WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

DECEMBRIE 2022
ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. DECEMBRIE 2022

1. A generalization of one inequality and some geometric applications ... pag. 2
D.M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu

2. Aplicații ale inegalității lui Băndilă... pag.8
Marin Chirciu

3. Asupra unei probleme de olimpiadă... pag. 35
Tănasie Elena

4. Another solution for problem S595... pag. 38
Daniel Văcaru

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FOMAT WORD PE
REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. A generalization of one inequality and some geometric applications

By D.M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu

Abstract. In this paper we prove some generalizations of a problem and then we give some of its geometric applications.

In [1], José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain, proposed

Problem 694. Let a,b,c be positive real numbers such that $a+b+c=1$.Prove that

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\geq\frac{1}{6}.$$

In [2] the above problem was generalized as follows

Theorem. If $a,b,c\in R_+$, $a+b+c\in R_+^*$, $n\in N^*-\{1\}$, $x_k\in R_+^*$, $\forall k=\overline{1,n}$, and $m\in R_+$, then:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{m+2}}{(ax_k+bx_{k+1}+cx_{k+2})^m}\geq\frac{1}{(a+b+c)^m}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\geq\frac{1}{n(a+b+c)^m}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 \qquad (*)$$

where $x_{n+1}=x_1$, and $x_{n+2}=x_2$.

Proof. We have:

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{m+2}}{(ax_k+bx_{k+1}+cx_{k+2})^m}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k^2\right)^{m+1}}{\left(ax_k^2+bx_kx_{k+1}+cx_kx_{k+2}\right)^m}\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k^2\right)^{m+1}}{\left(ax_k^2+\frac{b}{2}\left(x_k^2+x_{k+1}^2\right)+\frac{c}{2}\left(x_k^2+x_{k+2}^2\right)\right)^m}=2^m\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k^2\right)^{m+1}}{\left(2ax_k^2+b\left(x_k^2+x_{k+1}^2\right)+c\left(x_k^2+x_{k+2}^2\right)\right)^m},$$

where we apply J. Radon' s inequality and we deduce that:

$$W_n\geq 2^m\cdot\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\left((2ax_k^2+b(x_k^2+x_{k+1}^2)+c(x_k^2+x_{k+2}^2)\right)\right)^m}=$$

$$= 2^m \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{m+1}}{2^m \cdot (a+b+c)^m \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{(a+b+c)^m},$$

and by QM$\geq$AM, i.e. $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ we obtain (*), and we are done.

Our aim in this note is also to give some generalizations and some geometric applications of the problem from above.

Aplications:

A1. If $a,b,c \in R_+^*$, $m \in R_+$ and $a+b+c=1$, then:

$$\frac{a^{m+2}}{(a+b)^m} + \frac{b^{m+2}}{(b+c)^m} + \frac{c^{m+2}}{(c+a)^m} \geq \frac{1}{2^m \cdot 3}.$$

Proof. We have:

$$U = \sum \frac{a^{m+2}}{(a+b)^m} = \sum \frac{a^{2m+2}}{(a^2+ab)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(a^2+ab)^m} \geq$$

$$\geq \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{\left(a^2 + \frac{a^2+b^2}{2}\right)^m} = 2^m \cdot \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(3a^2+b^2)^m},$$

where we apply J. Radon' s inequality and we obtain that:

$$U \geq 2^m \cdot \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum (3a^2+b^2)\right)^m} = 2^m \cdot \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{\left(4\sum a^2\right)^m} = \frac{1}{2^m} \cdot \sum a^2$$

Since,

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \text{ (because AM} \leq \text{QM)},$$

we deduce that:

$$U \geq \frac{1}{2^m} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

and from hypothesis,

$$a+b+c=1,$$

we obtain

$$U \geq \frac{1}{2^m \cdot 3}, \text{ i.e. Q.E.D.}$$

Remark 1. If $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, then by (*) we obtain that:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+2}}{(ax_k + bx_{k+1} + cx_{k+2})^m} \geq \frac{1}{n(a+b+c)^m}, \ \forall m \in R_+ \qquad (1)$$

- If $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1,\ a=b=1,\ c=0$, then by (1) we obtain that:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+2}}{(x_k + x_{k+1})^m} \geq \frac{1}{2^m \cdot n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{1}{2^m \cdot n}, \ \forall m \in R_+ \qquad (2)$$

- If $n=3,\ x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c$, then by (2) we obtain A1., i.e. :

$$\sum \frac{a^{m+2}}{(a+b)^m} \geq \frac{1}{2^m \cdot 3}, \ \forall m \in R_+ \qquad (3)$$

- If $m=1$, then by (3) we obtain the Problem 694. Therefore, A1. is a generalization of this problem.

A2. If $a,b,c \in R_+^*,\ m \in R_+,\ x,y \in R_+^*$ and $a+b+c=1$, then:

$$\sum \frac{a^{m+2}}{(xa+yb)^m} \geq \frac{1}{3(x+y)^m}.$$

Proof. We have:

$$V = \sum \frac{a^{m+2}}{(xa+yb)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(xa^2+yab)^m} \geq$$

$$\geq \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{\left(xa^2 + \frac{y(a^2+b^2)}{2}\right)^m} = 2^m \cdot \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{((2x+y)a^2+yb^2)^m},$$

where we apply J. Radon' s inequality and we obtain that:

$$V \geq 2^m \cdot \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum((2x+y)a^2+yb^2)\right)^m} = 2^m \cdot \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{2^m (x+y)^m \left(\sum a^2\right)^m} = \frac{1}{(x+y)^m} \cdot \sum a^2 \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(x+y)^m} = \frac{1}{3(x+y)^m}.$$

Remark 2. For $x = y = 1$, we reobtain the generalization of the Problem 694, i.e. A1.

Next we use the usual notations: $AB = c, BC = a, CA = b,$ p is the semiperimeter, R is circumradius, and r is inradius.

A3. If $x, y \in R_+^*, m \in R_+$, then in any triangle ABC holds the inequality:

$$\frac{a^{m+2}}{(xa+yb)^m} + \frac{b^{m+2}}{(xb+yc)^m} + \frac{c^{m+2}}{(xc+ya)^m} \geq \frac{2(p^2 - r^2 - 4Rr)}{(x+y)^m}.$$

Proof. We have:

$$W = \sum \frac{a^{m+2}}{(xa+yb)^m} = \sum \frac{a^{2m+2}}{(xa^2+yab)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(xa^2+yab)^m},$$

and by J. Radon' s inequality we deduce that

$$W \geq \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum (xa^2+yab)\right)^m} = \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{x\sum a^2 + y\sum ab}.$$

Since

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

yields

$$W \geq \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{(x+y)^m \left(\sum a^2\right)^m} = \frac{\sum a^2}{(x+y)^m}.$$

Because

$$\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr),$$

we obtain the result.

A4. If $x, y \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds the inequality:

$$\frac{a^3}{xa+yb}+\frac{b^3}{xb+yc}+\frac{c^3}{xc+ya}\geq\frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{x+y}.$$

Proof. We have:

$$X=\sum\frac{a^3}{xa+yb}=\sum\frac{a^4}{xa^2+yab}=\sum\frac{\left(a^2\right)^2}{xa^2+yab},$$

and by H.Bergström's inequality we deduce that:

$$X\geq\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{x\sum a^2+y\sum ab}.$$

but

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

so that:

$$X\geq\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{x\sum a^2+y\sum a^2}=\frac{\sum a^2}{x+y},$$

and if we use the well-known fact

$$\sum a^2=2(p^2-r^2-4Rr),$$

we are done.

A 5. If $x,y\in R_+^*, m\in R_+$, then in any triangle ABC holds the inequality:

$$\frac{r_a^{m+2}}{\left(xr_a+yr_b\right)^m}+\frac{r_b^{m+2}}{\left(xr_b+yr_c\right)^m}+\frac{r_c^{m+2}}{\left(xr_c+yr_a\right)^m}\geq\frac{\left(4R+r\right)^2-2p^2}{\left(x+y\right)^m}.$$

Proof. We have:

$$Y=\sum\frac{r_a^{m+2}}{\left(xr_a+yr_b\right)^m}=\sum\frac{r_a^{2m+2}}{\left(xr_a^2+yr_ar_b\right)^m}=\sum\frac{\left(r_a^2\right)^{m+1}}{\left(xr_a^2+yr_ar_b\right)^m},$$

and by J.Radon's inequality we deduce that:

$$Y\geq\frac{\left(\sum r_a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum\left(xr_a^2+yr_ar_b\right)\right)^m}=\frac{\left(\sum r_a^2\right)^{m+1}}{\left(x\sum r_a^2+y\sum r_ar_b\right)^m}.$$

Because we have

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2\geq r_ar_b+r_br_c+r_cr_a,$$

we deduce that:

$$Y\geq\frac{\left(\sum r_a^2\right)^{m+1}}{(x+y)^m\left(\sum r_a^2\right)^m}=\frac{\sum r_a^2}{(x+y)^m}.$$

If we use the well-known formula

$$\sum r_a^2=(4R+r)^2-2p^2,$$

we obtain the conclusion.

A6. If $x,y\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds the inequality:

$$\frac{r_a^3}{xr_a+yr_b}+\frac{r_b^3}{xr_b+yr_c}+\frac{r_c^3}{xr_c+yr_a}\geq\frac{(4R+r)^2-2p^2}{x+y}.$$

Proof. We have:

$$Z=\sum\frac{r_a^3}{xr_a+yr_b}=\sum\frac{r_a^3}{xr_a^2+yr_ar_b}=\sum\frac{\left(r_a^2\right)^2}{xr_a^2+yr_ar_b},$$

and by H.Bergström's inequality we deduce that:

$$Z\geq\frac{\left(\sum r_a^2\right)^2}{x\sum r_a^2+y\sum r_ar_b}=\frac{\left(\sum r_a^2\right)^{m+1}}{\left(x\sum r_a^2+y\sum r_ar_b\right)^m}.$$

We have

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2\geq r_ar_b+r_br_c+r_cr_a,$$

so that:

$$Z\geq\frac{\left(\sum r_a^2\right)^2}{(x+y)\sum r_a^2}=\frac{\sum r_a^2}{x+y}.$$

By well-known

$$\sum r_a^2=(4R+r)^2-2p^2,$$

we finishead the proof.

A7. If $x,y\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds the inequality:

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}}{x\cdot tg\frac{A}{2}+y\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}}{x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}}{x\cdot tg\frac{C}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2}}\geq\frac{4R+r}{(x+y)p}.$$

Proof. By H. Bergström' inequality we have:

$$\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}}{xtg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}}\geq\frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}\right)^2}{(x+y)\sum tg\frac{A}{2}}=\frac{\sum tg\frac{A}{2}}{x+y},$$

Since we know that:

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p},$$

we obtain Q.E.D.

A8. In any triangle ABC holds the inequality:

$$\frac{ctg^2\frac{A}{2}}{2p-\left(ctg\frac{A}{2}-ctg\frac{B}{2}\right)}+\frac{ctg^2\frac{B}{2}}{2p-\left(ctg\frac{B}{2}-ctg\frac{C}{2}\right)}+\frac{ctg^2\frac{C}{2}}{2p-\left(ctg\frac{C}{2}-ctg\frac{A}{2}\right)}\geq\frac{p}{6r^2}.$$

Proof. By H. Bergström' inequality we have:

$$\sum\frac{ctg^2\frac{A}{2}}{2p-\left(ctg\frac{A}{2}-ctg\frac{B}{2}\right)}\geq\frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{6p-r\sum\left(ctg\frac{A}{2}-ctg\frac{B}{2}\right)}=\frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{6p}.$$

But is well-known that:

$$\sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r},$$

hence Q.E.D.

References

[1] José Luis Díaz-Barrero, *Problem 694*, THE PENTAGON, Vol. 71, No. 1, Fall 2011, p. 54.

[2] D.M. Bătineţu-Giurgiu, D.M., Stanciu, N., *Generalizations and Applications of Problems 682 and 694* , The Pentagon, Vol. 72, No. 1, Fall 2012, pp. 21-33.

2. Aplicații ale inegalității lui Băndilă

Marin Chirciu[1]

Art 4100

În acest articol este demonstrată inegalitatea lui Băndilă și este folosită apoi în rezolvarea unor inegalități în triunghi , propuse în diverse publicații de matematică .

Lema (Băndilă).

In ΔABC

$$\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}.$$

GM 2/1985, Viorel Băndilă, București

Demonstrație.

Cu substituțiile lui Ravi $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ avem

$$R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}} \text{ și } r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}, \text{ de unde } \frac{R}{r} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}.$$

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz} \geq \frac{x+z}{x+y} + \frac{x+y}{x+z} \Leftrightarrow \frac{(y+z)}{4xyz} \geq \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2},$$

care rezultă din sumarea inegalităților imediate $\frac{1}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4xy}$ și $+\frac{1}{(x+z)^2} \leq \frac{1}{4xz}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația1.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^2 + \lambda bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{6r^2}{R^2}(1+\lambda), \lambda \geq 0.$$

Mehmet Șahin, Turkey

Soluție

Lema

In ΔABC

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$$\frac{bc}{b^2+c^2} \geq \frac{r}{R}.$$

Demonstrație

$\frac{bc}{b^2+c^2} = \frac{1}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}} \overset{Bandila}{\geq} \frac{1}{\frac{R}{r}} = \frac{r}{R}$, cu egalitate pentru $b=c$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS = \sum \frac{a^2+\lambda bc}{b^2+c^2} = \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} + \lambda \sum \frac{bc}{b^2+c^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} + \lambda \cdot \frac{3r}{R} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{2} + \frac{3\lambda r}{R} \overset{Euler}{\geq}$$
$$\overset{Euler}{\geq} \frac{6r^2}{R^2}(1+\lambda) = RHS.$$

Remarca.

Problema se poate întări.

Aplicația2.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^2+\lambda bc}{b^2+c^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{3\lambda r}{R}, \lambda \geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

In ΔABC

$$\frac{bc}{b^2+c^2} \geq \frac{r}{R}.$$

Demonstrație

$\frac{bc}{b^2+c^2} = \frac{1}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}} \overset{Bandila}{\geq} \frac{1}{\frac{R}{r}} = \frac{r}{R}$, cu egalitate pentru $b=c$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS = \sum \frac{a^2+\lambda bc}{b^2+c^2} = \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} + \lambda \sum \frac{bc}{b^2+c^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} + \lambda \cdot \frac{3r}{R} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{2} + \frac{3\lambda r}{R} \overset{Euler}{\geq}$$
$$\overset{Euler}{\geq} \frac{6r^2}{R^2}(1+\lambda) = RHS.$$

Aplicația3.

In ΔABC

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 \geq 2\left(\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_a}\right).$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan

Soluție.

Demonstrăm rezultatele ajutătoare:

Lema 1(Panaitopol).

In ΔABC

$$\frac{m_a}{h_a} \leq \frac{R}{2r}.$$

Laurențiu Panaitopol

Demonstrație.

Folosim rezultatul cunoscut în triunghi:

În orice triunghi are loc inegalitatea normală:

$$Max(m_a \sin A, m_b \sin B, m_c \sin C) \leq \frac{p}{2}.$$

Într-adevăr:

Fie A' mijlocul laturii (BC), iar M, N proiecțiile lui A' pe AB, AC respectiv.

Fie apoi P, Q simetricele lui A' față de AB, AC respectiv.

Deoarece $m(AMA') = m(ANA') = 90^\circ$ rezultă că penctele A, M, A', N se află pe cercul de diametru $[AA']$.

Obținem:

$MN = \frac{1}{2}PQ = AA' \sin A = m_a \sin A$, de unde $PQ = 2m_a \sin A$.

Dacă B', C' sunt respectiv mijloacele laturilor $[AC], [AB]$ lungimea liniei poligonale $PC'B'Q$ este p și ea majorează lungimea segmentului $[PQ]$.

De aici rezultă că $2m_a \sin A \leq p$ și deci $Max(m_a \sin A, m_b \sin B, m_c \sin C) \leq \frac{p}{2}$.

Din $2m_a \sin A \leq p$ rezultă :

$$m_a \sin A \le \frac{p}{2} \Leftrightarrow m_a \cdot \frac{a}{2R} \le \frac{p}{2} \Leftrightarrow m_a \cdot a \le Rp \Leftrightarrow \frac{m_a}{h_a} \le \frac{R}{2r}.$$

Lema 2(Băndilă).

In ΔABC

$$\frac{R}{r} \ge \frac{b}{c} + \frac{c}{b}.$$

GM 2/1985, Viorel Băndilă, București

Demonstrație.

Vezi mai sus.

Să trecem la rezolvarea problemei propuse.

Folosind **Lema 1** obținem:

$$\frac{m_a}{h_a} \le \frac{R}{2r} \Rightarrow 2m_a \le \frac{R}{r} \cdot h_a \Rightarrow 2\frac{m_a}{m_b} \le \frac{R}{r} \cdot \frac{h_a}{m_b} \le \frac{R}{r} \cdot \frac{h_a}{h_b} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{b}} = \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}.$$

Analog $2\frac{m_b}{m_a} \le \frac{R}{r} \cdot \frac{a}{b}$

Adunând $2\frac{m_a}{m_b} \le \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}$ și $2\frac{m_b}{m_a} \le \frac{R}{r} \cdot \frac{a}{b}$ rezultă că $2\left(\frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_a}\right) \le \frac{R}{r}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Folosind acum **Lema 2** obținem:

$2\left(\frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_a}\right) \le \frac{R}{r}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \le \frac{R}{r} \cdot \frac{R}{r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$, de unde rezultă concluzia.

Aplicația4.

In ΔABC

$$12 \le 2\sum \frac{m_b + m_c}{m_a} \le 3\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

Se sumează inegalitățile **1)**.

Inegalitatea din stânga.

Se folosește inegalitatea $\sum \frac{y+z}{x} \ge 6$, pentru $x = m_a, y = m_b, z = m_c$.

Aplicația5.

In ΔABC

$$\frac{R}{r}+\frac{(m_b+m_c)^2}{m_b^2+m_c^2}\geq 4.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan

Soluție.

Folosim

Lema

In ΔABC

$$\frac{R}{r}\geq\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_b}.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** avem $\frac{R}{r}\geq\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_b}=\frac{m_b^2+m_c^2}{m_bm_c}$,de unde $\frac{m_bm_c}{m_b^2+m_c^2}\geq\frac{r}{R}$, (1).

Obținem $M_s=\frac{R}{r}+\frac{(m_b+m_c)^2}{m_b^2+m_c^2}=\frac{R}{r}+1+\frac{2m_bm_c}{m_b^2+m_c^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{R}{r}+1+\frac{2r}{R}\overset{Euler}{\geq}4=M_d$.

Remarcă.

În aceeași clasă de probleme.

Aplicația6

In ΔABC

$$\frac{R}{r}+\frac{(h_b+h_c)^2}{h_b^2+h_c^2}\geq 4.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

In ΔABC

$$\frac{R}{r}\geq\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$

GM 2/1985, Viorel Bândilă, București

Demonstrație.

Vezi mai sus.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** avem $\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{h_b^2 + h_c^2}{h_b h_c}$,de unde $\frac{h_b h_c}{h_b^2 + h_c^2} \geq \frac{r}{R}$, (1).

Obținem $M_s = \frac{R}{r} + \frac{(h_b + h_c)^2}{h_b^2 + h_c^2} = \frac{R}{r} + 1 + \frac{2h_b h_c}{h_b^2 + h_c^2} \overset{(1)}{\geq} \frac{R}{r} + 1 + \frac{2r}{R} \overset{Euler}{\geq} 4 = M_d$.

Aplicația7.

In ΔABC

$$\lambda \frac{R}{r} + \frac{(h_b + h_c)^2}{h_b^2 + h_c^2} \geq 2(\lambda + 1), \text{ unde } \lambda \geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

In ΔABC

$$\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}.$$

GM 2/1985, Viorel Bândilă, București

Demonstrație.

Vezi mai sus.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** avem $\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{h_b^2 + h_c^2}{h_b h_c}$,de unde $\frac{h_b h_c}{h_b^2 + h_c^2} \geq \frac{r}{R}$, (1).

Obținem $M_s = \lambda \frac{R}{r} + \frac{(h_b + h_c)^2}{h_b^2 + h_c^2} = \lambda \frac{R}{r} + 1 + \frac{2h_b h_c}{h_b^2 + h_c^2} \overset{(1)}{\geq} \lambda \frac{R}{r} + 1 + \frac{2r}{R} \overset{(2)}{\geq} \lambda(n+1) = M_d$,

unde (2) $\Leftrightarrow \lambda R^2 - (2\lambda - 1)Rr + 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(\lambda R - 2r) \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler și condiția din ipoteză $\lambda \geq 1$, care asigură $(\lambda R - 2r) \geq 0$.

Aplicația8.

In ΔABC

$$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\sqrt{\frac{s_b}{m_b}}+\sqrt{\frac{s_c}{m_c}}+\frac{3R}{2r}\geq 6.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan

Soluție.

Folosind formula $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a$ și inegalitatea mediilor GM-HM obținem:

$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}=\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot 1}\geq\frac{2}{\frac{b^2+c^2}{2bc}+1}=\frac{4bc}{(b+c)^2}$, cu egalitate pentru $\frac{2bc}{b^2+c^2}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b-c)^2=0\Leftrightarrow b=c$.

Rezultă $\sum\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}\geq\sum\frac{4bc}{(b+c)^2}$, (1).

Folosind inegalitatea lui Băndilă $\frac{R}{r}\geq\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ obținem:

$\frac{R}{r}\geq\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{b^2+c^2}{bc}\geq\frac{(b+c)^2}{2bc}$, de unde $\frac{R}{2r}\geq\frac{(b+c)^2}{4bc}$, care prin sumare conduc la: $\frac{3R}{2r}\geq\sum\frac{(b+c)^2}{4bc}$, (2).

Din (1) și (2) obținem:

$$M_s=\sum\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\frac{3R}{2r}\geq\sum\frac{4bc}{(b+c)^2}+\sum\frac{(b+c)^2}{4bc}=\sum\left(t+\frac{1}{t}\right)\overset{(3)}{\geq}\sum 2=6=M_d,$$

unde (3) $\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}\geq 2\Leftrightarrow (t-1)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $t=1$, $t=\frac{4bc}{(b+c)^2}$.

Remarcă.

Inegalitatea se poate întări.

Aplicația9.

In ΔABC

$$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\sqrt{\frac{s_b}{m_b}}+\sqrt{\frac{s_c}{m_c}}\geq\frac{6r}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind formula $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a$ și inegalitatea mediilor GM-HM obținem:

$$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}=\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot 1}\geq\frac{2}{\frac{b^2+c^2}{2bc}+1}=\frac{4bc}{(b+c)^2}$$, cu egalitate pentru $\frac{2bc}{b^2+c^2}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b-c)^2=0\Leftrightarrow b=c$.

Rezultă $\sum\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}\geq\sum\frac{4bc}{(b+c)^2}$, (1).

Din (1) și inegalitatea medilor obținem:

$$M_s=\sum\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}\geq\sum\frac{4bc}{(b+c)^2}=4\sum\frac{bc}{(b+c)^2}\geq 4\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{bc}{(b+c)^2}}=12\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{\prod(b+c)^2}}=$$

$$=12\sqrt[3]{\frac{16R^2r^2p^2}{4p^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}}=12\sqrt[3]{\frac{4R^2r^2}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}}\overset{(2)}{\geq}\frac{6r}{R}=M_d$$, unde (2) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\sqrt[3]{\frac{4R^2r^2}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}}\geq\frac{6r}{R}\Leftrightarrow\frac{32R^2r^2}{\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}\geq\frac{r^3}{R^3}\Leftrightarrow 32R^5\geq r\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$$32R^5\geq r\left(4R^2+4Rr+3r^2+r^2+2Rr\right)^2\Leftrightarrow 32R^5\geq r\left(4R^2+6Rr+4r^2\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8R^5\geq r\left(2R^2+3Rr+2r^2\right)^2\Leftrightarrow 8R^5-4R^4r-12R^3r^2-17R^2r^3-12Rr^4-4r^5\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(8R^4+12R^3r+12R^2r^2+7Rr^3+2r^5\right)$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

Notă.

Problema întărește inegalitatea propusă de Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan în RMM 5/2020.

Remarcă.

Inegalitatea 2) este mai tare decât inegalitatea 1).

Aplicația10.

In ΔABC

$$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\sqrt{\frac{s_b}{m_b}}+\sqrt{\frac{s_c}{m_c}}+\frac{3R}{2r}\geq 3\left(\frac{R}{2r}+\frac{2r}{R}\right)\geq 6.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Vezi inegalitatea 2) și $\frac{R}{2r}+\frac{2r}{R}\geq 2 \Leftrightarrow (R-2r)^2$, evident cu egalitate dacă $R=2r$, adică pentru triunghiul echilateral.

Remarcă.

Să determinăm o inegalitate de sens contrar.

Aplicația11.

In ΔABC

$$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\sqrt{\frac{s_b}{m_b}}+\sqrt{\frac{s_c}{m_c}}\leq 3.$$

Soluție.

Folosind formula $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a$ și inegalitatea mediilorAM-GMobținem:

$\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}=\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}}\leq\sqrt{1}=1$, cu egalitate pentru $\frac{2bc}{b^2+c^2}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b-c)^2=0\Leftrightarrow b=c$.

Rezultă $\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\sqrt{\frac{s_b}{m_b}}+\sqrt{\frac{s_c}{m_c}}\leq 1+1+1=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

Se poate scrie dubla inegalitate:

Aplicația12.

In ΔABC

$$\frac{6r}{R}\leq\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\sqrt{\frac{s_b}{m_b}}+\sqrt{\frac{s_c}{m_c}}\leq 3.$$

Soluție.

Vezi inegalitățile de mai sus.

Aplicația13.

In ΔABC

$$\sum\frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+bc+c^2}\leq\frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Folosind $b^2+bc+c^2 \geq 3bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$, avem

$$Ms=\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+bc+c^2} \leq \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{3bc} \overset{(1)}{\leq} \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{3bc} \leq \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \leq \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}$, care rezultă din :

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \leq \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \leq \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \leq \left(\frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \leq \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2}$, (1), care rezultă din inegalitatea $(x+y+z)^2 \leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$,

pentru $x=\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}, y=\sum \frac{\sqrt{c^4+a^4}}{ca}, x=\sum \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{ab}$.

Obținem: $\left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \leq 3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2}$,(2).

Din (1) și (2) este suficient să arătăm că:

$$3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \leq \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \leq \frac{3\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2}+\sum \frac{c^2}{b^2} \leq 3\frac{R^2}{r^2}-6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2}+\sum \frac{c^2}{b^2}+\sum 2 \leq 3\frac{R^2}{r^2} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 \leq 3\left(\frac{R}{r}\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Băndilă :

$\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c}+\frac{c}{b}$,(GM 2/1985, Viorel Băndilă, București).

Remarcă.

În aceeași clasă de probleme.

Aplicația14.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2-bc+c^2} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $b^2-bc+c^2 \ge bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0$, avem

$$Ms = \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2-bc+c^2} \le \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \overset{(1)}{\le} \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r} = Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{3bc} \le \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}$, care rezultă din :

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le \left(\frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2}$, (1), care rezultă din inegalitatea $(x+y+z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$,

pentru $x = \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}, y = \sum \frac{\sqrt{c^4+a^4}}{ca}, x = \sum \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{ab}$.

Obținem: $\left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le 3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2}$,(2).

Din (1) și (2) este suficient să arătăm că:

$$3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \le \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \le \frac{3\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2} + \sum \frac{c^2}{b^2} \le 3\frac{R^2}{r^2} - 6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2} + \sum \frac{c^2}{b^2} + \sum 2 \le 3\frac{R^2}{r^2} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 \le 3\left(\frac{R}{r}\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Băndilă :

$\frac{R}{r} \ge \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$, (GM 2/1985, Viorel Băndilă, București).

Notă.

Problema este în legătură cu Inequality in triangle-2396, propusă de George Apostolopoulos, Greece, în RMM 12/2020.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+bc+c^2} \le \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

George Apostolopoulos, Greece

Remarcă.

În aceeași clasă de probleme.

Aplicația15

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2-\lambda bc+c^2} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{(2-\lambda)r}, \text{ unde } \lambda<2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $b^2-\lambda bc+c^2 \ge (2-\lambda)bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0$ și $b^2-\lambda bc+c^2>0$, pentru $\lambda<2$,

avem $Ms=\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2-\lambda bc+c^2} \le \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{(2-\lambda)bc} \overset{(1)}{\le} \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{(2-\lambda)r}=Md$,

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}$, care rezultă din :

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le \left(\frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le \frac{9(R^2-2r^2)}{r^2}$, (1), care rezultă din inegalitatea $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$,

pentru $x=\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}, y=\sum \frac{\sqrt{c^4+a^4}}{ca}, x=\sum \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{ab}$.

Obținem: $\left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le 3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2}$,(2).

Din (1) și (2) este suficient să arătăm că:

$$3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \le \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \le \frac{3\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2}+\sum \frac{c^2}{b^2} \le 3\frac{R^2}{r^2}-6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2}+\sum \frac{c^2}{b^2}+\sum 2 \le 3\frac{R^2}{r^2} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 \le 3\left(\frac{R}{r}\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Băndilă : $\frac{R}{r} \ge \frac{b}{c}+\frac{c}{b}$, (GM 2/1985, Viorel Băndilă, București).

Notă.

Pentru $\lambda = -1$ se obține Inequality in triangle-2396, propusă de George Apostolopoulos, Greece, în RMM 12/2020.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+bc+c^2} \le \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

George Apostolopoulos, Greece

Notă.

Pentru $\lambda = 0$ se obține:

Aplicația16.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+c^2} \le \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}-2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $b^2+c^2 \ge 2bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0$

avem $Ms = \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+c^2} \le \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{2bc} \overset{(1)}{\le} \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{2r} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}-2} = Md$,

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}$, care rezultă din :

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \le \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le \left(\frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2}$, (1), care rezultă din inegalitatea $\left(x+y+z\right)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$,

pentru $x=\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}, y=\sum \frac{\sqrt{c^4+a^4}}{ca}, x=\sum \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{ab}$.

Obținem: $\left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \le 3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2}$,(2).

Din (1) și (2) este suficient să arătăm că:

$3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \le \frac{9\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \le \frac{3\left(R^2-2r^2\right)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2}+\sum \frac{c^2}{b^2} \le 3\frac{R^2}{r^2}-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2}+\sum \frac{c^2}{b^2}+\sum 2 \le 3\frac{R^2}{r^2} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 \le 3\left(\frac{R}{r}\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Băndilă :

$\frac{R}{r} \ge \frac{b}{c}+\frac{c}{b}$,(GM 2/1985, Viorel Băndilă, București).

Notă.

Problema este în legătură cu Inequality in triangle-2396, propusă de George Apostolopoulos, Greece, în RMM 12/2020.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+bc+c^2} \le \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

George Apostolopoulos, Greece

Notă.

Pentru $\lambda=-2$ se obține:

Aplicația17.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{(b+c)^2} \le \frac{3}{4}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}-2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$,

avem $Ms = \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{(b+c)^2} \leq \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{4bc} \overset{(1)}{\leq} \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{4r} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}-2} = Md$,

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \leq \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}$, care rezultă din :

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \leq \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

Demonstrație.

Avem $\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc} \leq \frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \leq \left(\frac{3\sqrt{R^2-2r^2}}{r}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \leq \frac{9(R^2-2r^2)}{r^2}$, (1), care rezultă din inegalitatea $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$,

pentru $x = \sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}, y = \sum \frac{\sqrt{c^4+a^4}}{ca}, x = \sum \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{ab}$.

Obținem: $\left(\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{bc}\right)^2 \leq 3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2}$,(2).

Din (1) și (2) este suficient să arătăm că:

$$3\sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \leq \frac{9(R^2-2r^2)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^4+c^4}{b^2c^2} \leq \frac{3(R^2-2r^2)}{r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2} + \sum \frac{c^2}{b^2} \leq 3\frac{R^2}{r^2} - 6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{b^2}{c^2} + \sum \frac{c^2}{b^2} + \sum 2 \leq 3\frac{R^2}{r^2} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 \leq 3\left(\frac{R}{r}\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Băndilă :

$\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$, (GM 2/1985, Viorel Băndilă, București).

Notă.

Problema este în legătură cu Inequality in triangle-2396, propusă de George Apostolopoulos, Greece, în RMM 12/2020.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sqrt{b^4+c^4}}{b^2+bc+c^2} \le \frac{\sqrt{R^2-2r^2}}{r}.$$

George Apostolopoulos, Greece

Aplicația18.

In ΔABC

$$\sum \sqrt{\frac{s_a}{m_a}} + \frac{3R}{2r} \ge 6.$$

Adil Abdullayev, RMM-5/2021

Soluție.

Folosind $s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2} m_a$ și inegalitatea lui Băndilă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \le \frac{R}{r}$ obținem:

$$Ms = \sum \sqrt{\frac{s_a}{m_a}} + \frac{3R}{2r} = \sum \sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}} + \frac{3R}{2r} = \sum \sqrt{\frac{2}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}} + \frac{3R}{2r} \ge \sum \sqrt{\frac{2}{\frac{R}{r}}} + \frac{3R}{2r} = \sum \sqrt{\frac{2r}{R}} + \frac{3R}{2r} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{2r}{R}} + \frac{3R}{2r} \overset{AGM}{\ge} 3\cdot 2\sqrt{\sqrt{\frac{2r}{R}}\cdot\frac{R}{2r}} \overset{Euler}{\ge} 6 = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

Inegalitatea se poate dezvolta.

Aplicația19.

In ΔABC

$$\sum \sqrt{\frac{s_a}{m_a}} + \lambda\frac{R}{2r} \ge 3+\lambda, \text{ unde } \lambda \ge \frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2} m_a$ și inegalitatea lui Băndilă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \le \frac{R}{r}$ obținem:

$$Ms = \sum \sqrt{\frac{s_a}{m_a}} + \frac{\lambda R}{2r} = \sum \sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}} + \frac{\lambda R}{2r} = \sum \sqrt{\frac{2}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}} + \frac{\lambda R}{2r} \ge \sum \sqrt{\frac{2}{\frac{R}{r}}} + \lambda\frac{R}{2r} = \sum \sqrt{\frac{2r}{R}} + \frac{\lambda R}{2r} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{2r}{R}} + \frac{\lambda R}{2r} \overset{(1)}{\ge} 3+\lambda = Md, \text{ unde } (1) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{2r}{R}} + \frac{\lambda R}{2r} \ge 3+\lambda, \text{ care rezultă din:}$$

Notând $\sqrt{\frac{2r}{R}}=t$ avem $0<t\le 1$ și arătăm că $3t+\frac{\lambda}{t^2}\ge 3+\lambda \Leftrightarrow 3t^3-(3+\lambda)t^2+\lambda\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)(3t^2-\lambda t-\lambda)\ge 0$, adevărată din $(t-1)\le 0$ și $(3t^2-\lambda t-\lambda)\le 0$.

Într-adevăr $3t^2-\lambda t-\lambda\le 0$, pentru $t\in\left[\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+12\lambda}}{6},\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+12\lambda}}{6}\right]$.

Arătăm că $t\le 1\le\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+12\lambda}}{6}$,adevărat pentru $\lambda\ge\frac{3}{2}$, care rezultă din $1\le\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+12\lambda}}{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\le\lambda+\sqrt{\lambda^2+12\lambda}\Leftrightarrow 6-\lambda\le\sqrt{\lambda^2+12\lambda}$;

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $6-\lambda\le 0$ inegalitatea este evidentă pentru $\lambda\ge 0$.

Cazul 2). Dacă $6-\lambda>0$ inegalitatea este echivalentă cu $(6-\lambda)^2\le\lambda^2+12\lambda\Leftrightarrow\lambda\ge\frac{3}{2}$.

Remarca.

Cea mai bună inegalitate de forma din enunț se obține pentru $\lambda=\frac{3}{2}$.

Cazul $\lambda=\frac{3}{2}$.

Aplicația20.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\frac{3R}{4r}\ge\frac{9}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a$ și inegalitatea lui Băndilă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\le\frac{R}{r}$ obținem:

$$Ms=\sum\sqrt{\frac{s_a}{m_a}}+\frac{3R}{4r}=\sum\sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}}+\frac{3R}{4r}=\sum\sqrt{\frac{2}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}}+\frac{3R}{4r}\ge\sum\sqrt{\frac{2}{\frac{R}{r}}}+\frac{3R}{4r}=\sum\sqrt{\frac{2r}{R}}+\frac{3R}{4r}=$$

$=3\sqrt{\frac{2r}{R}}+\frac{3R}{4r}\overset{(1)}{\ge}\frac{9}{2}=Md$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $3\sqrt{\frac{2r}{R}}+\frac{3R}{4r}\ge\frac{9}{2}$, care rezultă din:

Notând $\sqrt{\frac{2r}{R}}=t$ avem $0<t\leq 1$ și arătăm că $3t+\frac{3}{2t^2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+1\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1)\geq 0$, cu egalitate pentru $t=1\Leftrightarrow R=2r$.

Nota.

Pentru $\lambda=3$ se obține Problema propusă de Adil Abdullayev în RMM 5/2021.

Aplicația21.

In ΔABC

$$\frac{ab+bc+ca}{4\sqrt{3}F}\geq\sqrt{\frac{m_a}{s_a}}.$$

Marius Drăgan, Neculai Stanciu, RMM-1/2022

Soluție

Demonstrăm

Lema

In ΔABC

$$\frac{m_a}{s_a}\leq\frac{R}{2r}.$$

Demonstrație

Avem: $\frac{m_a}{s_a}=\frac{2bc}{b^2+c^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\overset{Bandila}{\leq}\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{r}=\frac{R}{2r}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$\frac{ab+bc+ca}{4\sqrt{3}F}\geq\sqrt{\frac{R}{2r}}\Leftrightarrow\frac{p^2+r^2+4Rr}{4\sqrt{3}F}\geq\sqrt{\frac{R}{2r}}\Leftrightarrow\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2}{48p^2r^2}\geq\frac{R}{2r}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2\geq 24p^2Rr\Leftrightarrow p^2\left(p^2+2r^2-16Rr\right)+r^2(4R+r)^2\geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(p^2+2r^2-16Rr\right)\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(p^2+2r^2-16Rr\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2(4R+r)^2\geq p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)$, care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen:

$$16Rr-5r^2\le p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}.$$

Rămâne să arătăm că:

$$r^2(4R+r)^2\ge\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(16Rr-2r^2-16Rr+5r^2)\Leftrightarrow R\ge 2r,\text{(Euler)}.$$

Aplicația22.

In ΔABC

$$\frac{3R^2}{2r^2}\ge\sum\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\ge\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Nguyen Van Canh, Vietnam

Soluție.

Prima inegalitate: $\frac{3R^2}{2r^2}\ge\sum\left(\frac{a}{b}\right)^2+3$.

Demonstrăm

Lema

In ΔABC

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{R}{r}+1.$$

Demonstrație.

Datorită simetriei putem presupune $c=\min\{a,b,c\}$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). If $a\ge b\ge c$ avem $\frac{R}{r}+1\overset{Bandila}{\ge}\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{(a-b)(b-c)}{bc}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Cazul 2). If $b\ge a\ge c$ avem $\frac{R}{r}+1\overset{Bandila}{\ge}\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{(b-a)(a-c)}{bc}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Să trecem la rezolvarea primei inegalități.

Folosind **Lema** și inegalitatea mediilor obținem:

$$\sum\left(\frac{a}{b}\right)^2+3=\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2-2\sum\frac{a}{b}+3\underset{AGM}{\overset{Lema}{\le}}\left(\frac{R}{r}+1\right)^2-2\cdot 3+3=\frac{R^2}{r^2}+\frac{2R}{r}-2\overset{Euler}{\le}\frac{3R^2}{2r^2}.$$

A doua inegalitate $\sum\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\ge\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

Cu substituția $(x,y,z)=\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)$ inegalitatea se scrie $\sum x^2+3\geq\sum\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

Folosim pqr -Method.

$p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz=1$.

Inegalitatea $\sum x^2+3\geq\sum\left(x+\frac{1}{x}\right)$ se scrie $p^2-2q+3\geq p+q \Leftrightarrow p^2+3\geq p+3q$.

Cu inegalitatea lui Schur $p^3+9\geq 4pq$ avem $q\leq\frac{p^2+9r}{4p}=\frac{p^2+9}{4p}$.

Este sufficient să arătăm că:

$$p^2+3\geq p+3\cdot\frac{p^2+9}{4p}\Leftrightarrow p^3-4p^2+12p-27\geq 0\Leftrightarrow (p-3)\left(p^2-p+9\right)\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$,(vezi $p=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}=3$).

Aplicația23.

In ΔABC

$$\sum\frac{m_a^2+\lambda m_b m_c}{m_b^2+m_c^2}\geq\frac{3}{2}+\frac{3\lambda r}{R},\lambda\geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

In ΔABC

$$\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_a}\leq\frac{R}{r}.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan

Soluție.

Demonstrăm rezultatele ajutătoare:

Lema 1.

In ΔABC

$$\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_a}\leq 2\cdot\frac{m_c}{h_c}.$$

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Tereshin $m_a \geq \frac{b^2+c^2}{4R}$ obținem succesiv:

$$m_c \geq \frac{a^2+b^2}{4R} \Leftrightarrow 4R \cdot m_c \geq a^2+b^2 \Leftrightarrow \frac{4RS}{S} \cdot m_c \geq a^2+b^2 \Leftrightarrow \frac{abc}{S} \cdot m_c \geq a^2+b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{S} \cdot m_c \geq \frac{a^2+b^2}{ab} \Leftrightarrow \frac{c \cdot m_c}{S} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{a}, (1).$$

Folosind principiul dualității, aplicăm inegalitatea (1) în triunghiul cu laturile de lungimi $\frac{2m_a}{3}, \frac{2m_b}{3}, \frac{2m_c}{3}$ și implicit arie $\frac{S}{3}$ și mediane $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ obținem:

$$\frac{\frac{2m_c}{3} \cdot \frac{c}{2}}{\frac{S}{3}} \geq \frac{\frac{2m_a}{3}}{\frac{2m_b}{3}} + \frac{\frac{2m_b}{3}}{\frac{2m_a}{3}} \Leftrightarrow \frac{c \cdot m_c}{S} \geq \frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_a} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{m_c}{h_c} \geq \frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_a}.$$

Lema 2.

In ΔABC

$$\frac{m_a}{h_a} \leq \frac{R}{2r}.$$

GM 11/1982, Laurențiu Panaitopol

Demonstrație.

Vezi mai sus.

Lema

In ΔABC

$$\frac{m_b m_c}{m_b^2+m_c^2} \geq \frac{r}{R}.$$

Demonstrație

$$\frac{m_b m_c}{m_b^2+m_c^2} = \frac{1}{\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_b}} \overset{Bandila}{\geq} \frac{1}{\frac{R}{r}} = \frac{r}{R}, \text{ cu egalitate pentru } b=c.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS = \sum \frac{m_a^2+\lambda m_b m_c}{m_b^2+m_c^2} = \sum \frac{m_a^2}{m_b^2+m_c^2} + \lambda \sum \frac{m_b m_c}{m_b^2+m_c^2} \overset{Nesbitt\&Lema}{\geq} \frac{3}{2}+\lambda \cdot \frac{3r}{R} = RHS.$$

Aplicația24.

In ΔABC

$$\frac{18r^2}{R^2} \le \sum \frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2} \le \frac{9R^2}{8r^2}.$$

Kostas Geronikolas, Greece

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2} \le \sum \frac{(r_b+r_c)^2}{2bc} = \frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{4Rr} \overset{Gerretsen}{\le} \frac{8R^2+14Rr+3r^2-16Rr+5r^2}{4Rr} =$$

$$= \frac{8R^2-2Rr+8r^2}{4Rr} = \frac{4R^2-Rr+4r^2}{2Rr} \overset{Euler}{\le} \frac{\frac{9R^2}{2}}{2Rr} = \frac{9R}{4r} \overset{Euler}{\le} \frac{9R^2}{8r^2}.$$

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{(r_b+r_c)^2}{bc} = \frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr}.$$

Demonstrație

$$\sum \frac{(r_b+r_c)^2}{bc} = \sum \frac{\left(\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\right)^2}{bc} = S^2 \sum \frac{\frac{a^2}{(p-b)^2(p-c)^2}}{bc} = S^2 \sum \frac{a^2}{bc(p-b)^2(p-c)^2} =$$

$$= r^2p^2 \cdot \frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr^3p^2} = \frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr}.$$

$$\sum \frac{a^2}{bc(p-b)^2(p-c)^2} = \frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr^3p^2}$$

$$\sum \frac{a^2}{bc(p-b)^2(p-c)^2} = \frac{\sum a^3(p-a)^2}{abc\prod(p-a)^2} = \frac{2r^2p\left(8R^2+14Rr+3r^2-p^2\right)}{4Rrp \cdot r^2p \cdot r^2p} =$$

$$= \frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr^3p^2}.$$

$$\sum a^3(p-a)^2 = 2r^2p\left(8R^2+14Rr+3r^2-p^2\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod(r_b+r_c)^2}{\prod(b^2+c^2)}}\overset{Bandila}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{4p^2R\cdot 4p^2R}{\frac{16R^5p^2}{r}}}=3\sqrt[3]{\frac{p^2r}{R^3}}\overset{Mitrinovic}{\geq}$$

$$\overset{Mitrinovic}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{27r^2\cdot r}{R^3}}=3\frac{3r}{R}=\frac{9r}{R}\overset{Euler}{\geq}\frac{18r^2}{R^2}.$$

Lema

In ΔABC

$$\prod(b^2+c^2)\leq\frac{16R^5p^2}{r}.$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Băndilă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\leq\frac{R}{r}\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2}{bc}\leq\frac{R}{r}\Leftrightarrow b^2+c^2\leq bc\frac{R}{r}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\prod(b^2+c^2)\leq\prod bc\frac{R}{r}=a^2b^2c^2\frac{R^3}{r^3}=16R^2r^2p^2\frac{R^3}{r^3}=\frac{16R^5p^2}{r}.$$

Remarca.

Problema se poate întări.

Aplicația25.

In ΔABC

$$\frac{9r}{R}\leq\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2}\leq\frac{9R}{4r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2}\leq\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{2bc}=\frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{4Rr}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{8R^2+14Rr+3r^2-16Rr+5r^2}{4Rr}=$$

$$=\frac{8R^2-2Rr+8r^2}{4Rr}=\frac{4R^2-Rr+4r^2}{2Rr}\overset{Euler}{\leq}\frac{\frac{9R^2}{2}}{2Rr}=\frac{9R}{4r}\overset{Euler}{\leq}\frac{9R^2}{8r^2}.$$

Lema

In ΔABC

$$\sum \frac{(r_b+r_c)^2}{bc}=\frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr}.$$

Demonstrație

$$\sum \frac{(r_b+r_c)^2}{bc}=\sum \frac{\left(\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\right)^2}{bc}=S^2\sum \frac{\frac{a^2}{(p-b)^2(p-c)^2}}{bc}=S^2\sum \frac{a^2}{bc(p-b)^2(p-c)^2}=$$

$$=r^2p^2\cdot\frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr^3p^2}=\frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr}.$$

$$\sum \frac{a^2}{bc(p-b)^2(p-c)^2}=\frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr^3p^2}$$

$$\sum \frac{a^2}{bc(p-b)^2(p-c)^2}=\frac{\sum a^3(p-a)^2}{abc\prod(p-a)^2}=\frac{2r^2p\left(8R^2+14Rr+3r^2-p^2\right)}{4Rrp\cdot r^2p\cdot r^2p}=$$

$$=\frac{8R^2+14Rr+3r^2-p^2}{2Rr^3p^2}.$$

$$\sum a^3(p-a)^2=2r^2p\left(8R^2+14Rr+3r^2-p^2\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Lema

In ΔABC

$$\prod\left(b^2+c^2\right)\le\frac{16R^5p^2}{r}.$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Bândilă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\le\frac{R}{r}\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2}{bc}\le\frac{R}{r}\Leftrightarrow b^2+c^2\le bc\frac{R}{r}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\prod\left(b^2+c^2\right)\le\prod bc\frac{R}{r}=a^2b^2c^2\frac{R^3}{r^3}=16R^2r^2p^2\frac{R^3}{r^3}=\frac{16R^5p^2}{r}.$$

Remarca.

Se pot scrie inegalitățile:

$$\frac{18r^2}{R^2}\le\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{b^2+c^2}\le\frac{9R^2}{8r^2}$$

Nota.

Dubla inegalitate întărește Problem(521) propusă de Kostas Geronikolas în RMM11/2020.

In ΔABC

$$\frac{18r^2}{R^2} \le \frac{9r}{R} \le \sum \frac{(r_b + r_c)^2}{b^2 + c^2} \le \frac{9R}{4r} \le \frac{9R^2}{8r^2}.$$

Kostas Geronikolas, Greece

Aplicația26.

In ΔABC

$$\frac{36r^3}{R^3} \le \sum \frac{(h_b + h_c)^2}{b^2 + c^2} \le \frac{9R}{4r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{(h_b + h_c)^2}{b^2 + c^2} \le \sum \frac{(h_b + h_c)^2}{2bc} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 2Rr) + r^2(r^2 - 2Rr - 24R^2)}{16R^3 r} \overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le} \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 2r^2 - 2Rr) + r^2(r^2 - 2Rr - 24R^2)}{16R^3 r} =$$

$$= \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 2Rr + 5r^2) + r^2(r^2 - 2Rr - 24R^2)}{16R^3 r} =$$

$$= \frac{16R^4 + 24R^3 r + 16R^2 r^2 + 24Rr^3 + 16r^4}{16R^3 r} = \frac{2R^4 + 3R^3 r + 2R^2 r^2 + 3Rr^3 + 2r^4}{2R^3 r} \overset{Euler}{\le} \frac{9R}{4r}.$$

Am folosit mai sus:

$$\frac{2R^4 + 3R^3 r + 2R^2 r^2 + 3Rr^3 + 2r^4}{2R^3 r} \overset{Euler}{\le} \frac{9R}{4r} \Leftrightarrow 4R^4 + 6R^3 r + 4R^2 r^2 + 6Rr^3 + 4r^4 \le 9R^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5R^4 - 6R^3 r - 4R^2 r^2 - 6Rr^3 - 4r^4 \ge 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(5R^3 + 4R^2 r + 4Rr^2 + 2r^3) \ge 0,$$

Lema

In ΔABC

$$\sum\frac{(h_b+h_c)^2}{bc}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-2Rr\right)+r^2\left(r^2-2Rr-24R^2\right)}{8R^3r}.$$

Demonstrație

$$\sum\frac{(h_b+h_c)^2}{bc}=\sum\frac{\left(\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)^2}{bc}=4S^2\sum\frac{(b+c)^2}{b^3c^3}=$$

$$=4r^2p^2\cdot\frac{p^2\left(p^2+2r^2-2Rr\right)+r^2\left(r^2-2Rr-24R^2\right)}{32p^2R^2r^3}.$$

$$\sum\frac{(b+c)^2}{b^3c^3}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-2Rr\right)+r^2\left(r^2-2Rr-24R^2\right)}{32p^2R^2r^3}.$$

$$\sum a^3(b+c)^2=2p\left[p^2\left(p^2+2r^2-2Rr\right)+r^2\left(r^2-2Rr-24R^2\right)\right].$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\frac{(h_b+h_c)^2}{b^2+c^2}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{(h_b+h_c)^2}{b^2+c^2}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod(h_b+h_c)^2}{\prod(b^2+c^2)}}\overset{Bandila}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{rp^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}{R^2}\right)^2}{\frac{16R^5p^2}{r}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{r^3p^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)^2}{16R^9}}\overset{Mitrinovic}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{r^3\cdot27r^2\left(27r^2+r^2+2Rr\right)^2}{16R^9}}=3\cdot\frac{3r}{2R^3}\sqrt[3]{\frac{r^2\left(27r^2+r^2+2Rr\right)^2}{2}}=$$

$$=\frac{9r}{2R^3}\sqrt[3]{\frac{r^2\left(27r^2+r^2+2Rr\right)^2}{2}}\overset{Euler}{\geq}\frac{9r}{2R^3}\sqrt[3]{\frac{r^2\left(27r^2+r^2+4r^2\right)^2}{2}}=\frac{9r}{2R^3}\sqrt[3]{\frac{r^2\left(32r^2\right)^2}{2}}=$$

$$=\frac{9r}{2R^3}\sqrt[3]{512r^6}=\frac{9r}{2R^3}\cdot8r^2=\frac{36r^3}{R^3}.$$

Am folosit mai sus:

Lema(Bandila)

In ΔABC

$$\prod\left(b^2+c^2\right)\leq\frac{16R^5p^2}{r}.$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Băndilă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\leq\frac{R}{r}\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2}{bc}\leq\frac{R}{r}\Leftrightarrow b^2+c^2\leq bc\frac{R}{r}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\prod\left(b^2+c^2\right)\leq\prod bc\frac{R}{r}=a^2b^2c^2\frac{R^3}{r^3}=16R^2r^2p^2\frac{R^3}{r^3}=\frac{16R^5p^2}{r}.$$

Remarca.

Pentru toate inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
2. Viorel Băndilă, București, GM2/1985.
3. George Apostolopoulos, Greece,RMM 12/2020.
4. Adil Abdullayev,Azerbaijan, RMM 5/2021.
5. Laurentiu Panaitopol, Bucuresti, GM 2/1987.
6. Marius Drăgan,București, RMM 1/2022.
7. Neculai Stanciu, Buzău, RMM 1/2022.
8. Nguyen Van Canh, Vietnam, RMM 1/2022.
9. Mehmet Șahin, Turkey, RMM 11/2022.
10. Kostas Geronikolas, Greece, RMM 11/2020.
11. Daniel Sitaru, RMM 4/2022.
12. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
13. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

Art 4100

30 Noiembrie 2022

3. Asupra unei probleme de olimpiadă

Prof. Tănasie Elena

Problema pusă în discuție a fost propusă la faza județeană a olimpiadei de matematică din anul 2019, la clasa a XI-a.

Problema a ridicat dificultăți elevilor, nefiind rezolvată de niciun candidat (decât parțial).

Fie $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ o funcție continuă cu $f(0) > 0$ și cu proprietatea că pentru orice $0 \leq x < y$ au loc inegalitățile $x - y < f(y) - f(x) \leq 0$. Arătați că:

a) Există un număr unic $\alpha \in (0, \infty)$ cu proprietatea $(fof)(\alpha) = \alpha$
b) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \geq 0$ și $x_{n+1} = f(x_n), \forall\, n \epsilon N^*$ este convergent.

Problema este o aplicație la capitolul „Funcții continue pe un interval”.

Fie $f: A \to B$. Folosim:

(D_1) x_0 este punct fix al lui f dacă $f(x_0) = x_0$

(D_2) f este strict crescătoare pe A:

$$x < y <=> f(x) > f(y), \forall\, x, y \in A$$

(D_3) Similar, f strict descrescătoare pe A:

$$x < y <=> f(x) > f(y), \forall\, x, y \in A$$

(A_1) f strict crescătoare => $f_2 = fof, f_3 = fofof, f_n = fofo \ldots of\ de\ n\ ori$ sunt funcții strict crescătoare

(A_2) f strict descrescătoare => $f_2 = fof\ este\ crescătoare, f_3 = fofof\ este\ descrescătoare,\ f_n = fofo \ldots of\ de\ n\ ori\ este \begin{cases} strict\ crescătoare, n\ par \\ strict\ descrescătoare, n\ impar \end{cases}$

Demonstrațiile sunt evidente cu (D_2) și (D_3).

(A_3) f este strict monotonă pe A => ecuația $f(x) = c$ are cel mult o soluție, $\forall c \in R$

Demonstrație: Fie x_0 soluție => $f(x_0) = c$. Dacă f este strict crescătoare rezultă

Pentru $x < x_0 => f(x) < f(x_0) = c => f(x) \neq c, \forall x < x_0$

Pentru $x > x_0 => f(x) > f(x_0) = c => f(x) \neq c, \forall x > x_0$

=> ecuația $f(x) = c$ nu are soluţii pentru $x \in A \backslash \{x_0\}$ => ecuația $f(x) = c$ are cel mult o soluție. Analog cazul când f este strict descrescătoare.

Problemă din manual:

Fie $f: [a, b] \to [a, b]$ continuă.

a) $\exists\, c \in [a, b]\ astfel\ incât\ f(c) = c. (Existenţă)$
b) Dacă f este strict monotonă pe $[a, b]$, atunci c este unic. (Unicitate)

Soluție:

a) Cum $f(x) \geq a => f(a) \geq a => f(a) - a \geq 0$
$f(x) \leq b => f(b) \leq b => f(b) - b \leq 0$

Construim $h(x) = f(x) - x,\ h\ continuă$
$h(a) = f(a) - a\ \geq 0$
$h(b) = f(b) - b\ \leq 0$
Rezultă $h(a) \cdot h(b) \leq 0$ și cum h continuă rezultă $\exists c \in [a, b]\ astfel\ incât\ h(c) = 0 =>$ $f(c) = c$ (existența)

b) f strict monotonă => ecuația $f(x) = c$ are cel mult o soluție (pe baza A_3). De aici unicitatea.

Problema dată – particularități :
- Domeniul de definiție este nemărginit
- Nu se dă explicit monotonia .

Din ipoteză $x - y < 0 => x < y$.
$f(x) - f(y) \leq 0 => f(x) \geq f(y) => f$ este monoton descrescătoare pe $[0, \infty)$ (dar nu strict)

Construim $g: [0, \infty) \to R, g(x) = f(x) - x$. Evident g este continuă.
Îi studiez monotonia:
$\forall x < y,\ avem\ g(x) - g(y) = f(x) - x - f(y) + y = f(x) - f(y) + (y - x) > 0,$
deci g este strict descrescătoare conform (D_3).
Avem domeniu de definiție nemărginit, dar voi studia intervalul $[0, a],\ cu\ a > 0$.

$g(0) = f(0) - 0 > 0\ (prin\ ipoteză)$

$g(a) = f(a) - a$ și aleg a astfel încât $f(0) - a < 0,\ adică\ a > f(0)$

Atunci $g(0) \cdot g(a) < 0$ și rezultă din proprietatea valorilor intermediare că $\exists \alpha \epsilon (0, a)\ \subset$ $(0, \infty)\ cu\ g(x) = 0,\ deci\ f(\alpha) = \alpha\ (existenţa\ punctului\ fix\ al\ lui\ f)$

g strict monotonă => ecuația $g(x) = 0$ are cel mult o soluție => unicitatea punctului fix α al lui f

Avem $(fof)(\alpha) = f\big(f(\alpha)\big) = f(\alpha) = \alpha$ (existența punctului fix pentru fof)

Unicitatea lui α: $Fie\ x \in [0, \alpha).\ Din\ ipoteză\ avem$:

$$x - \alpha < f(\alpha) - f(x) \leq f\big(f(x)\big) - f\big(f(\alpha)\big) = f\big(f(x)\big) - \alpha \leq 0$$

Deci $x - \alpha < f\big(f(x)\big) - \alpha, adică\ x < f\big(f(x)\big) \leq \alpha => f\big(f(x)\big) \neq x, \forall x \in [0, \alpha)$ (1)

Analog, pentru $x \in (\alpha, \infty)\ avem$

$\alpha - x < f(x) - f(\alpha) \leq f\big(f(\alpha)\big) - f\big(f(x)\big) = \alpha - f(f(x)) \leq 0$ astfel că

$\alpha - x < \alpha - f(f(x))$ $adică$ $x > f(f(x)) \geq \alpha \Rightarrow f(f(x)) \neq x, \forall x \in (\alpha, \infty)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă unicitatea punctului fix α al funcției fof.

b) Dacă $x_1 = \alpha,\ atunci\ x_n = \alpha, \forall n \geq 1$, deci șirul este convergent la α

Dacă $x_1 \neq \alpha,\ atunci\ considerăm\ subșirurile\ (x_{2n-1})_{n\geq 1}$ și $(x_{2n})_{n\geq 1}$

Acestea verifică relațiile de recurență $x_{2n+1} = (fof)(x_{2n-1}),\ respectiv\ x_{2n+2} = (fof)(x_{2n}), \forall n \geq 1$

Pentru $x_1 < \alpha$ cum fof este crescătoare (A2) avem $(fof)(x_1) \leq (fof)(\alpha),\ adică\ x_3 \leq \alpha$. Prin metoda inducției matematice arătăm că $x_{2n-1} \leq \alpha, \forall n \geq 1$.

Dacă $x_{2n-1} \leq \alpha$ rezultă $(fof)(x_{2n-1}) \leq (fof)(\alpha)\ adică\ x_{2n+1} \leq \alpha$

Șirul $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este monoton crescător, $\forall n \geq 1$.

Avem $x_1 < \alpha\ și\ folosind\ (1)\ rezultă\ x_1 < f(f(x_1))\ adică\ x_1 < x_3$ (etapa de verificare)

Presupunem $x_{2k-1} < x_{2k+1}$ și avem $(fof)(x_{2k-1}) \leq (fof)(x_{2k+1}), adică\ x_{2k+1} \leq x_{2k+3}$ (etapa de demonstrație)

Deci subșirul $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este monoton crescător și mărginit superior de α .

Analog se demonstrează că șirul $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este monoton descrescător și mărginit inferior de α.

Șirurile $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ și $(x_{2n})_{n\geq 1}$ sunt convergente.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = l_1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = l_2$

Evident $l_1 \leq \alpha \leq l_2$.

Trecând la limită în relațiile de recurență obținem $(fof)(l_1) = l_1\ și\ (fof)(l_2) = l_2$

Conform punctului a) unicul punct fix al lui fof este α, deci $l_1 = \alpha = l_2$. Prin urmare șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent cu limita α.

Pentru $x_1 > \alpha$ demonstrația se face în mod analog.

4. Another solution for problem S595

by Daniel Văcaru, National Economic College "Maria Teiuleanu", Pitești

S595. Find all triples (x, y, z) of real numbers such that

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{16+y}=\sqrt[4]{1-y}+\sqrt[4]{16+z}=\sqrt[4]{1-z}+\sqrt[4]{16+x}=3.$$

Proposed by Mihaly Bencze, Brașov and Neculai Stanciu, Buzău, România

Solution proposed by Daniel Văcaru, Pitești, România

We obtain

$$\begin{cases}\sqrt[4]{16+y} & =3-\sqrt[4]{1-x}\\ \sqrt[4]{16+z} & =3-\sqrt[4]{1-y}\\ \sqrt[4]{16+x} & =3-\sqrt[4]{1-z}\end{cases}$$

Suppose $y<z \Leftrightarrow \sqrt[4]{1-x}>\sqrt[4]{1-y} \Leftrightarrow x<y$. Using equations (3) and (1), we obtain $3-\sqrt[4]{1-z}<3-\sqrt[4]{1-x} \Leftrightarrow 1-z>1-x \Leftrightarrow z<x$. We obtain $z<x<y<z$,contradiction. It follows that $x=y=z$. We must solve equation

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{16+x}=3.$$

We obtain $x \in [-16, 1]$.

We have $\sqrt[4]{1-x} \overset{\text{not}}{=} a$ and $\sqrt[4]{16+x}=b$. We have

$$\begin{cases}a+b & =3\\ a^4+b^4 & =17\\ a,b & \geq 0\end{cases}$$

We obtain $81=(a+b)^4=17+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3 \Leftrightarrow 64=4ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2 \Leftrightarrow 64=4ab\,(9-2ab)+6a^2b^2 \Leftrightarrow 64=36ab-8a^2b^2+6a^2b^2$.

We find $2a^2b^2-36ab+64=0 \Leftrightarrow a^2b^2-18ab+32=0 \Leftrightarrow ab \in \{2,6\}$.

The resolvent equations are $T^2-3T+2=0 \Leftrightarrow T_1=1, T_2=2$ and $T^2-3T+6=0$, but this equation have complex solutions.

We obtain

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1-x} & =1\\ \sqrt[4]{16+x} & =2\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

and

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1-x} & =2\\ \sqrt[4]{16+x} & =1\end{cases} \Leftrightarrow x=-15.$$

We obtain $S=\{-15, 0\}$