Revista Electronică MateInfo.ro

OCTOMBRIE 2012

ISSN 2065 – 6432

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

1. O GENERALIZARE A PROBLEMEI VIII.149. DIN RECREAȚII MATEMATICE NR. 1/ 2012

NECULAI STANCIU, BUZĂU şi TITU ZVONARU, COMĂNEŞTI

Generalizare: *Dacă m,n şi a,b,c sunt numere reale pozitive atunci*:

$$(*)\ \frac{a^m b^m c^m (a^n+b^n+c^n)^2}{a^{3m+2n}+b^{3m+2n}+c^{3m+2n}} \le 3.$$

Demonstrație.

Avem:

$$a^m b^m c^m\left(a^n+b^n+c^n\right)^2=\left[a^{\frac{m}{2}}b^{\frac{m}{2}}c^{\frac{m}{2}}\left(a^n+b^n+c^n\right)\right]^2=$$

$$=\left[\left(a^{m+2n}b^m c^m\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a^m b^{m+2n}c^m\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a^m b^m c^{m+2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{1}$$

Din inegalitatea:

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2 \le \frac{a+b+c}{3},$$

şi (1) rezultă:

$$a^m b^m c^m\left(a^n+b^n+c^n\right)^2 \le 3\left(a^{m+2n}b^m c^m+a^m b^{m+2n}c^m+a^m b^m c^{m+2n}\right) \tag{2}$$

Din inegalitatea mediilor aritmetică-geometrică avem:

$$a^{m+2n}b^m c^m \le \frac{m+2n}{3m+2n}\cdot a^{3m+2n}+\frac{m}{3m+2n}\cdot b^{3m+2n}+\frac{m}{3m+2n}\cdot c^{3m+2n},$$

şi încă două inegalități similare, care prin adunare membru cu membru şi (2),

ne conduce la

$$a^m b^m c^m \left(a^n + b^n + c^n\right)^2 \le 3\left(a^{3m+2n} + b^{3m+2n} + c^{3m+2n}\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie. *Pentru* $m = n = 1$ *obţinem problema* ***VIII.149*** *(autori Gheorghe Struţu şi Adrian Stan) publicată* *în Recreaţii Matematice, nr. 1/2012, p. 73. O soluţie a problemei* ***VIII.149*** *a fost publicată în Recreaţii Matematice, nr. 2/2012, p. 144.*

Remarcă. *Şi inegalitatea (*) se poate generaliza. Într-adevăr, dacă procedăm ca mai sus obţinem următoarea generalizare:*

$$\frac{a_1^m \cdot a_2^m \cdot \ldots \cdot a_q^m (a_1^n + a_2^n + \ldots + a_q^n)^p}{a_1^{qm+np} + a_2^{qm+np} + \ldots + a_q^{qm+np}} \le q^{p-1} \, (p > 1),$$

unde m, n *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *sunt numere reale pozitive.*

Demonstraţie.

Folosim inegalitatea

$$\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}} + a_2^{\frac{1}{p}} + \ldots + a_q^{\frac{1}{p}}}{q}\right)^p \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_q}{q},$$

şi avem:

$$a_1^m a_2^m \ldots a_q^m \left(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_q^n\right)^p = \left[a_1^{\frac{m}{p}} a_2^{\frac{m}{p}} \ldots a_q^{\frac{m}{p}} \left(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_q^n\right)\right]^p =$$

$$= \left[\left(a_1^{m+np} a_2^m \ldots a_q^m\right)^{\frac{1}{p}} + \left(a_1^m a_2^{m+np} \ldots a_q^m\right)^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(a_1^m a_2^m \ldots a_q^{m+np}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \le$$

$$\le q^{p-1}\left(a_1^{m+np} a_2^m \ldots a_q^m + a_1^m a_2^{m+np} \ldots a_q^m + \ldots + a_1^m a_2^m \ldots a_q^{m+np}\right).$$

De aici şi din inegalităţile mediilor aritmetică-geometrică

$$a_1^{m+np} a_2^m \ldots a_q^m \le \frac{(m+np) a_1^{qm+np} + m a_2^{qm+np} + \ldots + m a_q^{km+np}}{qm+np};$$

$$a_1^m a_2^{m+np} \dots a_q^m \leq \frac{m a_1^{qm+np} + (m+np) a_2^{qm+np} + \dots + m a_q^{km+np}}{qm+np};$$

....

$$a_1^m a_2^m \dots a_q^{m+np} \leq \frac{m a_1^{qm+np} + m a_2^{qm+np} + \dots + (m+np) a_q^{km+np}}{qm+np}.$$

adunate membru cu membru, obținem inegalitatea dorită.

2. O EXTINDERE A PROBLEMEI O.VII.272 DIN RMT NR. 1/2011

de TITU ZVONARU, COMĂNEŞTI şi NECULAI STANCIU, BUZĂU

Problema propusă de d-l *Liviu Petre* are enunțul:

"*Aflați numerele naturale cu proprietatea că dacă le înmulțim cu 30 numărul divizorilor creşte de 3 ori.*"

În această notă vom rezolva următoarea extindere:

"*Aflați numărul natural t şi numerele naturale n cu proprietatea că dacă le înmulțim cu 30 numărul divizorilor creşte de t ori.*"

Fie $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, unde $x, y, z \geq 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s > 0$ şi $p_1, p_2, \ldots, p_s$,

sunt numere prime diferite de $2,3,5$.

Rezultă că:

$$30n = 2^{x+1} \cdot 3^{y+1} \cdot 5^{z+1} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}.$$

Deoarece numărul divizorilor lui n este:

$$(x+1)(y+1)(z+1)(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_s+1),$$

iar numărul divizorilor lui $30n$ este:

$$(x+2)(y+2)(z+2)(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_s+1),$$

din enunțul problemei rezultă

$$t(x+1)(y+1)(z+1)(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_s+1) = (x+2)(y+2)(z+2)(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_s+1).$$

Notăm:

$$a = x+1, b = y+1, c = z+1, m = t-1 > 0,$$

şi trebuie să rezolvăm în numere naturale nenule ecuația:

$$(m+1)abc = (a+1)(b+1)(c+1) \Leftrightarrow mabc - ab - bc - ac - a - b = c+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (mc-1)ab - (c+1)a - (c+1)b = c+1 \qquad (1)$$

Dacă $mc = 1$, atunci $m = c = 1$ şi este uşor de văzut că ecuația (1) nu are soluții.

Putem înmulți (1) cu $mc-1$ şi obținem succesiv:

$$(mc-1)^2 ab - (mc-1)(c+1)a - (mc-1)(c+1)b = (mc-1)(c+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(mc-1)a - (c+1)][(mc-1)b - (c+1)] = (c+1)^2 + (mc-1)(c+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(mc-1)a - (c+1)][(mc-1)b - (c+1)] = (m+1)c(c+1) \qquad (*)$$

Din motive de simetrie, putem presupune că $a \geq b \geq c$.

Atunci:

$$(mc-1)a - (c+1) \geq mc^2 - 2c - 1, (mc-1)b - (c+1) \geq mc^2 - 2c - 1.$$

Vom analiza cazurile când expresia $mc^2 - 2c - 1$ este pozitivă sau negativă:

Cazul 1. Dacă $m \geq 3$, atunci:

$$mc^2 - 2c - 1 \geq 3c^2 - 2c - 1 = (c-1)(3c+1) \geq 0,$$

şi din relația (*) rezultă că:

$$(m+1)c(c+1)=\left[(mc-1)a-(c+1)\right]\left[(mc-1)a-(c+1)\right]\geq\left(mc^2-2c-1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2c^4+4c^2+1-4mc^3-2mc^2+4c-(m+1)c^2-(m+1)c\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2c^4-4mc^3-3(m-1)c^2-(m-3)c+1\leq 0 \qquad (2)$$

Dacă $m\geq 8$, atunci avem:

$$m^2c^4-4mc^3-3(m-1)c^2-(m-3)c+1\geq 8mc^4-4mc^3-3mc^2-mc+3c^2+3c+1=$$

$$=4mc^3(c-1)+3mc^2(c^2-1)+mc(c^3-1)+3c^2+3c+1>0,$$

şi inegalitatea (2) nu este adevărată.

(i) $m=7$.

Inegalitatea (2) devine:

$$49c^4-28c^3-18c^2-4c+1\leq 0 \Leftrightarrow (c-1)(49c^3+21c^2+3c-1)\leq 0$$

şi cum

$$49c^3+21c^2+3c-1>0,$$

nu putem avea decât $c=1$.

Relația (*) devine:

$$(6a-2)(6b-2)=16 \Leftrightarrow (3a-1)(3b-1)=4,$$

şi obținem soluția:

$$a=b=c=1.$$

(ii) $m=6$.

Inegalitatea (2) devine:

$$36c^4-24c^3-15c^2-3c+1\leq 0.$$

Pentru $c\geq 2$ avem:

$$36c^4-24c^3-15c^2-3c+1\geq 72c^3-24c^3-15c^2-3c+1=$$

$$=48c^3-15c^2-3c+1=30c^3+15c^2(c-1)+3c(c^2-1)+1>0,$$

şi deci nu putem avea decât $c=1$.

Relația (*) devine:

$$(5a-2)(5b-2)=12,$$

şi nu obţinem soluţii.

(iii) $m=5$.

Inegalitatea (2) devine:

$$25c^4-20c^3-12c^2-2c+1\le 0.$$

Pentru $c\ge 2$ avem:

$$25c^4-20c^3-12c^2-2c+1\ge 50c^3-20c^3-12c^2-2c+1=$$

$$=30c^3-12c^2-2c+1=16c^3+12c^2(c-1)+2c(c^2-1)+1>0,$$

şi nu putem avea decât $c=1$.

Relaţia (*) devine:

$$(4a-2)(4b-2)=12\Leftrightarrow(2a-1)(2b-1)=3,$$

şi obţinem soluţia:

$$a=2, b=1, c=1.$$

(iv) $m=4$.

Inegalitatea (2) devine:

$$16c^4-16c^3-9c^2-c+1\le 0.$$

Pentru $c\ge 2$ avem:

$$16c^4-16c^3-9c^2-c+1\le 32c^3-16c^3-9c^2-c+1=$$

$$=16c^3-9c^2-c+1=6c^3+9c^2(c-1)+c(c^2-1)+1>0,$$

şi deci $c=1$.

Relaţia (*) devine:

$$(3a-2)(3b-2)=10,$$

şi obţinem soluţia:

$$a=4, b=1, c=1.$$

(v) $m=3$.

Inegalitatea (2) devine:

$$9c^4 - 12c^3 - 6c^2 + 1 \le 0.$$

Pentru $c \ge 2$ avem:

$$9c^4 - 12c^3 - 6c^2 + 1 \ge 18c^3 - 12c^3 - 6c^2 + 1 = 6c^3 - 6c^2 + 1 = 6c^2(c-1) + 1 > 0$$

şi deci $c = 1$.

Relația (*) devine:

$$(2a-2)(2b-2) = 8 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 2,$$

şi obținem soluția:

$$a = 3, b = 2, c = 1.$$

Cazul 2. $m = 2$.

(i) pentru $c = 1$ relația (*) devine:

$$(a-2)(b-2) = 6,$$

şi obținem soluțiile:

$$a = 8, b = 3, c = 1 \text{ şi } a = 5, b = 4, c = 1.$$

(ii) pentru $c \ge 2$, $2c^2 - 2c - 1 \ge 4c - 2c - 1 = 2c - 1 > 0$ şi atunci relația (2) rămâne adevărată, adică:

$$4c^4 - 8c^3 - 6c^2 + c + 1 \le 0.$$

Cum pentru $c \ge 3$ avem

$$4c^4 - 8c^3 - 6c^2 + c + 1 \ge 12c^3 - 8c^3 - 6c^2 + c + 1 = 4c^3 - 6c^2 + c + 1 = 2c^3 + 2c^2(c-3) + c + 1 > 0,$$

rezultă $c = 2$.

Relația (*) devine:

$$(3a-3)(3b-3) = 18 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 2,$$

şi obținem soluția:

$$a = 3, b = 2, c = 2.$$

Cazul 3. $m = 1$.

Deoarece $c \ne 1$, avem:

(i) pentru $c = 2$ relația (*) devine:

$$(a-3)(b-3) = 12,$$

şi obţinem soluţiile:

$$(a=15, b=4, c=2), (a=9, b=5, c=2) \text{ şi } (a=7, b=6, c=2).$$

(ii) pentru $c=3$ relaţia (*) devine:

$$(2a-4)(2b-4)=24 \Leftrightarrow (a-2)(b-2)=6,$$

şi obţinem soluţiile:

$$(a=8, b=3, c=3), \text{ şi } (a=5, b=4, c=3).$$

(iii) pentru $c \geq 4$ avem:

$$c^2-2c-1 \geq 4c-2c-1=2c-1>0,$$

şi ar trebui ca inegalitatea (2), care este $c^4-4c^3+2c+1 \leq 0$, să fie adevărată.

Cum $c^4-4c^3+2c+1=c^3(c-4)+2c+1>0$, nu obţinem soluţii.

Revenind la necunoscutele t, x, y, z, avem soluţiile:

t	x	y	z
8	0	0	0
6	1	0	0
5	3	0	0
4	2	1	0
3	7	2	0
3	4	3	0
3	2	1	1
2	14	3	1
2	8	4	1
2	6	5	1
2	7	2	2
2	4	3	2

Observaţie. Numărul 30 nu joacă un rol esenţial. El poate fi înlocuit cu un produs de trei numere prime distincte.

4. Problema lunii septembrie 2012 - www.mateinfo.ro

Determinaţi toate perechile de numere întregi (x, y) *astfel încât*:

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Olimpiada Internationala - Slovenia 2006

Solutie oficiala:

Solution. If (x, y) is a solution then obviously $x \geq 0$ and $(x, -y)$ is a solution too. For $x = 0$ we get the two solutions $(0, 2)$ and $(0, -2)$.

Now let (x, y) be a solution with $x > 0$; without loss of generality confine attention to $y > 0$. The equation rewritten as

$$2^{x}(1+2^{x+1}) = (y-1)(y+1)$$

shows that the factors $y-1$ and $y+1$ are even, exactly one of them divisible by 4. Hence $x \geq 3$ and one of these factors is divisible by 2^{x-1} but not by 2^{x}. So

$$y = 2^{x-1}m + \epsilon, \qquad m \text{ odd}, \qquad \epsilon = \pm 1. \tag{1}$$

Plugging this into the original equation we obtain

$$2^{x}\left(1+2^{x+1}\right) = \left(2^{x-1}m+\epsilon\right)^{2} - 1 = 2^{2x-2}m^{2} + 2^{x}m\epsilon,$$

or, equivalently

$$1+2^{x+1} = 2^{x-2}m^{2} + m\epsilon.$$

Therefore

$$1 - \epsilon m = 2^{x-2}(m^{2}-8). \tag{2}$$

For $\epsilon = 1$ this yields $m^{2} - 8 \leq 0$, i.e., $m = 1$, which fails to satisfy (2).

For $\epsilon = -1$ equation (2) gives us

$$1 + m = 2^{x-2}(m^{2}-8) \geq 2(m^{2}-8),$$

implying $2m^{2} - m - 17 \leq 0$. Hence $m \leq 3$; on the other hand m cannot be 1 by (2). Because m is odd, we obtain $m = 3$, leading to $x = 4$. From (1) we get $y = 23$. These values indeed satisfy the given equation. Recall that then $y = -23$ is also good. Thus we have the complete list of solutions (x, y): $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$, $(4, -23)$.

Alte soluţii

1. Prof. Gheorghe ROTARIU – Liceul Tehnologic „Al. Vlahuţă" Şendriceni, jud. Botoşani

Facem câteva precizări:

- Ecuaţia fiind simetrică în y, odată cu soluţia (x_0, y_0), va admite şi soluţia $(x_0, -y_0)$.
- $|y| \geq 2$ deoarece $y^2 = 1 + 2^x + 2^{2x+1} > 1$ deoarece $2^\lambda > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ şi y este număr impar.
- Pentru $x < 0$ avem:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 < 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} < 1 + 2^0 + 2^0 \Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} < 3 \qquad (1)$$

Dar, deoarece $|y| \geq 2$ rezultă:

$$y^2 \geq 4 \Rightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} \geq 4 \qquad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) sunt contradictorii. Prin urmare, ecuaţia dată nu poate avea prima componentă a soluţiei (adică x) număr întreg negativ.

Se verifică imediat că perechile $\boxed{(0, 2); (0, -2)}$ sunt soluţii ale ecuaţiei.

De asemenea, o particularizare pentru $x = 1$ şi $x = 2$ nu conduce la soluţii.

Studiem dacă ecuaţia dată admite soluţii pentru situaţiile: $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 2 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Facem următoarele substituţii: $\boxed{\begin{array}{ll} 2^{x-2} = t & (3) \\ y = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N} & (4) \end{array}}$

Observaţie. Substituţia $2^{x-2} = t$ nu este una „magică". Am făcut-o pentru că cea „naturală" $2^x = t$ sau cea „apropiată" $2^{x-1} = t$ nu conduceau la relaţii din care să pot trage unele concluzii imediate (nu scăpam de coeficienţi multiplicativi nenuli şi nu aveam nici numere naturale consecutive).

Înlocuind (3) în ecuaţia iniţială, ea devine:

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}\Rightarrow 1+4t+32t^{2}=4k(k+1)+1\Rightarrow t(1+8t)=k(k+1) \qquad (5)$$

$$\left(2^{x-2}=t\Rightarrow \frac{2^{x}}{4}=t\Rightarrow 2^{x}=4t\Rightarrow 2^{2x}=16t^{2}\right)$$

Analizăm ecuaţia la care am ajuns:

$$t(1+8t)=k(k+1) \qquad (5).$$

Două remarci ne permite relaţia (5):

1) *Forma celor doi membri implică* $k\geq t$.
2) *Fie* k *fie* $k+1$ *este multiplu de* t.

Justificare pentru remarca a doua. Numărul t este o putere a lui 2. Numerele naturale k şi $k+1$ sunt consecutive, deci unul dintre ele, să presupunem k, este par.
Dacă, prin reducere la absurd, nici k nici $k+1$ nu sunt multipli ai lui t, atunci în descompunerea în factori primi ai lui k, exponentul lui 2 este strict mai mic decât exponentul lui 2 din expresia lui t. Evident, k mai poate avea în descompunere şi alţi factori primi (impari), eventual la puteri naturale nenule. Numărul $k+1$ fiind impar, va avea în descompunere doar factori primi impari, eventual la puteri naturale nenule. Efectuând produsul celor două numere (k şi $k+1$) nu vom obţine ca exponent al lui 2 exponentul din expresia lui t sau mai mare, ci strict mai mic. Sigur, pot să mai apară şi alţi factori primi la anumite puteri naturale. Prin urmare produsul $k(k+1)$ nu este multiplu al lui t, contradicţie cu (5).

Cazul I. $k=tu$, $u\in\mathbb{N}^{*}$.

$$t(1+8t)=k(k+1)\Rightarrow t(1+8t)=tu(tu+1)\overset{t>0}{\Rightarrow} 1+8t=u(tu+1)\Rightarrow 1+8t=tu^{2}+u\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\left(8-u^{2}\right)=u-1\overset{u^{2}\neq 8}{\Rightarrow} t=\frac{u-1}{8-u^{2}}.$$

De aici, t este pozitiv dacă şi numai dacă $u\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(1,2\sqrt{2}\right)$. Singurul număr natural de aici este $u=2$. Dar, pentru această valoare a lui u, nu avem $t\in\mathbb{N}^{*}$. Cazul acesta, $k=tu$, $u\in\mathbb{N}^{*}$ nu convine.

Cazul II. $k+1=tu$, $u\in\mathbb{N}^{*}$.

$$t(1+8t)=k(k+1)\Rightarrow t(1+8t)=tu(tu-1)\overset{t>0}{\Rightarrow} 1+8t=u(tu-1)\Rightarrow 1+8t=tu^{2}-u\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\left(8-u^{2}\right)=-u-1\overset{u^{2}\neq 8}{\Rightarrow} t=\frac{-u-1}{8-u^{2}}\Rightarrow t=\frac{u+1}{u^{2}-8}.$$

Impunând condiţiile $\begin{cases} \dfrac{u+1}{u^2-8} > 0 \\ u+1 > u^2-8 \Rightarrow u \in \{1,2,3\} \\ u \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Singura valoare a lui u pentru care t este număr natural este $u=3$. Deci $k+1=3t \Rightarrow k=3t-1$. Înlocuite în (5), avem:

$$t(1+8t)=k(k+1) \Rightarrow t(1+8t)=3t(3t-1) \overset{t>0}{\Rightarrow} 1+8t=9t-3 \Rightarrow t=4.$$

Revenind în substituţie, avem:

$$2^{x-2}=t \Rightarrow 2^{x-2}=2^2 \Rightarrow x-2=2 \Rightarrow x=4.$$

În fine, pentru $x=4 \Rightarrow y=\pm 23$.

Concluzionând, soluţiile ecuaţiei date sunt: $\boxed{(0,2);(0,-2);(4,23);(4,-23).}$

2. Prof. Corneliu Mănescu-Avram , Grupul Scolar de Transporturi Ploiesti

Ecuaţia nu are soluţii cu $x < 0$, deoarece în acest caz membrul stâng nu este un număr întreg.

Dacă $x = 0$, atunci există soluţiile $(0, 2)$ şi $(0, -2)$.

Dacă (x, y) este o soluţie cu $x > 0$, atunci putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $y > 0$. Ecuaţia se scrie

$$2^x(1+2^{x+1}) = (y-1)(y+1).$$

Numărul y este impar, deci cel mai mare divizor comun al numerelor $y-1$ şi $y+1$ este egal cu 2. Se deduce că unul dintre aceste numere este divizibil cu 2, dar nu cu 4, iar celălalt se divide cu 2^{x-1}, dar nu cu 2^x. Avem astfel $x \geq 3$ şi $y = 2^{x-1}a + b$, cu a impar şi $b = \pm 1$. Se substituie această valoare în ecuaţia din enunţ, se simplifică şi se obţine

$$2^{x-2}(a^2-8) = 1-ab.$$

Se verifică simplu că $a = 1$ nu este soluţie, aşadar $a \geq 3$ şi $b = -1$. Din

$$2(a^2-8) \leq 1+a,$$

se obţine $a = 3$, ceea ce ne dă soluţia $x = 4, y = 23$.

Rezultă că soluţiile (x, y) ale ecuaţiei date sunt $(0,2), (0,-2), (4,23), (4,-23)$.

Bibliografie

[1] www.imo-official.org/47th International Mathematical Olympiad Slovenia 2006

[2] Djukić, Dušan, Janković, Vladimir, Matić, Ivan, Petrović, Nikola, The IMO Compendium, Second Edition, Springer, 2011

3. Prof. Păcurar Cornel-Cosmin,Col.Naț. I.M.Clain,Blaj

Determinați toate perechile de numere întregi (x, y) astfel încât $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

Soluție:Fie $(x, y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ astfel încât $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ (1).

Cazul 1,pentru $x<0, x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ avem $(1)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^{-x}}+\frac{2}{2^{-2x}}=y^2 \Leftrightarrow 2^{-2x}+2^{-x}+2=2^{-2x}\cdot y^2 |:2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{-2x-1}+2^{-x-1}+1=2^{-2x-1}\cdot y^2$ (2).

Subcazul 1.1,pentru $x=-1$ avem $(2)\Leftrightarrow 4=2y^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$.

Subcazul 1.2,pentru $x\leq -2$ avem $(2)\Leftrightarrow$ impar=par care este imposibil.

Cazul 2,pentru $x=0$ avem $(1)\Leftrightarrow 4=y^2\Leftrightarrow y=\pm 2\in\mathbb{Z}$.

Cazul 3,pentru $x>0, x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ avem $(1)\Leftrightarrow$impar$=y^2\Rightarrow y=$impar$\Leftrightarrow y=2k+1$ unde $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 1+2^x+2^{2x+1}=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2^x+2^{2x+1}=4k^2+4k|:4\Leftrightarrow 2^{x-2}+2^{2x-1}=k(k+1)$ (3).

Subcazul 3.1,pentru $x=1$ avem $(3)\Leftrightarrow\frac{1}{2}+2=k(k+1)\Leftrightarrow 5=2k(k+1)\Rightarrow 2|5$ care este fals.

Subcazul 3.2,pentru $x=2$ avem $(3)\Leftrightarrow 1+8=k(k+1)\Leftrightarrow 9=k(k+1)$ care nu are soluții în $\mathbb{Z}$.

Subcazul 3.3,pentru $x\geq 3$ avem $(3)\Leftrightarrow 2^{x-2}(1+2^{x+1})=k(k+1)$ (4).

Subcazul 3.3.1,pentru k par$\Rightarrow k+1$ impar $\Rightarrow(2^{x-2}, k+1)=1$.

Din $(4)\Rightarrow 2^{x-2}|k(k+1)$ și ținând cont de $(2^{x-2}, k+1)=1\Rightarrow 2^{x-2}|k\Rightarrow k=2^{x-2}\cdot p$ unde $p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow k+1=2^{x-2}\cdot p+1$.

Avem $(4)\Leftrightarrow 1+2^{x+1}=p(2^{x-2}\cdot p+1)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{p-1}{8-p^2}$ (5).

Cum $x\in\mathbb{Z}$ și $x\geq 3\Rightarrow 2^{x-2}\in\mathbb{N}$ și împreună cu $(5)\Rightarrow\frac{p-1}{8-p^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow 8-p^2|p-1\Rightarrow|8-p^2|\leq|p-1|$ sau $p-1=0$.

Pentru $p=1$ avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=0$ care nu are soluții reale.

Rămâne $|8-p^2|\leq|p-1|\Leftrightarrow|p^2-8|\leq|p-1|$ (6).

Pentru $p\geq 3$ avem $(6)\Leftrightarrow p^2-p-7\leq 0\Leftrightarrow p\in\left[\frac{1-\sqrt{29}}{2},\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right]\cap\mathbb{Z}\cap[3,+\infty)\Leftrightarrow p\in\{3\}$ și în acest caz avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=-2$ care este imposibil.

Pentru $p\leq -3$ avem $(6)\Leftrightarrow p^2+p-9\leq 0\Leftrightarrow p\in\left[\frac{-1-\sqrt{37}}{2},\frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right]\cap\mathbb{Z}\cap(-\infty,-3]\Leftrightarrow p\in\{-3\}$ și în acest caz avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=4\Leftrightarrow x=4$ și în acest caz avem $(1)\Leftrightarrow y^2=529\Leftrightarrow y=\pm 23\in\mathbb{Z}$.

Pentru $p=2$ avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=0$ care nu convine pentru că $x\in\mathbb{Z}$ și $x\geq 3$.

Pentru $p=0$ avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{-1}{8}$ care nu are soluții reale.

Pentru $p=-1$ avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{-2}{7}$ care nu are soluții reale.

Pentru $p=-2$ avem $(5)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{-3}{4}$ care nu are soluții reale.

Subcazul 3.3.2,pentru k impar $\Rightarrow k+1$ par.

Din k impar $\Rightarrow(2^{x-2},k)=1$.

Din $(4)\Rightarrow 2^{x-2}|k(k+1)$ și ținând cont de $(2^{x-2},k)=1\Rightarrow 2^{x-2}|k+1\Rightarrow k+1=2^{x-2}\cdot q$, unde $q\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow k=2^{x-2}\cdot q-1$.

Avem $(4)\Leftrightarrow 1+2^{x+1}=(2^{x-2}\cdot q-1)q\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{q+1}{q^2-8}$ (7).

Cum $x\in\mathbb{Z}$ și $x\geq 3\Rightarrow 2^{x-2}\in\mathbb{N}$ și împreună cu $(7)\Rightarrow\frac{q+1}{q^2-8}\in\mathbb{N}\Rightarrow q^2-8|q+1\Rightarrow|q^2-8|\leq|q+1|$ sau $q+1=0$.

Pentru $q=-1$ avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=0$ care nu are soluții reale.

Rămâne $|q^2-8|\leq|q+1|$ (8).

Pentru $q\geq 3$ avem $(8)\Leftrightarrow q^2-q-9\leq 0\Leftrightarrow q\in\left[\frac{1-\sqrt{37}}{2},\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right]\cap\mathbb{Z}\cap[3,+\infty)\Leftrightarrow q\in\{3\}$ și în acest caz avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=4\Leftrightarrow x=4$ și în acest caz avem $(1)\Leftrightarrow y^2=529\Leftrightarrow y=\pm 23\in\mathbb{Z}$.

Pentru $q=2$ avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{3}{-4}$ care nu are soluții reale.

Pentru $q=1$ avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{2}{-7}$ care nu are soluții reale.

Pentru $q=0$ avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{1}{-8}$ care nu are soluții reale.

Pentru $q=-2$ avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=0$ care nu convine pentru că $x\in\mathbb{Z}$ și $x\geq 3$.

Pentru $q\leq -3$ avem $(8)\Leftrightarrow q^2+q-7\leq 0\Leftrightarrow q\in\left[\frac{-1-\sqrt{29}}{2},\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right]\cap\mathbb{Z}\cap(-\infty,-3]\Leftrightarrow q\in\{-3\}$ și în acest caz avem $(7)\Leftrightarrow 2^{x-2}=-2$ care nu are soluții reale.

În concluzie soluțiile întregi ale ecuației (1) sunt $(x, y) \in \{(0,2), (0,-2), (4,-23), (4,23)\}$.

4. Profesor Ioan Viorel Codreanu, Şcoala Gimnazială Satulung,Maramureş

Soluția 1.

Pentru $x = 0$, obținem $y^2 = 4$ și $(0,-2),(0,2)$ sunt soluții ale ecuației date. Dacă (x, y) este soluție a ecuației $1+2^x+2^{2x+1} = y^2 = (-y)^2$ atunci și $(x,-y)$ este soluție a acesteia. Pentru $x \le -1$, deoarece $1+2^x+2^{2x+1} \le 1+2^{-1}+2^{-1} = 2$ și $y^2 = 1+2^x+2^{2x+1} > 1$, ecuația nu are soluție. Fie (x, y) soluție a ecuației. Putem presupune că $x \ge 1$ și $y \ge 2$. Ecuația se scrie în forma $2^x(2^{x+1}+1) = (y-1)(y+1)$ și observăm că y este impar, $(y-1, y+1) = 2$ și dintre factorii $y-1$ și $y+1$ doar unul este divizibil cu 4. Pentru $x = 2$ obținem ecuația $y^2 = 37$ fără soluții întregi. Considerăm $x \ge 3$ și observăm că doar unul dintre factorii $y-1$ și $y+1$ este divizibil cu 2^{x-1} dar nu este divizibil cu 2^x. Prin urmare

$$y = 2^{x-1} \cdot n + k \qquad (1)$$

unde n este impar și $k = \pm 1$. Înlocuind $y = 2^{x-1} \cdot n + k$ în ecuația dată, obținem

$$2^x(2^{x+1}+1) = (2^{x-1} \cdot n + k)^2 - 1$$

și

$$2^x(2^{x+!}+1) = 2^{2x-2} \cdot n^2 + 2^x \cdot nk$$

de unde, împărțind cu 2^x, obținem

$$2^{x+1}+1 = 2^{x-2} \cdot n^2 + nk$$

și

$$1 - nk = 2^{x-2}(n^2 - 8) \qquad (2)$$

Dacă $k = 1$ egalitatea (2) nu are loc. Într-adevăr dacă $n = 1$, atunci $-7 \cdot 2^{x-2} = 0$ nu are soluție iar dacă $n \ge 3$ avem $1 - n < 0$ și $2^{x-2}(n^2 - 8) > 0$.

Dacă $k=-1$, atunci egalitatea (2) devine

$$1+n=2^{x-2}\left(n^2-8\right)\geq 2\left(n^2-8\right)$$

de unde rezultă $2n^2-n-17\leq 0$ cu soluția $n\leq 3$. Pentru $n=1$ obținem $2=-7\cdot 2^{x-2}$ fără soluție iar pentru $n=3$ din $2^{x-2}=4$ obținem $x=4$ și din (1) $y=23$. Deci soluțiile ecuației date sunt $(0,-2),(0,2),(0,-23)$ și $(0,23)$.

Soluția 2.

Fie (x,y) o soluție a ecuației date. Folosind observațiile din ***Soluția 1*** putem considera că

$x\geq 5$ și $y\geq 1$ și $(0,-2),(0,2)$ sunt soluții ale ecuației. Într-adevăr pentru $x=1,2$ și 3 se verifică ușor că ecuația nu are soluții întregi iar pentru $x=4$ obținem ecuația $y^2=529$ și

$(4,-23),(4,23)$ sunt soluții ale ecuației date. Avem $y^2=1+2^x+2^{2x+1}$ și cum $\left(2^x+1\right)^2=2^{2x}+2^{x+1}+1$ obținem

$$\left(y-\left(2^x+1\right)\right)\left(y+\left(2^x+1\right)\right)=2^x\left(2^x-1\right)$$

și observăm că y și 2^x+1 sunt impare și $y>2^x+1$.

Avem

$$y-2^x-1=2a \text{ și } y+2^x+1=2^{x-1}\cdot b \text{ sau } y-2^x-1=2^{x-1}\cdot b \text{ și } y+2^x+1=2a$$

unde a și b sunt numer naturale nenule și $ab=2^x-1$.

În ultimul caz $y=2a-2^x-1\leq 2\left(2^x-1\right)-2^x-1=2^x-3$ contradicție cu $y>2^x+1$.

În primul caz $y=a+2^{x-2}\cdot b$ și $2^x+1=2^{x-2}\cdot b-a$ (1). Observăm că a și b sunt impare.

Ținând seama de $y>2^x+1$ avem

$$2^{x+1}+2=2\left(2^x+1\right)<y+1+2^x=2^{x-1}\cdot b,$$

de unde rezultă că $b>3$, deci $b\geq 5$. Folosind a doua ecuație din (1), avem

$$a=2^{x-2}\cdot b-2^x-1\geq 5\cdot 2^{x-2}-2^x-1=2^{x-2}-1.$$

Dacă $b \geq 7$, atunci

$$2^x - 1 = ab \geq 7\left(2^{x-2} - 1\right) = 2^x + 3 \cdot 2^{x-2} - 7 > 2^x - 1, \text{contradicție.}$$

Deci $b = 5$ și înlocuind în a doua ecuație din (1) obținem $a = 5 \cdot 2^{x-2} - 2^x - 1 = 2^{x-2} - 1$ iar înlocuind în prima ecuație din (1) obținem $y = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$. Rezultă că

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = \left(3 \cdot 2^{x-1} - 1\right)^2$$

de unde obținem, după efectuarea calculelor, $2^{2x-2} = 4 \cdot 2^x$ și atunci $x = 4$, contradicție cu $x \geq 5$. Deci ecuația dată are soluțiile $(0,-2),(0,2),(4,23)$ și $(4,-23)$.