www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro

- Revistă LUNARĂ –

IANUARIE 2014

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro

1.Soluţii pentru două probleme din G.M.-B

de Nela Ciceu, Roșiori, Bacău și
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

În această notă vom prezenta soluţii pentru două problem apărute în G.M.-B nr. 4/2013, diferite de cele prezentate în nr. 10/2013 al aceleeași publicaţii.

E14489. Fie $ABCD$ un dreptunghi și E un punct pe latura (BC). Dacă $AEFG$ este un dreptunghi și $D \in (FG)$, arătaţi că $ABCD$ și $AEFG$ sunt echivalente.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Deoarece $\angle EAB = 90^0 - \angle DAE = \angle DAG$, triunghiurile dreptunghice ABE și AGD sunt asemenea. Atunci $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AG}$, deci $AG = \frac{AD \cdot AB}{AE}$.

Folosind formula pentru aria unui dreptunghi, rezultă că:

$$A[AEFG] = AE \cdot AG = AE \cdot \frac{AD \cdot AB}{AE} = AB \cdot AD = A[ABCD].$$

26747. Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea $xy + yz + zx = 3$. Să se arate că

$$3xyz(x + y + z) - 2xyz \le 7.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești

Soluţie. Primul pas este să omogenizăm inegalitatea de demonstrat; aceasta devine:

$$27xyz(x + y + z) \le 7(xy + yz + zx)^2 + 18xyz\sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}}.$$

Folosind inegalitatea mediilor obţinem $xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, și atunci este suficient să arătăm că

$$27xyz(x + y + z) \le 7(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 14xyz(x + y + z) + 18xyz\sqrt[3]{xyz}.$$

Notând $x = a^3, y = b^3, z = c^3$, trebuie să demonstrăm că;

$$7(a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6) + 18a^4b^4c^4 \ge 13(a^6b^3c^3 + a^3b^6c^3 + a^3b^3c^6) \qquad (1)$$

Aplicând inegalitatea lui Schur pentru numerele a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 obţinem:

$$6\sum_{ciclic} a^6b^6 + 18a^4b^4c^4 \ge 6\sum_{ciclic} a^6b^4c^2 + 6\sum_{ciclic} a^6b^2c^4 \qquad (2)$$

iar cu inegalitatea mediilor deducem că

$$\frac{a^6b^6 + a^6c^6}{2} \ge a^6b^3c^3, \frac{a^6c^6 + b^6c^6}{2} \ge a^3b^3c^6, \frac{a^6b^6 + b^6c^6}{2} \ge a^3b^6c^3,$$

$$a^6b^4c^2 + a^6b^2c^4 \ge 2a^6b^3c^3, a^4b^6c^2 + a^2b^6c^4 \ge 2a^3b^6c^3, a^4b^2c^6 + a^2b^4c^6 \ge 2a^3b^3c^6,$$

adică

$$\sum_{ciclic} a^6b^6 \geq \sum_{ciclic} a^6b^3c^3 \tag{3}$$

și

$$\sum_{ciclic} a^6b^4c^2 + \sum_{ciclic} a^6b^2c^4 \geq 2\sum_{ciclic} a^6b^3c^3 \tag{4}$$

Adunând (2), (3) și (4) obţinem inegalitatea (1).

Notă: 1. Asemănarea triunghiurilor ABE și AGD este folosită și în soluţia din G.M.-B nr. 10/2013, dar soluţia este mai complicată.

2. Inegalitatea din problema 26747 este demonstrată cu ajutorul inegalităţii lui Turkevici.

3. Inegalităţile (3) și (4) pot fi demonstrate și folosind inegalitatea lui Muirhead; deoarece (6,6,0) majorează (6,3,3), iar (6,4,2) majorează (6,3,3), obţinem:

$$\sum_{sim} a^6b^6 \geq \sum_{sim} a^6b^3c^3 \text{ și } \sum_{sim} a^6b^4c^2 \geq \sum_{sim} a^6b^3c^3,$$

care sunt exact inegalităţile (3) și (4).

2. Identitatea Sophiei Germain

Prof. Ioan Viorel Codreanu, Şcoala Gimnazială Satulung, Maramureş

Este cunoscut faptul că diferenţa a două pătrate poate fi descompusă. Avem $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Un exemplu simplu de descompunere pentru suma a două pătrate este identitatea **Sophiei Germain**:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - (2ab)^2 = \left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)$$

Sophie Germain (Paris: 01.04.1776–18.07.1831), matematician şi fizician francez.

S-a instruit singură. E foarte sugestivă şi emoţionantă împrejurarea relevării talentului ei matematic: pe când era de 13 ani, citind în ***Histoire de mathématiques*** (1758) al lui **Etienne Montucla** (1725-1799), episodul morţii lui **Arhimedes** (sec. 3 î. Hr.), a fost atât de impresionată încât zile de-a rândul s-a întrebat cum o fi acea ştiinţă care te poate capta aşa de mult de poţi uita chiar şi ameninţarea cu moartea?! De atunci, micuţa Sophie a început să studieze cu atâta pasiune matematica, că speriase şi pe părinţii ei - **Ambroise François Germain** şi **Marie** (**Bruguelu**, după numele avut înainte de căsătorie) - ; aceştia au încercat să o mai domolească, întâi cu binele, apoi cu răul – luându-i hainele, lumina şi … hrana - , dar văzând că totul e în zadar, au cedat, lăsând-o să studieze mai departe cu aceeaşi tenacitate.

În studiile sale, **Sophie Germain** era interesată de acustică, de teoria numerelor – în particular, de „marea teoremă“ a lui **Fermat**, căreia i-a dat o demonstraţie (privind imposibilitatea existenţei soluţiilor în numere prime între ele şi cu n, pentru $2 < n < 100$) - , dar mai ales de teoria matematică a suprafeţelor elastice. Pentru prima sa lucrare, ***Mémoire sur les vibrations des lames élastiques*** (1816), a fost premiată de Academia de Ştiinţe din Paris. Cu numele ei este denumită formula curburii medii a suprafeţelor (dată în 1862).

Sophie Germain a purtat corespondență cu **Carl Gauss** (1777-1855) în legătură cu cercetările ei din teoria numerelor, folosind pseudonimul **M. Leblanc**, de teamă că Gauss ar putea să aibă idei preconcepute despre o femeie matematiciană (și Gauss a aflat mult mai târziu cine a fost corespondentul pe care îl aprecia).

„Algebra nu este decât o geometrie scrisă, geometria nu este decât o algebră figurată" ***(Sophie Germain).***

În continuare vom folosi identitatea **Sophiei Germain:**

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

la rezolvarea unor probleme de olimpiadă.

Exemplul 1. (Teorema Sophiei Germain) ***Orice număr natural de forma*** $n^4 + 4$***, unde*** $n \neq 1, n \in N$***, este număr compus.***

Demonstrație. Folosind identitatea **Sophiei Germain** obținem

$$n^4 + 4 = n^4 + 4 \cdot 1^4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

și deoarece $n^2 - 2n + 2 \geq 2$, pentru $n \geq 2$, deducem că $n^4 + 4$ este număr compus.

Exemplul 2. ***Să se determine valorile posibile ale întregilor*** a, b ***pentru care numărul*** $a^4 + 4b^4$ ***este un număr prim.***

Soluție. Folosind identitatea **Sophiei Germain** avem

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

Numărul $a^4 + 4b^4$ este prim doar dacă

$$a^2 + 2b^2 - 2ab = 1$$

sau

$$(a - b)^2 + b^2 = 1$$

echivalent cu $a = b = 1$.

Observație. ***Are loc următoarea echivalență***

$$a^4 + 4b^4 \text{ este număr prim } \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Așadar, un număr de forma $a^4 + 4b^4$ este număr compus dacă cel puțin unul din numerele a sau b este diferit de 1.

Exemplul 3. ***Este*** $4^{545} + 545^4$ ***număr prim ?***

Olimpiada de matematică din Rusia

Soluție. Este ușor de observat că $4^{545}+545^4$ este de forma a^4+4b^4. Avem

$$4^{545}+545^4=545^4+4\cdot\left(4^{136}\right)^4$$

și conform observației (exemplul 2) $4^{545}+545^4$ este număr compus.

Exemplul 4. ***Dacă*** n ***este număr natural,*** $n>1$***, atunci*** n^4+4^n ***este număr compus.***

Concursul Kürschak, 1978

Soluție. Dacă n este par, atunci n^4+4^n este par și, cum $n^4+4^n>2$, numărul n^4+4^n este compus. Dacă n este impar, $n=2k+1, k\in N, k\geq 1$, avem

$$n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4\cdot\left(2^k\right)^4$$

care este de forma a^4+4b^4 și $2^k\neq 1$, deci n^4+4^n este număr compus.

Această problemă a apărut prima oară în ***Revista Matematică 1950.*** *A fost propusă de* ***A. Makowski****, unul dintre conducătorii echipei OIM – Polonia.*

Exemplul 5. ***Arătați că oricare ar fi*** $n\in N^*$***, există*** $m\in N^*$ ***astfel încât*** $n^4\cdot m+1$ ***este număr compus.***

Lucian Tuțescu și Ion Vișan, Recreații Matematice, nr. 1/2009

Soluția 1. Pentru $n=1$, luăm $m=3$ și atunci $n^4\cdot m+1=4$ este număr compus. Pentru $n\geq 2$, luăm $m=4$. Atunci $n^4\cdot m+1=1^4+4\cdot n^4$ este de forma $a^4+4\cdot b^4$ cu $n\neq 1$, deci este număr compus.

Soluția 2. (a autorilor) Pentru $m=n^4+2$, avem că $n^4\cdot m+1=n^8+2n^4+1=\left(n^4+1\right)^2$ și, cum $n^4+1\geq 2$, urmează concluzia problemei.

Soluția 3. (Titu Zvonaru) Dacă $n=1$, putem lua $m=pq-1$, cu $p,q\in N, p,q\geq 2$.

Dacă $n>1$, luăm $m=n^{3k-4}, k\in N, k\geq 2$ și vom avea că

$$n^4\cdot m+1=\left(n^k\right)^3+1=\left(n^k+1\right)\left(n^{2k}-n^k+1\right),$$

unde ambele paranteze sunt cel puțin egale cu 2.

Exemplul 6. ***Există un întreg*** n ***astfel încât*** $4^{5^n}+5^{4^n}$ ***este prim ?***

Titu Andreescu, Mathematical Reflections, 2013

Soluție. (Arkady Alt) Răspunsul este nu. Pentru $n<0$, evident $4^{5^n}+5^{4^n}$ nu este prim.

Dacă $n = 0$, atunci $4^{5^n} + 5^{4^n} = 9$ este număr compus. Dacă $n \geq 1$, atunci $4^{5^n} + 5^{4^n}$ poate fi reprezentat sub forma $a^4 + 4b^4$. Într-adevăr, întrucât

$$5^n - 1 = (5-1)(5^{n-1} + \ldots + 5 + 1) = 4(5^{n-1} + \ldots + 5 + 1)$$

atunci $5^{4^n} + 4^{5^n} = \left(5^{4^{n-1}}\right)^4 + 4 \cdot \left(4^{5^{n-1}+\ldots+5+1}\right)^4 = a^4 + 4b^4$, unde $a = 5^{4^{n-1}}$ și $b = 4^{5^{n-1}+\ldots+5+1}$.

Bibliografie:

[1] **Vasile Bobancu, *Caleidoscop matematic*, Editura Niculescu, București, 2001.**

[2] **Arthur Engel, *Probleme de Matematică-strategii de rezolvare*, Editura Gil, Zalău, 2006.**

[3] **Valentin Vornicu, *Olimpiada de Matematică de la provocare la experiență*, Editura Gil, Zalău, 2003.**

[4] ***Mathematical Reflections*, Issue 6-2013.**

[5] ***Recreații Matematice*, nr. 1-2010.**

3. REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE CA SUMĂ DE PATRU PĂTRATE DE NUMERE ÎNTREGI

Prof. Stănuşi Marinela Diana
Şcoala Gimnazială Drănic, Dolj

În continuare voi demonstra că orice număr natural poate fi scris ca sumă de patru pătrate de numere întregi.

Pentru a demonstra acest lucru ţinem cont de identitatea lui Euler, potrivit căreia dacă $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in R$ atunci $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$

$(a, r) = (m, r) = 1\ (x_1y_3\text{-}x_3y_1+x_4y_2\text{-}x_2y_4)^2+$

$+(x_1y_4\text{-}x_4y_1+x_2y_3\text{-}x_3y_2)^2$.

Este suficient să demonstrăm pentru numere prime.

Teorema 2.1.(Lagrange) Fie p un număr prim; atunci:

(1) Există m şi $x_1,x_2,x_3,x_4 \in R$ a.î. $m\cdot p=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ $(1\le m<p)$

(2) Dacă m este cel mai mic număr natural ce verifică (1), atunci $m=1$.

<u>*Demonstraţie*</u>:

Considerăm mulţimile: $X=\left\{x^2|x=0,1,2,\ldots,\frac{p\text{-}1}{2}\right\}$ şi $Y=\left\{\text{-}x^2\text{-}1|x=0,1,2,\ldots,\frac{p\text{-}1}{2}\right\}$.

Observăm că elementele lui X şi Y nu sunt congruente două câte două modulo p.

Dacă există $x_1,x_2\in\left\{0,1,2,\ldots,\frac{p\text{-}1}{2}\right\}$ a.î. $x_1^2\equiv x_2^2(\bmod p)$ cu $x_1>x_2\Rightarrow p|(x_1\text{-}x_2)(x_1+x_2)$

imposibil deoarece $1\le x_1+x_2\le p\text{-}1$.

Dacă notăm $|X|$ numărul de elemente ale lui X modulo p, atunci cum

$|X|+|Y|=\frac{p+1}{2}+\frac{p+1}{2}=p+1>p$, deducem că există $x, y \in \left\{0,1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\}$ a.î. $x^2 \equiv -y^2-1 \pmod p$, altfel zis există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $mp = x^2+y^2+1$.

Deci, $1 \le m = \frac{1}{p}(x^2+y^2+1) \le \frac{1}{p}\left[2\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+1\right] = \frac{p-1}{p}\cdot\frac{p-1}{2}+\frac{1}{p} < \frac{p-1}{2}+\frac{1}{p} < p$.

Pentru a proba (2) obsevăm mai întâi că dacă m este par, atunci sau toate x_i-urile sunt impare sau numai două.

Dacă toate x_i-urile sunt impare, atunci (1) se scrie sub forma:

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3-x_4}{2}\right)^2=\frac{m}{2}\cdot p$ iar cum $x_1 \pm x_2$, $x_3 \pm x_4$ sunt numere pare se contrazice minimalitatea lui m.

Dacă numai x_1 şi x_2 sunt pare iar x_3 şi x_4 sunt impare, se contrazice minimalitatea lui m .

Analog dacă toate x_i-urile sunt pare.

Deci m trebuie sa fie impar.

Presupunem că $3 \le m \le p$.

Alegem y_1, y_2, y_3, y_4 a.î. $x_i \equiv y_i \pmod m$, $-\frac{m-1}{2} \le y_i \le \frac{m-1}{2}$, $i = 1,2,3,4$.

$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 \equiv 0 \pmod m$, deci $mn = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$ pentru un anumit n.

Mai mult, $0 \le n \le \frac{4}{m}\cdot\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 < m$.

Dacă $n = 0$ atunci $y_j = 0$ pentru $\forall j = 1,2,3,4$ rezultă $x_j \equiv 0 \pmod m$, $\forall j = 1,2,3,4$ deci $mp = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 0 \pmod{m^2}$ de unde $p \equiv 0 \pmod m$ imposibil pentru că $3 \le m < p$.

Deci $n \ge 1$, deducem că $m^2np = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) =$
$= z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$ de unde $z_1 = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$, $z_2 = x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3$,
$z_3 = x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4$, $z_4 = x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2$

Cum $x_i \equiv y_i \pmod m$, $-\frac{m-1}{2} \le y_i \le \frac{m-1}{2}$, $i = 1,2,3,4$ deducem că $m|z_j$, $j = 2,3,4$.

Din egalitatea de mai sus rezultă că $m|z_1$.

Deci $np = \left(\frac{z_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_4}{m}\right)^2$ ceea ce contrazice minimalitatea lui m.

În concluzie $m = 1$. ■