MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro
(revistă lunară)

IANUARIE 2013

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro

1. SOLUŢII NOI PENTRU PATRU PROBLEME DIN G.M.-B ŞI O ÎNTĂRIRE

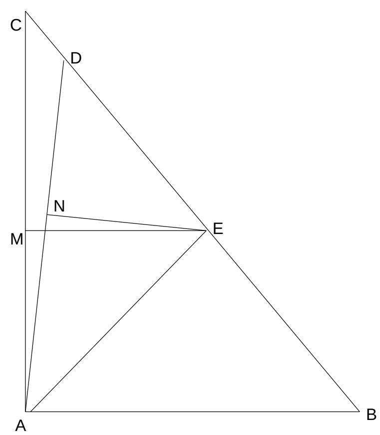
TITU ZVONARU, Comăneşti şi NECULAI STANCIU, Buzău

E:14275. *Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A şi cu $m(\angle B) = 60^0$. Fie D, $E \in (BC)$ astfel încât $m(\angle CAD) = 10^0$ şi $(AE$ este bisectoarea unghiului BAD. Arătaţi că $[AD] \equiv [CE]$.*

Mihai Monea, Deva

Soluţia acestei probleme, publicată în *G.M.-B nr. 6-7-8 / 2012, p. 327* şi aparţinând *Cameliei Oprea* din Sibiu, face apel la teorema sinusurilor şi la formula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, lucruri pe care majoritatea elevilor din gimnaziu nu le ştiu.

Prezentăm în continuare o soluţie care foloseşte doar cunoştinţe accesibile unui elev din gimnaziu.



Din $m(\angle CAD) = 10^0$ deducem că $m(\angle BAD) = 80^0$ şi cum $(AE$ este bisectoare avem $m(\angle EAD) = 40^0$. Pe de altă parte, din ΔBAD deducem că $m(\angle ADB) = 40^0$, aşadar ΔAED este isoscel cu $AE = ED$ şi $m(\angle AED) = 100^0$.

Fie M, N proiecţiile ortogonale ale punctului E pe dreptele AC, respectiv AD. Avem $m(\angle NEA) = 50^0$ şi $m(\angle MAE) = 50^0$.

Rezultă uşor că triunghiurile dreptunghice ENA şi AME sunt congruente, aşadar $AN = ME$. Dar $AN = \dfrac{AD}{2}$ (deoarece triunghiul AED este isoscel) şi $ME = \dfrac{CE}{2}$ (cateta care se opune unghiului de 30^0 este jumătate din ipotenuză), deci $[AD] \equiv [CE]$.

E:14317. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi cu $m(\angle B) = 60^0$, iar D şi E pe latura BC astfel încât $m(\angle CAD) = 10^0$ şi $(AE$ este bisectoarea unghiului BAD. Arătaţi că $[AD] \equiv [CE]$.*

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa, Hunedoara

Notă. *Alte trei soluţii - de această dată ale problemei E:14317 din G.M-B, nr. 3/2012, p.152 au fost date de Amelia Duca, în Didactica Matematică – Supliment al publicaţiei Gazeta Matematică - Anul II, Nr. 1 /2012 pp. 9 – 11.*

26556. *Să se arate că:*

$$3\left(x^2+xy+y^2\right)\left(y^2+yz+z^2\right)\left(z^2+zx+x^2\right)\geq (x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive $x,\ y,\ z$.

Viorel Cornea, Hunedoara

Soluţia publicată în *G.M.-B nr. 6-7-8 / 2012, p. 341*, foloseşte un artificiu foarte interesant, dar mai greu de intuit de către un elev.

Iată o soluţie oarecum mai naturală.

Deoarece,

$$x^2+xy+y^2=\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{3(x+y)^2}{4}\geq\frac{3(x+y)^2}{4},$$

scriind încă două inegalităţi similare, este suficient să demonstrăm că:

$$3\cdot\frac{3(x+y)^2}{4}\cdot\frac{3(y+z)^2}{4}\cdot\frac{3(z+x)^2}{4}\geq (x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$$

$$\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Folosind identitatea,

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz,$$

avem de demonstrat că:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz,$$

care este inegalitatea lui *Cesaró* (se obţine uşor prin înmulţirea inegalităţilor: $x+y\geq 2\sqrt{xy},\ y+z\geq 2\sqrt{yz},\ z+x\geq 2\sqrt{zx}$).

E:14303. *Fie* $a,b,c\in(0,\infty)$.*Demonstraţi că:*

$$\frac{a(1+b+c)+c(1+a+b)}{a+c}\leq\sqrt{(1+a+b)(1+b+c)}\leq\frac{a(1+a+b)+c(1+b+c)}{a+c}.$$

Radu Ghenghiu, Oradea

Vom da acestei probleme o altă soluţie decât cea prezentată în *G.M.-B nr. 6-7-8 / 2012, p. 347.*

Cu inegalitatea dintre media armonică şi cea geometrică avem:

$$\frac{2ac}{a+c}\leq\sqrt{ac};$$

obţinem că:

$$\frac{a(1+b+c)+c(1+a+b)}{a+c}=1+b+\frac{2ac}{a+c}\leq 1+b+\sqrt{ac},$$

şi atunci pentru inegalitatea din stânga este suficient să demonstrăm că:

$$\left(1+b+\sqrt{ac}\right)^2\leq(1+b+a)(1+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (1+b)^2 + ac + 2(1+b)\sqrt{ac} \le (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + ac$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ac} \le a+c, \text{ adevărată.}$$

Pentru inegalitatea din dreapta folosim inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, i.e.

$$\frac{a+c}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}},$$

scrisă sub forma:

$$\frac{a+c}{2} \le \frac{a^2+c^2}{a+c},$$

obţinem că:

$$\frac{a(1+a+b)+c(1+b+c)}{a+c} = 1+b+\frac{a^2+c^2}{a+c} \ge 1+b+\frac{a+c}{2},$$

şi este suficient să arătăm că:

$$(1+b+a)(1+b+c) \le (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + ac \le (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4ac \le (a+c)^2, \text{ evident adevărată.}$$

Avem egalitate în ambele părţi dacă şi numai dacă $a = c$.

E:14278. b) *Demonstraţi că pentru orice numere reale* a, b, c *pozitive, nenule, pentru care* $a+b+c=1$, *este adevărată inegalitatea:*

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \le \frac{1}{abc}.$$

Adriana Dragomir, Oţelu Roşu

O întărire a problemei E:14278 din G.M.-B 12/2011:

’’Demonstraţi că pentru orice numere reale a, b, c *pozitive, nenule, pentru care* $a+b+c=1$, *este adevărată inegalitatea:*

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{2(1+3b)}{c+a} + \frac{2(1+3c)}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc} \le \frac{1}{abc}.’’$$

Soluţie. Vom demonstra inegalitatea:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{a^3+2abc}{abc} \le \frac{1}{bc} \qquad (*)$$

Folosind faptul că $a+b+c=1$, inegalitatea (*) se scrie succesiv:

$$\frac{2(4a+b+c)}{b+c} + \frac{a^2+2bc}{bc} \le \frac{(a+b+c)^2}{bc}$$

$$\Leftrightarrow 8abc + 2bc(b+c) + a^2(b+c) + 2bc(b+c) \le$$

$$\le a^2(b+c) + (b^2+c^2)(b+c) + 2ab(b+c) + 2ac(b+c) + 2bc(b+c)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-2bc) + 2ab^2 + 2ac^2 + 2abc + 2abc - 8abc \ge 0$$

$\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 + 2a(b-c)^2 \geq 0$, care este adevărată.

Scriind încă două inegalităţi similare cu (*), prin adunare obţinem:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{2(1+3b)}{c+a} + \frac{2(1+3c)}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

2. Solutions for two problems (and a remark) from SSMJ other than those listed in SSMJ – January 2013

by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

- **5220:** *Proposed by Tom Moore, Bridgewater State University, Bridgewater, MA*

  The pentagonal numbers begin $1, 5, 12, 22\ldots$ and are generally defined by $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, $\forall n \geq 1$. The triangular numbers begin $1, 3, 6, 10, \ldots$ and are generally defined by $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$. Find the greatest common divisor, $\gcd(T_n, P_n)$.

We analyze three cases:

i) $n = even, n = 2k \Rightarrow P_n = k(6k-1), T_n = k(2k+1)$.

If $d|2k+1$, and $d|6k-1 \Rightarrow d|3(2k+1)-(6k-1) \Rightarrow d|4 \Rightarrow d \in \{1,2,4\}$, but $2k+1 = odd$, so $d = 1$ and $\gcd(6k-1, 2k+1) = 1$.

ii) $n = 4k+1 \Rightarrow P_n = (4k+1)(6k+1), T_n = (4k+1)(2k+1)$.

If $d|2k+1$, and $d|6k+1 \Rightarrow d|3(2k+1)-(6k+1) \Rightarrow d|2 \Rightarrow d \in \{1,2\}$, but $2k+1 = odd$, so $d = 1$ and $\gcd(6k+1, 2k+1) = 1$.

iii) $n = 4k+3 \Rightarrow P_n = 2(4k+3)(3k+2), T_n = 2(4k+3)(k+1)$.

If $d|k+1$ and $d|3k+2 \Rightarrow d|3(k+1)-(3k+2) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$, so $\gcd(3k+2, k+1) = 1$.

Hence,

$$\gcd(P_n,T_n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, \text{ if } n\equiv 0(\bmod 2)\\ n, \text{ if } n\equiv 1(\bmod 4)\\ 2n, \text{ if } n\equiv 3(\bmod 4)\end{cases}.$$

- **5221:** *Proposed by Michael Brozinsky, Central Islip, NY*

  If x, y and z are positive numbers find the maximum of

$$\frac{\sqrt{(x+y+z)\cdot xyz}}{(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2}.$$

The maximum is $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (occurs for $x=y=z$).
We give three solutions:

Solution1.
We have:

$$\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2}\le\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}\le\frac{\sqrt{3}}{12}$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2\ge 12xyz(x+y+z)$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^2+2(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)^2\ge 12xyz(x+y+z)$.

Since:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx,$$

is sufficient to show that:

$4(xy+yz+zx)^2\ge 12xyz(x+y+z)$

$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\ge 3xyz(x+y+z)$

$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z)$,

which is true because is the inequality:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca,$$

for $a=xy, b=yz, c=zx$.

Solution2.
Since $x,y,z>0$ there is a triangle with the lengths of the sides a,b,c such that:

$$x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{a+c-b}{2}, z=\frac{b+c-a}{2},$$

and then the inequality

$$\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2} \le \frac{\sqrt{3}}{12},$$

is exactly the Weitzenböck' s inequality.

Solution 3. Using the $AM-GM$ inequality and the inequality:

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca),$$

we have that:

$$[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2]^2 \ge (4xy+4yz+4zx)^2 = 16(xy+yz+zx)^2 \ge$$
$$\ge 16\cdot 3\left(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy\right) = 48xyz(x+y+z),$$

which is equivalent with

$$\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2} \le \frac{\sqrt{3}}{12},$$

and we are done.

- **5218:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  Find positive integers x and y such that,

  $$2x-y-\sqrt{3x^2-3xy+y^2}=2013$$

  with $(x,y)=1$.

Denoting $a=2013$, we have that:

$$2x-y-a=\sqrt{3x^2-3xy+y^2} \qquad (1)$$

So,

$$(2x-y-a)^2 = 3x^2-3xy+y^2 \Leftrightarrow 4x^2+y^2+a^2-4xy-4ax+2ay = 3x^2-3xy+y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-(4a+y)x+a^2+2ay=0 \qquad (2)$$

For this equation to have natural roots its discriminate must be perfect square, i.e.

$$(4a+y)^2-4(a^2+2ay)=k^2, k\in N.$$
$$\Leftrightarrow 16a^2+8ay+y^2-4a^2-8ay=k^2 \Leftrightarrow k^2-y^2=12a^2 \Leftrightarrow (k-y)(k=y)=12a^2.$$

Because $k-y$ and $k+y$ have the same parity (since their sum is $2k$) and $k-y<k+y$, we deduce that:

$$\begin{cases} k-y=2d_1 \\ k+y=2d_2 \end{cases}, \text{with } d_1<d_2 \text{ and } d_1d_2=3a^2.$$

Yields $y=d_2-d_1$, and from (2) we obtain:

$$x_1=\frac{4a+y+k}{2}=\frac{4a+2d_2}{2}=2a+d_2, \text{ and } x_2=\frac{4a+y-k}{2}=\frac{4a-2d_1}{2}=2a-d_1.$$

But, for (x,y) to be a solution of the equation (1) it must that $2x-y-a>0$.

Thus, for $x = 2a - d_1$, $y = d_2 - d_1$ we have that:

$$4a - 2d_1 - d_2 + d_1 - a > 0 \Rightarrow 3a = d_1 + d_2 \overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{d_1 d_2} = 2\sqrt{3a^2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow 3 > 2\sqrt{3},$$

false.

So we have only possibility:

$$x = 2a + d_2,\ y = d_2 - d_1.$$

If $\gcd(d_1, d_2) = p > 1$, then $p | a,\ p | d_1,\ p | d_2 \Rightarrow p | x$ and $p | y$, contradiction with $(x, y) = 1$, so $\gcd(d_1, d_2) = 1$.

Remarks. If $a = \textit{prime number}$ without the condition $(x, y) = 1$, then the equation $2x - y - \sqrt{3x^2 - 3xy + y^2} = a$ has solutions:

$$(x, y) \in \{(3a^2 + 2a, 3a^2 - 1), (a^2 + 2a, a^2 - 3), (5a, 2a)\}.$$

3. 17 soluții și o generalizare pentru problema L222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012

Profesor Ioan Viorel Codreanu

Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Într-o frumoasă notă apărută în revista **Recreații Matematice, nr. 2/2012, Titu Zvonaru** prezintă opt soluții pentru problema **L222** (**Titu Zvonaru-**6 soluții, **Daniel Văcaru-**o soluție și soluția autorulului **Florin Stănescu**). Alte trei soluții (**Ioan Viorel Codreanu-**soluțiile 1, 2 și 3 din acest articol) nu au fost incluse în acea notă deoarece revista era definitivată la data primirii materialului. Scopul acestui articol este de a prezenta alte 17 soluții pentru problema **L222,** utilizând inegalitățile: **mediilor, Schur, Cauchy-Schwarz, Bergström, Cebîșev, Jensen, Gerretsen, Euler, procedeul mixing variables** și o **lemă** utilă în rezolvarea unor inegalități. Articolul se încheie cu o generalizare a problemei **L222**, pentru care vom prezenta două soluții.

L222. Pentru a, b, c numere reale pozitive, demonstrați inegalitatea

$$a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{18}{a+b+c} \qquad \textbf{(1)}$$

Florin Stănescu, Găești

Soluția 1. Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2}{bc}$ și analoagele ei.

Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2\sum\frac{a}{bc}=\frac{2}{\prod a}\cdot\sum a^2$$

și rămâne de arătat că

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum a\right)\geq 9\prod a\,.$$

Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, avem:

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum a\right)\geq 3\sqrt[3]{\left(\prod a\right)^2}\cdot 3\sqrt[3]{\prod a}=9\prod a$$

și soluția se încheie.

Soluția 2. Aplicând **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\sum\left(\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{a}}\right)\geq\frac{\left(2\sum\frac{1}{a}\right)^2}{2\sum\frac{1}{a}}=2\sum\frac{1}{a}$$

și folosind **Inegalitatea MA-MH,** $\left(\sum\frac{1}{a}\right)\left(\sum a\right)\geq 9$, obținem **(1)**.

Soluția 3. Putem să presupunem că $a\leq b\leq c$ fără a restrânge generalitatea. Ca urmare, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\geq\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Aplicând **Inegalitatea Cebîșev**, obținem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{1}{3}\left(\sum a\right)\left(\sum\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right)=\frac{2}{3}\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\geq\frac{2}{9}\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2\geq 2\sum\frac{1}{a}\geq\frac{18}{\sum a}$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH,** $\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)\geq 9$ și **Inegalitatea Cauchy-Schwarz,**

$$3\sum\left(\frac{1}{a}\right)^2\geq\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2.$$

Soluția 4. Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\sum\left(\frac{a}{b^2}+\frac{a}{c^2}\right)\geq 6\sqrt[6]{\prod\left(\frac{a}{b^2}\cdot\frac{a}{c^2}\right)}=\frac{6}{\sqrt[3]{\prod a}}\geq\frac{18}{\sum a}$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MG,** $\sum a\geq 3\sqrt[3]{\prod a}$.

Soluția 5. Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2}{bc}$ și analoagele ei.

Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2\sum\frac{a}{bc}=2\sum\frac{a^2}{abc}$$

Folosind **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$2\sum\frac{a^2}{abc}\geq 2\cdot\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum abc}=2\cdot\frac{\left(\sum a\right)^2}{3\prod a}$$

și utilizând **Inegalitatea MA-MG** în forma $\left(\sum a\right)^3\geq 27\prod a$, obținem **(1).**

Soluția 6. Folosind **Inegalitatea MA-MG**, avem:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}\cdot\frac{b}{c^2}\cdot\frac{c}{a^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

și

$$\frac{a}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}\cdot\frac{b}{a^2}\cdot\frac{c}{b^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Sumând aceste inegalități, deducem

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{6}{\sqrt[3]{abc}}$$

și folosind **Inegalitatea MA-MG,** $\sum a\geq 3\sqrt[3]{\prod a}$, obținem **(1).**

Soluția 7. Putem să presupunem că $\sum a = 1$ fără a restrânge generalitatea. Folosind binecunoscuta inegalitate $\sum x^2 \geq \sum xy, \forall x, y, z \in R$, obținem:

$$\sum b^2c^2 \geq \sum bcca = abc\sum a = abc$$

care împreună cu **Inegalitatea Schur** (în cazul particular $\sum a = 1$), $\sum ab \leq \frac{1+9\prod a}{4}$ și **Inegalitatea MA-MG** în forma $\prod a \leq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ rezolvă inegalitatea **(1)**. Într-adevăr, avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = \sum \frac{b+c}{a^2} = \sum \frac{1-a}{a^2} = \frac{1}{(abc)^2}\sum (1-a)b^2c^2 = \frac{1}{(abc)^2}\left(\sum b^2c^2 - \sum ab^2c^2\right) =$$

$$= \frac{1}{(abc)^2}\left(\sum b^2c^2 - abc\sum bc\right) \geq \frac{1}{(abc)^2}\left(abc - abc\cdot\frac{1+9abc}{4}\right) = \frac{3}{4abc} - \frac{9}{4} \geq \frac{3\cdot 27}{4} - \frac{9}{4} = 18 = \frac{18}{\sum a}.$$

Soluția 8. Pentru a folosi notațiile obișnuite într-un triunghi (lungimile laturile notate a, b, c și semiperimetrul p) vom schimba variabilele și vom scrie ingalitatea **(1)** în forma:

$$\sum \frac{y+z}{x^2} \geq \frac{18}{\sum x} \qquad \textbf{(2)}$$

și folosind substituțiile **Ravi** $x = p-a, y = p-b, z = p-c$ inegalitatea **(2)** se scrie

$$\sum \frac{a}{(p-a)^2} \geq \frac{18}{p} \qquad \textbf{(3)}$$

aceasta fiind echivalentă cu

$$\sum a(p-b)^2(p-c)^2 \geq \frac{18\prod(p-a)^2}{p} \qquad \textbf{(4)}$$

Prin calcul stabilim că

$a(p-b)^2(p-c)^2 = p^4a - 2p^3a^2 + p^2(a^3 - 2abc) + 2pa^2bc + ab^2c^2$ și analoagele ei.

În continuare vom folosi identitățile geometrice $\sum ab = p^2 + r^2 + 4Rr, \prod a = 4pRr,$ $\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr), \sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ și $\prod(p-a) = pr^2$. Avem

$$\sum a(p-b)^2(p-c)^2 = 2p^5 - 2p^3\sum a^2 + p^2\left(\sum a^3 - 2\prod a\right) + \left(\sum ab\right)\left(\prod a\right),$$

iar după înlocuiri și efectuarea calculelor, obținem:

$$\sum a(p-b)^2(p-c)^2 = 16pR^2r^2 + 4pRr^3 - 2p^3r^2.$$

Atunci inegalitatea **(4)** se scrie

$$16pR^2r^2 + 4pRr^3 - 2p^3r^2 \geq \frac{18p^2r^4}{p} \Leftrightarrow p^2 \leq 8R^2 + 2Rr - 9r^2.$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ este suficient să demonstrăm că

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 8R^2 + 2Rr - 9r^2 \Leftrightarrow 2R^2 - Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R+3r) \geq 0,$$

care este adevărată dacă ținem seama de **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$.

Soluția 9. Vom demonstra inegalitatea **(3)**:

$$\sum \frac{a}{(p-a)^2} \geq \frac{18}{p}.$$

Considerăm funcția $f(t) = \frac{t}{(p-t)^2}, t \in (0, p)$. Prin calcul stabilim că

$f''(t) = \frac{2t+4p}{(p-t)^4} > 0, \forall t \in (0, p)$. Aplicând **Inegalitatea Jensen** pentru funcția convexă f, obținem:

$$\sum \frac{a}{(p-a)^2} \geq 3\cdot f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = 3\cdot f\left(\frac{2p}{3}\right) = 3\cdot \frac{\frac{2p}{3}}{\left(p - \frac{2p}{3}\right)^2} = \frac{18}{p}.$$

Soluția 10. Putem să presupunem că $\sum a = 1$ fără a restrânge generalitatea. Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \sum \frac{b+c}{a^2} = \sum \frac{1-a}{a^2}$$

și rămâne de arătat că $\sum \frac{1-a}{a^2} \geq 18$. Considerăm funcția $f(x) = \frac{1-x}{x}, x \in (0,1)$. Prin calcul stabilim că $f''(x) = \frac{6-2x}{x^4} > 0, \forall x \in (0,1)$. Aplicând **Inegalitatea Jensen** pentru funcția convexă f, obținem:

$$\sum \frac{1-a}{a^2} = 3 \cdot f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 18.$$

Soluția 11. Vom folosi procedeul de reducere a numărului de variabile-**mixing variables**.

Să considerăm funcția $f(a,b,c) = a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{18}{a+b+c}.$

Vom arăta că $f(a,b,c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$. Explicitând și apoi desfăcând parantezele, se obține inegalitatea echivalentă:

$$b^5+c^5+2b^4c+2bc^4+ab^4+ac^4+2ab^3c+2abc^3 \geq 6ab^2c^2+3b^3c^2+3b^2c^3. \qquad \textbf{(5)}$$

Folosind **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$b^5+c^5+b^4c \geq 3\sqrt[3]{b^5c^5b^4c} = 3b^3c^2$$

$$b^4c+bc^4+bc^4 \geq 3\sqrt[3]{b^4cbc^4bc^4} = 3b^2c^3$$

$$ab^4+ac^4+ab^3c+ab^3c+abc^3+abc^3 \geq 6\sqrt[6]{ab^4ac^4ab^3cab^3cabc^3abc^3} = 6ab^2c^2$$

și sumând aceste inegalități, obținem **(5)**. Prin urmare, rămâne să arătăm că $f(a,t,t) \geq 0$, unde

$t = \frac{b+c}{2}$. Această relație este echivalentă cu

$$2 \cdot \frac{a^4+3a^3t-7a^2t^2+at^3+2t^4}{a^2t^2(a+2t)} \geq 0. \qquad \textbf{(6)}$$

Folosind **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$a^4+a^3t+a^3t+a^3t+t^4+t^4 \geq 7\sqrt[7]{a^4a^3ta^3ta^3tat^3t^4t^4} = 7a^2t^2$$

și, prin urmare, inegalitatea **(6)** este adevărată.

Soluția 12. Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a} \geq \frac{2}{b}$ și analoagele ei.

Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq \sum\left(\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{a}\right) = 2\sum\frac{1}{a} \geq \frac{18}{\sum a},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**, $\left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right) \geq 9$.

Soluția 13. Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$ și analoagele ei.

Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\sum\left(\frac{a}{b^2}+\frac{a}{c^2}\right) \geq 2\sum\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\cdot\frac{9}{\sum\sqrt{ab}} \geq \frac{18}{\sum\frac{a+b}{2}}=\frac{18}{\sum a},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**, $\left(\sum\sqrt{ab}\right)\left(\sum\frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \geq 9$ și **Inegalitatea MA-MG**, $\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$ și analoagele ei.

Soluția 14. Inegalitatea **(1)** se scrie echivalent

$$\left(\sum a\right)\left(\sum\left(a^3b^2+a^2b^3\right)\right) \geq 18a^2b^2c^2$$

apoi desfăcând parantezele, se obține inegalitatea echivalentă

$$\sum a^4\left(b^2+c^2\right)+2\sum a^3b^3+\sum a^3bc(b+c) \geq 18a^2b^2c^2.$$

Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$\sum a^4b^2+\sum a^4c^2+\sum a^3b^3+\sum a^3b^3+\sum a^3b^2c+\sum a^3bc^2 \geq$$
$$\geq 18\sqrt[18]{\left(\prod a^4b^2\right)\left(\prod a^4c^2\right)\left(\prod a^3b^3\right)\left(\prod a^3b^3\right)\left(\prod a^3b^2c\right)\left(\prod a^3bc^2\right)}=$$
$$=18\sqrt[18]{a^{36}b^{36}c^{36}}=18a^2b^2c^2$$

și soluția problemei se încheie.

Soluția 15. Cu substituțiile $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, inegalitatea **(1)** se scrie

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x} \geq \frac{18}{\sum\frac{1}{x}}$$

Aplicând **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$\sum \frac{y^2+z^2}{x} = \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} \geq \frac{\left(2\sum x\right)^2}{2\sum x} = 2\sum x \geq \frac{18}{\sum \frac{1}{x}},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**, $\left(\sum x\right)\left(\sum \frac{1}{x}\right) \geq 9$.

Soluția 16. Putem să presupunem că $\prod a = 1$ fără a restrânge generalitatea. Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \sum \frac{b+c}{a^2} = \sum b^2c^2(b+c).$$

Aplicând **Iegalitatea MA-MG**, obținem:

$$\sum b^2c^2(b+c) \geq 3\sqrt[3]{\prod \left(b^2c^2(b+c)\right)} \geq 3\sqrt[3]{\prod \left(2b^2c^2\sqrt{bc}\right)} = 6\left(\prod a\right)^{\frac{5}{3}} = 6 \geq \frac{18}{\sum a},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MG**, $\sum a \geq 3\sqrt[3]{\prod a} = 3$ și $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ cu analoagele ei.

Soluția 17. Vom folosi (fără dmonstrație) următoarea:

***Lemă.* Fie** $a,b,c,x,y,z > 0$**. Atunci**

$$\sum x(b+c) \geq 2\sqrt{\left(\sum xy\right)\left(\sum ab\right)}.$$

Pentru demonstrație și aplicații se poate consulta $[3]$. Folosind lema pentru:

$x = \frac{1}{a^2}, y = \frac{1}{b^2}, z = \frac{1}{c^2}$, avem:

$$\sum \frac{b+c}{a^2} \geq 2\sqrt{\left(\sum \frac{1}{a^2b^2}\right)\left(\sum ab\right)}.$$

Este suficient să arătăm că

$$2\sqrt{\left(\sum \frac{1}{a^2b^2}\right)\left(\sum ab\right)} \geq \frac{18}{\sum a} \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^2\left(\sum \frac{1}{a^2b^2}\right)\left(\sum ab\right) \geq 81$$

ultima inegalitate o deducem aplicând **Inegalitatea MA-MG** de trei ori. Mai exact, avem:

$\left(\sum a\right)^2 \geq \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2, \sum \frac{1}{a^2b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}, \sum ab \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ și după înmulțirea acestor trei inegalități se obține concluzia dorită.

O generalizare a problemei L222.

Pentru $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive, n număr natural, $n \geq 3$, demonstrați inegalitatea

$$a_1\left(\frac{1}{a_2^{\,2}}+\frac{1}{a_3^{\,2}}\right)+a_2\left(\frac{1}{a_3^{\,2}}+\frac{1}{a_4^{\,2}}\right)+...+a_n\left(\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}\right) \geq \frac{2n^2}{a_1+a_2+...+a_n} \qquad \textbf{(7)}$$

Prima soluție. Cu substituțiile $x_i = \frac{1}{a_i}, \forall i = \overline{1,n}$, inegalitatea **(7)** se scrie

$$\frac{x_2^{\,2}+x_3^{\,2}}{x_1}+\frac{x_3^{\,2}+x_4^{\,2}}{x_2}+...+\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{x_n} \geq \frac{2n^2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}} \qquad \textbf{(8)}$$

Aplicând **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$\frac{x_2^{\,2}}{x_1}+\frac{x_3^{\,2}}{x_1}+\frac{x_3^{\,2}}{x_2}+\frac{x_4^{\,2}}{x_2}+...+\frac{x_1^{\,2}}{x_n}+\frac{x_2^{\,2}}{x_n} \geq \frac{\left(2(x_1+x_2+...+x_n)\right)^2}{2(x_1+x_2+...+x_n)} = 2(x_1+x_2+...+x_n)$$

și folosind **Inegalitatea MA-MH**, $(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$, obținem **(8)**.

A doua soluție. Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$a_1\left(\frac{1}{a_2^{\,2}}+\frac{1}{a_3^{\,2}}\right)+a_2\left(\frac{1}{a_3^{\,2}}+\frac{1}{a_4^{\,2}}\right)+...+a_n\left(\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}\right) \geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{a_2^{\,2}}+\frac{1}{a_3^{\,2}}\right)...\left(\frac{1}{a_{n-1}^{\,2}}+\frac{1}{a_n^{\,2}}\right)} \geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n \cdot \frac{2}{a_1a_2}\cdot\frac{2}{a_2a_3}\cdot ...\cdot\frac{2}{a_{n-1}a_n}} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} \geq \frac{2n^2}{a_1+a_2+...+a_n},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MG**,

$$\frac{1}{a_i^{\,2}}+\frac{1}{a_{i+1}^{\,2}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a_i^{\,2}}\cdot\frac{1}{a_{i+1}^{\,2}}}=\frac{2}{a_i a_{i+1}},\forall i=\overline{1,n},a_{n+1}=a_1$$

și $a_1+a_2+...+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

Bibliografie

[1] **Revista *Recreații Matematice*, nr. 1/2012.**

[2] **Titu Zvonaru, *Câteva soluții la problema L222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012,***

Revista *Recreații Matematice*, nr. 2/2012.

[3] **Pham Huu Duc, *An unexpectedly useful inequality, Mathematical Reflections,* nr. 1/2008.**