Omega} |u_\delta|^p dx + \lambda c_1 \int_{\Omega} |u_\delta|^{p+\alpha-1} dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.12)$$

Pentru $N \geq 3$ putem folosi inegalitatea lui Sobolev

$$\left(\int_{\Omega} |v|^{2N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/N} \leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

și aflăm:

$$\int_{\Omega} |u_\delta|^p dx + \lambda c_2 \left(\int_{\Omega} |u_\delta|^{(p+\alpha-1)N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/2} \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \quad (2.14)$$

Estimările (2.9), (2.12) și (2.14) sunt estimările derivate ale lui u_δ . Pentru a demonstra estimările corespundente pentru u , soluția lui $u - \lambda \Delta \rho(u) = f$, trebuie să arătăm că $u_\delta \rightarrow u$ când $\delta \rightarrow 0$ în $L^p(\Omega)$. Alegând un șir $\delta_n \downarrow 0$ astfel ca $u_{\delta_n}(x) \rightarrow u$ în Ω , depășind limita prin acest șir în (2.9), (2.12) și (2.14) și folosind lema lui FATOUX, urmează (2.1), (2.3) și (2.4).

Voi schița acum câteva consecințe din lema 1.2 și din teoria abstractă.

Propoziția 1. Fie ca ρ să satisfacă $\rho \in C(R) \cap C^1(R \setminus \{0\})$ cu $\rho'(x) \geq 0, (\forall) x \neq 0$ (*)

și u să fie soluția atenuată a problemei difuziei:

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta t} - \Delta \rho(u) = 0 \text{ în } \Omega \times (0, \infty) \\ \rho(u) = 0 \text{ pe } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ în } \Omega \end{cases} \quad (**)$$

Dacă $u_0 \in \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, atunci

$u(t) \in \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega)$, pentru orice $t \geq 0$, adică $S(t) : \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega) \rightarrow \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega)$, pentru $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstrație: Fie $1 \leq p \leq \infty, X = L^p(\Omega)$ și fie $\varphi_p(u) = \int_{\Omega} |f|^p dx$. Trebuie verificat că pentru orice $v \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ și $\lambda > 0$

$$\varphi_p(I_\lambda v) \leq \varphi_p(v) \quad (2.15)$$

și deci $S(t) : \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega) \rightarrow \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega)$, pentru $1 \leq p \leq \infty$ utilizând și teorema:

(■) Fie A un operator acretiv în X , satisfăcând condiția imaginii, $S(t)$ semigrupul de contracții generat de A , φ o funcțională slab inferior semicontinuă, $\Psi \geq 0$ o funcțională slab superior semicontinuă.

Notăm-1) $\Delta = \overline{D(A)} \cap D(\varphi)$, dacă :

1. $I_\lambda(b) \subset \Delta \cap D(\Psi)$,
2. $\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda} \varphi(I_\lambda x) + \lambda \Psi(I_\lambda x) - \varphi(x) \right) \leq 0$

atunci φ este o funcție Lyapunov pentru A și satisface relația:

$$\varphi(S(t)x_0) - \varphi(S(s)x_0) + \int_s^t \Psi(S(\tau)x_0) d\tau \leq 0, (\forall) x_0 \in D, t \geq s \geq 0.$$

$$\text{Din (2.15)} \Rightarrow (\varphi_p(I_\lambda v))^{1/p} \leq (\varphi_p(v))^{1/p} \quad (2.16)$$

și presupunem că $\forall v \in L^\infty(\Omega)$, putem trece la limită când $p \rightarrow \infty$ în (2.16) pentru a obține $\|I_\lambda v\|_{\lambda^\infty} \leq \|v\|_{\lambda^\infty}$ ceea ce implică, din nou, utilizând teorema (■) că :

$$S(t) : \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega) \rightarrow \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega).$$

Rezultatul urmator se datorează lui M. Crandall.

Propoziția 2. Fie ca ρ să satisfacă (*) și (1.2.2.) cu $\alpha > 1$. Dacă u este soluția lui (***) atunci pentru orice $t > 0$, $1 \leq p < \infty$,

$$u(t) \in \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega) \text{ și } \|u(t)\|_{L^p} \leq c \left(\frac{p}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (2.17)$$

unde $c > 0$ este o constantă care depinde numai de Ω .

Demonstrație: Se dă $p \geq 1$ și se presupune mai întâi că $u_0 \in L^p(\Omega)$. La propoziția anterioară, $u(t) \in L^p(\Omega)$, pentru orice $t \geq 0$. Din moment ce Ω este limitat, rezultă din inegalitatea lui Holder că

$$\left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{(p+\alpha-1)/p} \leq c \int_{\Omega} |u|^{p+\alpha-1} dx \quad (2.18)$$

unde c este o constantă dependentă doar de Ω .

Definind: $\varphi(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$, rezultă din (2.18) și (2.3) că:

$$\varphi(I_{\lambda} u) + \lambda c \varphi(I_{\lambda} u)^{1+(\alpha-1)/p} \leq \varphi(u) \text{ și din propoziția de mai jos:}$$

(***) Fie A o aplicație acretivă satisfăcând condiția imaginii în X , $S(t)$ semigrupul generat de A , φ o funcțională slab inferior semicontinuă nenegativă. Dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$1) I_{\lambda}(\overline{D(A)} \cap D(\varphi)) \subset \overline{D(A)} \cap D(\varphi), \lambda > 0$$

$$2) \varphi(x)I_{\lambda} + \lambda c \varphi(I_{\lambda} x)^{1+\alpha} \leq \varphi(x), (\forall) x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi)$$

atunci:

a)

Există o descreștere universală

$$\varphi(S(t)x) \leq \frac{1}{(c\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ cu } \alpha > 0, x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi), t > 0;$$

b)

O descreștere exponențială

$$\varphi(S(t)x) \leq \varphi(x)e^{-ct}, \alpha = 0, x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi), t > 0;$$

c)

O stingere finită

$$\varphi(S(t)x) = 0, \text{ pentru } x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi), t \geq \varphi \frac{(x)^{|\alpha|}}{|\alpha|c}, \text{ cand } -1 < \alpha < 0$$

deducem că: $\|u(t)\|_{L^p} \leq c \left(\frac{p}{t}\right)^{p/(\alpha-1)}$, de unde (2.17).

Dacă $u_0 \in L^1(\Omega)$, alegem $u_{0,n} \in L^p(\Omega)$, precum $u_{0,n} \rightarrow u_0$ în $L^1(\Omega)$.

Din moment ce (2.17) este valabil pentru orice $u_n(t)$ în prima parte a demonstrației și din moment ce $v \rightarrow \|v\|_{L^p}$ este inferior semicontinuă rezultă că $u(t) \in L^p(\Omega)$ pentru orice $t > 0$, și că (1.2.17) este valabil pentru u .

Propoziția 3. Se arată că dacă ρ satisface (*) și $\rho(r) \geq c|r|^{\alpha-1}$, cu $\alpha > 1$, atunci semigrupul $S(t)$ generat de A satisface:

$$S(t) : \overline{D(A)} \cap L'(\Omega) \rightarrow \overline{D(A)} \cap L^p(\Omega) \quad (2.19)$$

Pentru orice $t > 0$ și $1 \leq p < \infty$ și, mai mult, șirul $S(t)$ este limitat uniform în $L^p(\Omega)$, independent de datele inițiale.

Fie $p \rightarrow \infty$ pentru a arata că $S(t)$ acoperă $\overline{D(A)} \cap L'(\Omega)$ în $L^\infty(\Omega)$.

Totuși, acest lucru nu poate fi făcut folosind (2.17), deoarece constanta se transformă când $p \rightarrow \infty$. Pentru $N \geq 3$ vom arăta că putem depăși această situație.

Propoziția 4. (regularizare). Fie $N \geq 3$ și fie ρ să satisfacă (*) și $\rho'(r) \geq c|r|^{\alpha-1}$, cu $\alpha > (N-2)/N$. Dacă u este soluție a lui (**), atunci pentru orice $t > 0$,

$$u(t) \in L^\infty(\Omega) \text{ și } \|u(t)\|_{L^\infty} \leq ct^{|N|(2p_0+N(\alpha-1))} \|u\|_{L^{p_0}}^{2p_0/(2p_0+N(\alpha-1))} \quad (2.20)$$

Pentru orice $u_0 \in L^{p_0}(\Omega)$, $p_0 \geq 1$, unde c este o constantă independentă de p_0 .

Demonstrație: Se dă $p_0 \geq 1$ și fie $\varphi_n(u) = \int_\Omega |u|^{p_n} dx$, unde

$$p_n = \gamma_{p_n} + \gamma(\alpha - 1) \quad (2.21)$$

$\gamma = \frac{N}{N-2} > 1$ rezultă din (2.4) ca $\varphi_n(I_\lambda u) + \lambda c_{p_{n+1}} (I_\lambda u)^{1/\gamma} \leq \varphi_n(t)$ și (2.20) va rezulta din observația: presupunem că $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ și fie $p_0 \rightarrow \infty$ în (2.20), aflăm din nou că $S(t) : \overline{D(A)} \cap L^\infty(\Omega) \rightarrow \overline{D(A)} \cap L^\infty(\Omega)$. M. Crandall a arătat că în acest caz avem (2.22): $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq ct^{-1/(\alpha-1)}$, unde $c > 0$ este o constantă independentă de u_0 . Combinând acest rezultat cu propoziția 4 rezultă că, dacă u este soluția lui (**), atunci pentru orice $t > 0$, $u(t) \in L^\infty(\Omega)$ și (2.22) este valabil.

Observație: A. Brezis și A. Friedman arată că, dacă în propoziția 4, $\alpha \leq (N-3)/N$, atunci nu există nici o piedică, nici chiar de la L' la L^p , $p \geq 1$, pentru $t > 0$.

Propoziția 5. Fie $N \geq 3$ și fie ca ρ să satisfacă (*) și $\rho'(r) \geq c(r)^{\alpha-1}$, cu $0 < \alpha < 1 - \frac{2}{N}$. Fie $p = \frac{1}{2}N(\alpha - 1)$ și fie $u_0 \in L^p(\Omega) \cap \overline{D(A)}$. Dacă u este soluția lui (**), atunci există $T(u) > 0$ astfel încât $u(t) = 0$, pentru $t \geq T(u)$.
Mai mult

$$T(u) \leq c \|u_0\|_{\alpha^p}^{p/2N} \quad (2.23)$$

unde c este o constantă independentă de u_0 .

Demonstrație: Fie $p = \frac{1}{2}N(\alpha - 1)$, aceasta implică $\frac{N}{N-2}(p + \alpha - 1) = p$ și, de aceea, dacă $\varphi(u) = \int_\Omega |u|^p dx$, (2.4) conduce la

$$\varphi(I_\lambda u) + \lambda c \varphi(I_\lambda u)^{1-2/N} \leq \varphi(u) \quad (2.24)$$

Utilizând propoziția (***) implică $\varphi(u(t)) = 0$, pentru $t \geq T(u)$, unde $T(u) \leq \frac{N}{2c} \left(\int_\Omega |u_0|^p dx \right)^{2/N}$, de unde rezultatul dorit.

Rezultatul acestei propoziții este valabil pentru domenii nemărginite. Pentru domenii mărginite, rezultatul este adevărat pentru un șir mai mare al lui α , adică $0 < \alpha < 1$.