REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISBN 2065-6432

SEPTEMBRIE 2014

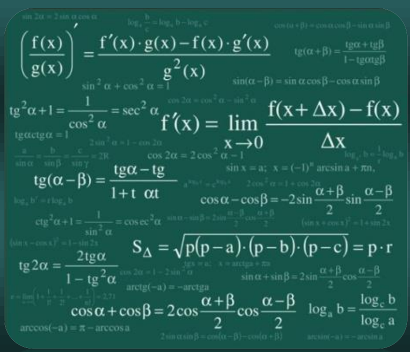
REVISTĂ LUNARĂ

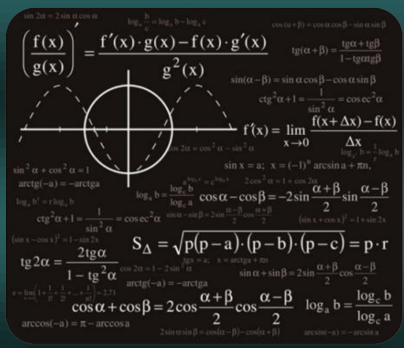
DIN FEBRUARIE 2009

DE PESTE 4 ANI ÎN FIECARE LUNĂ

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

Articole :

1.Other solutions for some problems from The Pentagon_Fall 2012

by Nela Ciceu, Roşiori, Bacău and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

Problem 711. *Proposed by Tom Moore, Bridgewater State University, Bridgewater, MA.*

Prove that there are infinitely many squares that are each the sum of two cubes and infinitely many cubes that are each the sum of two squares.

Solution.

For any positive integer n we have

$$\left(2^{3n+2}\right)^2 = 2^{6n+4} = 2\cdot 2^{6n+3} = \left(2^{2n+1}\right)^3 + \left(2^{2n+1}\right)^3,$$

so there are infinitely many squares that are each the sum of two cubes.
For any positive integer n we have

$$\left(2^{2n+1}\right)^3 = 2^{6n+3} = 2\cdot 2^{6n+2} = \left(2^{3n+1}\right)^2 + \left(2^{3n+1}\right)^2,$$

so there are infinitely many cubes that are each the sum of two squares.

Problem 712. *Proposed by Tom Moore, Bridgewater State University, Bridgewater, MA.*

Find, with proof, all positive integer powers of 2 that can be written as the sum of two squares (of positive integers). Do the same for powers of 5.

Solution.

(i) Let $2^n = a^2 + b^2$, so a and b have the same parity

- if a and b are odd, then $a^2, b^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, so $a^2 + b^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, contradiction with $2^n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$;

- if a and b are even, then $a = 2a_1, b = 2b_1$, so $2^{n-2} = a_1^2 + b_1^2$. Hence if 2^n can be written as the sum of two squares, then $2^{n-2}, 2^{n-4}, \ldots$ can be written. Because 2^2 can not be written as the sum of two squares we deduce that for n even, 2^n can not be written as the sum of two squares.

For n odd, we have $n = 2k+1$ and $2^n = 2^{2k+1} = \left(2^k\right)^2 + \left(2^k\right)^2$.

(ii) For powers of 5 we have

- $5^{2n} = 5^2\cdot 5^{2n-2} = \left(3^2+4^2\right)\cdot 5^{2n-2} = \left(3\cdot 5^{n-1}\right)^2 + \left(4\cdot 5^{n-1}\right)^2$;
- $5^{2n+1} = 5\cdot 5^{2n} = (1+4)\cdot 5^{2n} = 5^{2n} + 4\cdot 5^{2n} = \left(5^n\right)^2 + \left(2\cdot 5^n\right)^2$.

Problem 718. *Proposed by Jose Luis Diaz-Barrero, BARCELONA TECH, Barcelona, Spain.*

Let x, y, z be positive real numbers and n a positive integer. Show that

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{\text{cyclic}}\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}\right)\geq\sum_{\text{cyclic}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Solution.

The given inequality is equivalent with

$$\sum_{cyclic}\left(\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}-\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\right)\geq 0.$$

We observe that

$$\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}-\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\geq 0 \Leftrightarrow x^{n+4}+x^2y^{n+2}+x^{n+2}y^2+y^{n+4}-2x^{n+2}y^2-2x^2y^{n+2}\geq 0$$

$\Leftrightarrow x^{n+4}-x^{n+2}y^2+y^{n+4}-x^2y^{n+2}\geq 0 \Leftrightarrow x^{n+2}(x^2-y^2)-y^{n+2}(x^2-y^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(x^{n+2}-y^{n+2})\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x-y)(x^{n+1}+x^ny+...+xy^n+y^{n+1})\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^{n+1}+x^ny+...+xy^n+y^{n+1})\geq 0$, which is true, with equality if and only if $x=y$.

Therefore,

$$\sum_{cyclic}\left(\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}-\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\right)\geq 0+0+0=0,$$

with equality if and only if $x=y=z$, and we are done.

2.Altă demonstraţie pentru o inegalitate din G.M.-B

de Neculai Stanciu, Buzău

Demonstraţia pentru inegalitatea din dreapta, pentru problema 26846 apărută în G.M.-B, nr. 12/2013 (cu soluţia în nr. 6-7-8/2014) i.e.

''Fie x, y, z numere reale positive cu suma 1 şi fie a un număr real, $a \geq 1$. Să se arate că

$$\frac{1}{a^2-x^2}+\frac{1}{a^2-y^2}+\frac{1}{a^2-z^2} \leq \frac{3a^2-2}{a^2(a^2-1)}.''$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

mi se pare cam ''alambicată'' şi mai greu de urmărit.

Iată, o soluţe mai şcolărească, mai directă (în nici un caz mai elegantă):

Avem

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{a+z}=\frac{3a^2+2a\sum x+\sum xy}{a^3+a^2\sum x+a\sum xy+xyz}=$$

$$=\frac{3a^2+2a+\sum xy}{a^3+a^2+a\sum xy+xyz}.$$

Putem scrie

$$\frac{3a^2+2a+\sum xy}{a^3+a^2+a\sum xy+xyz} \leq \frac{3a+2}{a^2+a}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+a)\sum xy \leq (3a^2+2a)\sum xy+(3a+2)xyz$$

$$\Leftrightarrow (2a^2+a)\sum xy+(3a+2)xyz \geq 0, \text{ adevărat.}$$

Analog avem

$$\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-y}+\frac{1}{a-z}=\frac{3a^2-2a\sum x+\sum xy}{a^3-a^2\sum x+a\sum xy-xyz}=$$

$$=\frac{3a^2-2a+\sum xy}{a^3-a^2+a\sum xy-xyz}.$$

Atunci putem scrie

$$\frac{3a^2-2a+\sum xy}{a^3-a^2+a\sum xy-xyz}\le\frac{3a-2}{a^2-a}$$

$$\Leftrightarrow (a^2-a)\sum xy\le(3a^2-2a)\sum xy-(3a-2)xyz$$

$$\Leftrightarrow (3a-2)xyz\le(2a^2-a)\sum xy\text{, (1).}$$

Deoarece

$$\sum x\cdot\sum xy\ge 9xyz\Leftrightarrow 9xyz\le\sum xy,$$

pentru a demonstra (1) este suficient să demonstrăm că

$$(3a-2)\sum xy\le 9(2a^2-a)\sum xy\Leftrightarrow\sum xy\cdot(18a^2-12a+2)\ge 0$$

$\Leftrightarrow \sum xy\cdot(3a-1)^2\ge 0$, adevărat.

Obţinem

$$\frac{1}{a^2-x^2}+\frac{1}{a^2-y^2}+\frac{1}{a^2-z^2}=\frac{1}{2a}\left(\sum\frac{1}{a+x}+\sum\frac{1}{a-x}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2a}\left(\frac{3a+2}{a(a+1)}+\frac{3a-2}{a(a-1)}\right)=\frac{3a^2-2}{a^2(a^2-1)}\text{, q.e.d.}$$

Deducem şi când avem egalitate în inegalitatea din problema de la care am plecat

$\sum xy=0$, adică $(x=1, y=z=0)$ sau $(y=1, x=z=0)$ sau $(z=1, x=y=0)$.

3.Solutions of some problems from Octogon Mathematical Magazine

By D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania and
Neculai Stanciu, Buzău, Romania

PP. 16827. Prove that $\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+k^2)}{k!} \geq 2^{n+1} - 2$.

Mihály Bencze

Solution: Since $1+x^2 \geq 2x, \forall x \in R_+^*$ we have $\prod_{i=1}^{k}(1+i^2) \geq 2^k k!$, and then we obtain that: $\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+k^2)}{k!} \geq \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$, and we are done.

PP. 16981. If $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, then $\frac{\sin^8 x + ctg^8 x}{\cos^6 x} + \frac{\cos^8 x + tg^8 x}{\sin^6 x} \geq 5$.

Mihály Bencze

Solution: We have:

$$U = \frac{\sin^8 x + ctg^8 x}{\cos^6 x} + \frac{\cos^8 x + tg^8 x}{\sin^6 x} = \frac{(\sin^2 x)^4}{(\cos^2 x)^3} + \frac{(\cos^2 x)^4}{(\sin^2 x)^3} + \frac{(ctg^2 x)^4}{(\cos^2 x)^3} + \frac{(tg^2 x)^4}{(\sin^2 x)^3},$$

where we apply J. Radon's inequality, then AM-GM inequality and we obtain that:

$$U \geq \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^4}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3} + \frac{(tg^2 x + ctg^2 x)^4}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3} = 1 + (tg^2 x + ctg^2 x)^4 \geq 1 + (2tgxctgx)^2 = 17,$$ i.e. a more strong inequality.

PP. 16990. If $x_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ and $\sum_{cyclic} \frac{1}{x_1 x_2} = 3$, then $\sum_{cyclic} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4} \leq 2$.

Mihály Bencze

Solution: We use the inequality: $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + x^2 y^2 + y^4} \leq \frac{2}{3xy}$, and the hypothesis.

Therefore:

$$\sum_{cyclic}\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^4+x_1^2x_2^2+y_2^4}\le\frac{2}{3}\sum_{cyclic}\frac{1}{x_1x_2}=\frac{2}{3}\cdot 3=2,$$ and we are done.

PP. 17399. If $a_k>0\ (k=1,2,...,n)$, then $\sum\frac{a_1^3}{(a_2+a_3+...+a_n)^2}\ge\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{(n-1)^2}$.

Mihály Bencze

Solution: We denote $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ and the given inequality becomes:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{(s_n-a_k)^2}\ge\frac{s_n}{(n-1)^2},$$ and by J. Radon's inequality we obtain that:

$$U_n\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}(s_n-a_k)\right)^2}=\frac{s_n^3}{(ns_n-s_n)^2}=\frac{s_n}{(n-1)^2},$$ and we are done.

PP. 17423. If $x,y,z>0$, then $\sum\frac{x^3}{(2x+y)^2}\ge\frac{1}{9}\sum x$.

Mihály Bencze

Solution: By J. Radon's inequality we obtain that:

$$\sum\frac{x^3}{(2x+y)^2}\ge\frac{\left(\sum x\right)^3}{\left(\sum(2x+y)\right)^2}=\frac{\left(\sum x\right)^3}{\left(3\sum x\right)^2}=\frac{1}{9}\sum x,$$ and we are done.

Solution: We denote the LHS with U_n and by Bergström's inequality we obtain that:

$$U_n\ge\frac{(n+1)^2}{\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)}=\frac{(n+1)^2}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}}.$$

If we taking account that

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}=\binom{2n}{n}$$

we obtain the given inequality.

PP. 17756. If $x_k>0\ (k=1,2,...,n)$, then $\sum_{cyclic}\frac{x_1^2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}\ge\frac{n}{3}$.

Mihály Bencze

Solution: The given inequality is equivalent with:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{x_k^2+x_kx_{k+1}+x_{k+1}^2}\geq\frac{2n}{3}, \text{ where } x_{n+1}=x_1.$$

We use the well-known inequality

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}\geq\frac{2}{3},$$

and we have:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{x_k^2+x_kx_{k+1}+x_{k+1}^2}\geq\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2n}{3}.$$

PP. 17940. If $x_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then $\sum\limits_{cyclic}\frac{x_1^3}{(x_1+x_2)^2}\geq\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k.$

Mihály Bencze

Solution: We denote the LHS with U and by J. Radon's inequality we obtain that:

$$U\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{4\left(\sum x\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}x_k \text{ , and we are done.}$$

PP. 17985. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then

$\sum\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}\leq\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leq\sum\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}.$

Mihály Bencze

Solution: The given inequality is equivalent with:

$$\sum_{cyclic}\frac{a_1+a_2}{a_1^2+a_2^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leq\sum_{cyclic}\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1a_2(a_1+a_2)},$$

which results from the following well-known inequalities:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

and

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x+y}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

PP. 18031. If $x_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, then:

1). $\sum_{cyclic} \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \right)^2 \geq 4 \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

2). $\sum_{cyclic} \frac{\left(x_1^3+x_2^3\right)^2}{x_1^2+x_2^2} \geq 2 \sum_{cyclic} x_1^2 x_2^2$

Mihály Bencze

Solution: We use the inequality:

$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right)^2 \geq 2(x^2 + y^2)$, true for any $x, y > 0$, from where yields that:

$\sum_{cyclic} \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \right) \geq 2 \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + x_{k+1}^2 \right) = 4 \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, i.e. 1) is proved.

Also we use the inequality:

$\frac{\left(x^3 + y^3\right)^2}{x^2 + y^2} \geq 2x^2 y^2, \forall x, y > 0$, from where follows 2).

PP. 18126. Prove that $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n+1-k} \geq \frac{n(n+1)(2n+1)^2}{18}$.

Mihály Bencze

Solution: We have

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k^2)^2}{n+1-k},$$

and by Bergström's inequality we obtain that:

$$U_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right)^2}{n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k} = \frac{\left(n(n+1)(2n+1)\right)^2}{36} \cdot \frac{1}{n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)(2n+1)^2}{18},$$

and we are done.

PP. 18351. If $a_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, then $\sum \frac{(a_1+a_2)^4}{a_1 a_2} \geq 16 \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

Mihály Bencze

Solution: We have well-known inequality

$$\frac{(x+y)^4}{xy} \geq 8(x^2 + y^2), \forall x, y \in R_+^*.$$

Therefore:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+a_{k+1})^4}{a_k a_{k+1}}\geq 8\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+a_{k+1}^2\right),\text{ with } a_{n+1}=a_1,$$
which is equivalent with the given inequality.

PP. 18362. If $a,b,c>0$, then $\sum \frac{a^2+4ab+b^2}{2a^2+5ab+2b^2}\leq 2.$

Mihály Bencze

Solution: We have $\frac{x^2+4xy+y^2}{2x^2+5xy+2y^2}\leq\frac{2}{3},\forall x,y>0$.

Therefore:

$$\sum\frac{a^2+4ab+b^2}{2a^2+5ab+2b^2}\leq 3\cdot\frac{2}{3}=2\text{, q.e.d.}$$

PP. 18583. If $x,y,z>0$ then $\frac{x}{2y+3z}+\frac{y}{2z+3x}+\frac{z}{2x+3y}\geq\frac{3}{5}.$

Béla Kovács

Solution: We have:

$$U=\sum\frac{x}{2y+3z}=\sum\frac{x^2}{2xy+3xz},$$
where we apply Bergström's inequality and we deduce that:

$$U\geq\frac{(x+y+z)^2}{5(xy+yz+zx)}.$$
Then because we have:

$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx),\forall x,y,z\in R_+$, we obtain that:

$U\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{5(xy+yz+zx)}=\frac{3}{5}$, and the proof is complete.

PP. 18685. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then $\sum\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\right)^3\geq\sum_{k=1}^{n}a_k^3.$

Mihály Bencze

Solution: We use the well-known inequality

$$(*)\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)^3\geq\frac{x^3+y^3}{2},$$

and the fact that the given inequality is equivalent with the following inequality:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2+a_{k+1}^2}{a_k+a_{k+1}}\right)^3 \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \text{, where } a_{n+1}=a_1.$$

Then by (*) we obtain that:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2+a_{k+1}^2}{a_k+a_{k+1}}\right)^3 \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^3+a_{k+1}^3)=\sum_{k=1}^{n} a_k^3,$$

and we are done.

Proposed problems

PP. 18690. [20]If $x, y, z > 0$, then $\sum \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{z})\sqrt{x+y}}{\sqrt{xz}} \geq 6\sqrt{2}$.

Mihály Bencze

Solution: We have:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 2\sqrt[4]{xy} \text{ and } \sqrt{x+y} \geq \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{xy}.$$

Therefore:

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x+y}}{\sqrt{xz}} \geq \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt{xz}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{z}}.$$

We deduce that:

$$V=\sum\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x+y}}{\sqrt{xz}} \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right),$$

and by AM-GM inequality we obtain that:

$$V \geq 6\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}=6\sqrt{2}.$$

PP. 18692. If $x, y, z, a, b, c > 0$, then
$\frac{x^2}{ax+by+cz}+\frac{y^2}{ay+bz+cx}+\frac{z^2}{az+bx+cy} \geq \frac{x+y+z}{a+b+c}$.

Mihály Bencze

Solution: By Bergström's inequality we deduce that:

$$U=\sum\frac{x^2}{ax+by+cz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{a+b+c},$$

and we are done.

PP. 18694. If $x, y, z, a, b, c > 0$, then $\frac{a}{ax+by+cz} + \frac{b}{bx+cy+az} + \frac{c}{cx+ay+bz} \geq \frac{3\sum ab}{(x+y+z)\sum a^2}$.

Mihály Bencze

Solution: We have:

$$U = \sum \frac{a}{ax+by+cz} = \sum \frac{a^2}{a^2x+aby+acz}.$$

By Bergström's inequality and the well-known inequality

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

we obtain that:

$$U \geq \frac{(a+b+c)^2}{(x+y+z)(a^2+b^2+c^2)}.$$

Then we use the inequality:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

and we deduce that:

$$U \geq \frac{3\sum ab}{(x+y+z)\sum a^2}$$, and we are done.

PP. 18695. If $x, y, z, t > 0$, then $\sum \frac{1}{23x^4y+7y^4z+11z^4t+10t^4x} \leq \frac{\sum xyz}{51x^2y^2z^2t^2}$.

Mihály Bencze

Solution: By AM-GM inequality we have:

$$23x^4y+7y^4z+11z^4t+10t^4x \geq 51\cdot\sqrt[51]{x^{4\cdot23}y^{23}y^{7\cdot4}z^7z^{4\cdot11}t^{11}t^{4\cdot10}x^{10}} = 51x^2yzt,$$

and then:

$$\sum \frac{1}{23x^4y+7y^4z+11z^4t+10t^4x} \leq \frac{1}{51}\sum\frac{1}{x^2yzt} = \frac{1}{51x^2y^2z^2t^2}\sum xyz,$$

and we are done.

PP. 18700. If $x, y, z > 0$, then $\sum \frac{1}{4x^3y+y^3z+2z^3x} \leq \frac{\sum xy}{7x^2y^2z^2}$.

Mihály Bencze

Solution: By AM-GM inequality we have:

$$4x^3y+y^3z+2z^3x \geq 7\cdot\sqrt[7]{x^{12}y^4y^3zz^6x^2} = 7x^2yz,$$

and then we obtain that:

$$\sum \frac{1}{4x^3y+y^3z+2z^3x} \le \frac{1}{7}\sum \frac{1}{7x^2yz} = \frac{1}{7x^2y^2z^2}\sum xy,$$

and we are done.

PP. 18736. If $a_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, then $\sum\limits_{cyclic} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}} \ge n.$

Mihály Bencze

Solution: We have :

$$\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2 \ge 2x^2+2xy+2y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0, \forall x, y > 0$.

Therefore:

$$\sum_{cyclic} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}} \ge n,$$ and we are done.

4.Metode de rezolvare a unei probleme de divizibilitate

Profesor Serban George -Florin "Liceul Pedagogic" Braila

-Voi prezenta in continuare cateva metode de rezolvare a unor probleme de divizibilitate . Aceste metode se intalnesc des in exercitiile de olimpiada .

Metoda 1 (Scrierea in baza 10)

1) Sa se arate ca $(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}) \vdots 37$.

Solutie : Folosim scrierea in baza 10 .

$(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab})=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b=111\cdot(a+b+c) \vdots 37$ adevarat deoarece $111 \vdots 37$.

Metoda 2 (Ultima cifra a unui numar)

2) Sa se arate ca : $(2^{60}-1) \vdots 5$.

Solutie : $u(2)=2$, $u(2^2)=4$, $u(2^3)=8$, $u(2^4)=6$, $u(2^5)=2$ .Se repeta din 4 in 4 . Impartim 60 la 4 si obtinem restul 0 . $u(2^{60})=6$, $u(2^{60}-1)=5$, deci $(2^{60}-1) \vdots 5$.

Metoda 3 (Folosirea criteriilor de divizibilitate)

3) Fie numarul $a=2^{n+1}\cdot 5^n+1$ unde n numar natural nenul . Sa se arate ca ca numarul a este divizibil cu 3 .

Solutie : Daca n=1 .a=21 este divizibil cu 3 . Folosesc criteriul de divizibilitate cu 3 . " Un numar este divizibil cu 3 daca suma cifrelor se imparte exact la 3 " Daca n>1 atunci $a=2\cdot 2^n\cdot 5^n+1=2\cdot 10^n+1=200..0+1=200...01$. Suma cifrelor numarului a este 2+0+1=3 , deci a este divizibil cu 3 .

4) Aratati ca numarul $\overline{abcabc}$ este divizibil cu 7 , 11 si 13 . (Folositi criteriile de divizibilitate 7 , 11 si 13).

Solutie : Folosesc criteriile de divizibilitate cu 7 , 11 si 13 " Un numar natural este divizibil cu 7 (sau 11) , (sau 13) daca diferenta dintre numarul format de ultimile 3 cifre si numarul format de celelalte cifre se imparte exact la 7 (respectiv 11) , (respectiv 13) .

Deci $\overline{abc}-\overline{abc}=0 \vdots 7,11,13$ (A) .

Metoda 4 (Metoda factorului comun)

5) Sa se arate ca $S=1+2+2^2+...2^{2012} \vdots 7$.

Solutie : S contine 2013 termeni , ii grupez cate 3 , 2013:3=671 .

$S=(1+2+2^2)+(2^3+2^4+2^5)+...+(2^{2010}+2^{2011}+2^{2012})$

$S=(1+2+2^2)+2^3\cdot(1+2+2^2)+..+2^{2010}\cdot(1+2+2^2)=7\cdot(1+2^3+...+2^{2010}) \vdots 7$.

Metoda 5 (Folosirea formulelor : $(a+1)^n=M_a+1$ **,** $(a-1)^n=M_a+1$ **, daca n=par ,** $(a-1)^n=M_a-1$**, daca n impar ,** $(a+b)^n=a^n+M_b$ **) .**

6) Sa se arate ca numarul $a=23^n+25^n$ este divizibil cu 24 oricare ar fi n numar natural impar .

Solutie : $a=23^n+25^n=(24-1)^n+(24+1)^n=M_{24}-1+M'_{24}+1=M_{24} \vdots 24$

7)Aratati ca $(7^{24}-3^{24}) \vdots 4$

Solutie : $7^{24}-3^{24}=(3+4)^{24}-3^{24}=M_4+3^{24}-3^{24}=M_4 \vdots 4$ (A)

Metoda 6 (Folosirea formulelor : $a^n-b^n=M_{a-b}$, $a^n+b^n=M_{a+b}$ daca n impar) .

8)Aratati ca a) $(8^{23}+3^{23})\vdots 11$. b) $(11^{25}-3^{25})\vdots 8$

Solutie : $8^{23}+3^{23}=M_{8+3}=M_{11}\vdots 11$, $(11^{25}-3^{25})=M_{11-3}=M_8\vdots 8$

Metoda 7 (Folosirea formulelor " Daca $x\vdots a$ si $x\vdots b$ atunci $x\vdots[a,b]$ " , "Daca d|a si d|b atunci d|(a,b)) .

9) Aratati ca a=($4\cdot 10^n+5)\vdots 45$, oricare ar fi n un numar natural nenul .

Solutie :Daca n=1 , $45\vdots 45$, $4\cdot 10^n+5=400...0+5=400...05\vdots$ 5 (deoarece ultima cifra e 5) si $400...05\vdots 9$ (deoarece suma cifrelor este 9) . Deci $a\vdots 5$ si $a\vdots 9$ atunci $a\vdots[5,9]=45$

Metoda 8 (Folosirea formulei "Daca d|a si d|b atunci d|(am+bn) ").

10) Determinati multimea : $A=\{x\in N\mid \frac{2x}{x+2}\in N\}$.

Solutie : (x+2)|2x dar (x+2)|2x +4=2(x+2) , rezulta ca (x+2)|2x + 4-2x , (x+2)|4 , deci $(x+2)\in D_4=\{1,2,4\}$, $A=\{0,2\}$.

Metoda 9 (Folosind teorema impartirii cu rest).

11) Aflati cel mai mic numar natural care impartit la numerele 9,10 ,11 se obtin resturile 8, 9 , respectiv 10 .

Solutie : Aplicam teorema impartirii cu rest $n=9x+8$, $n=10y+9$, $n=11z+10$.

$n+1=9(x+1)\vdots 9$, $n+1=10(y+1)\vdots 10$, $n+1=11(y+1)\vdots 11$, $(n+1)\vdots[9,10,11]=990$

n+1=990k , n=990k-1 , k=1 , n=989 este cel mai mic numar cu aceasta proprietate ,

Metoda 10 (Folosind regulile cu puteri).

12) Sa se arate ca numarul $a=(2^{n+3}\cdot 15^{n+2}+3^n\cdot 10^{n+2}+30^{n+1}+69\cdot 2^n\cdot 3^n\cdot 5^n)\vdots 1999$

Solutie : $a=2^n\cdot 2^3\cdot 15^n\cdot 15^2+3^n\cdot 10^n\cdot 10^2+30^n\cdot 30+69\cdot 2^n\cdot 3^n\cdot 5^n$

$a=30^n\cdot 1800+30^n\cdot 100+30^n\cdot 30+69\cdot 30^n=30^n\cdot 1999$

Metoda 11 (Folosind calculul unor sume).

13) Aratati ca $S=2\cdot(1+2+3+...+2014)-2013\cdot 2014$ este divizibil cu 2014 .

Solutie : $S=2\cdot(1+2+3+...+2014)-2013\cdot 2014=2\cdot\frac{(1+2014)\cdot 2014}{2}-2013\cdot 2014$ (Suma Gauss) $S=2014\cdot 2015-2013\cdot 2014=2014\cdot(2015-2013)=2014\cdot 2\vdots 2014$

14) Fie $S=2\cdot(1+3+3^2+...+3^{99})+1$. Aratati ca S este divizibil cu 3^{50} .

Solutie : $T=1+3+3^2+...+3^{99}$, inmultesc cu 3 , $3T=3+3^2+...+3^{99}+3^{100}$. Le scadem si rezulta ca $3T-T=3+3^2+...+3^{99}+3^{100}-1-3-3^2-...-3^{99}=3^{100}-1=2T$,

$S=2\cdot(1+3+3^2+...+3^{99})+1=3^{100}-1+1=3^{100}\vdots 3^{50}$.

Metoda 12 (Folosind principiul cutiei a lui Dirichlet).

15)Aratati ca oricum am alege 4 numere naturale distincte exista doua numere a caror diferenta este divizibila cu 3 .

Principiul cutiei " Daca avem n cutii si n+1 obiecte .Aceste obiecte se introduc in aceste cutii . Atunci exista o cutie care va contine cel putin doua obiecte "

Solutie : Un numar impartit la 3 ne da restul 0,1 sau 2 . Impartim cele 4 numere naturale la 3 si obtinem resturile r_1 , $r_2, r_3, r_4\in\{0,1,2\}$ .Aplicam principiul cutiei si rezulta ca exista cel putin doua resturi egale . Deci a=3x+r si b=3y+r , a-b=3(x-y) $\vdots 3$

Metoda 13 (Folosind ecuatiile diofantice)

16) Fie ecuatia 2x-3y=103 . Aratati ca $(x-53)\vdots 3$ **.**

Solutie : **Ecuatia diofantica de gradul intai ax+by=c , d=(a,b) , are solutiile** $x=x_0-b\cdot k$ **si** $y=y_0+a\cdot k$ **unde** (x_0,y_0) **este o solutie particulara a ecuatiei si k numar natural .**

(53,1) solutie particulara . Deci x=53+3k , y=1+2k . Rezulta x-53=3k , $(x-53)\vdots 3$

Metoda 14 (Folosind numarul divizorilor unui numar)

17) Fie numarul $a=2^x\cdot 3$. Aflati x numar natural stiind ca 12 este divizibil cu numarul divizorilor naturali a lui a .

Solutie **:** **Fie** $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ **cu** $p_1,p_2,\ldots p_k$ **numere prime . Notam cu** $\sigma(a)=(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ **numarul dizorilor lui a .**

$\sigma(a)=(x+1)\cdot(1+1)=2\cdot(x+1)$, $2(x+1)\in D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$

$2(x+1)\in\{2,4,6,12\}$, $x\in\{0,1,2,5\}$

Metoda 15 (Folosind suma divizorilor unui numar natural)

18) Fie numarul $a=2^x\cdot 3$. Sa se afle x stiind ca suma divizorilor lui a este divizibila cu 28 .Solutie : $\tau(a)=\frac{2^{x+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}=4\cdot(2^{x+1}-1)\vdots 28$, $(2^{x+1}-1)\vdots 7$, x+1=3t , $2^{3t}-1=8^t-1^t=M_7$ .Deci x=3t-1 , t numar natural .

Fie $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ **cu** $p_1,p_2,\ldots p_k$ **numere prime . Notam cu**

$\tau(a)=\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}$ **numarul dizorilor lui a .**

Metoda 16 (Scrierea unui numar in baza x)

19)Fie $\overline{1a4}_{(5)}=\overline{1b3}_{(6)}$ .Sa se arate ca $\overline{ab}\vdots 5$.

Solutie : Scrierea in baza x a unui numar natural $\overline{a_1a_2\ldots a_n}_{(x)}=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, cu $a_1,a_2,\ldots a_n<x$. Deci $\overline{1a4}_{(5)}=\overline{1b3}_{(6)}$, a<5 si b<6 , 25+5a +4=36 +6b+3 , 5a-6b=10

Rezulta $b\vdots 5$ **,** b poate fi 0 sau 5 . Daca b=0 , 5a=10 , a=2 . Daca b=5 , 5a=40 , a=8 .

Deci $\overline{ab}\in\{20,85\}$, $\overline{ab}\vdots 5$.

Metoda 17 (Folosind Mica teorema a lui Fermat)

Mica teorema a lui Fermat : “ $(a^{p-1}-1)\vdots p$ unde (a,p)=1 , p numar prim .”

“ $(a^p-a)\vdots p$ unde p numar prim .”

20) Sa se arate ca $(53^{13}-1)\vdots 13$.

Solutie : $(53^{13}-53)\vdots 13$, $53^{13}=13k+53$, $53^{13}-1=13k+53-1=13k+52=13(k+4)\vdots 13$

Metoda 18 (Folosind Principiul includerii si excluerii)

21) Aflati cate numere de doua cifre sunt divizibile cu 3 sau cu 5 .

Solutie : **Principiul includerii si excluerii** $"card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)"$

$"card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-card(C\cap B)-card(C\cap A)+card(A\cap B\cap C)"$

$A=\{\overline{ab}\mid\overline{ab}\vdots 3\}$ **,** $B=\{\overline{ab}\mid\overline{ab}\vdots 5\}$ **,** $"card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)"$ **.**

n=30+18-6=42 .

Metoda 19 (Folosind Principiul produsului)

22) Ionel scrie pe tala 626 de numere de 4 cifre , aceste cifre apartin multimii {1,2,3,4,5} . Sa se arate ca exista doua numere care au diferenta divizibila cu 5 .

Solutie : **Principiul produsului : “Daca un obiect A se poate alege in m moduri si daca dupa fiecare astfel de alegere , un obiect B se poate alege in n moduri , atunci alegerea perechii (A,B) , in aceasta ordine poate fi realizata in mn moduri . “**

$card(A_1 x A_2 x ... x A_n) = card(A_1) \cdot card(A_2) \cdot .....card(A_n)$ (generalizarea)

$\overline{abcd}$, $a,b,c,d \in \{1,2,3,4,5\}$. Aplic principiul produsului . Avem $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ numere cu aceasta proprietate . Dar avem 626 de numere , inseamna ca doua numere sunt egale , deci diferenta acestor doua numere este 0 deci este divizibila cu 5 .

Metoda 20 (Folosind fapul ca produsul a n numere naturale conscutive este divizibil cu $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot n$)

23) Sa se arate ca : $(13^{n \cdot (n+1)} - 1) \vdots 168$.

Solutie : $n \cdot (n+1) \vdots 2$, $n \cdot (n+1) = 2k$, $13^{n \cdot (n+1)} - 1 = 13^{2k} - 1 = 169^k - 1^k = M_{169-1} = M_{168} \vdots 168$

Metoda 21 (Folosind multimea divizorilor unui numar natural)

24)Aflati numerele naturale x stiind ca (2x+1) | 12 .

Solutie : (2x+1) | 12 , $(2x+1) \in D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$, dar 2x+1 este numar impar . $2x+1 \in \{1,3\}$, $2x \in \{0,2\}$, $x \in \{0,1\}$

Metoda 22 (Folosind multimea multiplilor unui numar natural)

25) Sa se arate ca $M_2 \cap M_3 = M_6$.

Solutie : Daca $x \vdots 2$ si $x \vdots 3$, $x \vdots [2,3] = 6$, $x \vdots 6$

Metoda 23 (Folosind exoponentul numarului natural p in produsul n!)

“Daca p este numar prim aunci exponentul lui p in produsul $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ..... \cdot n$ este egal cu $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + ...$

26) Aflati cel mai mare numar natural n stiind ca $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot 30 \vdots 10^n$.

Solutie : Exponentul lui 2 in 30! este $[\frac{30}{2}] + [\frac{30}{4}] + [\frac{30}{8}] + [\frac{30}{16}] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26$

Exponentul lui 5 in 30! este $[\frac{30}{5}] + [\frac{30}{25}] = 6 + 1 = 7$ .Deci $30! = 2^{26} \cdot 5^7 \cdot x$, (x,10)=1

$30! = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 2^{19} \cdot x = 10^7 \cdot 2^{19} \cdot x \vdots 10^7$, n=7 .

27)Aratati ca n! nu se divide cu 2^n , pentru orice n numar natural .

Solutie : Fie $k \in N$, n nenul , $2^k \le n < 2^{k+1}$, exponentul lui 2 in n! este egal cu $[\frac{n}{2}] + [\frac{n}{2^2}] + ... + [\frac{n}{2^{k+1}}] \le \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + ... + \frac{n}{2^{k+1}} = n \cdot (1 - \frac{1}{2^{k+1}}) < n$, deci exponentul lui 2 in n! este mai mic ca n , n! nu se divide cu 2^n .

-Nota:-Teoria este scrisa cu rosu .

Bibliografie : Culegere de matematica , clasa a 5-a , Marius Perianu , Nicolae Stanica , Ioan Balica , Dumitru Savulescu . Editura Art .

5. *Gazeta Matematică* și triunghiul dreptunghic

Profesor Daniel Văcaru, Colegiul Economic «Maria Teiuleanu», Pitești

Nota are trei părți.

Vom începe cu câteva caracterizări ale triunghiurilor dreptunghice: una metrică, pe care toată lumea o cunoaște, apoi una la nivel de unghiuri, care nu iese pregnant în evidență.
Cea de – a doua constă în câteva caracterizări ale triunghiului dreptunghic apărute în *Gazeta Matematică*.
În sfârșit, în a treia prezentăm câteva proprietăți ale triunghiului dreptunghic.
Cea metrică constă în teorema lui *Pitagora*
Într – un triunghi dreptunghic, pătratul ipotenuzei este suma pătratelor catetelor, și reciproc, dacă într – un triunghi, pătratul celei mai mari laturi este suma pătratelor celorlalte două, atunci triunghiul este dreptunghic.
Cea la nivel de unghiuri susține că
Dacă, într – un triunghi, suma măsurilor a două unghiuri este 90^0, *atunci triunghiul este dreptunghic, și reciproc.*
Demonstrația, aici, rezidă în teorema asupra sumei măsurilor unghiurilor în triunghi, căci $180^0 = x^0 + m(B) + m(C)$, de unde $m(A) = 90^0$. Reciproca este evidentă.
Tot din punct de vedere metric, *un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă mediana corespunzătoare laturii celei mai mari este jumătate din această latură,* căci atunci considerând

$$max(a,b,c) = a,$$

avem $4m_a^2 = a^2$, de unde deducem că

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = a^2,$$

adică $2(b^2 + c^2) = 2a^2$, urmată de $b^2 + c^2 = a^2$, adică relația lui Pitagora.
O altă demonstrație constă, aici, în construcția efectivă a medianei [AD](am presupus automat că latura cea mai mare este [BC]). Atunci deducem că triunghiurile *ABD* și *ACD* sunt isoscele, de baze [AB] și [AC]. Deducem că

$$m(A) = m(B) + m(C) \to 2m(A) = m(A) + m(B) + m(C)$$
$$= 180^0 \to m(A) = 90^0 .$$

Am folosit aici caracterizarea cu unghiuri.
Pentru teorema directă, tot folosind caracterizarea cu unghiuri, mai putem considera un punct D', situat pe latura [BC], astfel încât

$$m(D'AC) = m(D'CA).$$

De aici deducem că

$$m(D'AB) = m(A) - m(D'AC) = m(D'BA).$$

Așadar, triunghiul *D'AB* este isoscel, de bază [AB]. Se observă că și triunghiul *D'AC* este isoscel, de bază [AC]. Aceasta ne arată că $[D'A] \equiv [D'B] \equiv [D'C]$. Ultima relație probează că D' este mijlocul lui [BC], iar prima arată că $2m_a = a$.
Credem că metoda vectorială le conjugă pe cele două abordări, cea metrică și cea relativă la unghiuri.
Vectorial, avem

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \text{ și}$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Atunci, din relația

$$2m_a = a$$

deducem, la nivel vectorial, că

$$4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

În consecință, deducem că

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2,$$

de unde găsim că

$$4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

ceea ce probează că triunghiul este, obligatoriu, dreptunghic. Reciproc, se folosește faptul că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Să încercăm acum să dăm câteva alternative metodice pentru prezentarea triunghiului dreptunghic cu un unghi de 30^0.

Este vorba despre cunoscuta teoremă:

Într – un triunghi dreptunghic, cu un unghi de 30^0, cateta care se opune acestuia are lungimea jumătate din ipotenuză.

Considerăm m(A) = 90^0 și m(B)=30^0. Construim un punct D aparținând ipotenuzei [BC], cu proprietatea că triunghiul *DBA* este isoscel. Atunci, ca mai sus, se obține că triunghiul *DAC* este echilateral, de unde se deduce că *D* este mijlocul lui [BC], și, exploatând aceste informații, deducem concluzia.

O altă demonstrație rezidă în construirea simetricului punctului C față de A, notat C’. Se deduce că triunghiul C’BA este congruent cu CBA, așadar triunghiul C’BC va fi, la rândul său, isoscel cu un unghi de măsură 60^0, adică echilateral.

Continuăm prezentând câteva caracterizări ale triunghiului dreptunghic apărute în *Gazeta Matematică*.

Fie ABC un triunghi în care $BC \cdot BH - AC \cdot AH = 2R \cdot AB$, *unde* H *este ortocentrul și* R *este raza cercului circumscris*. *Să se arate că triunghiul* ABC *este dreptunghic*. (G.M. problema 26833, 11/2013)

Soluția 1. Se știe că

$$AH = 2R\cos A, BH = 2R\cos B, BC = 2R\sin A, AC = 2R\sin C, AB = 2R\sin C$$

de unde deducem că

$$4R^2(\sin A\cos B - \sin B\cos A) = 4R^2\sin C,$$

adică $\sin(A - B) = \sin C$, de unde

$A - B = C \rightarrow A - B = 180^0 - A - B \rightarrow 2A = 180^0 \rightarrow A = 90^0$.

Soluția 2. [G.M.5/2014]

26806. [G.M.9/2013] Să se arate că un triunghi în care *OH* = *R* este dreptunghic.

Marcel Țena, București

Soluția 1 [G.M.3/2014] Soluție vectorială

Soluția 2. Este clar că patrulaterul «generic» *ABCH* este inscriptibil, și anume în cercul circumscris triunghiului *ABC*. Patrulaterul este numit generic, deoarece așezarea lui *H* depinde de situația explicită în care ne aflăm. Să analizăm separat situațiile care pot să apară. Dacă patrulaterul inscriptibil este *BCHA*, atunci $\sphericalangle HBA \equiv \sphericalangle HCA$. Dar

$m\left(\widehat{HBA}\right) = 90^0 - m\left(\widehat{BAA'}\right) = 90^0 - \left(90^\circ - m\left(\hat{B}\right)\right) = m\left(\hat{B}\right)$. Obținem și că

$m\left(\widehat{HCA}\right) = 90^\circ - m\left(\hat{A}\right)$. Așadar $m\left(\hat{A}\right) + m\left(\hat{B}\right) = 90^\circ$, ceea ce, după criteriul cu unghiuri, conduce către faptul că triunghiul *ABC* este dreptunghic în *C*. Analog se procedează în continuare pentru patrulaterele *ABHC* și *AHBC*.

Să prezentăm câteva proprietăți ale triunghiului dreptunghic, apărute tot în *Gazeta Matematică*. Le vom trata vectorial:

26933.[G.M.6-7-8/2014.] Să se arate că, într – un triunghi dreptunghic neisoscel, dreapta care unește punctul lui ***Lemoine*** (de concurență a simedianelor) cu centrul cercului lui ***Euler*** (cerc determinat de mijloacele laturilor) este paralelă cu ipotenuza.

Benedict G.Niculescu, București

Soluție. Se observă, pentru început, că triunghiul determinat de mijloacele laturilor este, la rândul său, dreptunghic, așadar centrul cercului lui ***Euler*** este mijlocul segmentului determinat de mijloacele catetelor. Conform caracterizării vectoriale a mijlocului unui segment, deducem că, pentru orice punct din plan, notând A_1, B_1, C_1 mijloacele lui [BC], [CA], [AB], avem, rând pe rând:

$$2\overrightarrow{XA_1} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}, 2\overrightarrow{XB_1} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XA}, 2\overrightarrow{XC_1} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}.$$

Să notăm Ω centrul cercului lui ***Euler***. Atunci, avem $2\overrightarrow{X\Omega} = \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1}$, ceea ce conduce către $4\overrightarrow{X\Omega} = 2 \cdot \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$, pentru orice punct din plan.

Analog, ținând cont de faptul că simediana unui triunghi relativă la o latură o împarte în raportul egal cu pătratul raportului dintre laturile adiacente, notând **L** punctul lui Lemoine, după o analiză făcută în același mod, deducem că, pentru orice punct în plan, avem

$$(a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{XL} = a^2\overrightarrow{XA} + b^2\overrightarrow{XB} + c^2\overrightarrow{XC}.$$

În cazul triunghiului nostru dreptunghic neisoscel, pentru $X = A$, avem

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4},$$

respectiv

$$\overrightarrow{AL} = \frac{b^2}{2(b^2+c^2)}\overrightarrow{AB} + \frac{c^2}{2(b^2+c^2)}\overrightarrow{AC}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{\Omega L} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{A\Omega} = \left(\frac{b^2}{2(b^2+c^2)} - \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c^2}{2(b^2+c^2)} - \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{AC} =$$

$$= \left(\frac{b^2-c^2}{2(b^2+c^2)}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c^2-b^2}{2(b^2+c^2)}\right)\overrightarrow{AC} = \left(\frac{b^2-c^2}{2(b^2+c^2)}\right)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \left(\frac{b^2-c^2}{2(b^2+c^2)}\right)\overrightarrow{CB}.$$

Aceasta încheie demonstrația.

O altă problemă pe care o vom trata vectorial, căci acesta este veșmântul care apare ca fiind cel natural, este

E:14648. Se consideră triunghiul *ABC* dreptunghic în *A*. Punctul *D* este piciorul înălțimii din *A*, iar *K* este un punct oarecare pe segmentul (*AD*). Dreptele *BK* și *AC* se intersectează în punctul *M*, dreptele *CK* și *AB* se intersectează în punctul *N*, iar dreptele *MN* și *BC* se intersectează în punctul *P*. Dacă punctele *Q* și *R* sunt proiecțiile punctului *P* pe dreptele *AB*, respectiv *AC*, arătați că $RQ \perp BC$.

Soluție.

Utilizând triunghiul dreptunghic *DAC*, găsim $DC = AC \cos C = BC \cos^2 C$ și $BD = BC \sin^2 C$. Cu teorema lui ***Ceva*** în triunghiul *ABC*, relativ la punctele *M – D – N*, găsim că

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = 1 \rightarrow \frac{AM}{CM}\cdot\frac{BN}{NA} = \frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}.$$

Folosim teorema lui ***Menelaos*** în triunghiul *ABC*, relativ la transversala *P – N – M* și găsim

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = 1 \rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}$$

După asemănarea triunghiurilor *CPR* și *CBA*, deducem că

$$\frac{RA}{RC}=\frac{PB}{PC}\to\frac{RA}{AC}=\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C},$$

de unde, vectorial, $\overrightarrow{RA}=\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}\overrightarrow{AC}$.

Din asemănarea lui *CPR* cu *CBA*, deducem că $\frac{AB}{PR}=\frac{AC}{RC}\to\frac{AB}{AS}=\frac{AC}{RC}$. Dar

$$\frac{RA}{RC}=\frac{PB}{PC}\to\frac{RA}{RC}=\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}\to\frac{AC}{RC}=\frac{\cos^2 C-\sin^2 C}{\cos^2 C}\to\frac{AB}{AS}=\frac{\cos^2 C-\sin^2 C}{\cos^2 C}\to\frac{AS}{AB}=\frac{\cos^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}$$

Așadar, vectorial

$$\overrightarrow{AS}=\frac{\cos^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}\overrightarrow{AB},$$

de unde

$$\overrightarrow{RS}=\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}\overrightarrow{AC}+\frac{\cos^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}\overrightarrow{AB}.$$

Dar deducem

$$\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}\overrightarrow{AC}+\frac{\cos^2 C}{\cos^2 C-\sin^2 C}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=$$

$$\frac{\sin^2 C\cdot AC^2-\cos^2 C\cdot AB^2}{\cos^2 C-\sin^2 C}=0$$

Apare o întrebare, și anume ce se întâmplă dacă triunghiul este dreptunghic isoscel. Reamintim că, în acest caz, avem

$$\frac{AM}{CM}\cdot\frac{BN}{NA}=\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}=1\ \to\frac{AM}{CM}=\frac{AN}{BN},$$

și după reciproca teoremei lui Thales, *MN* este paralel cu *BC*, de unde deducem că enunțul problemei nu mai are nevoie de "*ABC* triunghi dreptunghic neisoscel".

Sperăm că această notă este o pledoarie pentru estetica matematicii și pentru unele abordări ale fenomenului geometric.