DIVIZIUNI ŞI FASCICULE ANARMONICE

NECULAI STANCIU[1]

"Geometria proiectivă este toată geometria"
Arthur Cayley

I. DIVIZIUNI ANARMONICE

Aceast articol, este dedicat *geometriei sintetice* (*fundamentelor geometriei* şi *geometriei proiective*), şi se adresează studenților, elevilor, profesorilor de matematică, şi în general, oricui este interesat de geometrie.

În prezent, geometria din liceu este introdusă via *algebra liniară* (adică *vectorial* nu *sintetic*).Articolul, vine să detalieze noțiunea de *diviziune şi fascicul armonic* definită în articolul -"*Aplicații ale teoremei lui La Hire*" - G.M. - 3 / 2008 ; noțiuni care pot fi înțelease de orice elev din clasa a VI-a.

Diviziunea şi fascicului armonic, sunt tratate în capitole de *fundamentele geometriei*, şi în *geometria proiectivă*, unde metoda utilizată este cea *axiomatică sintetică*.Alte noțiuni legate de acestea sunt:*polaritate, dualitate*, etc.

Considerăm punctele coliniare A, B şi C ca în fig.1 .

Fig.1

Avem relațiile: (1) $AB = -BA$ şi (2) $AB + BC = AC$; $AB + BC + CA = 0$.Fie acum patru puncte coliniare A, B, C şi D ca în fig. 2, astfel încât (3) $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$.

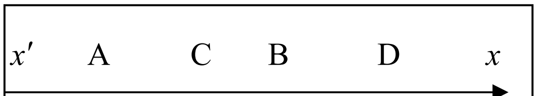


Fig.2

Spunem că perechea (CD) este *armonic conjugată* cu perechea (AB) şi reciproc deoarece:

$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1$.Se mai spune că A este *conjugatul armonic* al lui B în raport cu C şi D sau, B este conjugatul armonic al lui A în raport cu C şi D sau, C este conjugatul armonic al lui D în raport cu A şi B sau, D este conjugatul armonic al lui C în raport cu A şi B.

---

[1] Profesor, Şcoala ''Geoge Emil Palade" & Şcoala nr. 6 - Buzău

În continuare vom numi biraport sau, raport anarmonic sau, diviziune anarmonică raportul (4) $\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB} \overset{not}{=} (ABCD) \overset{not}{=} r$ .Se observă că daca $r=1$ atunci $(ABCD)$ este diviziune armonică.

Teorema I.1. *Raportarea la o origine de pe axă.*

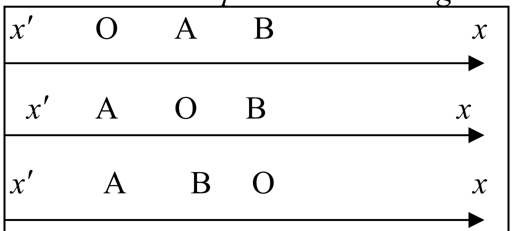


Fig.3

Dacă avem axa $x'x$ cu originea O şi punctele A şi B pe axă atunci (5) $AB = OB - OA$.

Demonstrație. Avem cazurile din fig. 3.

Cazul $O-A-B$. $OA + AB + BO = 0 \Rightarrow$

$AB = -BO - OA = OB - OA$.

Cazul $A-O-B$ .Din relația (2) avem $AO + OB + BA = 0 \Rightarrow$ AB= $OB + AO = OB - OA$.

Cazul $A-B-O$. $AB + BO + OA = 0 \Rightarrow AB = -BO - OA = OB - OA$.

Cuarte de punte coliniare.

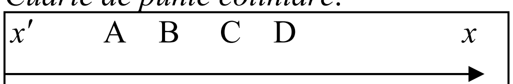


Fig.4

Avem configurația din fig. 4:
AB şi CD sunt *segmente care se separă*;
AD şi BC sunt *segmente care se includ* iar;
AC şi BD sunt *segmente care se încalecă*.

Teorema I.2. *Echipolența lui Euler.*
(6) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

Demonstrație.

$AB \cdot CD + AD \cdot BC - AC \cdot BD = AB(AD - AC) + AD(AC - AB) - AC(AD - AB) =$
$= AB(AD - AC - AD + AC) + AD(AC - AC)$ =0.

Teorema I.3.*Punctul care împarte un segment într-un raport dat.*

Fie segmentul AB , $M \in AB$, $O \in AB$ origine aleasă arbitrar şi $k = \frac{AM}{AB}$.

Avem (7) $OM = (1-k)OA + kOB$.

Demonstrație. Presupunem ordonarea $O-A-M-B$,cu $AM = k \cdot AB$ .Rezultă imediat din *teorema 1*, $OM - OA = k \cdot OB - k \cdot OA$ .Celelalte ordonări se tratează analog.

*Consecință.*Dacă M este mijlocul segmentului AB , atunci $k = \frac{1}{2}$ şi $OM = \frac{OA + OB}{2}$.

Teorema I.4.*Unicitatea punctului care împarte un segment într-un raport dat.*

Fie pe axa $x'x$, segmentul AB şi punctele C, D în interiorul sau în exteriorul segmentului AB dar de aceeaşi parte a lui.Dacă $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ atunci $D = C$.

Demonstrație. Considerăm ordonarea $A-C-D-B$.

Din ipoteză rezultă $AC \cdot DB = AD \cdot CB$ .Din (6) avem $AD \cdot CB = AC \cdot DB + AB \cdot CD$ .Rezultă $AB \cdot CD = 0$, de unde, deoarece $AB \neq 0$ obținem $CD = 0$, adică $C = D$.

În cazul în care C şi D sunt ambele exterioare şi situate de aceeaşi parte a segmentului AB, se procedează analog.Cazul în care C şi D sunt separate de segmentul AB, adică ordonarea $C-A-B-D$ sau $D-A-B-C$ se exclude deoarece $AB \neq 0$.

Teorema I.5.*Diviziuni anarmonice egale, cu trei perechi de puncte comune.*

Dacă $(ABCD)=(ABCD')$, atunci $D=D'$.

Demonstrație. $(ABCD)=(ABCD')\overset{def}{\underset{(4)}{\Rightarrow}}\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}:\frac{D'A}{D'B}\Rightarrow\frac{DA}{DB}=\frac{D'A}{D'B}\overset{T4}{\Rightarrow}D=D'$.

(q.e.d).

Teorema I.6. Valoarea *biraportului* r nu poate fi nici 0 nici 1.

Demonstrație. $r=(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}\neq 0$ deoarece punctele fiind distincte $CA\neq 0, CB\neq 0, DA\neq 0, DB\neq 0$.

$$r-1=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}-1=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DB}{DA}-1=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}-1=\frac{AC\cdot BD-BC\cdot AD}{BC\cdot AD}\overset{T2}{=}\frac{AB\cdot CD}{BC\cdot AD}\neq 0\Rightarrow$$
$\Rightarrow r\neq 1$.

În continuare, vom calcula *valorile biraportului obținute prin permutarea punctelor unei diviviuni anarmonice*.

Teorema I.7.O *transpoziție* a două puncte din aceeaşi pereche inversează raportul anarmonic.

Demonstrație. $\begin{cases} r=(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{CA\cdot DB}{CB\cdot DA} \\ r_1=(ABDC)=\frac{DA}{DB}:\frac{CA}{CB}=\frac{DA\cdot CB}{DB\cdot CA}\end{cases}\Rightarrow r\cdot r_1=1\Rightarrow r_1=\frac{1}{r}$.

Am demonstrat $(ABDC)=\frac{1}{(ABCD)}$. $(BACD)=\frac{CB}{CA}:\frac{DB}{DA}=\frac{CB\cdot DA}{CA\cdot Db}=\frac{1}{(ABCD)}$.(q.e.d).

Teorema I.8.O *transpoziție* a două puncte din perechi diferite ne dă un *raport anarmonic complementar* .

Demonstrație. $r=(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$ şi $r_2=(ACBD)=\frac{BA}{BC}:\frac{DA}{DC}=$ $=-\frac{AB\cdot CD}{BC\cdot AD}$.Sumăm cele două egalități şi aplicând *echipolența lui Euler(teorema 2)* obținem: $r+r_2=\frac{AC\cdot BD-AB\cdot CD}{BC\cdot Ad}=\frac{AD\cdot BC}{AD\cdot BC}=1\Rightarrow r_2=1-r\Rightarrow(ACBD)=1-r$.

Analog se arată că $(DBCA)=1-r$.

Transformările precedente ale raportului anarmonic, definite în *teoremele I.7 şi I.8,* compuse succesiv cu ele însele îl reproduc pe r.

Adică :

$r_1=\frac{1}{r}\Rightarrow r'=\frac{1}{r_1}=r$, respectiv $r_2=1-r\Rightarrow r''=1-r_2=r$.

Vom numi *transpoziții complementare* acele transformări care compuse cu ele însele , lasă *raportul anarmonic* neschimbat.

Teorema I.9. Dacă $(ABCD)=(ABDC)$ sau $(ABCD)=(BACD)$ atunci $(ABCD)=-1$.

Demonstrație. Fie $r=(ABCD)\overset{TI.7}{\Rightarrow}(ABDC)=\frac{1}{r}$, $(BACD)=\frac{1}{r}$.

Dacă $r=\frac{1}{r}\Rightarrow r^2-1=0\overset{r\neq 1}{\Rightarrow}r=-1$.(q.e.d).

Deoarece cu 4 obiecte putem face 24 de permutări, pentru fiecare diviziune de 4 puncte avem 24 de valori ale rapoartelor anarmonice corespunzătoare câte unei permutări.
Dintre toate acestea numai 6 valori sunt distincte, iar restul se obțin prin transpoziții complementare .Dintr-o permutare dată putem selecta alte trei de acelaşi raport anarmonic.Obținem:

$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)=r$

$(ABDC)=(BACD)=(DCAB)=(CDBA)=\frac{1}{r}$

$(ACBD)=(CADB)=(BDAC)=(DBCA)=1-r$

$(ADBC)=(DACB)=(CBDA)=(BCAD)=\frac{r-1}{r}$

$(ACDB)=(CABD)=(BDCA)=(DBAC)=\frac{1}{1-r}$

$(ADCB)=(DABC)=(BCDA)=(CBAD)=\frac{r}{r-1}$.

II. FASCICULE ANARMONICE

Considerăm fig.1 unde $S(a,b,c,d)$ sau $S(A,B,C,D)$ reprezintă un *fascicul convergent*, cu punctul S *propriu* de raze a,b,c,d sau SA, SB, SC, SD şi fig.2 în care $S(a,b,c,d)$ este un *fascicul paralel* de raze a,b,c,d sau SA, SB, SC, SD cu punctul S *impropriu*.

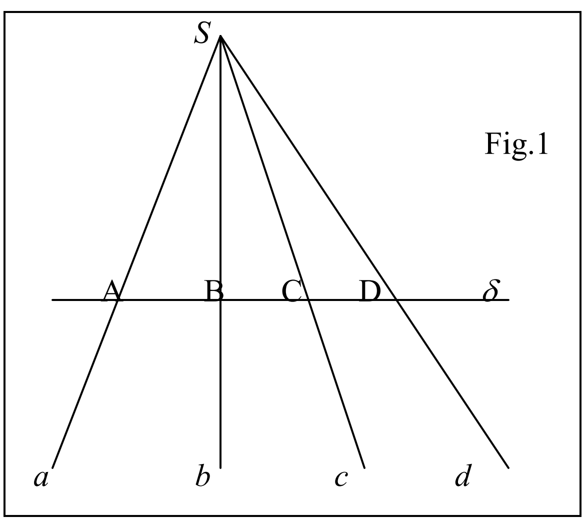


Fig.1

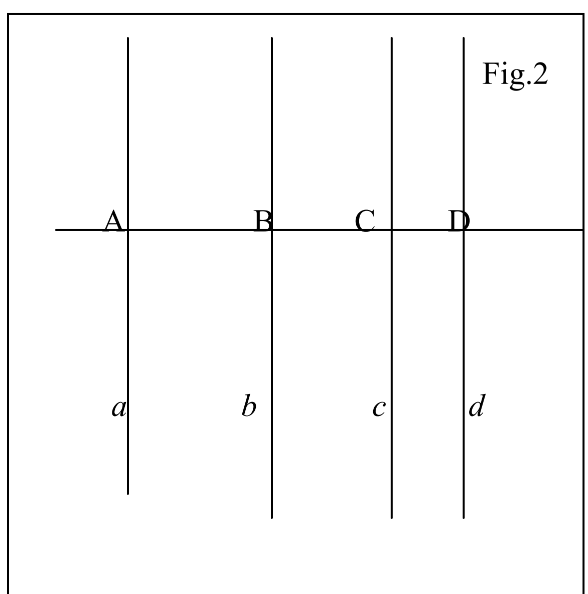


Fig.2

Dacă diviziunea $(ABCD)$ este diviziune armonică atunci fasciculul ataşat $S(ABCD)$ se numeşte *fascicul armonic*.

Biraportul ataşat unui fascicul convergent.

Fie fasciculul $S(abcd)$ tăiat de secanta δ (vezi fig.1) în punctele $A=\delta\cap a, B=\delta\cap b, C=\delta\cap c, D=\delta\cap d$ .Dacă $S(XYZ)\overset{not}{=}$ aria triunghiului de vârfuri X,Y şi Z, $\widehat{XY}\overset{not}{=}\widehat{XSY}$, $h=d(S,\delta)$, atunci $\frac{CA}{CB}=\frac{CA\cdot h}{CB\cdot h}=\frac{2\cdot S(CSA)}{2\cdot S(CSB)}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

$$(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{S(CSA)}{S(CSB)}:\frac{S(DSA)}{S(DSB)}=\frac{SC\cdot SA\cdot\sin(\widehat{ca})}{SC\cdot SB\cdot\sin(\widehat{cb})}:\frac{SD\cdot SA\cdot\sin(\widehat{da})}{SD\cdot SB\cdot\sin(\widehat{db})}=$$

$$=\frac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})}:\frac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}.$$

Dacă $S(abcd)\overset{not}{=}\frac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})}:\frac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$, atunci rezultă $(ABCD)=S(abcd)$.

Teoreme de invarianță

Teorema II.1. Fiind date pe dreapta δ , punctele fixe A,B,C,D .Pentru orice $S\notin\delta$, notăm $a=SA, b=SB, c=SC, d=SD$ .Biraportul ataşat fasciculului $S(abcd)$ este *invariant.*

Demonstrație. Fie $S,S'\notin\delta$, ca în fig.3.

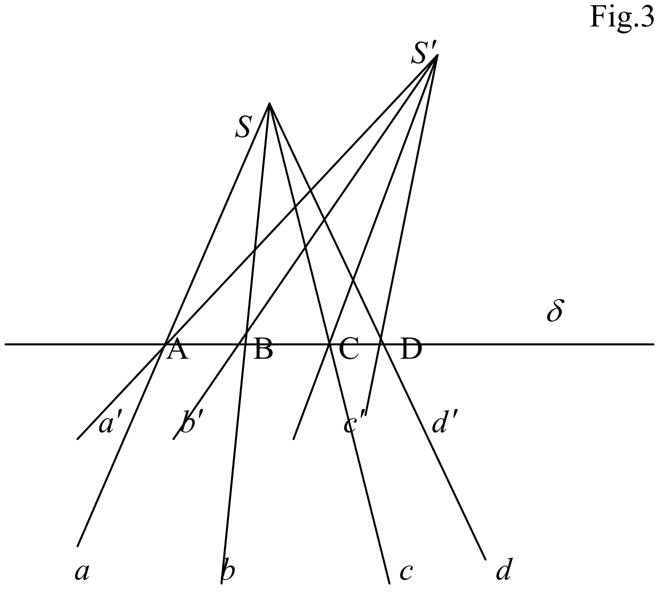
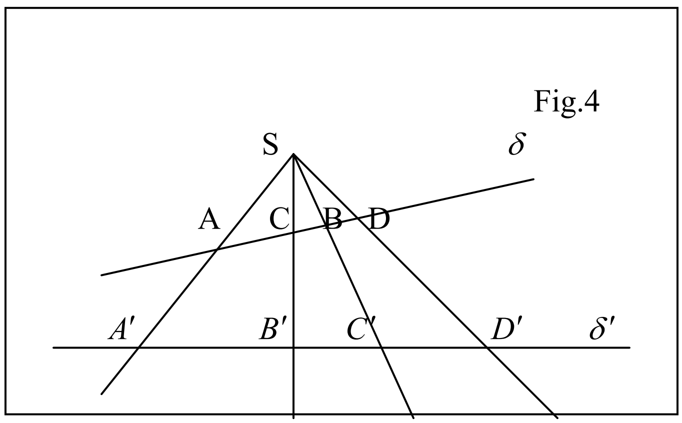


Fig.3

Din $S(abcd) = (ABCD)$ şi $S'(a'b'c'd') = (ABCD)$ rezultă $S(abcd) = S'(a'b'c'd')$.(q.e.d).

Teorema II.2. Fiind dat fasciculul fix de vârf S şi raze a, b, c, d .Pentru orice secantă δ care intersectează razele fasciculului în $A = a \cap \delta, B = b \cap \delta, C = c \cap \delta,$ şi $D = d \cap \delta$, *biraportul* ataşat diviziunii $(ABCD)$ este *invariant.*

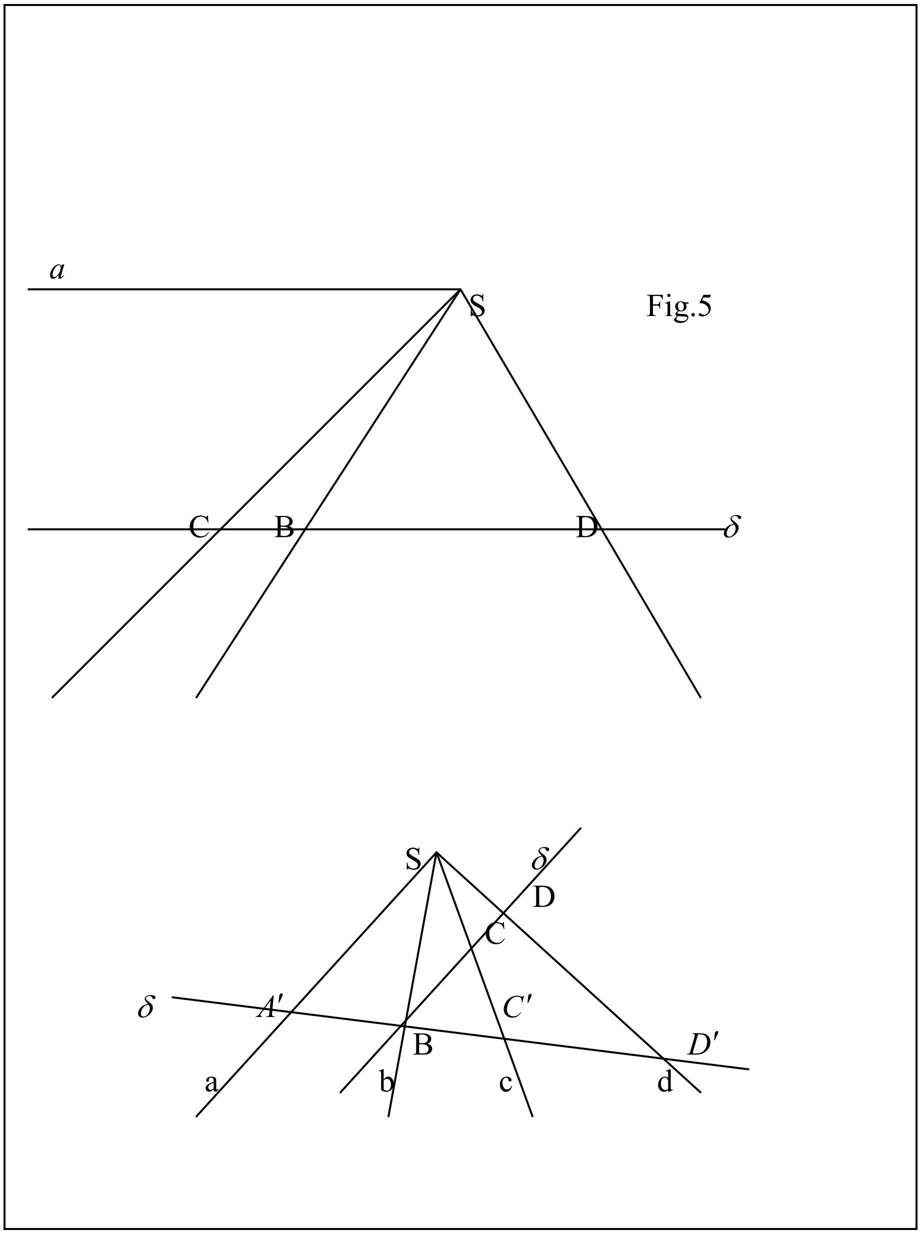
Demonstraţie. Fie δ şi δ' două secante oarecare (fig.4), care intersectează razele fasciculului în punctele A, B, C, D şi A', B', C', D' .



Avem $(ABCD) = S(abcd)$ şi $(A'B'C'D') = S(abcd)$ .Rezultă $(ABCD) = (A'B'C'D')$.(q.e.d.).

Fasciculul tăiat de o secantă paralelă cu una din raze.

Fie fasciculul $S(abcd)$ şi $\delta \| a$ (fig.5).



$(1)\; S(abcd) = (A'BC'D') = \dfrac{C'A'}{C'B} : \dfrac{D'A'}{D'B}$,(2) $\Delta C'A'S \approx \Delta C'BC \Rightarrow \dfrac{C'A'}{C'B} = \dfrac{SA'}{CB}$,

(3) $\Delta D'A'S \approx \Delta D'BD \Rightarrow \dfrac{D'A'}{D'B} = \dfrac{SA'}{DB}$ .Din (1),(2) şi (3) rezultă :

$$S(abcd) = \frac{SA'}{CB} : \frac{SA'}{DB} = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB} = (A'BC'D').$$

Avem următoarea *regulă mnemotehnică* pentru scrierea valorii biraportului $\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$.

Deoarece $\delta \| a$ scriem $\delta \cap a = A_i$ (*punctul impropriu* pe direcția paralelelor $\delta \| a$),

$S(abcd)=\frac{CA_i}{CB}:\frac{DA_i}{DB}$ şi luom $CA_i : DA_i = 1$ (trecerea la limită $A' \to A_i$).

$S(abcd)=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$.

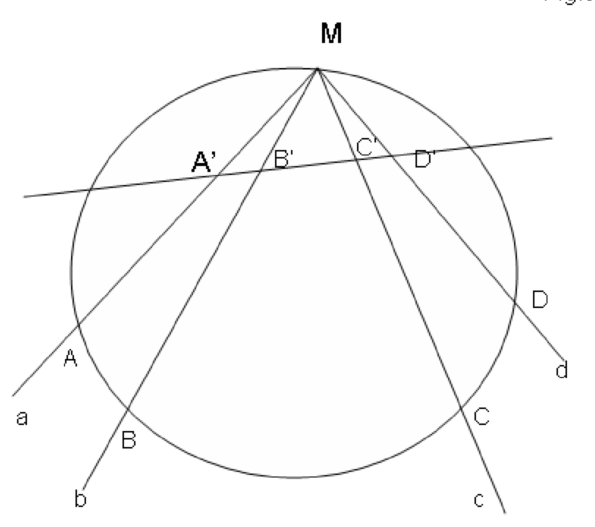
Consecință. Fie B,C,D puncte fixe pe dreapta δ , $a \| \delta, S \in a$, $SB=b, SC=c, SD=d$. Atunci $\forall S \in a, S(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. Fie $A_i = \delta \cap a$. $S(abcd)=(A_iBCD)=\frac{CA_i}{CB}:\frac{DA_i}{DB}=\frac{1}{CB}:\frac{1}{DB}$=constant.

Teorema II.3. Fie A,B,C,D puncte fixe pe $C(O;R)$ şi $M \in C(O;R)$ (fig.6).Dacă $MA=a, MB=b, MC=c, MD=d$ atunci , $\forall M \in C(O;R)$ $M(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. $M(abcd)=\frac{\sin(\widehat{ca})}{\sin(\widehat{cb})}:\frac{\sin(\widehat{da})}{\sin(\widehat{db})}$=constant, deoarece A,B,C,D sunt puncte fixe şi $\widehat{ca}=\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}$=ct., $\widehat{cb}=\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}$=ct., $\widehat{da}=\frac{\overset{\frown}{DCBA}}{2R}$=ct., $\widehat{db}=\frac{\overset{\frown}{DCB}}{2R}$=ct.

Fig.6



Observație. Din figura 6 rezultă $M(ABCD) = M(A'B'C'D')$.

Teorema II.4. Fie $A, B, C,$ și D puncte fixe pe $C(O;R)$ iar $, a, b, c,$ și d tangentele în cele patru puncte la cercul $C(O;R)$. Atunci oricarea ar fi tangenta t la cercul $C(O;R)$ în punctul $T \in C(O;R)$, punctele $A_1 = a \cap t, B_1 = b \cap t, C_1 = c \cap t$ și $D_1 = d \cap t$ formează o diviziune anarmonică $(A_1B_1C_1D_1)$ invariantă.

Demonstrație. Considerăm fig.7.

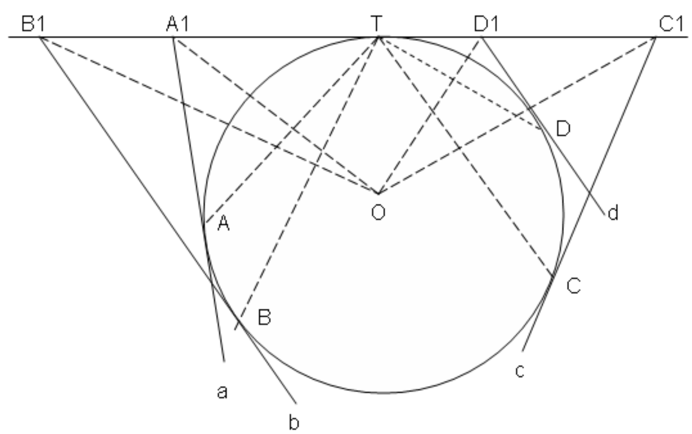


Fig.7

Avem $(A_1B_1C_1D_1) = O(A_1B_1C_1D_1)$. Formăm apoi fasciculul cu vârful în T și raze $TA \perp OA_1$, $TB \perp OB_1$, $TC \perp OC_1$ și $TD \perp OD_1$. Deci $T(ABCD) = O(A_1B_1C_1D_1)$.

Obținem $(A_1B_1C_1D_1) = T(ABCD) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})$ =constant.

Teorema II.5. Pe cercul $C(O;R)$ considerăm punctele distincte A, B, C, D și tangentele a, b, c, d în aceste puncte la cerc (fig.8). Avem egalitățile:

$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$.

Demonstrație. $A(aBCD) = (\sin \widehat{CAa} : \sin \widehat{CAB}) : (\sin \widehat{DAa} : \sin \widehat{DAB}) =$

$= (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R}) = r =$ constant=

$= B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$ (din egalități de sinusuri).

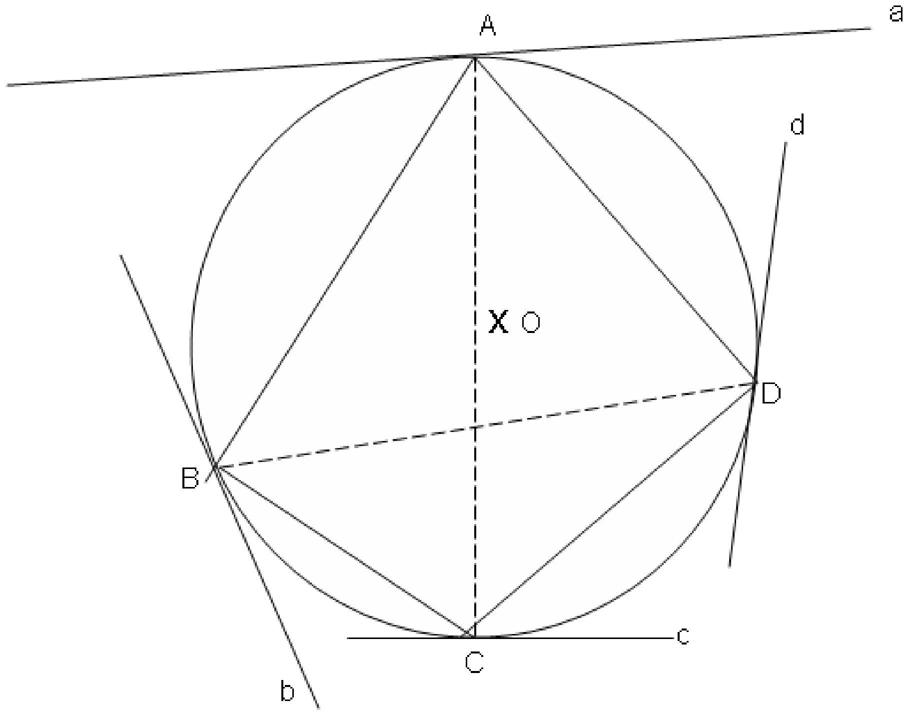


Fig. 8

Observație. *Teorema II.5* reprezintă cazul limită a *teoremei II.3* în care punctul M de pe $C(O;R)$ coincide cu unl din punctele A,B,C sau D.

Teorema II.6. Pe cercul $C(O;R)$ se consideră punctele distincte A,B,C,D şi tangentele la cerc în aceste puncte: a,b,c,d (fig.9).

Dacă notăm $E = a \cap b, F = b \cap c, G = c \cap d, H = d \cap a, I = b \cap d$ şi $J = a \cap c$, atunci avem egalitățile: $(AEJH) = (EBFI) = (JFCG) = (HIGD)$.

Demonstrație. Considerăm fasciculul cu vârful în O şi raze OA, OE, OJ şi OH

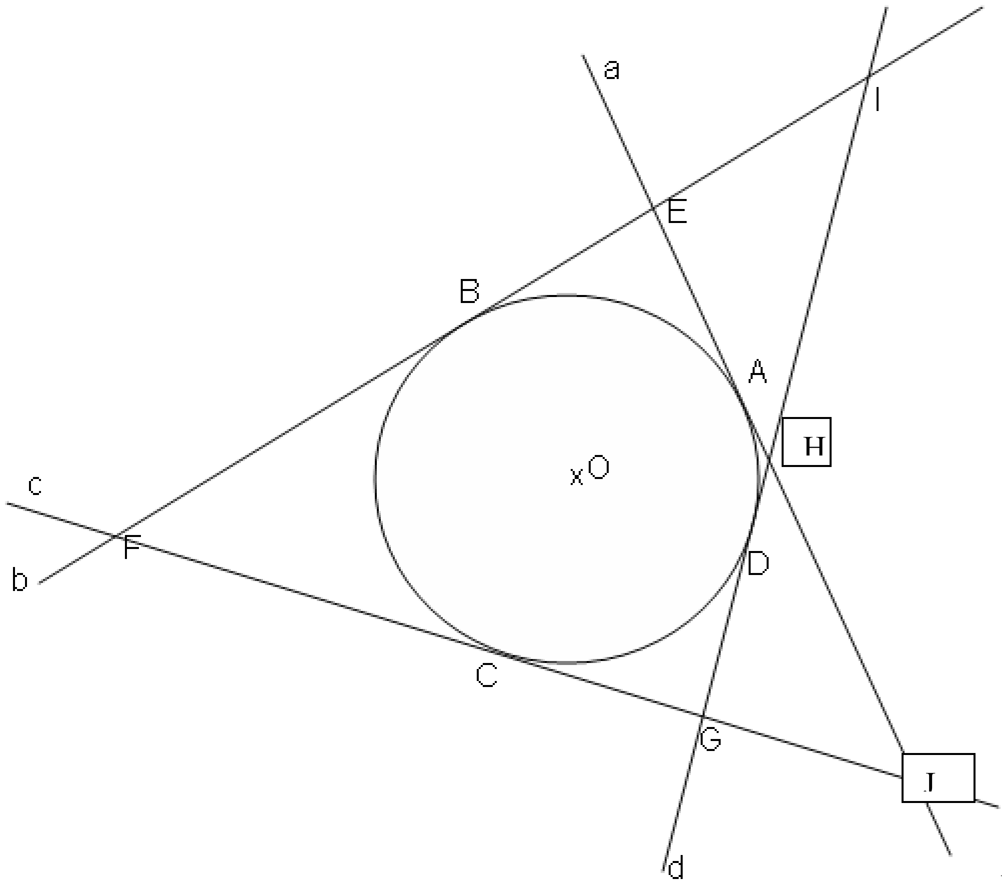


Fig.9

$OAEJH$, apoi fasciculul cu vârful în A şi razele perpendiculare pe razele fasciculului anterior : $a \perp OA, AB \perp OE, AC \perp OJ$ respectiv $AD \perp OH$, $A(aBCD)$ şi avem :

$(AEJH) = O(AEJH) = A(aBCD)$.

Analog se obțin şi relațiile:

$(EBFI) = O(EBFI) = B(AbCD)$;

$(JFCG) = O(JFCG) = C(ABcD)$;

$(HIGD) = O(HIGD) = D(ABCd)$.

Acum aplicăm relații între sinusuri, ca în teorema 5, pe care aici le detaliem astfel:

$\hat{CAa} = \hat{CBA} = c\hat{CA} = \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$ şi $\hat{CDA} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2R} = \pi - \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$, rezultă:

$\sin(\hat{CAa}) = \sin(\hat{CBA}) = \sin(c\hat{CA}) = \sin(\hat{CDA}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R})$ şi analoagele

$\sin(\hat{CAB}) = \sin(\hat{CBb}) = \sin(c\hat{CB}) = \sin(\hat{CDB}) = \sin(\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R})$

$$\sin(D\hat{A}a) = \sin(D\hat{B}A) = \sin(D\hat{C}A) = \sin(d\hat{D}A) = \sin(\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R})$$

$$\sin(D\hat{A}B) = \sin(D\hat{B}b) = \sin(D\hat{C}B) = \sin(d\hat{D}B) = \sin(\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R}).$$

Ținând seama de aceste valori putem scrie:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) = (\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}) : (\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R})$$

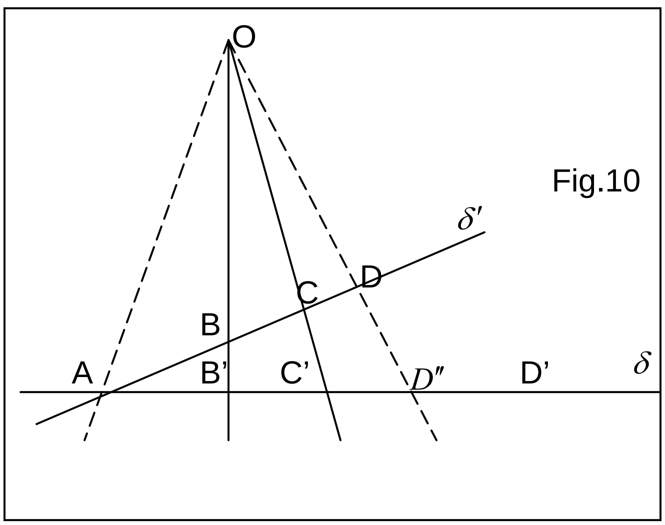
(q.e.d.).

Observație. *Teorema II.6* reprezintă cazul limită al *teoremeiII. 4* în care tangenta t la cercul $C(O;R)$ coincide cu una din tangentele a,b,c,d .

Teoreme de concurență și coliniaritate.

Teorema II.7. Dacă două diviziuni anarmonice egale $(ABCD) = (AB'C'D')$ au un *punct comun* A, atunci dreptele BB', CC' și DD' sunt concurente.

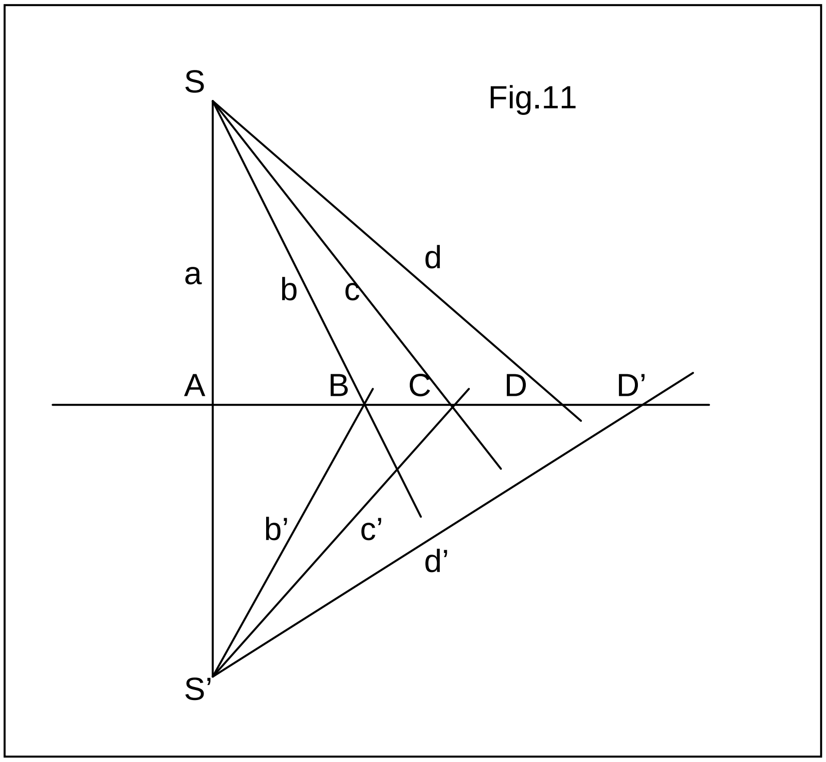
Demonstrație. Avem fig.10.



Fie $O = BB' \cap CC'$ și $D'' = OD \cap \delta'$ .Din *teorema II.2* rezultă $(ABCD) = (AB'C'D'')$ iar, din ipoteză avem $(ABCD) = (AB'C'D')$ .Deci $(AB'C'D'') = (AB'C'D')$, apoi din *teorema I.5* se obține $D'' = D'$.(q.e.d.).

Teorema II.8. Dacă două fascicule anarmonice egale $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ au o *rază comună* $SS' = a$, atunci punctele de intersecție ale celor trei perechi de raze corespondente: $B = b \cap b', C = c \cap c', D = d \cap d'$ sunt coliniare.

Demonstrație.



Fie $A = BC \cap a, D = BC \cap d$ şi $D' = DC \cap d'$ (fig.11).

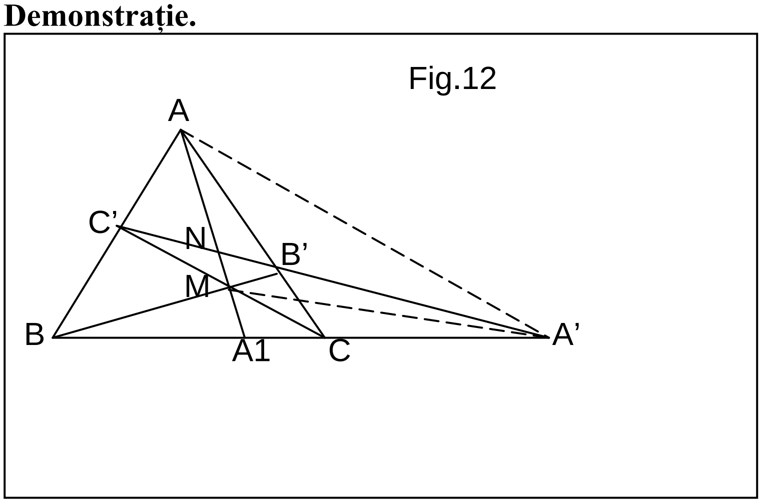
Din ipoteză rezultă (1) $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ .Intersectând fasciculul $S(abcd)$ cu secanta BC rezultă (2) $S(abcd) = (ABCD)$ .Inersectând fasciculul $S'(ab'c'd')$ cu secanta BC rezultă (3) $S'(ab'c'd') = (ABCD')$ .Din cele trei relații avem $(ABCD) = (ABCD')$, apoi din *teorema I.5.* se obține $D = D'$.(q.e.d.).

Teoreme clasice.

Teorema II.9. Prima teoremă a lui Papus.

În ΔABC fie A', B', C' trei puncte coliniare situate pe laturile BC, CA, AB şi $BB' \cap CC' = M$, $AM \cap BC = A_1$.În aceste condiții A' şi A_1 sunt conjugate armonic în raport cu B şi C, adică $(BCA'A_1) = -1$ (fig.12).

Demonstrație.



Fsciculul de vârf M şi raze MB, MC, MA', MA_1 îl tăiem mai întâi cu secanta BC şi apoi cu secanta $B'C'$ şi aplicăm *teorema II.2.*

(1) $M(BCA'A_1) = (BCA'A_1) = (B'C'A'N)$.

Fasciculul de vârf A determinat de diviziunea anarmonică $(B'C'A'N)$ îl tăiem cu secanta BC şi aplicăm *teorema II.2.*

(2) $(B'C'A'N) = A(CBA'A_1) = (CBA'A_1)$.

Din (1) şi (2) avem $(BCA'A_1) = (CBA'A_1)$ apoi din *teorema I.9.* rezultă $(BCA'A_1) = -1$.(q.e.d.).

Teorema II.10. A doua teoremă a lui Papus.

Pe două drepte δ şi δ' luom trei şiruri de puncte arbitrare $A, B, C \in \delta$ respectiv $A', B', C' \in \delta'$ .Intersecţiile $U = BC' \cap B'C, V = CA' \cap C'A$ şi $W = AB' \cap A'B$ sunt trei puncte coliniare (fig.13).

Demonstraţie.

a) cazul dreptelor incidente($\delta \cap \delta'$)

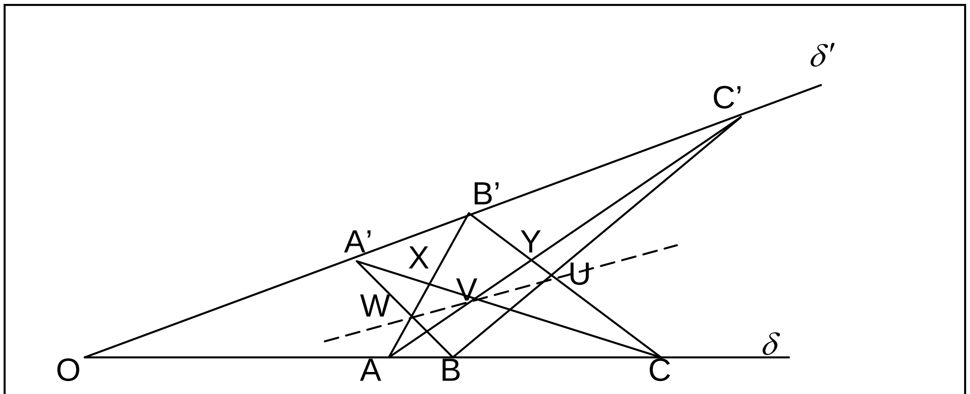


Fig.13

Fie $X = B'A \cap A'C$ şi $Y = B'C = C'A$.

Considerăm fasciculele de vârfuri A' şi C' ale căror raze trec prin punctele diviziunii $(OABC)$ .Din *teorema II.1* rezultă (1) $A'(OABC) = C'(OABC)$ .Intersectând primul fascicul cu secanta $B'A$, din *teorema II.2.* rezultă (2) $A'(OABC) = (B'AWX)$ .Analog, intersectând al doilea fascicul cu secanta $B'C$,din *teorema II.2.* rezultă (3) $C'(OABC) = (B'YUC)$.

Din (1),(2) şi (3) rezultă $(B'AWX) = (B'YUC)$, diviziuni anarmonice egale, cu B' punct comun.Conform *teoremei II.7* şi schemei de mai jos:

Puncte corespondente

B B' punct comun

A Y dreapta AY

W U dreapta WU

X C dreapta XC

Rezultă $AY \cap XC = AC' \cap CA' = V \Rightarrow V \in UW$.(q.e.d).

b) cazul dreptelor paralele ($\delta \| \delta'$) δ

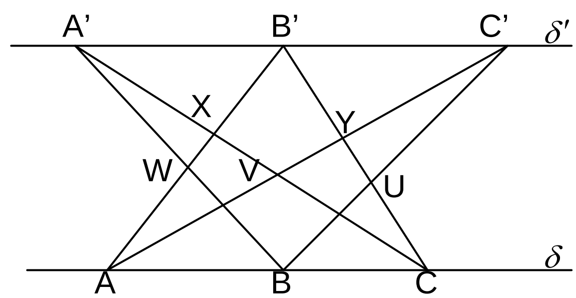


Fig.14

Considerăm fasciculele de vârfuri A' şi C' :

(1) $A'(\delta' ABC) = C'(\delta' ABC)$; (2) $A'(\delta' ABC) = (B'AWX)$;(3) $C'(\delta' ABC) = (B'YUC)$.

Rezultă $(B'AWX) = (B'YUC)$, cu B' punct comun, analog ca în cazul a) deducem $V \in UW$.(q.e.d.).

Teorema II.11. Teorema plană a lui Desargues, directă şi reciprocă.

Dacă două triunghiuri au vârfurile aşezate pe trei drepte concurente atunci laturile lor corespunzătoare se taie în trei puncte coliniare şi reciproc dacă intersecția perechilor de laturi a două triunghiuri sunt coliniare atunci vârfurile corespunzătoare sunt aşezate pe trei drepte concurente.

Având în vedere că teorema rămâne valabilă şi în cazul în care punctul de concurență al celor trei drepte este impropriu iar unul sau toate cele trei puncte de intersecție pot fi improprii enunțul poate fi reformulate astfel:

Fie trei drepte a, b, c pe care luom : $A, A' \in a$; $B, B' \in b$; $C, C' \in c$ .Dreptele a, b, c sunt concurente în O (propriu sau impropriu) dacă şi numai dacă intersecțiile $A_0 = BC \cap B'C'$, $B_0 = CA \cap C'A'$ şi $C_0 = AB \cap A'B'$ sunt situate pe o dreaptă (*proprie sau improprie*).Spunem că ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt *omologice* , O este *centrul omologiei* şi $\delta = B_0C_0$ este *axa omologiei*.

Demonstrație.

*Necesitatea.*Fie $D = b \cap AC$, $D' = b \cap A'C'$ .Considerăm fasciculul $O(abcOB_0)$ tăiat de AC respectiv de $A'C'$ (fig.15). Din *teorema II.2.*, avem relațiile:

(1) $(A'D'C'B_0) = (ADCB_0)$; (2) $(ADCB_0) = B(AbCB_0)$; (3) $(A'D'C'B_0) = B'(A'bC'B_0)$.

Din relațiile de mai sus rezultă $B(AbCB_0) = B'(A'bC'B_0)$, cu rază comună.

Din *teorema II.8.* şi schema de mai jos:

Raze corespondente

BA $\quad B'A'$ $\quad BA \cap B'A' = C_0$

b	b	rază comună
BC	$B'C'$	$BC \cap B'C' = A_0$
BB_0	$B'B_0$	$BB_0 \cap B'B_0 = B_0$

rezultă A_0, B_0, C_0 sunt coliniare.Analog se procedează pentru O punct impropriu. (q.e.d.).

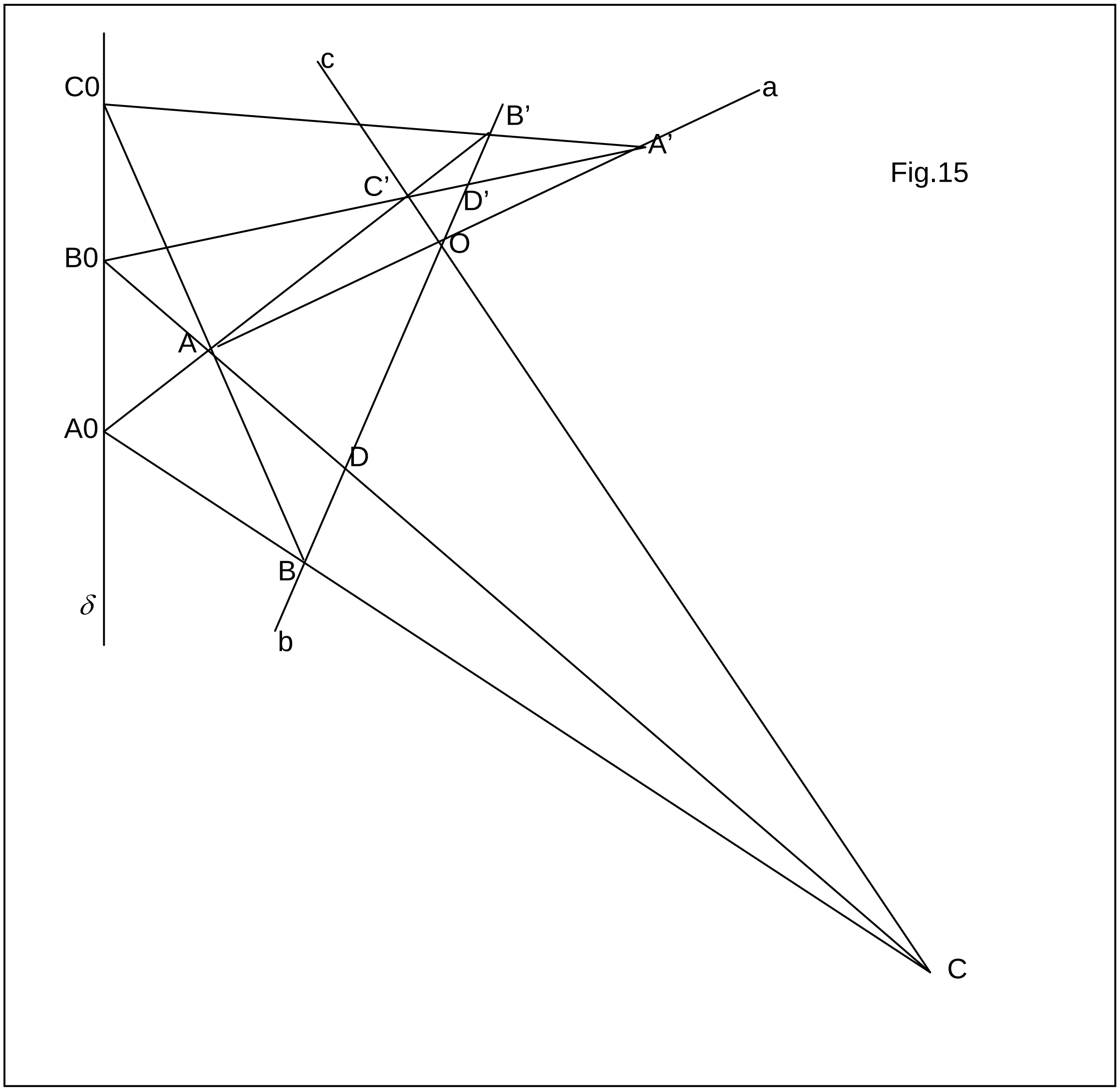


Fig.15

*Suficiența.*Fie A_0, B_0, C_0 coliniare pe δ.Pe fasciculul de vârf B_0 şi raze δ, B_0C, B_0A' considerăm perechile de puncte : $B_0, C_0 \in \delta; C, A \in B_0C; C'A' \in B_0A'$.Deoarece triunghiurile $\Delta A_0CC'$ şi $\Delta C_0AA'$ sunt omologice, din *teorema Desargues* (directă) rezultă :

$A_0C \cap C_0A = B, CC' \cap AA' = O$ şi $C'A_0 \cap A'C_0 = B'$ sunt coliniare; $O \in BB'$.(q.e.d.).

Teorema II.12. Teorema lui Desargues directă –cazul spațial.

Fie $Oabc$ fasciculul de vârf O - propriu (fig.16)sau O_i - impropriu(fig.17) şi $A, A' \in a; B, B' \in b; C, C' \in c$.În aceste condiții, punctele proprii sau improprii $A_0 = BC \cap B'C', B_0 = CA \cap C'A', C_0 = AB \cap A'B'$ sunt coliniare pe dreapta d (proprie) sau d_i (improprie).

Demonstrație.

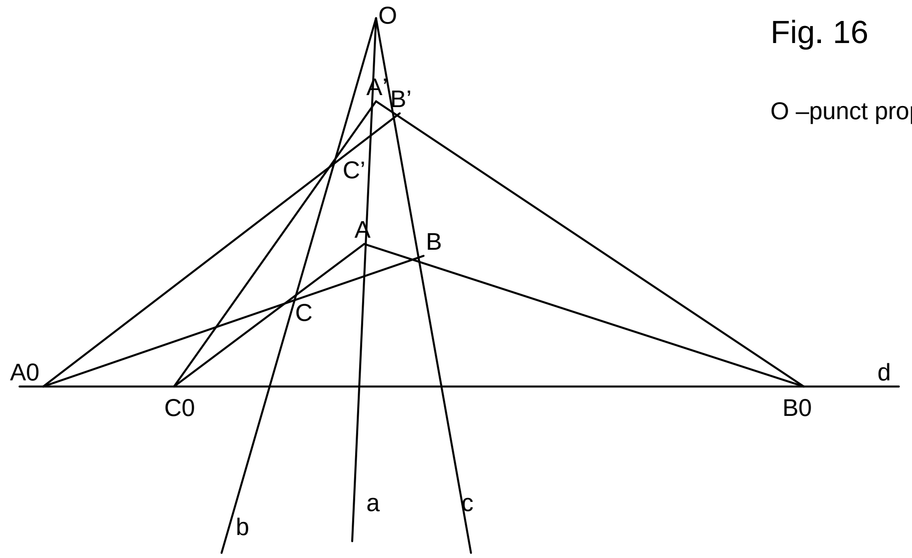


Fig. 16

O –punct propriu

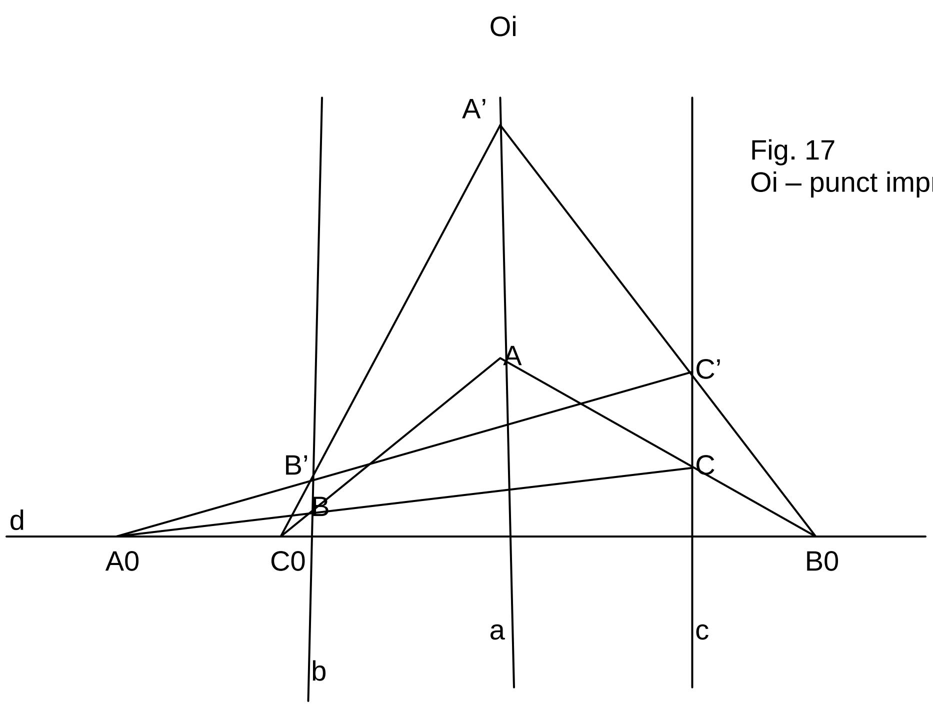


Fig. 17
Oi – punct impropriu

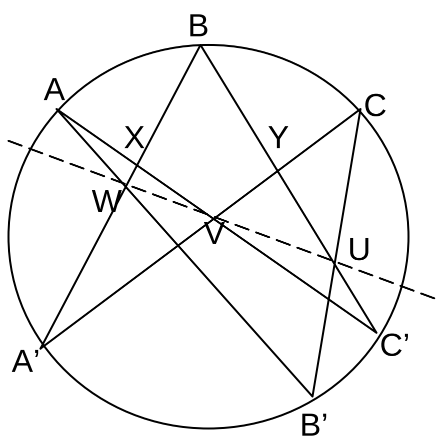
Distingem următoarele plane determinate de triplete de puncte necoliniare şi perechi de drepte concurente sau paralele: $(ABC),(A'B'C'),(a,b),(b,c)$ şi (c,a).
Avem: $(ABC)\cap(A'B'C')=d,(bc)\cap d=A_0\in d,(ca)\cap d=B_0\in d,(ab)\cap d=C_0\in d$, rezultă A_0,B_0,C_0 coliniare. (q.e.d.).

Dacă axa omologiei este dreapta improprie d_i, rezultă $AB\|A'B', BC\|B'C', CA\|C'A'$, iar dacă vârful O este propriu avem omotetie de centru O şi modul $k=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.

Teorema II.13. Teorema lui Desargues reciprocă –cazul spațial.
Fie $A_0=BC\cap B'C', B_0=CA\cap C'A', C_0=AB\cap A'B'$ coliniare pe dreapta d (*proprie*) sau d_i (*improprie*).Atunci $AA'\cap BB'\cap CC'=O$.
Demonstrație. Considerăm fasciculul de vârf B_0 ale cărui raze sunt determinate de tripletele de puncte coliniare $(B_0,C_0,A_0);(B_0,C,A);(B_0,C',A')$ şi triunghiurile omologice $\Delta A_0CC'$, $\Delta C_0AA'$.În continuare se aplică teorema 12 şi rezultă că $B'=A_0C'\cap C_0A'; B=A_0C\cap C_0A$ şi $O=CC'\cap AA'$ sunt coliniare, deci $AA'\cap BB'\cap CC'=O$.(q.e.d.).
Observație. Şi în cazul plan (*teorema II.11.*), omologia de centru O - propriu şi axă improprie este o *omotetie*, iar omologia de centru impropriu şi axă improprie este o *translație*.
Demonstrație.*I).* Dacă $a\cap b\cap c=O$ şi d_i - dreaptă improprie, rezultă $AB\|A'B', BC\|B'C', CA\|C'A'$, deci $\Delta OAB\approx\Delta OA'B', \Delta OBC\approx\Delta OB'C'$ şi $\Delta OCA\approx\Delta OC'A'$.De aici avem $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=k$, de unde A',B',C' sunt omoteticile punctelor A,B,C în raport cu centrul O de modul k.(q.e.d.).
II). Dacă $a\|b\|c$ şi $AB\|A'B', BC\|B'C', CA\|C'A'$, rezultă $ABB'A', BCC'B', CAA'C'$ sunt paralelograme.De aici $AA'=BB'=CC'=t$, deci avem o translație a ΔABC în direcția comună $a\|b\|c$ pe distanța t.(q.e.d.).
Teorema II.14.Teorema lui Pascal pentru hexagon.
Într-un hexagon înscris într-un cerc, laturile opuse se taie în puncte coliniare.
Demonstrație. Pentru claritatea desenului vom considera hexagonal stelat $AB'CA'BC'$ înscris în cercul $C(O;R)$ cu perechile de laturi opuse $(AB',A'B)$; $(B'C,BC')$; $(CA',C'A)$ (fig.18.).Fasciculele de vârfuri A şi C ale căror raze trec prin A',B',B,C' sunt egale (conform *teoremei II.3.*).

(1) $A(BA'B'C') = C(BA'B'C')$.
Fie $X = BA' \cap AC'$ şi tăiem fasciculul de vârf A cu secanta BA', apoi din *teorema II.2*, rezultă :
(2) $A(BA'B'C') = C(BA'B'C')$.
Fie $Y = BC' \cap A'C$ şi tăiem fasciculul de vârf C cu secanta BC'.Din *teorema II.2*, rezultă :

Fig.18



(3) $C(BA'B'C') = (BYUC')$.
Din relațiile (1), (2) şi (3), rezultă (4) $(BA'WX) = (BYUC')$ = diviziuni anarmonice egale cu B punct comun..
Din *teorema II. 7.*, şi schema de mai jos:
Puncte corespondente

B	B	comun
A'	Y	dreapta $A'Y$
W	U	dreapta WU
X	C'	dreapta XC'

rezultă $A'Y, WU, XC'$ sunt concurente.Deoarece, $A'Y \cap XC' = V$, avem $V \in WU$.(q.e.d.).

Teorema II.15.Teorema lui Pascal pentru patrulatere înscrise.
Într-un patrulater inscriptibil, inersecțiile laturilor opuse şi cele ale tangentelor la cercul circumscris duse prin perechile de vârfuri opuse sunt 4 puncte coliniare.

Demonstrație.
Fie $U = AB \cap CD, V = BC \cap AD$, iar a şi c tangentele în A şi C la cercul $C(O;R)$ (fig.19).
Considerăm $W = a \cap c$.
Din teorema 5, $A(BaDC) = C(BADC)$, dar din *teoremele I.7. şi I.8.* avem $A(BaDC) = A(CDaB)$, $C(BADc) = C(ABcD)$.Rezultă $A(CDaB) = C(ABcD)$, fascicule anarmonice egale cu raza comună AC.

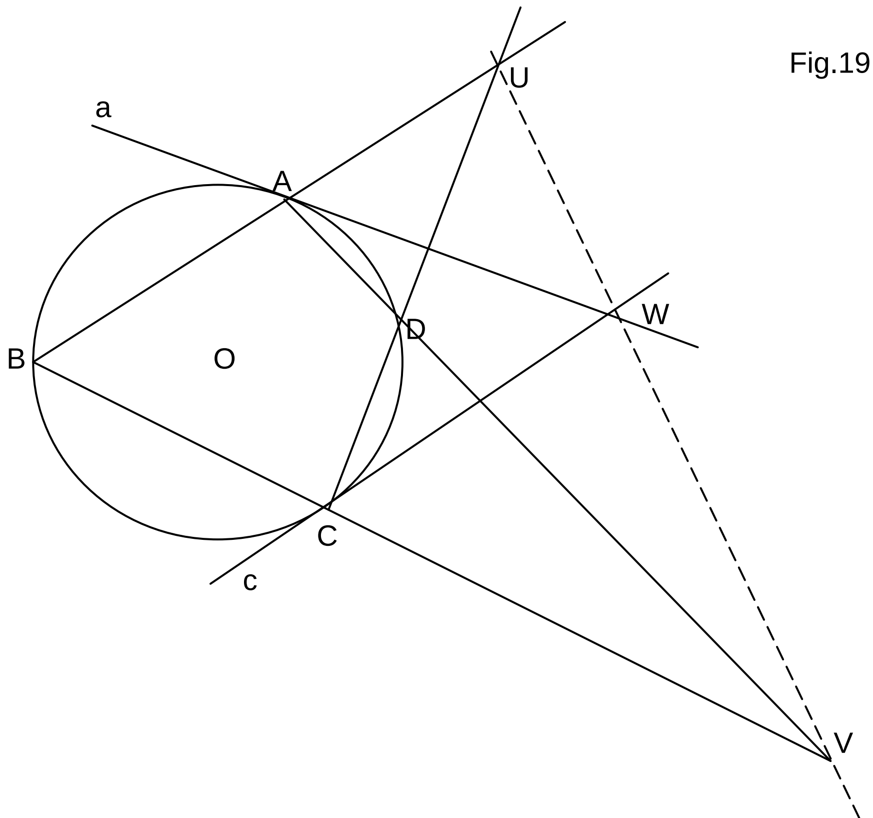


Fig.19

Raze corespondente:

AC	CA	rază comună
AD	CB	$AD \cap CB = V$
a	c	$a \cap c = W$
AB	CD	$AB \cap CD = U$

Rezultă că: (1) U, V, W sunt coliniare.

Raționând analog pentru tangentele b şi d, duse prin punctele B şi D de pe $C(O;R)$, cu $T = b \cap d$, deducem (2)$T \in UV$ .Din (1) şi (2) rezultă că U, V, W, T sunt coliniare.(q.e.d.).

Teorema II.16.Teorema lui Brianchon.

Într-un hexagon circumscris unui cerc diagonalele sunt concurente.

Demonstrație. Fie $ABCDEF$ un hexagon circumscris cercului $C(O;R)$.Considerăm tangentele a, c, e şi f tăiate, pe rand, de tangentele b şi d, unde $G = b \cap f, H = b \cap e, I = d \cap f$ şi $J = d \cap a$ (fig.20).Aplicând *teorema II.4*, rezultă $(BCHG) = (JDEI)$, şi permutând convenabil (vezi partea I) obținem $(GHCB) = (IEDJ)$.

În continuare, considerăm fasciculele anarmonice cu vârfurile în F şi A:

$F(GHCB) = A(IEDJ)$, egale şi cu raza comună $FG = AI = f$.

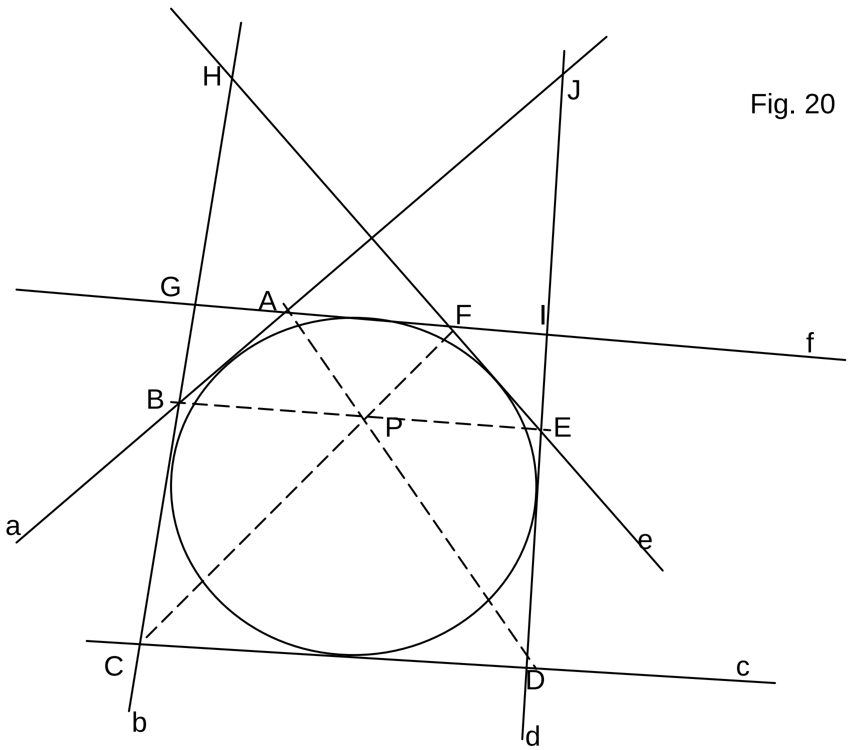


Fig. 20

Conform *teoremei II.8.*, şi schema de mai jos

Raze corespondente:

FG	AI	rază comună
FH	AE	$FH \cap AE = E$
FC	AD	$FC \cap AD = P$
FB	AJ	$FB \cap AJ = B$

rezultă $P \in EB$, adică diagonalele AD, FC şi EB sunt concurente în P.(q.e.d.).

Teorema II.17.Teorema lui Newton.

Într-un patrulater circumscriptibil, cele două diagonale împreună cu cele două drepte determinate de punctele de contact ale perechilor de laturi opuse cu cercul înscris, sunt patru drepte concurente.

Demonstrație. Fie $ABCD$ patrulaterul circumscris cercului $C(O;R)$; E,F,G,H punctele de contact ale laturilor AB,BC,CD,DA cu cercul $C(O;R)$; $I = AB \cap CD, J = BC \cap AD$ (fig.21).Aplicăm *teorema II.6.* tangentelor în H şi F la cerc, avem: $(HAJD) = (JBFC)$, şi permutând convenabil $(HAJD) = (JDHA)$, deci $:(JDHA) = (JBFC)$, diviziuni anarmonice egale, cu un punct comun J.Conform *teoremei II.7.* şi schemei de mai jos:

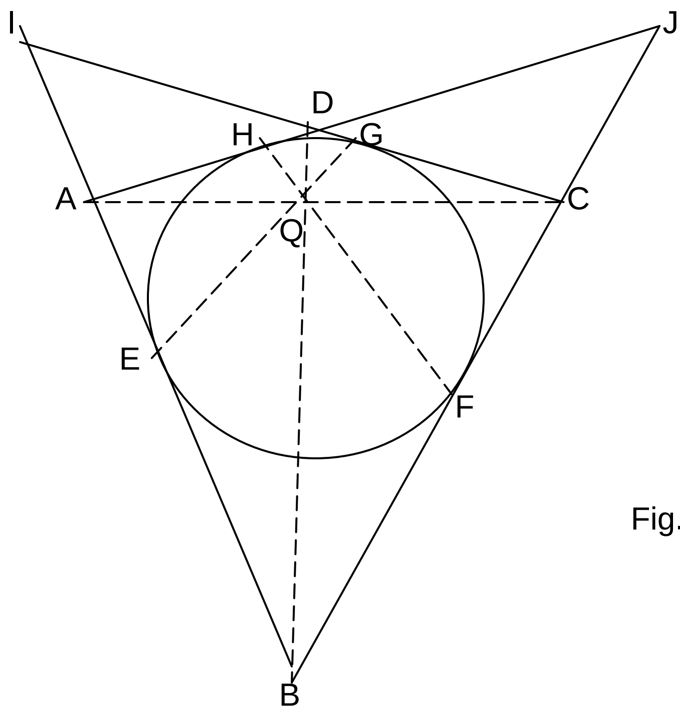


Fig.21

Puncte corespondente

J	J	punct comun
D	B	dreapta DB
H	F	dreapta HF
A	C	dreapta AC

$Q = AC \cap BD$, rezultă (1) $Q \in HF$.

Raționăm analog pentru diviziunile de pe tangentele în E şi G la cerc, şi obținem $(IBEA) = (IDGC)$, apoi cu schema de mai jos:

Puncte corespondente

I	I	punct comun
B	D	dreapta BD
E	G	dreapta EG
A	C	dreapta AC

Cum $AC \cap BD = Q$, rezultă (2) $Q \in EG$.

Din (1) şi (2) rezultă AC, BD, EG, şi FH sunt concurente în punctual Q .

Teorema II.18.Într-un trapez isoscel, intersecția laturilor neparalele şi intersecțiile tangentelor duse prin vârfurile opuse la cercul circumscris trapezului, sunt puncte coliniare pe o dreaptă paralelă cu bazele.

Demonstrație. Fie $ABCD$,un trapez isoscel cu $AB \| CD$, şi $AD = BC$.

Considerăm a, b, c şi d tangentele la cercul $C(O; R)$ circumscris trapezului,duse prin vârfurile trapezului.Notăm: $U = AD \cap BC, W = a \cap c, T = d \cap b$ şi $AB \cap CD = V_i$ (punctul impropriu pe direcția paralelelor AB şi CD , $V_i \in AB$ şi $V_i \in CD$) – vezi fig.22.

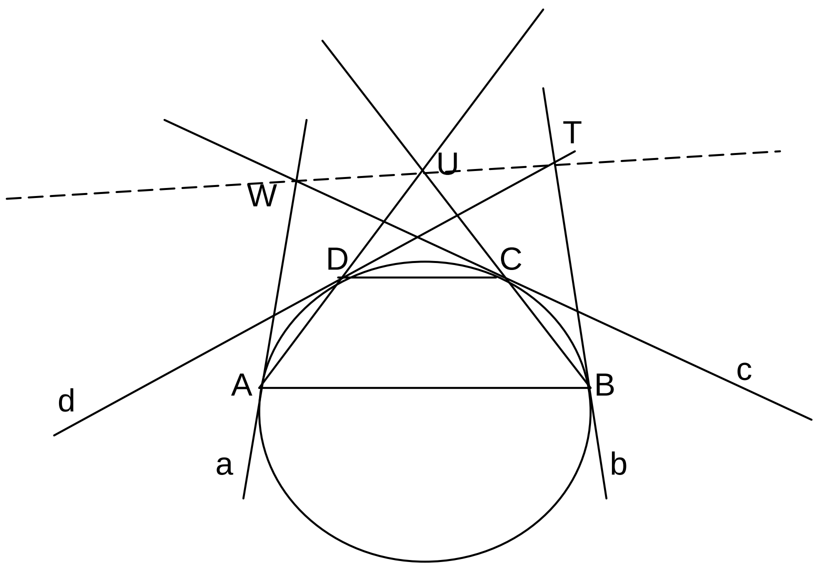


Fig.22

Din *teorema II.5.,* avem şirul de egalităţi: $A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$, care grupate câte două şi permutând convenabil $A(aBCD) = C(ABcD)$, rezultă $A(CDaB) = C(ABcD)$, fascicule anarmonice egale cu raza AC comună.Conform *teoremei II.8.,* din schema de mai jos:
raze corespondente:

AC	CA	rază comună
AD	CB	$AD \cap CB = U$
a	c	$a \cap c = W$
AB	CD	$AB \cap CD = V_i$

deducem $V_i \in UW$ .Rezultă $(1) UW \| AB \| CD$.

În continuare se procedează ca mai sus, $B(AbCD) = D(ABCd) \Rightarrow B(DCbA) = D(BAdC)$, fascicule anarmonice egale cu raza BD comună.
Raze corespondente:

BD	DB	rază comună
BC	DA	$BC \cap DA = U$
b	d	$b \cap d = T$
BA	DC	$BA \cap DC = V_i$

rezultă $V_i \in UT$, deci $(2) UT \| AB \| CD$.

Din (1) şi (2) rezultă că punctele W, U şi T sunt situate pe o dreaptă paralelă cu AB şi CD.(q.e.d.).

Teorema II.19. Raportul anarmonic al unui fascicul este egal cu *raportul anarmonic al coeficienţilor unghiulari* ai razelor fasciculului.

Demonstraţie. Fie $O(abcd)$ fasciculul de vârf O şi raze a, b, c şi d.Considerăm o dreaptă OX , astfel încât : $\alpha = \widehat{xa}, \beta = \widehat{xb}, \gamma = \widehat{xc}, \delta = \widehat{xd}$.

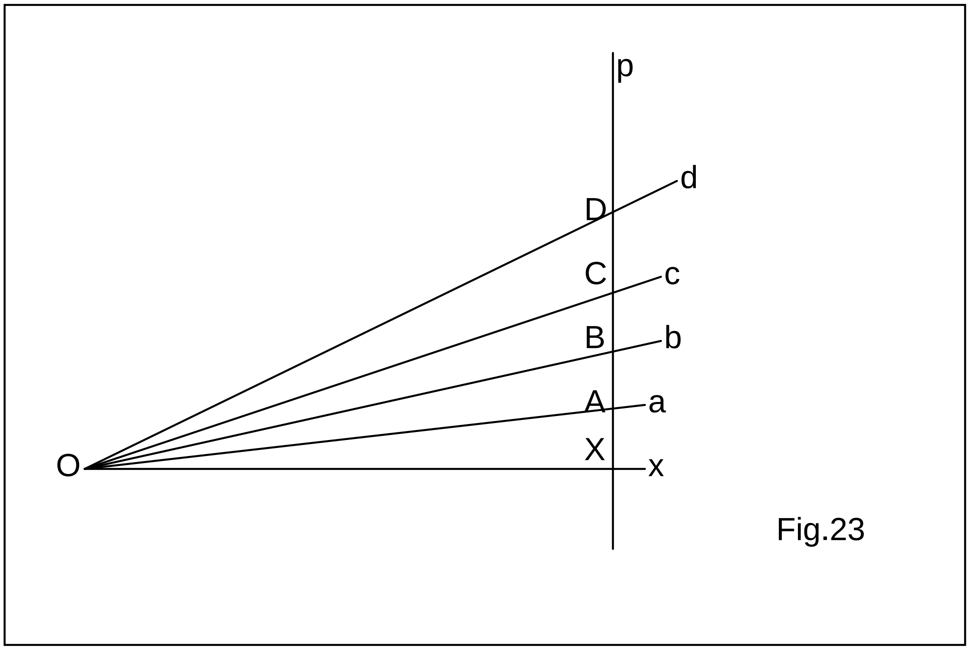


Fig.23

Ducem o dreaptă $p \perp Ox$ şi notăm $: X = p \cap Ox, A = p \cap a, B = p \cap b, C = p \cap c, D = p \cap d$ (vezi fig.23).

Rezultă $r = O(abcd) = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{XA - XC}{XB - XC} : \frac{XA - XD}{XB - XD}$, însă notând $OX = x, tg\alpha = m_a, tg\beta = m_b, tg\gamma = m_c, tg\delta = m_d$, avem $XA = xm_a, XB = xm_b, XC = xm_c, XD = xm_d$.Deci $r = \frac{m_c - m_a}{m_c - m_b} : \frac{m_d - m_a}{m_d - m_b}$.(q.e.d.).

Aplicaţie.Polara unghiulară.

Fie (xy), un unghi de vârf O şi laturi x, y, iar A un punct nesituat pe laturile lui.O secantă mobilă care conţine punctul A taie laturile unghiului în punctele X şi Y.

Se cere locul geometric al punctului M, conjugatul armonic al lui A în raport cu X şi Y.

Soluţie.Se aplică *teorema II.19.,* pentru :

$a = x, b = OM, c = y, d = OA, m_a = 0, m_b \overset{not}{=} m, m_c \overset{not}{=} m_0, m_d = \overset{not}{=} m_A$, şi $r = -1$.

Rezultă : $\frac{m_0}{m_0 - m} + \frac{m_A}{m_A - m} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_A}$.

Deci $m = cons\tan t$.Locul geometric este OM, de direcţie fixă, cu coeficientul unghiular faţă de OX egal cu media armonică ai coeficienţilor unghiulari ai dreptelor OY şi OA faţă de OX.

Justificarea *motto*-ului ales este :

Pentru construcția *geometriei proiective* se utilizează *metoda axiomatică sintetică*.După ce se construieşte *corpul coordonatelor* asociat unui *spațiu proiectiv* sau *plan proiectiv desarguesian*, se poate trece, în cazul unui *corp comutativ*, la dezvoltarea *geometriei analitice* (*în coordonate*) *proiective*.*Geometria afină* se recuperează pe complementara unui *hiperplan* al spațiului proiectiv;se poate face deci trecerea de la *proprietăți proiective* la *proprietăți afine* şi reciproc.

Bibliografie

[1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
[2] Mihăileanu, N. N., Complemente de geometrie sintetică, E.D.P., Bucureşti, 1965.

ARTICOL

Asupra unor numere "extreme"

-de Marcu Stefan Florin profesor Calarasi-

Vom spune ca patru numere reale a,b,c,d sunt numere extreme daca indeplinesc conditiile

1) $a \geq 0$, $b>0$, $c>0$, $d \geq 0$
2) $\frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \sqrt{cd}$

Relatiile 2) exprima faptul ca media aritmetica dintre a si b este egala cu media armonica dintre b si c si cu media geometrica dintre c si d.

Consecinte ale definitiei:

1) $d \neq 0$
2) Daca a=0 atunci b=3c si $d=\frac{9}{4}c$

Demonstratie:

1) Daca $d=0 \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=0 \Leftrightarrow \frac{2bc}{b+c}=0 \Rightarrow b=0$ sau c=0 (absurd), deci si $d \neq 0$
2) Daca a=0 $\Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cd} \Rightarrow b(b+c)=4bc \Rightarrow b^2=3bc \Rightarrow b=3c$

Din $\sqrt{cd}=\frac{b}{2}=\frac{3c}{2} \Rightarrow cd=\frac{9c^2}{4} \Rightarrow d=\frac{9}{4}c$.

In continuare vom prezenta o serie de proprietati remarcabile ale acestor numere si vom arata cum se pot gasi acestea.

PROPRIETATEA 1

Daca doua numere extreme sunt egale atunci toate patru sunt egale.

SOLUTIE:

Vom studia toate cazurile posibile:

1) a=d$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{ca}\Rightarrow$(a+b)^2=4ca si (a+b)(b+c)=4bc

Evident a+b$\neq$0 si impartind cele doua relatii obtinem :

$\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}\Rightarrow$b^2=ac$\Rightarrow$b=$\sqrt{ca}=\frac{a+b}{2}\Rightarrow$a=b$\Rightarrow$b=c. Deci a=b=c=d.

2) a=c$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{ad}\Rightarrow$a=b(deoarece daca media aritmetica a doua numere este egala cu media lor armonica cele doua numere sunt egale). Deci a=$\sqrt{ad}\Rightarrow$a=d (daca a=0 atunci c=0 absurd) si conform cu 1) avem a=b=c=d.

3) a=b$\Rightarrow$a=$\frac{2ac}{a+c}=\sqrt{cd}\Rightarrow$a^2=ac si cum a=b$\neq$0$\Rightarrow$a=c si conform cu 2) avem a=b=c=d

4) b=c$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2b^2}{2b}=\sqrt{bd}\Rightarrow$a=b=d.

5) b=d$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cb}\Rightarrow$b=c (deoarece media geometrica dintre b si c este egala cu media lor armonica) si din 4) avem a=b=c=d.

6) c=d$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}$=c$\Rightarrow$b=c si a=b.

PROPRIETATEA 2

Daca a,b,c,d sunt numere extreme atunci au loc inegalitatile:

i. a+b$\leq$c+d

ii. ab$\leq$cd

iii. a$\le$c

iv. b$\ge$d

v. c$\ge \frac{a+b}{3}$

DEMONSTRATIE:

Folosind inegalitatea mediilor avem:

Din $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{cd} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow$ ab$\le$cd

Din $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{cb} \Rightarrow \sqrt{cd} \le \sqrt{cb} \Rightarrow$ b$\ge$d

Din $\sqrt{cd} \le \frac{c+d}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \le \frac{c+d}{2} \Rightarrow$ a+b$\le$c+d

Din (a+b)($\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$)=4$\Rightarrow \frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{c}$=4$\Rightarrow \frac{a+b}{c}$=4-$\frac{a+b}{b}$=3-$\frac{a}{b} \le 3 \Rightarrow$a+b$\le$3c$\Rightarrow$

c$\ge \frac{a+b}{3}$

PROPRIETATEA 3

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu b$\ne$d atunci:

1) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{d}{b}$

2) $\frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

DEMONSTRATIE:

Din definitia numerelor extreme avem relatiile :

$(a+b)^2$=4cd si (a+b)(b+c)=4bc

Impartind cele doua relatii avem : $\frac{a+b}{b+c}=\frac{d}{b}$

Scazand relatiile avem (a+b)(a-c)=4c(d-b) $\Rightarrow \frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

PROPRIETATEA 4

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu c-a=b-d atunci a=b=c=d.

DEMONSTRATIE:

Din c-a=b-d avem a=c-b+d si inlocuind in definitia numerelor extreme avem:

$\frac{c-b+d+b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{cd} \Rightarrow \frac{c+d}{2} = \sqrt{cd} \Rightarrow$ c=d si din P1 avem a=b=c=d.

PROPRIETATEA 5

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu c-a=2(b-d) atunci a=b=c=d.

DEMONSTRATIE:

Din P3 avem (a+b)(a-c)=4c(d-b) si din ipoteza $\Rightarrow$2(a+b)(d-b)= 4c(d-b)

$\Rightarrow$d=b sau c= $\frac{a+b}{2} = \sqrt{cd}$ $\Rightarrow$c=d. In ambele situatii din P1 $\Rightarrow$ a=b=c=d.

CONSECINTE:

1) Daca a+b=c+d sau ab=cd unde a,b,c,d numere extreme strict pozitive atunci a=b=c=d.

2)Nu exista patru numere extreme in progresie aritmetica sau geometrica.

DEMONSTRATIE:

1) Din a+b=c+d $\Rightarrow$ c-a=b-d si din P4 $\Rightarrow$ a=b=c=d

Din ab=cd si din $\frac{a+b}{2} = \sqrt{cd} = \sqrt{ab} \Rightarrow$a=b $\Rightarrow$ a=b=c=d

2)Lasam ca exercitiu aceasta demonstratie care este evidenta folosind P2.

TEOREMA

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive si distincte doua cate doua atunci ($\exists$) p,q$\in$(0,+∞) cu p>$\frac{4q}{3}$ si p$\neq$2q astfel incat :

a=$\frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$ b=$\frac{p^2q}{(p-2q)^2}$ c=$\frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$ d=$\frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$.

DEMONSTRATIE:

Din P2 avem a<c si b>d (deoarece sunt distincte)

Sa notam c-a=p si b-d=q Evident p>0 si q>0.

Se observa ca p$\neq$2q deoarece in caz contrar am avea c-a=2(b-d) si din P5 avem a=b=c=d contradictie.

Sa mai aratam si ca p>$\frac{4q}{3}$ $\Leftrightarrow$3p>4q $\Leftrightarrow$3(c-a)>4(b-d)

Din P3 stim ca $\frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

Din P2 avem c$\geq\frac{a+b}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{4c}{a+b}\geq\frac{4}{3}$ si obtinem $\frac{a-c}{d-b}\geq\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow$3(c-a) $\geq$4(b-d)

Vom mai arata ca inegalitatea de mai sus este stricta , altfel daca 3(c-a)=4(b-d) obtinem c=$\frac{a+b}{3}$

Din (a+b)(b+c)=4bc $\Rightarrow$3c(b+c)=4bc$\Rightarrow$b=3c si cum a+b=3c am avea a=0(absurd).

In continuare avem c=a+p si b=d+q . Inlocuind pe c si b in relatiile din P3 obtinem: $\frac{a+d+q}{a+d+p+q}=\frac{d}{b}$ si prin calcul direct obtinem d=$\frac{aq+q^2}{p-q}$

Din a doua relatie din P3 avem $\frac{p}{q}=\frac{4(a+p)}{a+d+q}$ si prin calcul direct obtinem d=$\frac{a(4q-p)+3pq}{p}$ Egaland cele doua relatii obtinem a= $\frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$

In continuare inlocuind pe a obtinem d=$\frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$

Dar c=a+p=$\frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$ si b=d+q=$\frac{p^2q}{(p-2q)^2}$ prin calcul direct .

OBSERVATII:

Se pot construi oricat de multe astfel de numere , de exemplu daca luam p=5 si q=3 obtinem a=45 , b=75 , c=50 , d=72.

PROPUNEM CELOR INTERESATI SA GASEASCA SI ALTE PROPRIETATI INTERESANTE ALE ACESTOR NUMERE.

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. ianuarie 2010

BREVIAR TEORETIC CU EXEMPLE CONCRETE, PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ, clasa a VIII-a - 2010

Propunător: Prof. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU

Şcoala cu clasele I-VIII Măteşti, com. Săpoca, jud. Buzău

I. MULȚIMI

I.1 MULȚIMI; RELAȚII

Mulțimea e un ansamblu de obiecte, numite elemente, grupate fie prin indicarea tuturor elementelor, fie prin formularea unor proprietăți caracteristice lor şi numai lor.

Exemple:

1. C = {mulțimea caietelor şcolare}
2. M= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
3. E= {e, l, v elementele cuvântului elev}
4. D = {x/x este elev în clasa a VIII a}

Observație: un element într-o mulțime apare numai o singură dată.

Exemple:

1. $9 \in M; 12 \notin M$ se citeşte 9 **aparține** mulțimii M, respectiv 12 **nu aparține** mulțimii M
2. $e \in E, a \notin E$
3. $B = \{x / x \in N, x \leq 3\}$

Mulțimea care nu are nici un element se numeşte **mulțimea vidă**. Mulțimea vidă este notată cu Ø.

Observație. Există o singură mulțime vidă.

O mulțime A este **inclusă** într-o mulțime B dacă şi numai dacă fiecare element al lui A este element şi pentru mulțimea B.

Notație: A⊂B şi se citeşte „A este inclus în B”

$D \not\subset V$, şi citeşte „D nu este inclus în V”

O mulțime A este **submulțime** a mulțimii B dacă toate elementele lui A sunt şi în B, sau altfel A este inclus în B.

Mulțimea Ø este submulțime pentru oricare mulțime .

Exemple $P = \{1,2,3,4\}$; $Q = \{1,2,3\}$ $Q \subseteq P$

Două **mulțimi** sunt **egale** dacă au aceleaşi elemente.

Notație: $A = B$

I.2 OPERAȚII CU MULȚIMI

Intersecția

Mulțimea elementelor comune mulțimilor A şi B (fiecare element comun mulțimilor A şi B figurând o singură dată) se numeşte **intersecția** mulțimilor A şi B.

Astfel: $A \cap B = \{x / x \in A$ şi $x \in B\}$

Notație: $A \cap B$, şi se citeşte „intersecția mulțimilor A şi B”.
Exemple: $A = \{1,3,5,\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A \cap B = \{1,5\}$ (se iau elementele comune o singură dată).

Două **mulțimi** sunt **disjuncte** dacă intersecția lor este mulțimea vidă.
Exemple: $P = \{2,8,7\}$ iar $Q = \{1,3,5\}$ $P \cap Q = \phi$

Reuniunea

Mulțimea în care se află toate elementele mulțimilor A şi B, şi numai ale lor (fiecare element comun mulțimilor figurând o singură dată), se numeşte **reuniunea** mulțimilor A şi B.
Astfel: $A \cup B = \{x / x \in A$ sau $x \in B\}$
Notație: se citeşte „reuniunea mulțimilor A şi B”.
Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = 1,2,5\}$ atunci $A \cup B = \{1,2,3,5,\}$ (se iau toate elementele o singură dată).

Diferența

Mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A, dar care nu aparțin mulțimii B, se numeşte **diferența** dintre mulțimile A şi B.
Astfel: $A - B = \{x / x \in A$ şi $x \notin B\}$
Notație: $A - B$ sau A\B şi se numeşte „diferența mulțimilor A şi B”.
Exemple: $A = \{1,3,5\}$ iar $B = \{1,2,5\}$ atunci $A - B = \{3\}$.

I.3 MULȚIMI FINITE, MULȚIMI INFINITE

Observăm că există mulțimi vide şi mulțimi cu un număr finit de elemente, numite **mulțimi finite**.

Cardinalul unei mulțimi finite este numărul finit de elemente, numite mulțimi finite.
Exemple:

1. $A = \{2,4,6,8,\}$, vom scrie card $A = 4$
2. Dacă $A = \phi$, vom scrie card $A = 0$

O **mulțime infinită** este o mulțime pentru care şirul elementelor este nesfârşit.
Exemple:

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$={0, 1, 2, 4, ...}

$\mathbb{N}$* - mulțimea numerelor naturale nenule $\mathbb{N}$*={ 1, 2, 4, ...}

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{....,-2,-1,0,1,2,......\}$

$\mathbb{Q}$– mulțimea numerelor raționale (care pot fi scrise sub formă de fracție)

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale

Observație. Între mulțimile de mai sus, există relația: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

I.4 PROPOZIȚII

Un element a cărei valoare de adevăr este bazat pe reguli explicit exprimate se numeşte **propoziție**.

O propoziție se numeşte **propoziție adevărată** dacă ea exprimă un adevăr.
Exemple:
Oraşul Nehoiu se află în județul Buzău.
5X3=15

O **propoziție** se numeşte **falsă** dacă ea exprimă un neadevăr.
Exemple:
Municipiul Buzău este în Africa.
12 : 2 = 7
Notație: Cu A se notează o propoziție adevărată, iar cu F se notează o propoziție falsă şi se spune că **valoarea logică** sau **valoarea de adevăr** a unei propoziții este A sau F.

Operația de schimbare a valorii de adevăr a unei propoziții se numeşte **negarea** propoziției.

Exemple:
Oraşul Nehoiu nu se află în județul Buzău. (F)
$5 \cdot 3 \neq 15$ (F)
Municipiul Buzău nu este în Africa. (A)

I.5 MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Numerele naturale sunt reprezentate prin cifre sub forma următorului şir: 0,1,2,3, ..., 10,11, ...

Observație: Semnul „......”, indică faptul că am omis să scriem unele numere naturale. Nu putem scrie toate numerele naturale, după un număr natural urmează încă unul şi aşa mai departe.
Proprietate: Şirul numerelor naturale este infinit.
Observație: Numerele naturale se pot reprezenta pe o dreaptă.

O dreaptă pe care am fixat o origine, un sens şi o măsură, se numeşte **axa numerelor**.

I.5.1 Inegalitatea dintre numerele naturale

Vom spune că un număr natural a **este mai mare decât** un număr natural b şi vom scrie ***a* > *b*,** dacă există un număr natural c, diferit de numărul 0, astfel încât să avem $a = b + c$. Acest lucru se mai numeşte şi **inegalitate strictă**. Dacă avem două numere naturale a , b şi dorim a indica faptul că ‚a mai mare sau egal cu b’scriem $a \geq b$şi citim „a este mai mare sau egal cu b”. Acest lucru se mai numeşte inegalitate nestrictă.

Exemple:
2 mai mare ca 1, deoarece există c=1 care adunat cu 1 să fie egal cu 2.

Criterii de inegalitate a numerelor naturale:

1. Este mai mare numărul în care o cifră este mai mare decât cifra de acelaşi ordin din cel de-al doilea număr, cifrele de ordine superioară fiind egale două câte două.
2. Dintre două numere naturale, care au acelaşi număr de cifre, este mai mare acela care are mai multe cifre.

I.5.2 Scrierea numerelor naturale în baza 10

Orice număr natural admite o **descompunere în baza 10**.

Exemple:

$$5307 = 5000 + 300 + 7$$
$$= 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 =$$
$$= 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

În general, numărul $\overline{abcd}$, unde a, b, c, d, sunt cifre, cu $a \neq 0$, se scrie sub următoarea formă:

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \cdot 10^0$$

Membrul stâng al egalității de mai sus reprezintă scrierea unui număr natural în baza zece, iar membrul drept, scrierea aceluiaşi număr sub formă zecimală desfăşurată.

I.5.3 Operații cu numere naturale

<u>Adunarea</u>

Prin **suma** a două numere naturale a şi b numite **termenii** sumei se obține al treilea număr natural notat $s = a + b$.

Proprietățile adunării numerelor naturale:

1. Oricare ar fi numerele naturale a şi b avem: $a + b = b + a$ (**comutativitatea** adunării).
2. Oricare ar fi numerele a, b, şi c avem: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**asociativitatea** adunării).

3. există numărul natural 0 numit **element neutru** care nu modifică prin adunare valoarea oricărui număr natural.

Scăderea

Dacă a şi b sunt două numere naturale, astfel încât $a \geq b$, **diferenţa** dintre a şi b, notată prin $a-b$, este acel număr natural c, pentru care $a=b+c$. Termenul a se numeşte **descăzut** iar b se numeşte **scăzător**.

Înmulțirea

Produsul unui număr natural, diferit de 0 şi de 1, se exprimă printr-o sumă în care primul apare ca termen de atâtea ori de câte ori arată al doilea număr natural.

Excepții:

1. Produsul unui număr natural 0 este 0.
2. Produsul unui număr natural cu 1 este numărul natural considerat.

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

1. Oricare ar fi numerele naturale a şi b avem:
   $a \cdot b = b \cdot a$ **comutativitatea** înmulțirii
2. Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c avem:
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **asociativitatea** înmulțirii
3. Există numărul natural 1 numit **element neutru** care nu modifică prin înmulțire valoarea oricărui număr natural
4. oricare ar fi numerele a, b şi c avem: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ **distributivitatea înmulțirii față de adunare**.

Exemplu: $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$

5. Oricare ar fi numerele a, b şi c avem: $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$ **distributivitatea înmulțirii față de scădere**

Împărțirea

Operația inversă a înmulțirii, când se cunoaşte produsul şi trebuie aflat unul din factori e **împărțirea**. Semnul operației este „:”

Exemplu:

Deîmpărțit		**Împărțitor**		**Cât**
12	:	3	=	4

Observații:

1. Împărțirea nu are totdeauna rezultat în mulțimea numerelor naturale
   Exemplu: 7 nu se poate împărți exact la 3 (nu există $n \in N$ a.î $3 \cdot n = 7$)
2. **Împărțirea cu 0 nu este posibilă** deoarece nu există nici un număr natural care, înmulțit cu 0 să dea un număr diferit de 0.
3. Câtul dintre 0 şi un număr natural a, diferit de 0, este 0.

Teorema împărțirii cu rest a numerelor naturale Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b \neq 0$, există şi sunt unice două numere naturale q şi r astfel încât $a = b \cdot q + r$, unde $r < b$.

Puterea unui număr natural

Dacă a şi n sunt numere naturale, unde n este diferit de 0 şi 1; atunci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a .... a}_{\text{n factori}}$$

în care se numeşte **baza** puterii, iar n se numeşte **exponentul** puterii.
Exemplu: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
Excepţii:

1. orice număr natural ridicat la puterea 0 este 1
2. orice număr natural ridicat la puterea 1 este numărul însuşi.

Proprietăţile puterii numerelor naturale:
Dacă a, m, n sunt numere naturale, atunci:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$

I.5.4 Divizibilitatea numerelor naturale

Un număr natural a este **divizibil** cu un număr natural $b \neq 0$ dacă există un număr natural c, astfel ca $a = b - c$. Se mai spune că „a se divide cu b", „b se divide pe a" sau că „a este multiplu al lui b".
Notaţie:
b / a şi se citeşte „b divide pe a"
$a : b$ şi se citeşte „a este divizibil cu b"
Exemplu: 6 este divizibil cu 2, pentru că există 3 astfel încât $6 = 2 \cdot 3$

Toţi divizorii unui număr natural poartă denumirea de **mulţimea divizorilor** acelui număr natural.
Exemplu: Fie $n = 12$ $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$
Observaţie: Orice număr natural m are **divizori improprii** 1 şi m. Orice alt divizor este numit **divizor propriu**.
Proprietăţile ale divizibilităţii numerelor naturale

1. Orice număr natural este divizibil cu 1. Astfel: $1/a$ oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$
2. 0 este divizibil cu orice număr. Astfel: $a/0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$
3. Orice număr natural se divide cu el însuşi. Astfel: a/a oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$
4. Fie a şi b două numere naturale. Dacă a este divizibil cu b şi b este divizibil cu a, atunci $a = b$

Astfel: dacă a/b şi b/a, atunci $a = b$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$

5. Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă b se divide cu a, iar c se divide cu b atunci c se divide cu a.

Astfel: dacă a/b şi b/c, atunci a/c oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$
Exemplu: $2/6$ şi $6/12$, atunci $2/12$

6. Dacă un număr natural se divide cu un număr natural, atunci primul se divide cu toţi divizorii celui de-al doilea.

Exemplu: Numărul 24 se divide cu toţi divizorii lui 12 adică 1,2,3,4,6,12

7. Dacă fiecare termen al unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, atunci şi suma lor se divide cu acel număr natural. Dacă: m/a şi m/b, atunci $m/(a+b)$, oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$

Exemple: 12 se divide cu 3; 15 se divide cu 3
$12 + 15 = 27$ iar 27 se divide cu 3

8. Dacă unul dintre termenii unei sume de două numere naturale se divide cu un singur număr natural, iar celălalt termen m se divide cu acel număr natural, atunci suma nu se divide cu acel număr natural.

9. Fie a, b, m numere naturale, $a \geq b$. Dacă a se divide cu m şi b se divide cu m, atunci şi $a-b$ se divide cu m. Astfel:

   Dacă m/a şi m/b, atunci $m/(a-b)$ oricare ar fi $a,b,m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$

   Exemplu: Fie diferenţa $10-4$, $10 \geq 4$, 10 se divide cu 2, 4 se divide cu 2. Diferenţa $10-4=6$ se divide cu 2.

10. Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m, atunci produsul lui a cu orice număr natural se divide cu m.

Astfel: Dacă m/a, atunci m/ab, oricare ar fi $a,b.m \in \mathbb{N}$

Exemple: 6 se divide cu 2 $6 \cdot 7 = 42$ se divide cu 2

I.5.5 Criterii de divizibilitate

1. Criteriul de divizibilitate cu 10

- Un număr natural care are ultima cifră egală cu 0, se divide cu 10
- Un număr natural care are ca ultima sa cifră pe 0, se divide cu 2 şi 5

Exemple: 130 se divide cu 10 $130 \cdot 10 = 130$, deci se divide cu 2 şi 5; $65 \cdot 2 = 130$; $26 \cdot 5 = 130$

2. Criteriul de divizibilitate cu 2

- Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară, atunci acel număr se divide cu 2.

Exemplu: 220, 222, 224, 226, 228, se divid cu 2, deoarece au fiecare ultima cifră pară: 0, 2, 4, 6, 8.

3. **Criteriul de divizibilitate cu 5**.

- Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.

Exemplu: 435 se divide cu 5; 190 se divide cu 5.

4. **Criteriul de divizibilitate cu 4**.

- Dacă numărul format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 4, atunci numărul considerat este divizibil cu 4

Exemplu: 224 se divide cu 4 deoarece 24 se divide cu 4

5. Criteriul de divizibilitate cu 25

- Dacă numărul natural format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 25, atunci numărul considerat este divizibil cu 25.

Exemplu: 225 se divide cu 25, deoarece 25 se divide cu 25.

6. Criteriul de divizibilitate cu 3

- Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.

Exemplu: Numărul 47193 este divizibil cu 3, deoarece 4+7+1+9+3=24 şi $3/24$

7. Criteriul de divizibilitate cu 9

- Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr e divizibil cu 9

Exemplu: numărul 47160 este divizibil cu 9 deoarece 4+7+1+9+3=18, care se divide cu 9.

I.5.6 Numere prime

Se numeşte **număr prim** orice număr natural , diferit de 1, care are divizori numai pe 1 şi pe el însuşi.

Astfel: Se numeşte număr prim acel număr natural care are numai doi divizori.

De aici: Se numeşte **număr compus** numărul cu cel puţin 3 divizori.

Observaţie: Numărul 1 nu admite decât un singur divizor, deci el nu este nici prim şi nici număr compus.

Algoritm pentru a stabili dacă un număr este prim sau nu:

1. Împărţim numărul pe rând, la toate numerele prime în ordine crescătoare începând cu 2, până obţinem un cât mai mic sau egal cu împărţitorul. Dacă numărul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident că el nu este prim.

Tabel cu numere prime până la 1000

2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	567	677	809	919
11	79	167	263	367	463	583	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	-
59	139	233	337	439	557	653	769	883	-

I.5.7 Descompunerea numerelor naturale în factori primi (C.m.m.d.c. şi C.m.m.m.c.)

A descompune un număr natural în factori primi înseamnă a scrie acel număr ca produs de puteri ale căror baze sunt numere prime distincte.

De obicei, factorii se scriu în ordinea crescătoare a bazelor. Această scriere este unică.

Exemplu: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b, nu ambele nule este numărul natural care:

1. divide pe a şi pe b şi
2. este divizibil cu orice număr ce divide pe a şi pe b.

Acesta se notează cu (a; b).

Pentru a afla c m m d c al mai multor numere procedăm astfel:

- descompunem numerele în factori primi
- facem produsul factorilor primi comuni tuturor numerelor, cu exponenţii cei mai mici şi am obţinut c m m d c.

Observaţie: Dacă două sau mai multe numere naturale au c m m d c egal cu 1, atunci ele se numesc numere prime între ele.

Exemplu: (360; 2100; 1980) = ?

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$
$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$
$$360;2100;1980 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$(6;15;10) = 1$ deci $(6;15) = 3$ $(15;10) = 5$ şi $(6;10) = 2$

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b este numărul natural care:

1. este multiplu al lui a şi al lui b şi
2. divide orice alt multiplu al numerelor a şi b

C.m.m.m.c. al numerelor naturale a şi b se notează $[a;b]$

Observaţie: $[a;0] = 0$, oricare ar fi numărul natural a

Exemple: $[3;5] = 15$, $[6;2] = 6$, $[8;14] = 56$

Pentru a afla c.m.m.m.c. al mai multor numere procedăm astfel:

- descompunem numerele date în factori primi
- luăm toți factorii primi o singură dată, cu exponenții cei mai mari care apar în descompuneri. Produsul lor este c.m.m.m.c.

I.6 MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Numerele întregi reprezintă un şir de forma:
....., -11, -10 .., -2, -1, 0, 1, 2, ..., 10, 11, ...
unde prin semnul „-„ am însemnat numerele negative.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu ℤ. Evident, ℕ⊂ℤ.

I.6.1 Valoarea absolută: Orice număr negativ (-a) are **valoarea absolută** (**modulul**)a, iar orice număr întreg pozitiv a are valoarea absolută a sau dacă a este 0, atunci modulul este 0.
Astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, dacă \quad a \in Z, a \geq 0 \\ -a, daca \quad a \in Z, a < 0 \end{cases}$$

Exemple: $|2| = 2$ $|3| = 3$ $|0| = 0$

1. Modulul unui număr întreg este un număr negativ: $|a| \geq 0$
2. $|-a| \geq |a|$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$

I.6.2 Operații cu numere întregi

<u>Adunarea</u>

Fie a, b două numere întregi. Se spune că $S = a + b$ este **suma** celor două numere şi ea este tot un număr întreg.

Valoarea lui S se obține astfel:

Cazul I $a, b \geq 0$, deci termenii sumei sunt numere întregi şi pozitive $S = a + b$, adunându-le şi două numere naturale

Exemple: $2 + 3 = 5$ $4 + 7 = 11$

Cazul II.a, b <0, deci termenii sumei sunt numere negative $3 = -d$ unde $d = |a| + |b|$

Exemplu: $-2 - 3 = -5$ $-4 - 7 - 11$

Cazul III $a \geq 0$, b < 0, deci un termen pozitiv iar celălalt negativ:

Dacă: $|a| = |b|$ atunci $S = 0$

$|a| \neq |b|$, atunci se calculează d ca fiind diferența dintre cel mai mare număr în modul şi cel mai mic iar $s = d$ dacă numărul al cărui modul este mai mare este pozitiv, sau $s = -d$ dacă numărul al cărui modul este mai mare este negativ

Exemple: $-4 + 8 = 4$; $9 - 7 = 2$; $-109 + 11 = -98$ $12 - 23 = -11$

<u>Înmulțirea</u>

Prin **înmulțirea** a două numere întregi a şi b se obține un al treilea număr întreg notat $p = a \cdot b$ sau $p = a \times b$ numit produsul numerelor întregi a şi b.

Semnul numărului p este :

$+$ (plus) dacă numerele a şi b au acelaşi semn

$-$(minus) dacă numerele a şi b au semn contrar

ex:

$(-1) \cdot (-5) = 5$

$(-1) \cdot 5 = -5$

$1 \cdot 5 = 5$

$1 \cdot (-5) = -5$

I.6.3. Divizibilitatea la numere întregi

Un număr întreg a este **divizibil** cu un număr întreg b dacă există un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$.

Obs: în raport cu divizorii unui număr natural se adaugă şi numerele cu semnul $-$(negative).

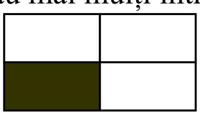
ex: divizorii lui 6 sunt: -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6

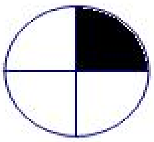
divizorii lui 11 sunt: -11, -1, 1, 11.

I. 7. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

O **fracție** reprezintă una sau mai multe părți dintre părțile egale în care a fost împărțit un întreg (sau mai mulți întregi identici)

ex: $\frac{1}{4}$:





O **fracție** se numeşte (sau fracția $\frac{a}{b}$ cu $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$ este):

-**subunitară**, dacă numărătorul e mai mic decât numitorul ($a < b$) ex: $\frac{2}{5}$

-**echiunitară**, dacă numărătorul este egal cu numitorul ($a = b$) ex: $\frac{3}{3}$

-**supraunitară**, dacă numărătorul este mai mare decât numitorul ($a > b$) ex: $\frac{7}{2}$

Fracții echivalente: Fie a, b, c, d$\in\mathbb{Z}$, $b \neq 0, d \neq 0$. Fracțiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ se numesc **echivalente** dacă şi numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

ex: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ pentru că $2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$

O fracție $\frac{a}{b}$ cu a $\in\mathbb{Z}$, b$\in\mathbb{Z}^*$se numeşte **ireductibilă** atunci când numitorul şi numărătorul sunt numere prime între ele, adică c.m.m.d.c. al lor este 1.

ex: $\frac{15}{7}$; $\frac{21}{25}$

Numerele reprezentate printr-un raport de două numere întregi a, b cu forma $\frac{a}{b}$ cu $b \neq 0$ reprezintă mulțimea tuturor numerelor de forma dată mai sus şi formează **mulțimea numerelor raționale**, care se notează cu $\mathbb{Q}$.

Un număr rațional poate fi reprezentat pe o axă a numerelor ocupând o poziție în raport de valoarea sa.

I.7.1. Egalitatea numerelor raționale

Două **numere raționale** notate cu $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ sunt **egale** dacă fracțiile $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ sunt fracții echivalente adică dacă $m \cdot b = n \cdot a$.

Relația de egalitate în domeniul numerelor raționale are proprietățile:

1. Reflexivitatea egalității:

   $\forall$ a$\in\mathbb{Q}$ avem $a = a$
2. Simetria egalității:

   $\forall$a, b$\in$ $\mathbb{Q}$, dacă $a = b$ atunci $b = a$
3. Tranzitivitatea egalității:

   $\forall$a, b, c $\in\mathbb{Q}$, dacă $a = b$ şi $b = c$, atunci $a = c$.
4. Relația de egalitate în domeniul numerelor raționale având proprietățile de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate este o relație de echivalență.

I.7.2. Operații cu numere raționale

Adunarea

Suma a două numere raționale $\frac{m}{n} si \frac{a}{b}$ este dată de fracția $\frac{mb+na}{nb}$.

ex:

$$\frac{-5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{(-5)\cdot 3+2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{-15+4}{6}=\frac{-11}{6}$$

$$\frac{-7}{4}+\frac{4}{-3}=\frac{(-7)(-3)+4\cdot 4}{4\cdot(-3)}=\frac{-21+16}{-12}=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}$$

Adunarea numerelor raționale are următoarele proprietăți

1. Comutativitatea adunării:

   $\forall$ a, b $\in\mathbb{Q}$, atunci $a+b=b+a$
2. Asociativitatea adunării:

   $\forall$ a, b, c $\in\mathbb{Q}$, atunci $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Există elementul 0 numit element neutru cu proprietatea că:

   $\forall$a$\in\mathbb{Q}$, atunci $a+0=0+a=a$
4. Există elementul opus oricărui număr rațional a, notat cu $-a$ astfel incat:

   $\forall$a$\in\mathbb{Q}$,$\exists$−a$\in\mathbb{Q}$ a.î. $a+(-a)=(-a)+a=0$

Scăderea

Oricare ar fi numerele raționale a şi b avem $a-b=a+(-b)$. Astfel, dacă dorim să scădem dintr-un număr rațional a un alt număr rațional b, adunăm la numărul rațional a opusul numărului b adică $(-b)$

ex: $7-3=7+(-3=4)$

Obs:

1. Operația de scădere se poate efectua între oricare ar fi aceste numere raționale
2. Oricare ar fi un număr rațional avem: $a-0=a$, $0-a=-a$
3. Oricare ar fi a,b,c numere raționale, dacă avem $a=b$, avem: $a-c=b-c$
4. Oricare ar fi a,b,c,d numere raționale, dacă $a=b$ şi $c=d$, avem: $a-c=b-d$

Înmulțirea

Prin **produsul** a două numere raționale $\frac{m}{n}$ şi $\frac{a}{b}$ se obține un al treilea număr rațional notat cu c astfel: $c=\frac{m\cdot a}{n\cdot b}$

ex:

$$\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{-10}{21}$$

$$\frac{2}{-5}\cdot\frac{-1}{11}=\frac{2\cdot(-1)}{(-5)\cdot 11}=\frac{-2}{-55}=\frac{2}{55}$$

Proprietățile înmulțirii numerelor raționale:

1. Comutativitatea înmulțirii:
   $\forall$a, b$\in\mathbb{Q}$ atunci $a\cdot b=b\cdot a$
2. Asociativitatea înmulțirii:
   $\forall$a, b, c$\in\mathbb{Q}$,atunci $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
3. Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
   $\forall$a, b, c$\in\mathbb{Q}$, avem $a\cdot(b\cdot c)=ab+ac$
4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că:
   $\forall$a $\in\mathbb{Q}$,atunci $a\cdot 1=1\cdot a=a$
5. Există elementul invers oricărui număr rațional a notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$

Obs:

1. Oricare ar fi a rațional avem:
   $$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$$
2. Oricare ar fi a,b,c raționale, dacă $a=b$ atunci $a\cdot c=b\cdot c$
3. oricare ar fi a,b,c,d raționale, dacă $a=b$, $c=d$ atunci $a\cdot c=b\cdot d$

Împărțirea

Prin **câtul** a două numere raționale $\frac{m}{n}$ și $\frac{a}{b}$ cu $a,b,n\neq 0$ se obține un al treilea număr rațional notat c astfel: $c=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}$ deci se înmulțeşte deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.

ex: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$

Proprietățile împărțirii numerelor raționale

1. Oricare ar fi a număr rațional, avem: $a:1=\frac{a}{1}=a$
2. Oricare ar fi a rațional, avem: $1:a=\frac{1}{a}=a^{-1}$

I.8 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Mulțimile de numere cunoscute sunt:

$\mathbb{N}$={0, 1, 2, 3, ...} -numerele naturale

$\mathbb{Z}$={... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} -numerele întregi

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z-\{0\}\right\}$-numerele raţionale

Mulţimea **numerelor reale** reprezintă reuniunea dintre mulţimea numerelor raţionale şi cele iraţionale, notată cu $\mathbb{R}$.

Este evident că toate mulţimile studiate sunt submulţimi ale mulţimii numerelor reale: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

Mulţimea numerelor iraţionale se obţine prin $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Obs:

1.Din punct de vedere geometric, mulţimea numerelor reale reprezintă o dreaptă căreia i se asociază un punct numit origine corespunzător valorii 0 şi un sens de parcurgere corespunzător numerelor pozitive, iar sensul opus corespunzător numerelor negative.

2.Mulţimea numerelor reale este infinită în ambele sensuri: pozitivă şi negativă $(-\infty,\infty)$, unde:

$-\infty$ se citeşte „ minus infinit”

$+\infty$ se citeşte „plus infinit” sau infinit

I.8.1 Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$

Oricum am alege două numere a şi b reale, există cel puţin una din relaţiile $a>b$ sau $a\le b$, astfel, oricare două numere reale pot fi comparate.

Astfel ($\mathbb{R}$, $\le$) este o mulţime total ordonată în raport cu relaţia de ordine „$\le$” (mai mic sau egal).

Proprietăţile relaţiei „$\le$”:

1. Oricare ar fi a $\in\mathbb{R}$, avem $a\le a$
2. Oricare ar fi a, b$\in\mathbb{R}$, dacă $a\le b$ şi $b\le a$, atunci $a=b$
3. Oricare ar fi a, b, c $\in\mathbb{R}$, dacă $a\le b$ şi $b\le c$, atunci $a\le c$
4. Relaţia de ordine este compatibilă cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale în sensul că:
    1) Dacă a, b, c $\in\mathbb{R}$ şi $a\le b$, atunci $a+c\le b+c$ şi reciproc
    2) Dacă a, b, c $\in\mathbb{R}$ şi $a\le b$, atunci: $a\cdot c\le b\cdot c$ dacă $c>0$ şi $a\cdot c\ge b\cdot c$ dacă $c<0$ şi reciproc
5. Dacă a, b, c, d $\in\mathbb{R}$ şi $a\le b$, $c\le d$ atunci: $a+c\le b+d$

I.8.2. Valoarea absolută, valoare maximă, valoare minimă; partea întreagă şi partea fracţionară

Numărul pozitiv notat |x| reprezintă **valoarea absolută** a numărului real x şi este definit astfel:

$$|x|=\begin{cases}x, x\ge 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

ex: $|-7|=7$ $|3|=3$ $|0|=0$

Obs:

1. Valoarea absolută se mai numeşte şi **modulul** numărului respectiv
2. Din punct de vedere geometric, valoarea absolută semnifică distanţa pe axa reală dintre cele două numere

Fie a, b $\in \mathbb{R}$,atunci prin max (a,b) notăm **maximul** dintre numerele reale a şi b definit astfel:

max $(a,b)=\begin{cases} a, daca\ a \geq b \\ b, daca\ a < b \end{cases}$

ex: max $(-2,-3)=-2$

max $(-5,|5|)=|5|=5$

Fie a, b $\in \mathbb{R}$, atunci prin min (a,b) notăm **minimul** dintre numerele reale a şi b definit astfel: $\min(a,b)=\begin{cases} a, daca\ a \leq b \\ b, daca\ a > b \end{cases}$

I.8.3 Intervale de numere reale

Fie a şi b numere reale cu $a \leq b$

Notăm cu $[a;b]$ mulțimea {x$\in \mathbb{R}$ |a$\leq x \leq$b}. Acest interval se numeşte **interval închis** cu extremitățile a, b.

Notăm cu $(a;b)$ mulțimea {x$\in \mathbb{R}$| a$<x<$b} Acest interval se numeşte **interval deschis** cu extremitățile a, b.

Obs. Intervalele deschise spre deosebire de cele închise nu-şi conțin extremitățile.

ex. $[-1;4]=(-1;4)\cup\{-1;4\}$

Notăm cu $(a,b]$ mulțimea {x$\in \mathbb{R}$|a$<x\leq$b}. Acest interval se numeşte **interval semideschis** cu extremitățile a, b deschis la stânga şi închis la dreapta.

Notăm cu $[a,b)$ mulțimea {x$\in \mathbb{R}$|a$\leq x<$b}.. Acest interval se numeşte interval semideschis cu extremitățile a,b, închis la stânga şi deschis la dreapta.

Intervalele de forma: $(a;b);[a;b];[a,b);(a,b]$ cu a şi b date explicit se numesc intervale mărginite.

Intervalele de forma:

$(a;+\infty)$ adică mulțimea $\{x|x\in \mathbb{R},\ x>a\}$

$(-\infty;a]$ adică mulțimea $\{x|x\in \mathbb{R},\ x\leq a\}$

$[a,+\infty)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in \mathbb{R},\ x\geq a\}$

$(-\infty,a)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in \mathbb{R},\ x<a\}$

$(-\infty,+\infty)$ adică mulțimea $\{x \mid x\in \mathbb{R}\}$

se numesc **intervale nemărginite.**

Fie a$\in \mathbb{R}$.

A={x$\in \mathbb{R}$ / $|x|$<a}=(-a, a)

B={x$\in \mathbb{R}$ / $|x|\leq$ a}=[-a, a]

C={x$\in \mathbb{R}$/ x>a} = (-∞, -a) $\cup$ (a, ∞)

D={x$\in \mathbb{R}$/ $x\geq$a} = (-∞, -a] $\cup$ [a, ∞)

Obs: Intervalele sunt mulțimi asupra cărora se pot aplica toate operațiile studiate în capitolul mulțimi, ca rezultat obținându-se tot intervale de numere reale sau mulțimi vide.

I.8.4.Operații cu numere reale

Adunarea

Prin adunarea a două numere reale se obține un al treilea număr real notat cu $s = a + b$ unde s reprezintă **suma**, iar a şi b termenii sumei.

Proprietățile adunării numerelor reale:

1. Comutativitatea: $a + b = b + a$, a, b $\in \mathbb{R}$
2. Asociativitatea: $(a+b)+c = a+(b+c)$, a, b, c $\in \mathbb{R}$
3. Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, a$\in \mathbb{R}$
4. Există elementul opus: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Astfel se poate defini scăderea:

Prin scăderea a două numere reale a, b se obține un al treilea număr natural numit **diferență** iar a scăzător şi b descăzut, definit astfel: $d = a - b = a + (-b)$

Inmulțirea

Prin înmulțirea a două numere reale a, b numiți **factori** se obține un al treilea număr real p numit **produs** şi definit astfel: $p = a \cdot b$

Proprietățile produsului numerelor reale:

1. Comutativitatea: oricare a, b $\in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$
2. Asociativitatea: oricare a, b, c $\in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Distributivitatea față de adunare: oricare a, b, c $\in \mathbb{R}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Există elementul 1 numit element neutru cu proprietatea că oricare a $\in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1$
5. Există elementul invers oricărui număr real notat cu $\frac{1}{a}$ astfel: oricare a $\in \mathbb{R}$, există- a $\in \mathbb{R}$ astfel încât $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg:

Dacă a este un număr real, iar n un număr natural astfel încât $n \neq 0$ şi $n \neq 1$ atunci: $a^n = \underbrace{a \cdot a........a}_{n \quad ori}$, unde a este baza iar n exponentul

Obs:

1. Oricare ar fi a$\in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$
2. Oricare ar fi a$\in \mathbb{R}^*$, $a^1 = a$

Proprietăți :

1. Dacă a$\in \mathbb{R}$ şi m, n $\in \mathbb{R}$, atunci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Dacă a$\in \mathbb{R}$ şi m, n $\in \mathbb{R}$, atunci $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. Puterea produsului este egală cu produsul puterilor $(a_1 \cdot a_2......a_i)^n = a_1^n \cdot a_2^n......a_i^n$,oricare a_1, a_2, ..., a_n $\in \mathbb{R}$, n$\in \mathbb{R}$
4. Dacă a $\in \mathbb{R}^*$, m, n $\in \mathbb{R}$, atunci $a^m : a^n = a^{m-n}$
5. Dacă a $\in \mathbb{R}^*$, n $\in \mathbb{R}$ atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Partea întreagă a unui număr real x, notată $[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

$x-[x]$ se notează cu $\{x\}$ şi se numeşte **partea fracţionară** a lui x. $\{x\}=x-[x]$

Exemplu:

$[2,3]=2$

$[-4,37]=-5$

$[-4,37]=-4,37-(-5)=6,63$

$\{2,3\}=0,3$

Observaţie:

1) Dacă k∈ℝ, x∈ℝ şi $k \le x < k+1, [x]=k$
2) $0 \le \{x\} < 1$ oricare ar fi x∈ℝ
3) Dacă $\{x\} < 0,5$, atunci rotunjirea la unităţi a lui x este $[x]$.
4) Dacă $0,5 \le \{x\}$, atunci rotunjirea la unităţi a lui x este $[x]+1$

I.9 PUTERI ŞI RADICALI

I.9.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Puterea a doua a unui număr natural se mai numeşte şi pătratul acelui număr. Numărul natural care este pătratul altui număr natural se numeşte **pătrat perfect**.

Exemplu:

1) $49=7^2$
2) $5^{26}=\left(5^{13}\right)^2$
3) $a^{2k}=\left(a^k\right)^2$

Teoremă: Pătratul oricărui număr natural se termină numai cu una din cifrele $0,1,4,5,6,9$.

I.9.2 Rădăcina pătrată a unui număr raţional pozitiv

Pătratul unui număr raţional este totdeauna pozitiv sau zero (adică negativ).

Fie a un număr raţional negativ $(a \ge 0)$. Numărul negativ x se numeşte rădăcina pătrată a numărului a dacă $x^2=a$.

Notăm **rădăcina pătrată** a numărului a cu $\sqrt{a}$. Atunci:

1) $a \ge 0$ şi $\sqrt{a}=x$ înseamnă $x^2=a$ şi $x \ge 0$
2) $\left(\sqrt{a}\right)^2=a, \quad a \ge 0$

I.9.3 Proprietăţile radicalilor

Numerele iraţionale nu pot fi explicit scrise cu orice precizie şi din această cauză se preferă a fi lăsate sub forma $\sqrt{2},\sqrt{3}$ numită notaţie cu **radicali**. Radicalii au câteva proprietăţi remarcabile:

1. Radicalii se înmulţesc astfel: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}, \quad unde \quad a,b \ge 0$

Exemplu: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=6$

2. Radicalii se împart

astfel: $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}, \quad unde \quad a\geq 0, b>0 \quad sau \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b,}}, unde \quad a\geq 0, b>0$

Exemplu: $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

3. Dacă a $\in\mathbb{R}^*$avem $|a|=a$ şi deci $\sqrt{a^2}=a$

Exemplu:
$$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{180}=\sqrt{4\cdot 9\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}=2\cdot 3\cdot\sqrt{5}=6\sqrt{5}$$

Observație: Proprietatea 3 este adevărată şi reciproc atunci când dorim a introduce sub radicali anumiți termeni.

Exemplu: $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$

Numim operație de **raționalizare** a numitorului unei fracții, care conține la numitor radicali, amplificarea acestuia astfel ca numitorul să nu mai conțină radicali. Astfel pentru:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b} \quad am \quad amplificat \quad cu \quad \sqrt{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y} \quad am \quad amplificat \quad cu \quad \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

I.9.4 Ordinea efectuării operațiilor

1) Adunarea şi scăderea sunt numite operații de ordinul I
2) Înmulțirea şi împărțirea sunt numite operații de ordinul II
3) Ridicarea la putere şi radicalii sunt numite operații de ordinul III

Ordine de efectuare:

A. Dacă în expresie nu există paranteze, iar operațiile sunt de acelaşi ordin, ele se efectuează de la stânga spre dreapta.

B. Dacă în expresie nu există paranteze, iar operațiile nu sunt de acelaşi ordin, prima dată se efectuează operațiile de ordin III, iar apoi de ordin II şi ultimele operațiile de I.

C. Dacă în expresie există paranteze ,se efectuează prima dată operațiile dintre paranteze, acolo unde este posibil.

I.9.5 Medii

Media aritmetică a două sau mai multe numere reale este numărul real obținut prin împărțirea sumei numerelor respective la numărul lor.

Pentru numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \quad avem:$

$$m_a=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

Exemplu: pentru 2,5,8: $m_a=\dfrac{2+5+8}{3}=\dfrac{15}{3}=5$

Media geometrică sau **proporțională** a două numere negative este egală cu rădăcina pătrată din produsul lor.

$$a\geq 0, \quad b\geq 0 \qquad m_g=\sqrt{a\cdot b}$$

Media geometrică a două numere negative este cuprinsă între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele respective

Dacă $0 \le a \le b, \quad atunci \quad a \le \sqrt{a \cdot b} \le b$

Exemplu: pentru 2,8 $\quad m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

Media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, ...a_n$ cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$ (pozitive) este:

$$m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + ... + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Exemplu: pentru $2\sqrt{5}$ şi $3\sqrt{2}$ cu ponderile 2 şi 5 $m_p = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2 + 3\sqrt{2} \cdot 5}{2+5} = \dfrac{4\sqrt{5} + 15\sqrt{2}}{7}$

I.9.6. Rapoarte şi proporţii

Numărul raţional $a : b$, unde a şi b sunt numere raţionale şi $b \neq 0$, se numeşte **raportul** numerelor a şi b şi se notează prin $\dfrac{a}{b}$ (a şi b se numesc termenii raportului).

Exemplu: $\dfrac{5,4}{2,8}; \dfrac{2\frac{1}{4}}{5\frac{1}{2}}$

Egalitatea a două rapoarte se numeşte **proporţie**: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

O proporţie are 4 termeni: 2 mezi (b şi c) şi 2 extremi (a şi d).

Proprietate: Proprietatea fundamentală a proporţiei:

Fie $a, c \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \quad şi \quad b, d \in \mathbb{Q}$:

Dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, atunci $a \cdot d = b \cdot c$ şi reciproc, dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Exemplu:

din $\dfrac{2,5}{6} = \dfrac{7,5}{18} \Rightarrow 2,5 \cdot 18 = 6 \cdot 7,5$

din $7 \cdot 9 = 21 \cdot 3 \Rightarrow \dfrac{7}{3} = \dfrac{21}{9}$

Dacă într-o proporţie se cunosc trei din cei patru termeni, îl putem afla pe al patrulea astfel:

un extrem$= \dfrac{produsul \quad mezilor}{celălalt \quad extrem}$

un mez$= \dfrac{produsul \quad extremilor}{celălalt \quad mez}$

Exemplu:

1) $\dfrac{x}{10} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = \dfrac{4 \cdot 10}{5} = 8$

2) $\dfrac{3}{7} = \dfrac{x}{11} \Rightarrow x = \dfrac{3 \cdot 11}{7} = \dfrac{33}{7}$

Două mărimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă măsura uneia creşte (descreşte) de un număr de ori, atunci şi măsura celeilalte creşte (descreşte) de acelaşi număr de ori, se numesc mărimi **direct proporţionale**.

M1	a	b
M2	c	d

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad sau \quad a\cdot d=b\cdot c \quad sau \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Două mărimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă măsura uneia creşte (descreşte) de un număr de ori, atunci măsura celeilalte descreşte (creşte) de acelaşi număr de ori, se numesc mărimi invers proporţionale.

Mărimile $M_1 \quad si \quad M_2$ sunt **invers proporţionale** dacă:

M1	a	b
M2	c	d

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c} \quad sau \quad a\cdot c=b\cdot d \quad sau \quad \frac{a}{\frac{1}{c}}=\frac{b}{\frac{1}{d}}$$

Numărul p din proporţia $\frac{a}{b}=\frac{p}{100}$ se numeşte **procent** şi reprezintă cât la sută din numărul $b\neq 0$ este numărul a sau cât la sută este a din b; $p=(a\cdot 100):\text{b}$.

Se scrie p urmat de semnul „%” şi se citeşte „p la sută”.

Exemplu: 25 este 4% din 625 deoarece $\frac{25}{625}=\frac{4}{100}$

Pentru a afla p% dintr-un număr se înmulţeşte numărul cu $\frac{p}{100}$: p% din a este $\frac{p}{100}\cdot a$

Dacă p% din x este a, atunci $\frac{p}{100}\cdot x=a$, deci $x=a:\frac{p}{100}=a\cdot\frac{100}{p}$

Exemplu: 5% din 20 este $\frac{5}{100}\cdot 20=\frac{1}{20}\cdot 20=1$

Calculul **probabilităţii** de realizare a unui eveniment: Dacă: p este probabilitatea realizării evenimentului, m- numărul cazurilor favorabile; n- numărul cazurilor posibile, atunci: $p=\frac{m}{n}$

II CALCULALGEBRIC

II.1 Reguli de calcul prescurtat

1. $ab+ac=a(b+c)$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
5. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
6. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
8. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
9. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
10. $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$
11. $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$
12. $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

II.2 Inegalități

O **inegalitate** reprezintă o relație matematică adevărată sau falsă care se stabileşte între două expresii matematice. În general, cu inegalitățile se respectă următoarele reguli specifice:

A. Dacă a,b,c sunt numere reale astfel încât $a < b$, atunci $a + c < b + c$

B. Dacă a,b,c sunt numere reale astfel încât $a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac < bc$

C. Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac > bc$

D. Dacă înmulțim ambii termeni ai unei inegalități cu un număr negativ, sensul inegalității se schimbă (se inversează).

Observație: Regulile A,B,C,D sunt valabile şi dacă înlocuim semnul < cu $\leq$, respectiv > cu $\geq$.

Exemplu: -6 < 7

-Prin urmare la ambii membri cu 5 : -1 < 13adevărat

-Prin înmulțire cu 2: -12 < -14 adevărat

-Prin înmulțire cu -2 12 > -14 adevărat

II.3. Calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Produsul dintre un număr real şi o sumă algebrică se efectuează înmulțind acest număr cu fiecare termen al sumei, respectând regula semnelor de la înmulțire, după care se adună noii termeni astfel obținuți.

Exemplu:

$$k(a + b - c) = ka + kb - kc$$

$$-k(-a + b - c) = ka - kb + kc$$

Produsul dintre două sume algebrice se efectuează înmulțind fiecare termen al unei sume cu fiecare termen al celei de-a doua şi însumând noii termeni astfel obținuți.

Exemplu:

$$(a + b - c)(d - e) = ad - ae + bd - be - cd + ce$$

III. FUNCȚII

Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca oricărui element din mulțimea A să-i corespundă un singur element dintr-o altă mulțime B, spunem că am definit o **funcție** de la A la B.

A se numeşte **mulțimea** (domeniul) **de definiție** a funcției.

B se numeşte mulțimea în care funcția ia valori (codomeniul).

Procedeul se numeşte lege de corespondență

Notație : f:A→B citit “f definit pe A cu valori în B”

Exemplu: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+3$

Observație : Pentru a caracteriza o funcție trebuie date trei elemente :

1) mulțimea de definiție ;

2) legea de corespondenţă ;
3) mulţimea în care ia valori ;

Două **funcţii** sunt **egale** dacă:
1) au aceeaşi mulţime de definiţie
2) $f(x)=g(x)$ pentru orice element din mulţimea de definiţie ;
3) iau valori în aceeaşi mulţime.

Mulţimea de puncte având coordonatele în plan (x,y), unde x este un element din mulţimea de definiţie A, iar $y=f(x)$ se numeşte **graficul** funcţiei f.

O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ descrisă de o lege de forma $f(x)=$ ax+b , unde a şi b sunt constante reale, se numeşte **funcţie liniară**.
Observaţie: Graficul unei funcţii liniare este o dreaptă.
Pentru **reprezentarea grafică a unei funcţii** liniare urmărim algoritmul :
1) Se calculează $f(0)$=b. Se reprezintă punctul (0,b). Acest punct reprezinţă punctul de intersecţie dintre graficul funcţiei şi axa ordonatelor Oy.
2) Se rezolvă ecuaţia ax+b=0. Se reprezintă punctul $(\frac{-b}{a},0)$ .Acest punct reprezintă punctul de intersecţie dintre graficul funcţiei şi axa absciselor Ox.
3) Se trasează dreapta care uneşte cele două puncte obţinute şi astfel se trasează graficul funcţiei liniare $f(x)=$ ax+b.

Observaţii :
1) Dacă a=0 şi b$\neq$0 obţinem funcţii de genul $f(x)$=b ale căror grafice sunt paralele cu axa Ox. Aceste funcţii se numesc constante nenule.
2) Dacă a$\neq$0 şi b=0, se obţin funcţii de forma $f(x)$=ax , funcţii care trec prin originea sistemului de axe.
3) Pentru a=b=0, se obţine ca grafic chiar axa absciselor Ox.

Proprietăţi ale funcţiilor liniare :
Fie funcţia f:A$\to$B definită printr-o relaţie $f(x)$.
Proprietatea 1: Dacă pentru oricare ar fi r,s$\in$A cu $r>s$, avem $f(r)>f(s)$ şi spunem că funcţia este **strict crescătoare**
Proprietatea 2: Dacă pentru oricare ar fi r,s$\in$A cu $r>s$, avem $f(r)<f(s)$ şi spunem că funcţia este **strict descrescătoare**.
Observaţie: În general, o funcţie descrisă de legea $f(x)=$ ax+b poate fi:
- strict crescătoare dacă $a>0$,
- constantă dacă a=0,
- strict descrescătoare dacă $a<0$.

IV.ECUAŢII ŞI INECUAŢII

O **ecuaţie** este o propoziţie cu o variabilă (propoziţiile cu o singură variabilă se mai numesc şi predicate) în care apare , o singură dată semnul de egal.
Exemplu: 2x-1=5 cu $x\in\{0,2,3,5\}$

$$\frac{2x+3}{2x^2-1}=1; x\in R$$

O ecuație cu o necunoscută are forma generală: S(x)=D(x), $x\in$M; necunoscuta fiind x, iar S şi D se numesc membrul stâng şi respectiv membrul drept al ecuației, iar M este mulțimea soluțiilor ecuației.

Observații:

1. Orice valoare din mulțimea M poate fi înlocuită în ecuație şi se poate obține o propoziție adevărată sau falsă. Dacă propoziția obținută este adevărată atunci valoarea respectivă este **soluție** a ecuației.
2. Prin rezolvarea ecuației înțelegem găsirea tuturor soluțiilor ecuației, din mulțimea M.

Exemplu: din $2x$-1=5, $x\in\{0,2,3,5\}$ prin înlocuirea lui x obținem o propoziție adevărată doar pentru x=3.

Două **ecuații** sunt **echivalente** dacă au aceleaşi soluții .

Notație : "$\Leftrightarrow$" semnul echivalenței dispus între două ecuații, adică : S(x)=D(x) $\Leftrightarrow$ $S'(x)=D'(x)$

Există o serie de proprietăți pe care ne bazăm în rezolvare şi pe care folosindu-le obținem ecuații echivalente şi astfel găsim mulțimea de soluții ale ecuației.

Proprietate : Adunând la (sau scăzând din) ambii membri ai unei ecuații acelaşi număr real obținem o ecuație echivalentă cu prima.

Consecință : Se pot trece termenii unei ecuații din membrul stâng în membrul drept şi invers schimbând doar semnul termenului.

Exemplu : $3x+1=2x+1 \mid +(-1) \Leftrightarrow 3x=2x$

Proprietate : Înmulțind (sau împărțind) ambii membri ai unei ecuații cu acelaşi număr real, diferit de zero, se obține o ecuație echivalentă.

Exemplu : $4x-2=5 \mid 2 \Leftrightarrow 8x-4=10$

Proprietate : O ecuație este nedeterminată dacă există mai mult de o valoare din mulțimea M care generează propoziții adevărate prin înlocuire în ecuație.

Exemplu : $2x-1=(6x-2)-4x+1$, $x\in\mathbb{R}$ echivalent cu 0=0, adică adevărat pentru orice x real.

IV. 1. ECUAȚIA DE GRADUL I

O ecuație de forma ax+b=0, $x\in\mathbb{R}$ în care $a\neq 0$; a,b$\in\mathbb{R}$ poartă denumirea de **ecuație de gradul I** cu o necunoscută. **Soluția** ecuației este unică , $x=-\frac{b}{a}$

Exemplu : $2x-2=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{2} \Leftrightarrow x=1$

IV.2 SISTEME DE ECUAȚII DE GRADUL I

Un **sistem de ecuații** reprezintă o colecție de două sau mai multe ecuații care au aceleaşi necunoscute.

Observație : Dacă în ecuații necunoscutele sunt la puterea 1, atunci sistemul este un sistem de ecuații de gradul I.

Rezolvarea unui sistem de ecuații se bazează pe proprietățile enunțate la capitolul ecuații. Astfel, distingem două metode devenite clasice :

1.**Metoda substituției** :

Se exprimă una din necunoscute dintr-o ecuație şi se înlocuieşte în cea de-a doua rezultând o ecuație cu o singură necunoscută care se rezolvă şi apoi se exprimă şi cea de-a doua necunoscută.

Exemplu : $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ x+2(4-2x)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$

2. **Metoda reducerii**:

Se înmulțesc ecuațiile cu expresii a căror valoare este astfel aleasă încât în urma adunării ecuațiilor obținute , să rezulte o ecuație cu o singură necunoscută.

Exemplu : $\begin{cases} 2x+y=4 \,|(-1) \\ x+2y=6 \,|2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{-2x - y = -4} \\ 2\text{x}+4\text{y}=12 \end{cases} \Leftrightarrow 3y=8 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{8}{3} \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$

IV.3 ECUAȚIA DE GRADUL AL-II-LEA

Ecuația de forma $ax^2+bx+c=0, a,b,c\in R, a\neq 0, x\in R$ poartă denumirea de **ecuație de gradul al II-lea.** Se numeşte **soluție** a ei un număr real $\propto$ astfel încât : $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea:

Se calculează **discriminantul** ecuației cu formula: $\Delta=b^2-4ac$

În funcție de semnul acestuia, avem cazurile:

I. $\Delta<0\Rightarrow$ ecuația nu admite soluții reale

II. $\Delta=0\Rightarrow$ ecuația are o rădăcină reală dublă: $x=-\frac{b}{2a}$

III. $\Delta>0 \Rightarrow$ ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Exemplu: a) $x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0\Rightarrow$ *nu avem solutii reale*

b) $4x^2+4x+1=0$

$\Delta=4^2-4\cdot4\cdot1=16-16=0\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{4}{4\cdot2}=-\frac{1}{2}$

c) $x^2-5x+6=0$

$\Delta=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}\Rightarrow x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

IV. 4 INECUAȚII

O relație de tipul $f(x)$ rel. $g(x)$, unde rel. reprezintă o relație de tipul $<,>,\leq,\geq$ iar $f(x)$ şi $g(x)$ sunt funcții definite pe numere reale cu valori reale se numeşte **inecuație**.

A rezolva o inecuație înseamnă a găsi toate valorile lui $x \in \mathbb{R}$, pentru care este adevărată inegalitatea. Pentru rezolvare se transformă inecuația în inecuații echivalente mai simple pe baza unor proprietăți ale inecuațiilor.

Proprietăți:

1. Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c \; si \; a - c < b - c$
2. Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ şi $a : c < b : c$
3. Dacă $a < b$ şi $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ şi $a : c > b : c$
4. Dacă vrem, în loc de $a < b$ putem scrie şi $b > a$

Observație: Aceleaşi proprietăți sunt valabile şi dacă înlocuim semnul $<$ cu $\leq$ sau semnul $>$ cu $\geq$.

Două sau mai multe inecuații grupate se numesc **sistem de inecuații**.

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă găsirea acelor valori ale necunoscutei care îndeplinesc simultan condițiile din inecuațiile respective. Aceste valori se determină prin rezolvarea fiecărei inecuații şi apoi determinarea prin operația de intersecție a mulțimii de soluții comune.

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. ianuarie 2010

BREVIAR TEORETIC CU EXEMPLE CONCRETE, PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ, clasa a VIII-a - 2010

Propunător: Prof. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU

Şcoala cu clasele I-VIII Măteşti, com. Săpoca, jud. Buzău

V. 1. Măsurare şi măsuri (lungime, arie, volum, masă, capacitate, timp)

Unitatea de măsură pentru **lungime** este **metrul** (m). El are multiplii următori : decametrul (dam), hectometrul (hm), kilometrul (km) şi submultiplii următori: decimetrul (dm), centimetrul (cm), milimetrul (mm).

Multiplii			Unitatea principala **m**	Submultiplii		
km	hm	dam		dm	cm	mm
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Ex. de transformări:
321,15 dm = 32,115 m= 3211,5 cm = 32115 mm;
9485 m=948,5 dam= 94,85 hm=9,485 km.

Perimetrul pătratului P = $4l$; perimetrul dreptunghiului P= $2l + 2L$.

Unitatea principală pentru măsurarea **suprafețelor** este **metrul pătrat** (m^2), care reprezintă aria unui pătrat cu latura de 1m. Multiplii sunt :dam^2, hm^2, km^2. Submultiplii sunt : dm^2, cm^2, mm^2.

Multiplii			Unitatea principala $\mathbf{m^2}$	Submultiplii		
km^2	hm^2	dam^2		dm^2	m^2	mm^2
10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1	10^2	10^4	10^6

Ex. de transformări :
2,75 hm^2 =275 dam^2 =0,0275 km^2
15,25 dm^2 =152500 mm^2 =1525 cm^2
1 hectar =1 ha =1 hm^2
1 ar = 1 dam^2

Aria pătratului A =l^2 ; Aria dreptunghiului A =$l \cdot L$.

Unitatea principală pentru măsurarea **volumului** este metrul cub (m^3), care reprezintă volumul unui cub cu latura de 1 m.

Multiplii			Unitatea principala $\mathbf{m^3}$	Submultiplii		
km^3	hm^3	dam^3		dm^3	cm^3	mm^3
10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^3	10^6	10^9

Ex. 0,021 dm^3 =21 cm^3 =21000 mm^3
49 dam^3 =0,049 hm^3 =49000 m^3

Volumul cubului V =l^3

Volumul paralelipipedului dreptunghic : V $=l \cdot L \cdot h$.

Unitatea de măsura a **capacităţii** (volumul ocupat de un lichid) este litrul (l) .
$1l = 1\ dm^3$.

Multiplii			Unitatea principala	Submultiplii		
kl	hl	da$l$	***l***	dl	cl	ml
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

Ex. 145 l = 1,45 hl =14500 cl
4,18 hl =0,418 kl =418 l =41800 cl.

Unitatea principală de măsură pentru **masă** este gramul (g) care are submultiplii : dg, cg, mg şi multiplii :dag, hg, kg.

Multiplii			Unitatea principala	Submultiplii		
kg	hg	dag	**g**	dg	cg	mg
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

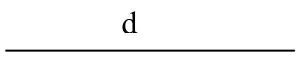
Ex. 25,3 hg =253 dag =2,53 kg =2530 g

Unitatea principală de măsura pentru **timp** este secunda (s).
1 ora (h) =60 minute (min) =3600 secunde (s)
Ex. 372 s =60 min 12 s
0,4 h =0,4x60 min =24 min =24x60 s = 1440 s
48 min 27 s + 5h 56 s = 5h 48 min 83 s = 5h 49 min 23 s

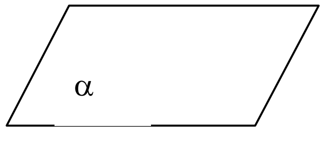
V. 2. Dreapta

Punctul, **dreapta** şi **planul** sunt noţiuni geometrice fundamentale care nu se definesc.

x A ← punct

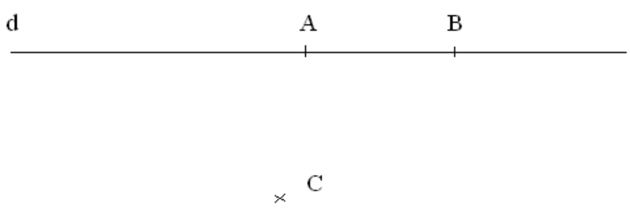


←dreapta



←plan

Axioma dreptei: prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una.



Vom scrie A, B $\in$d, C$\notin$d.

Două drepte pot fi : **concurente** (când au un singur punct comun), **paralele** (dacă nu au nici un punct comun, dar fac parte din acelaşi plan), **necoplanare** (dacă nu sunt situate în acelaşi plan).

Semidreapta este o parte dintr-o dreaptă, limitată de un punct numit origine.

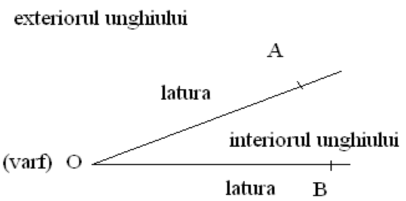
Segmentul este mulţimea punctelor de pe o dreaptă aflate între două puncte ale dreptei, numite capete. Lungimea segmentului este distanţa dintre capetele segmentului. Două **segmente** se numesc **congruente** dacă au aceeaşi lungime. **Mijlocul** unui segment este punctul care împarte segmentul în două segmente congruente.

Trei sau mai multe **puncte** se numesc **coliniare** dacă aparţin aceleiaşi drepte. Se numesc **puncte coplanare** punctele care se află în acelaşi plan.

O **dreaptă** poate fi : **conţinută** într-un plan (dacă cel puţin 2 puncte ale ei aparţin planului), **paralelă** cu planul (dacă ea nu are puncte comune cu planul), **incidentă** (dacă are un singur punct comun cu planul).

V. 3. Unghiul

Figura geometrică formată din două semidrepte care au originea comună se numeşte **unghi**.



Unghiul poate fi : **nul** (când laturile sale coincid), **alungit** (când laturile sunt semidrepte opuse), **propriu** (când nu e nici nul, nici alungit).

Masura unui unghi este dată de deschiderea dintre laturile sale. Unitatea de măsura a unghiului se numeşte **grad** (sexagesimal) cu multiplii : minutul (1^0 =60') şi secunda (1'=60''). Instrumentul de măsură este **raportorul**.

Unghiul poate fi : **ascuţit** (când măsura sa este mai mică de 90^0), **obtuz** (când măsura sa este mai mare de 90^0) sau **drept** (când are 90^0).

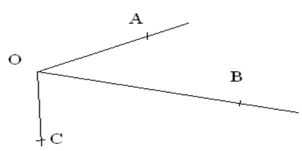
Ex. a) $62^0 45'57'' + 18^0 29'36'' = 80^0 74'93'' = 81^0 14'93'' = = 81^0 15'33''$

b) $135^0 18'12'' - 42^0 36'25'' = 134^0 77'72'' - 42^0 36'25'' = 92^0 41'47''$

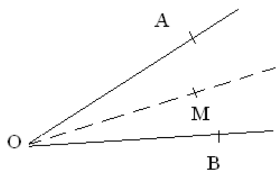
c) $3 \cdot 14^0 53'' = 42^0 159'' = 42^0 2'39''$

d) $125^0 : 4 = 124^0 60' : 4 = 31^0 15'$

Două unghiuri care au măsurile egale se numesc **unghiuri congruente**. Două unghiuri proprii care au vârful comun şi o latură comună situată în interiorul unghiului format de cele două unghiuri se numesc **unghiuri adiacente**.



Bisectoarea unui unghi propriu este semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care formează cu laturile unghiului inițial două unghiuri congruente.

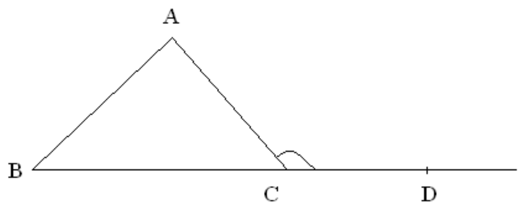


Două **unghiuri** se numesc **suplementare** dacă suma măsurilor lor este de 180^0. Două unghiuri se numesc **complementare** dacă suma măsurilor lor este de 90^0.
Ex. Suplementul unghiului de $75^0 29' 17''$ este
$180^0 - 75^0 29' 17'' = 179^0 59' 60'' - 75^0 29' 17'' = 104^0 30' 43''$
Complementul său este
$90^0 - 75^0 29' 17'' = 89^0 59' 60'' - 75^0 29' 17'' = 14^0 30' 43''$

Două unghiuri cu acelaşi vârf care au laturile unuia în prelungirea laturilor celuilalt se numesc unghiuri **opuse la vârf**. Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente. Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este de 360^0.

V. 4. Congruența triunghiurilor ; perpendicularitate în plan ; paralelism

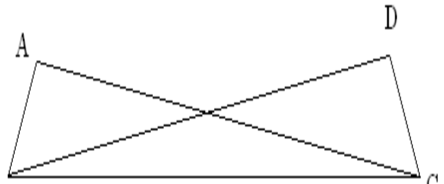
Figura geometrică formată din cele trei segmente determinate de trei puncte necoliniare se numeşte **triunghi**. Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numeşte **perimetrul** triunghiului (P), iar jumătatea acestuia este **semiperimetrul** (p). După laturi triunghiul poate fi: **scalen** (laturile au măsuri diferite), **isoscel** (două laturi sunt congruente), echilateral (toate laturile sunt congruente). După unghiuri triunghiul poate fi: **ascuțitunghic** (toate unghiurile sunt ascuțite), **dreptunghic** (un unghi este drept), **obtuzunghic** (un unghi este obtuz). Suma măsurilor unghiurilor în orice triunghi este de 180^0. Unghiul care este adiacent şi suplementar cu un unghi al unui triunghi se **numeşte unghi** exterior al triunghiului.



Două **triunghiuri** sunt **congruente** dacă laturile triunghiurilor sunt respectiv congruente şi unghiurile sunt respectiv congruente. Cazurile de congruență pentru triunghiuri oarecare:
-L.U.L. (latură-unghi-latură)
-U.L.U. (unghi-latură-unghi)
-L.L.L. (latură-latură-latură)
Datorită criteriului 2 şi faptului că suma măsurilor unghiurilor în triunghi este 180^0, se poate enunța
-L.U.U. (latură-unghi-unghi)

Metoda triunghiurilor congruente ajută la demonstrarea congruenței a două laturi sau două unghiuri pe care trebuie să le încadram în triunghiri despre care se va arăta că sunt congruente (conform unuia din cazurile de congruență).

Ex. În figura următoare $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$ şi $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DBC$. Demonstrăm că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$ şi $[AC] \equiv [BD]$.



Privim ΔABC şi ΔDCB. Avem ∢ACB ≡ ∢DBC (ipoteză), [BC]≡[BC] (lat. comună) şi ∢ABC ≡∢DCB (ipoteză) ⇒(conform U.L.U.) ΔABC ≡ ΔDCB ⇒∢BAC ≡∢BDC şi
[AC]≡ [BD].

Două **drepte** concurente sunt **perpendiculare** dacă unul din unghiurile ce se formează în jurul punctului lor comun este unghi drept (d ⊥ g).

Fiind dat un punct A exterior dreptei d, atunci punctul B ∈ d a. î. AB ⊥ d se numeşte **piciorul perpendicularei** din A pe d.

Distanța de la un punct exterior unei drepte la dreaptă este distanța dintre punct şi piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă d(A, d) = AB.

Criteriile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice :
-C. C. (catetă-catetă)
-C. U. (catetă-unghi)
-I. U. (ipotenuză-unghi)
I. C. (ipotenuză-catetă)

Proprietatea **bisectoarei** : un punct din interiorul unui unghi propriu aparţine bisectoarei unghiului dacă şi numai dacă
Distanțele de la punct la laturile unghiului sunt egale.

Concurența bisectoarelor într-un triunghi : în orice triunghi cele trei bisectoare sunt concurente (punctul lor de intersecție este **centrul cercului înscris** în triunghi).

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.

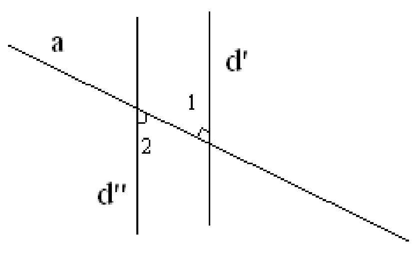
Proprietatea **mediatoarei** : un punct aparţine mediatoarei unui segment dacă şi numai dacă are distanțele egale față de extremitățile segmentului.

Concurența mediatoarelor : în orice triunghi mediatoarele celor trei laturi sunt concurente (punctul lor de intersecție este **centrul cercului circumscris** triunghiului).

Două **drepte** sunt **paralele** dacă sunt coplanare şi nu au nici un punct comun.

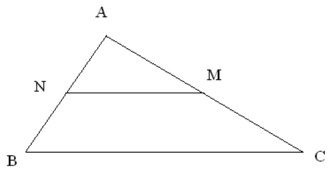
Axioma paralelelor (Euclid) : printr-un punct exterior unei drepte date, trece o singură paralelă la dreapta dată.

Două drepte intersectate cu o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, dacă şi numai dacă dreptele sunt paralele.



d' || d'' $\Leftrightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$

Într-un triunghi, segmentul care uneşte mijloacele a două laturi se numeşte **linie mijlocie** a triunghiului şi ea are proprietatea că e paralelă cu cea de-a treia latură şi jumătate din lungimea acesteia.



MN linie mijlocie $\Leftrightarrow$ MN $\parallel$ BC şi 2MN=BC

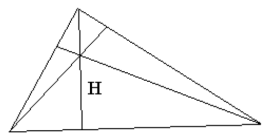
V. 5. Proprietăţi ale triunghiurilor

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180^0.

Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente cu el.

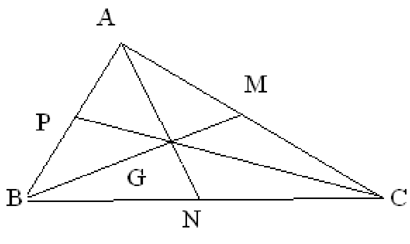
O înălţime a unui triunghi este segmental determinat de un vârf al triunghiului şi piciorul perpendicularei dusă din acel vârf pe latura opusă.

Înălţimile în orice triunghi sunt concurente, iar punctul lor comun se numeşte **ortocentrul** triunghiului (H).



Segmentul determinat de un vârf al unui triunghi şi mijlocul laturii opuse se numeşte **mediană**.

Medianele în orice triunghi sunt concurente; punctul lor comun se numeşte **centrul de greutate** al triunghiului şi se află la 2 treimi de vârf şi o treime de bază.



GB=2/3 BM ;
GM=1/3 BM.

Proprietăţile triunghiului isoscel :

-într-un triunghi isoscel unghiurile alăturate bazei sunt congruente

-într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului din vârf, înălţimea şi mediana corespunzătoare bazei coincid şi sunt incluse în mediatoarea bazei

-medianele laturilor congruente sunt congruente (analog pentru înălţimi, bisectoare)

Proprietăţile triunghiului echilateral :

-într-un triunghi echilateral toate unghiurile sunt congruente (au 60^0)
-într-un triunghi echilateral mediana, bisectoarea şi înălțimea fiecărei laturi coincid şi sunt incluse în mediatoarea laturii respective.

Proprietățile triunghiului dreptunghic :

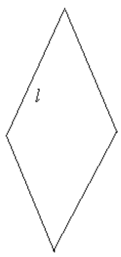
-într-un triunghi dreptunghic isoscel unghiurile alăturate bazei au fiecare 45^0
-într-un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
-într-un triunghi dreptunghic cateta care se opune unghiului de 30^0 este jumătatea ipotenuzei
-centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic (intersecția mediatoarelor) se află la mijlocul ipotenuzei
-ortocentrul unui triunghi dreptunghic este vârful triunghiului drept.

V. 6. Patrulatere. Arii

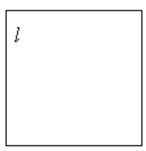
Suma măsurilor unui patrulater convex este este egală cu 360^0.
Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele.

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.

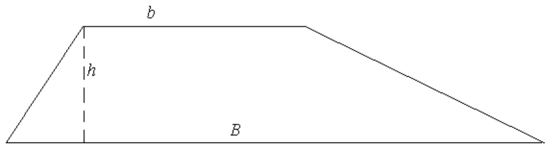
Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.



Pătratul este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente (sau este rombul cu un unghi drept).



Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele numite baze şi doua neparalele.



Segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele se numeşte **linie mijlocie în trapez**; este paralelă cu bazele şi egală cu semisuma lor.

Proprietățile paralelogramului :
-laturile opuse sunt congruente
-unghiurile opuse sunt congruente
-unghiurile alăturate sunt suplementare
-diagonalele au acelaşi mijloc

Proprietățile dreptunghiului :
-are toate proprietățile paralelogramului
-toate unghiurile au 90^0
-diagonalele sunt congruente

Proprietățile rombului :
-are toate proprietățile paralelogramului
-are toate laturile congruente
-diagonalele sunt perpendiculare şi sunt bisectoarele unghiurilor

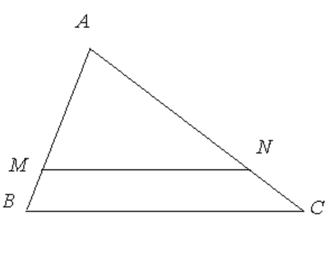
Proprietățile pătratului :
-are toate proprietățile dreptunghiului şi ale rombului

Arii :
-aria triunghiului A=$\frac{B \cdot h}{2}$
-aria triunghiului dreptunghic A=$\frac{c_1 \cdot c_2}{2}$
-aria paralelogramului A=$B \cdot h$
-aria dreptunghiului A=$l \cdot L$
-aria rombului A= $B \cdot h = \frac{d \cdot D}{2}$
-aria pătratului A=l^2
-aria trapezului A=$\frac{(B+b) \cdot h}{2}$

V. 7. Asemănarea triunghiurilor

Teorema paralelelor echidistante : Dacă dreptele paralele d_1, d_2, ..., d_n determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

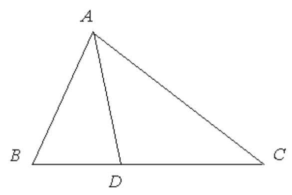
Teorema lui Thales : O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



MN ||BC $\Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

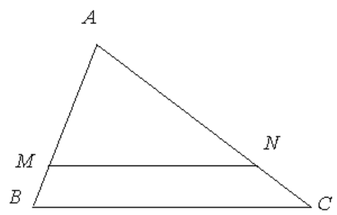
Teorema paralelelor neechidistante : Dreptele paralele d_1, d_2, ..., d_n determină pe două secante oarecare segmente proporționale.

Teorema bisectoarei :Într-un triunghi bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu laturile unghiului.



[AD bisectoarea $\sphericalangle$BAC $\Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Teorema fundamentală a asemănării : O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat.



MN || BC $\Leftrightarrow \Delta$ ABC $\sim \Delta$ AMN

Criteriile de asemănare :

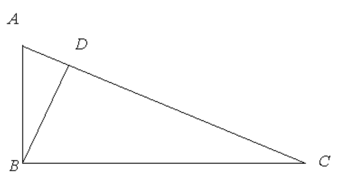
-cazul I : două triunghiri sunt asemenea dacă au două unghiuri respectiv congruente ;

-cazul II : două triunghiri sunt asemenea dacă au 2 laturi respecriv proporționale şi unghiurile dintre aceste laturi congruente ;

-cazul III : două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile respectiv proporționale.

V. 8. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Teorema înălțimii: Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



$BD^2 = AD \cdot DC$

Teorema catetei: Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este media geometrică a lungimii proiecțiilor sale pe ipotenuză şi a lungimii ipotenuzei.

$AB^2 = AD \cdot DC$; $BC^2 = DC \cdot AC$

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

Definirea funcțiilor trigonometrice:
sinus(sin) = cateta opusă / ipotenuză
cosinus(cos)= cateta alăturată / ipotenuză
tangenta(tg) = cateta opusă /cateta alăturată
cotangenta(ctg) = cateta alăturată / cateta opusă

Formula fundamentală a trigonometriei:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Valori ale funcțiilor trigonometrice pentru câteva unghiuri:

	sin	cos	tg	ctg
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

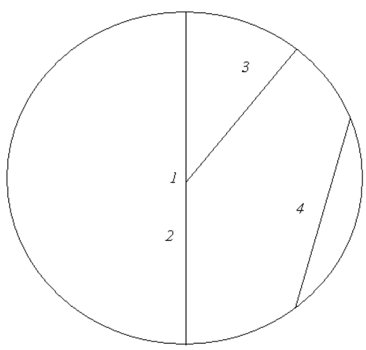
Câteva formule de trigonometrie:
$\cos x = \sin(90 - x)$; $\text{tg}\, x = \sin x / \cos x$;
$\text{ctg}\, x = 1 / \text{tg}\, x$; $\text{ctg}\, x = \text{tg}\,(90 - x)$

Aria unui triunghi:
$A = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}$; $A = AB \cdot BC \cdot \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$;
$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde a, b, c sunt laturile triunghiului, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$.
$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ (pentru triunghiul echilateral)

Raza cercului înscris într-un triunghi: $r = \frac{S}{p}$

Raza cercului circumscris unui triunghi : $R = \frac{abc}{4S}$

V. 9. Cercul. Poligoane regulate



1=centrul cercului

2=diametrul
3=raza
4=coarda

Unghiuri în cerc:
-unghi la centru (vârful este centrul cercului, iar laturile sunt raze) : măsura este egală cu măsura arcului cuprins între laturi.
-unghi înscris în cerc (vârful este pe cerc, iar laturile sunt coarde) : măsura este egală cu jumătatea măsurii arcului cuprins între laturi.
-unghi cu vârful în interior (vârful este în interiorul cercului, iar laturile sunt coarde) : măsura este egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturi şi prelungirile lor.
-unghi cu vârful în exterior (vârful este în exteriorul cercului, iar laturile sunt coarde) : măsura este egală cu semidiferenţa măsurilor arcelor cuprinse între laturi.

Poziţiile unei drepte faţă de cerc :
-secantă : are două puncte comune cu cercul
-tangentă : are un punct comun cu cercul (raza şi tangenta într-un punct sunt perpendiculare)
-exterioară : nu are puncte comune cu cercul.

Patrulatere inscriptibile (cu vârfurile pe un cerc) ; proprietăţi :
-un **patrulater** este **inscriptibil** dacă şi numai dacă unghiurile sale opuse sunt suplementare
-un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Un **poligon regulat** este poligonul convex cu toate laturile şi toate unghiurile congruente.
Ex : triunghiul echilateral, pătratul, hexagonul regulat.

Calculul elementelor în poligoane regulate:

	latura	apotema(=r)	aria
triunghi echilateral	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
hexagon regulat	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

unde R=raza cercului circumscris, iar r= raza cercului înscris.

Lungimea cercului : $L = 2\pi \cdot R$
Aria discului : $A= \pi R^2$.

V. 10. Puncte, drepte, plane.Paralelism în spaţiu

Un **plan** poate fi **determinat** de:
-trei puncte necoliniare
-o dreaptă şi un punct care nu-i aparţine
-două drepte paralele
-două drepte concurente

Axioma lui Euclid : Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la dreapta datăa.

Teoreme de paralelism :
-dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci orice plan care conţine dreapta şi-l intersectează pe primul o face după o dreaptă paralelă cu cea dată.

-dându-se două plane paralele, orice dreaptă dintr-unul este paralelă cu celălalt.
-dacă un plan intersectează două plane paralele, atunci dreptele de intersecție sunt paralele.
-dacă un plan conține două drepte concurente care sunt paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.
- două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.
- mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare pe care le intersectează segmente proporționale.

V. 11. Perpendicularitate în spațiu

Se numesc **drepte perpendiculare** două drepte care formează un unghi drept.

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente din plan, atunci ea este perpendiculară pe plan.

Teoreme :
-două plane perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele
-două drepte perpendiculare pe acelaşi plan sunt paralele
-teorema celor trei perpendiculare : dacă dintr-un punct exterior unui plan se duce o perpendiculară pe acel plan, iar din piciorul acesteia se duce o perpendiculară pe o dreaptă conținută în plan, atunci dreapta ce uneşte punctul cu piciorul celei de a doua perpendiculare este perpendiculară pe dreapta conținută în plan.

Unghiuri în spațiu:

Prin **unghiul a două drepte în spațiu** înțelegem orice unghi ascuțit sau drept cu vârful în orice punct al spațiului şi cu laturile paralele cu dreptele date.

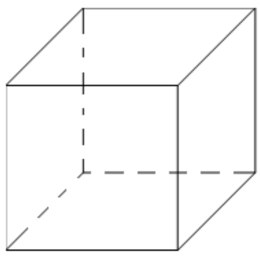
Numim **unghi al unei drepte cu un plan** unghiul pe care acea dreaptă îl face cu proiecția ei pe plan.

Se numeşte **unghi diedru** figura geometrică formată de două semiplane delimitate de aceeaşi dreaptă.

Se numeşte **unghi plan** asociat unui unghi diedru unghiul determinat de două semidrepte conținute respectiv în semiplanele ce formează diedrul având originea pe muchia diedrului şi fiind perpendiculară pe acestea.

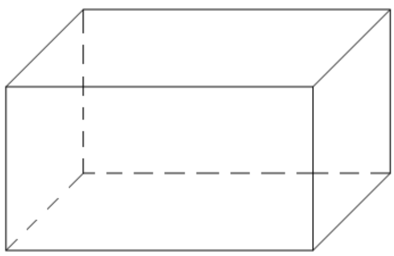
V. 12. Poliedre

-cubul:
A=$6l^2$
V=l^3
d=$l\sqrt{3}$



-paralelipipedul dreptunghic:

$A_{lat}=2(L+l)\cdot h$
$A=2(lL+hL+hl)$
$V=l\cdot L\cdot h$
$d^2=l^2+L^2+h^2$

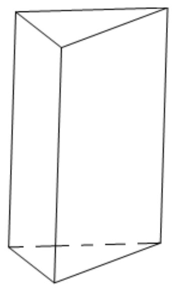


-prisma regulată (prisma dreaptă cu baza poligon regulat):

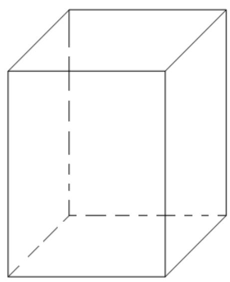
$A_{lat} = P_B \cdot h$ (P_B= perimetrul bazei)
$A_{tot} = A_{lat} + 2A_b$ (A_b=aria bazei)

$V = A_b \cdot h$

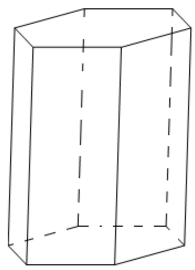
Prisma triunghiulară regulată:



Prisma patrulatară regulată:

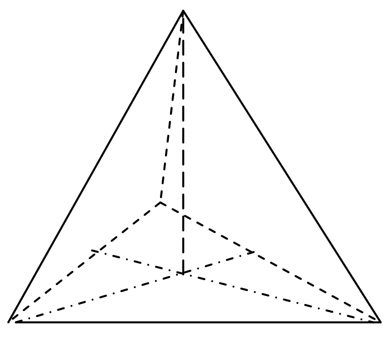


Prisma hexagonală regulată:



-tetraedrul regulat (toate muchiile sunt congruente)

$h = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$, $a_p = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, $A = l^2\sqrt{3}$, $V = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$



-piramida regulată (are baza poligon regulat, iar piciorul perpendicularei din vârf este centrul bazei)

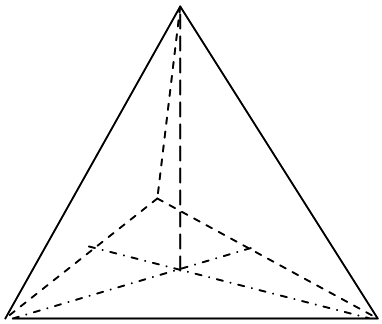
$A_{lat} = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$ (a_p=apotema piramidei)

$A_{tot}=A_b+A_{lat}$

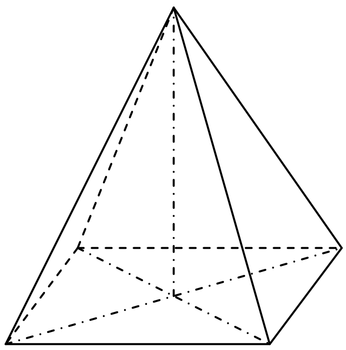
$a_p^2 = h^2 + a_b^2$ (a_b =apotema bazei)

$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

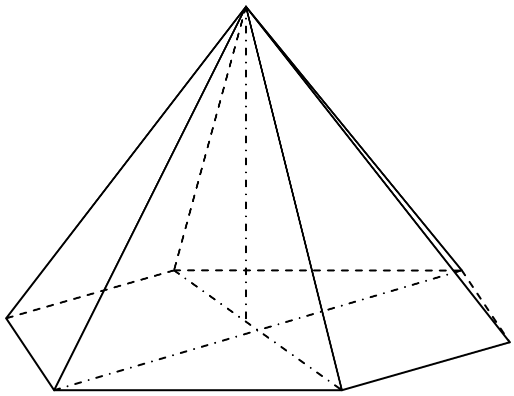
Piramidă triunghiulară regulată



Piramidă patrulateră regulată



Piramidă hexagonală regulată



-trunchiul de piramidă (regulată)

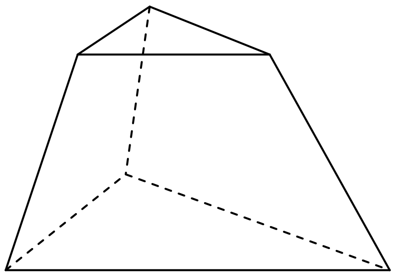
A$_{lat}$=$\frac{(P_B + P_b)\cdot a_p}{2}$ (P_B=perimetrul bazei mari, P_b =perimetrul bazei mici)

A$_{tot}$ =A$_B$ +A$_b$ +A$_{lat}$

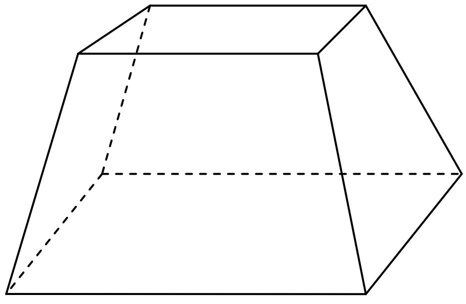
V =$\frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$ (A_B =aria bazei mari, A_b =aria bazei mici)

$a_p^2=h^2+(a_B-a_b)^2$ (a_B=apotema bazei mari, a_b = apotema bazei mici)

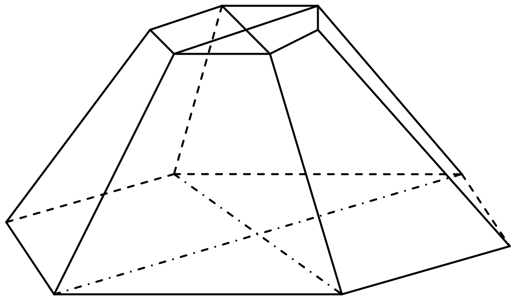
Trunchi de piramidă triunghiulară regulată



Trunchi de piramidă patrulateră regulată



Trunchi de piramidă hexagonală regulată



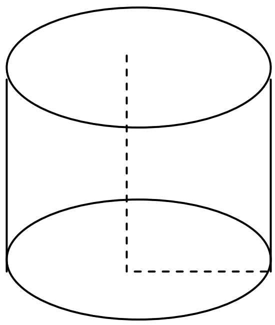
V. 13. Corpuri rotunde

-cilindrul circular drept:

$A_{lat} = 2\pi RG$

$A_{tot} = 2\pi R(R+G)$

$V = \pi R^2 h$



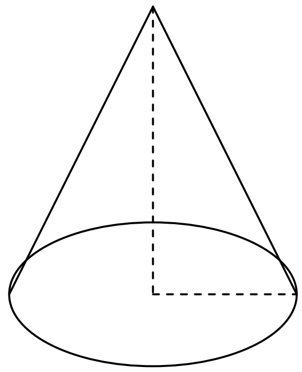
-conul circular drept:

$G^2 = h^2 + R^2$

$A_{lat} = \pi RG$

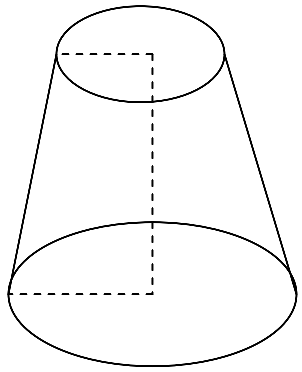
$A_{tot} = \pi R(R+G)$

$V = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

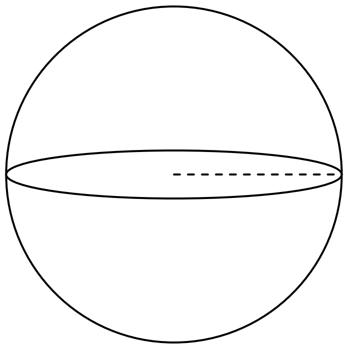


-**trunchiul de con**:

$A_{lat}=\pi g(R+r)$
$A_{tot}=\pi R^2+\pi r^2+A_{lat}$
$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$



-**sfera**:
$A=4\pi R^2$
$V=\frac{4\pi R^3}{3}$



Problema propusa pentru concursuri de matematica

Clasa a –VI-a

Se dă numărul N = $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$, unde a,b.c sunt cifre nenule si a$\neq b \neq c$

i) Aflați numărul N , a ,b,c, sunt cifre consecutive în această ordine şi a+b+c=6

ii)Arătați ca fracția $\dfrac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{185}$ se simplifică cu 37 .

iii)Dacă a,b,c sunt cifre pătrate perfecte şi a$\neq b \neq c$, rezolvați în mulțimea Q ecuația :

$$\frac{N}{185}+x=0{,}2\cdot 47$$

Soluție .

i) a+b+c=6 şi a ,b,c, sunt cifre consecutive nenule în această ordine $\Rightarrow$ a=1 , b=2 , c=3
$\Rightarrow$ N= 123+231+312=666

ii) N = $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ = 111· (a+b+c) = 37· 3 ·(a+b+c) $\Rightarrow \dfrac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{185}$

se simplifică cu 37 **,** pentru că şi 185 = 5 · 37

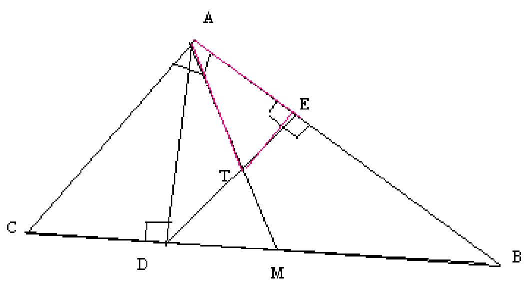
iii) **a**$\neq b \neq c$,şi a,b,c sunt cifre pătrate perfecte $\Rightarrow$ {a,b,c } = {1,4,9 }$\Rightarrow$

N=111(1+4+9) = 111 · 14 $\Rightarrow$ $\dfrac{111\cdot 14}{185}+x=0{,}2\cdot 47$ $\Rightarrow$ x =1

Clasa a-VII-a

1) Fie ΔABC cu AC=30 cm , AB= 133,(3) % din AC , D este proiecția punctului A pe BC , M este mijlocul laturii BC şi MB = 25 cm . Punctul D se proiectează pe latura AB în punctul E . a) Calculați perimetrul triunghiului ATE , unde { T} = AM$\cap$DE .b)Aflați aria patrulaterului ACDT

Soluția problemei



a) $133,(3)\ \% = \frac{4}{3} \Rightarrow AB = 30 \bullet \frac{4}{3} = 40$ cm

M mijlocul lui BC $\Rightarrow$ MB=MC = 25 cm $\Rightarrow$ BC= 50 cm

In ΔABC aplicand reciproca teoremei lui Pitagora $\Rightarrow 50^2=30^2+40^2 \Rightarrow \Delta ABC$ m($\prec$A) = 90^0

AM este mediana din unghiul drept al ΔABC m($\prec$A) = 90^0 $\Rightarrow$ AM=MB=MC = 25 cm

D proiectia punctului A pe BC $\Rightarrow AD \perp BC$ si $\prec$ ADC = $\prec$ADB = 90^0 $\Rightarrow$ ΔADC si ΔADB triunghiuri dreptunghice $\Rightarrow$ CD= 18 cm si BD = 32 cm (teorema catetei aplicata in ΔABC)

AD = 24 cm (teorema inaltimii aplicata in ΔABC)

Punctul E este proiectia punctului D pe AB $\Rightarrow DE \perp AB$ si $\prec$ AED = $\prec$DEB = 90^0 $\Rightarrow$ ΔAED si ΔDEB triunghiuri dreptunghice in E .

$AC \perp AB$ si $DE \perp AB$ $\Rightarrow$ AC// ED $\Rightarrow$ AEDC trapez dreptunghic $\prec$A=$\prec$E= 90^0

<u>Calculam AE</u>

In ΔABC cu AC// ED aplicand teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{40} = \frac{18}{50}$ AE= 14,4 cm

$\Delta ACD \sim \Delta ATE$ ptr ca $\prec$E=$\prec$D = 90^0 si $\prec$ EAT =$\prec$ CAD =$\prec$ABM (AMB tr isoscel)

$\Rightarrow \frac{AC}{AT} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{ET} \Rightarrow \frac{30}{AT} = \frac{24}{14,4} = \frac{18}{ET} \Rightarrow$ AT= 18 cm ET= 10,8 cm

P ΔAET =AE+ET+AT = 14,4 + 10,8 + 18 =43,2 cm

b) ACDT trapez , deoarece DE//AC$\Rightarrow$ A = $\frac{B+b}{2}h = \frac{AC+DT}{2} \cdot AE$

DE poate fi calculat fie din asemanarea Δ BED cu Δ BAC , fie ca inaltime in ΔABD

DE = 19,2 cm

DT = DE – ET = 19,2 – 10,8 = 8,4 cm

A = 276.48 cm^2

Prof. , Vasile Uleanu

Şcoala cu cls . I-VIII „Armand Călinescu” Curtea de Argeş

Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. ianuarie 2010

PROBLEME PENTRU CONCURSURI

Corneliu Mănescu-Avram

1. Să se demonstreze identitatea : $5S_9 + 2S_{11} = 6S_5^2 + S_7$, unde $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$, $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Soluție : Scriem identitatea din enunț pentru n şi pentru $n - 1$

$$5S_9(n) + 2S_{11}(n) = 6S_5^2(n) + S_7(n), \quad 5S_9(n-1) + 2S_{11}(n-1) = 6S_5^2(n-1) + S_7(n-1),$$

scădem egalitățile obținute, înlocuim $S_5(n-1)$ cu $S_5(n) - n^5$ şi rezultă

$$5n^9 + 2n^{11} = 6n^5[2S_5(n) - n^5] + n^7, \qquad (1)$$

aşadar

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2. \qquad (2)$$

Reciproc, scriem (1) sub forma

$$5n^9 + 2n^{11} = 6[S_5^2(n) - S_5^2(n-1)] + n^7, \qquad (3)$$

dăm valori de la 1 la n, adunăm şi obținem identitatea din enunț.

Egalitățile (1), (2), (3) sunt echivalente, deci este suficient să demonstrăm (2). Pentru mai multă uşurință a scrierii eliminăm numitorii, prin urmare vom demonstra prin inducție egalitatea

$$12S_5(n) = 2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2.$$

Pentru $n = 1$ avem $12 = 2 + 6 + 5 - 1$, care este adevărată. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru $k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

$$12S_5(k-1) = 2(k-1)^6 + 6(k-1)^5 + 5(k-1)^4 - (k-1)^2$$

adunăm $12k^5$ în stânga şi în dreapta egalității, ridicăm la puterile respective cu binomul lui *Newton* şi obținem

$$12S_5(k) = 12k^5 + 2(k^6 - 6k^5 + 15k^4 - 20k^3 + 15k^2 - 6k + 1) + 6(k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 5k - 1) +$$
$$+ 5(k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = 2k^6 + 6k^5 + 5k^4 - k^2,$$

deci egalitatea este adevărată şi pentru k, ceea ce trebuia demonstrat.

2. Să se găsească cifrele zecimale din egalitatea : $2 \cdot \overline{abcdef} = 11 \cdot \overline{defabc}$.

Soluție : Fie $x = \overline{abc}$, $y = \overline{def}$. Se obține egalitatea $2(10^3x + y) = 11(10^3y + x)$, de unde se deduce $(2 \cdot 10^3 - 11)x = (11 \cdot 10^3 - 2)y$, deci $3^2 \cdot 13 \cdot 17x = 2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 47y$, aşadar $17x = 94y$, cu soluția $x = 94t$, $y = 17t$, $t \in \mathbb{N}$. Numerele x şi y au trei cifre, deci $17t > 100$, $94t < 1000$, cu soluțiile $t \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Rezultă următoarele egalități :

$$2 \cdot 564102 = 11 \cdot 102564, \quad 2 \cdot 658119 = 11 \cdot 119658, \quad 2 \cdot 752136 = 11 \cdot 136752,$$

$$2 \cdot 846153 = 11 \cdot 153846, \quad 2 \cdot 940170 = 11 \cdot 170940.$$

3. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$.

Soluție : Dacă $a = 0$, e clar că $x = y = 0$ este singura soluție.

Fie $a = b^2c$, cu $b, c \in \mathbb{N}^*$, c liber de pătrate. Se arată că dacă (x, y) este soluție, atunci $c \mid x$ şi $c \mid y$. Într-adevăr, ecuația devine $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b\sqrt{c}$, deci $\sqrt{y} = b\sqrt{c} - \sqrt{x}$ şi $y = b^2c + x -$ $- 2b\sqrt{cx}$, de unde $\sqrt{cx} \in \mathbb{Q}^*$, aşadar $\sqrt{cx} \in \mathbb{N}^*$ şi deci $c \mid x$; similar, $c \mid y$.

Fie $x = cx_1$, $y = cy_1$; rezultă $\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = b$. Se arată asemănător că $\sqrt{x_1} = t \in \mathbb{N}$, de unde $x_1 = t^2$, $y_1 = (b - t)^2$, $0 \le t \le b$.

Soluțiile sunt $x = ct^2$, $y = c(b - t)^2$, $t \in \mathbb{N}$, $0 \le t \le b$.

4. Se consideră mulțimile $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, n \in \mathbb{Z}\}$ şi $T_k = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = t_1 + t_2 + .. t_k, t_i \in T, 1 \le i \le k\}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este un număr fixat. Să se arate că

a) $T_1 = T$ conține cel puțin trei pătrate perfecte.

b) T_2 conține toate pătratele şi o infinitate de cuburi perfecte.

c) $T_4 = \mathbb{Z}$.

Soluție : a) Avem $\frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1^2$, $\frac{2\cdot3\cdot4}{6} = 2^2$, $\frac{48\cdot49\cdot50}{6} = 140^2$.

b) Prima afirmație rezultă din identitatea

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = n^2.$$

Pentru a doua, luăm

$$\frac{(n+m-1)(n+m)(n+m+1)}{6} - \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6} = \frac{m(3n^2+m^2-1)}{3}.$$

Dacă $3n^2 + m^2 - 1 = 3m^2$, atunci obținem $m^3 \in T_2$. Rezultă

$$3n^2 - 2m^2 = 1. \tag{1}$$

Se consideră ecuația

$$x^2 - 6y^2 = 1. \tag{2}$$

Ea are o infinitate de soluții $(x_k, y_k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ şi se poate arăta că acestea sunt

$$x_k = \frac{\left(5+2\sqrt{6}\right)^k + \left(5-2\sqrt{6}\right)^k}{2}, \quad y_k = \frac{\left(5+2\sqrt{6}\right)^k - \left(5-2\sqrt{6}\right)^k}{2\sqrt{6}}.$$

Dacă (x, y) este o soluție a ecuației (2), atunci (n, m) este o soluție a ecuației (1), unde $n = x + 2y$, $m = x + 3y$. Într-adevăr, $3n^2 - 2m^2 = 3(x+2y)^2 - 2(x+3y)^2 = x^2 - 6y^2 = 1$. Obținem astfel o infinitate de soluții în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ale ecuației (1) şi deci o infinitate de cuburi perfecte în mulțimea T_2.

c) Din identitatea

$$n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} - 2\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

rezultă că $T_4 = \mathbb{Z}$.

Observație. Se ştie că numerele de la a) sunt singurele pătrate perfecte din T_1.

5. Să se arate că numărul $2^{3^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, are cel puțin n divizori primi distincți.

Soluție : Demonstrăm afirmația prin inducție după n.

Dacă $n = 1$, atunci $2^{3^1} + 1 = 3^2$ are un divizor prim.

Presupunem că afirmația este adevărată pentru un k natural oarecare fixat şi o demonstrăm pentru $k + 1$. Este adevărată descompunerea :

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left(2^{2\cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1\right).$$

Conform ipotezei de inducție, numărul din prima paranteză are cel puțin k divizori primi distincți. Este suficient deci să arătăm că numărul din a doua paranteză are un factor prim care nu divide numărul din prima paranteză. Vom demonstra o afirmatie mai generală : "Cel mai mare divizor comun al numerelor $a + 1$ şi $a^2 - a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, este 1 sau 3". Într-adevăr, din $a^2 - a + 1 = (a + 1)(a - 2) + 3$ rezultă că orice divizor comun al celor două numere este divizor al lui 3. Numărul din a doua paranteză nu este putere a lui 3, deci are cel puțin un factor prim diferit de 3, ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

Comentariu. Am demonstrat astfel că mulțimea numerelor prime este infinită.

6. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $N = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$. Să se arate că

a) pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, numerele N şi $F_k = 2^{2^k}$ sunt prime între ele;

b) dacă $n \geq 3$, atunci N se divide cu 3, 7 şi 13, dar nu se divide cu 5, 11 şi 17;

c) N are cel puțin n divizori primi.

Soluție : a) Pentru $k \leq n - 1$, $N - 3 = 2^{2^n} - 1 + 2^{2^{n-1}} - 1$ este divizibil cu F_k, deci N şi F_k sunt prime între ele, deoarece $F_k \equiv 2 \pmod 3$. Pentru $k = n$, $N = F_n + 2^{2^{n-1}}$, deci sunt prime între ele, fiind impare.

b) Este adevărată descompunerea $N = (2^2 + 2 + 1)(2^2 - 2 + 1)(2^4 - 2^2 + 1) \ldots (2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1)$, deci N se divide cu $3 = 2^2 - 2 + 1$, $7 = 2^2 + 2 + 1$, $13 = 2^4 - 2^2 + 1$ şi nu se divide cu $5 = F_1$ şi $17 = F_2$. În plus, $N \equiv 7, 10, 9, 2, 3, 10, 9, 2, 3, \ldots \pmod{11}$, deci N nu se divide cu 11.

c) Se arată că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ distincte, numerele $2^{2^m} - 2^{2^{m-1}} + 1$ şi $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1$ sunt prime între ele. Putem presupune $m < n$, deci $N = 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1 + 2 \cdot 2^{2^{n-1}} =$

$= \left(2^{2^m} - 2^{2^{m-1}} + 1\right)M$, unde M este un număr natural, de unde rezultă că numerele respective sunt prime între ele, fiind impare. Se alege câte un divizor prim de la fiecare dintre numerele

$2^{2^m} - 2^{2^{m-1}} + 1$, $1 \leq m \leq n - 1$. Aceste $n - 1$ numere prime sunt distincte şi diferite de $2^2 + 2 + 1 = 7$, deoarece $2^{2^k} \equiv 2$ sau $4 \pmod 7$, deci am găsit n divizori primi diferiți ai lui N.

Comentariu. La punctul c) am obținut o demonstrație a faptului că mulțimea numerelor prime este infinită.

7. Să se arate că dacă numerele $p, p + 2, p + 6, p + 8$ sunt prime ($p > 5$), atunci restul împărțirii lui p la 210 este unul dintre numerele 11, 101, 191.

Soluție : Numărul prim p este de forma $6k + 5$, $k \in \mathbb{N}^*$: într-adevăr, dacă $p - 1$ se divide cu 3, atunci $p + 2$ se divide cu 3, deci nu este prim. Ultima cifră a lui p este 1 : într-adevăr, dacă ultima cifră a lui p este 3, 7 sau 9, atunci $p + 2$, $p + 8$, respectiv $p + 6$ se divide cu 5, deci nu este prim. Restul împărțirii lui p la 30 nu poate fi egal cu 1 ($p + 1$ nu se divide cu 3) sau 21 (altfel p se divide cu 3, deci nu este prim). Rezultă că restul împărțirii lui p la 30 este egal cu 11.

Dacă restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 41, 71, 131, respectiv 161, atunci $p + 8$, $p + 6$, $p + 2$, respectiv p se divide cu 7. Deducem că restul împărțirii lui p la 210 este unul dintre numerele 11, 101 sau 191.

Notă. Dacă restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 11, atunci $p - 4$ se divide cu 7 ; dacă restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 191, atunci $p + 12$ se divide cu 7. Obținem rezultatul : *Dacă numerele $p - 4$, p, $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$, $p + 12$ sunt prime ($p > 11$), atunci restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 101.* Astfel de numere există, de exemplu pentru $p = 101$, 16061, 19421, 43781, ..., dar nu se ştie dacă ele sunt sau nu în număr finit. Evident, putem lua ca referință primul număr al secvenței şi deducem că în orice sextuplu de tipul (0, 4, 6, 10, 12, 16) de numere prime, restul împărțirii primului termen la 210 este egal cu 97. Pentru detalii, a se vedea “Prime quadruplet” – diverse adrese pe internet.

8. Să se arate că numărul $5^{32} + 1$ se divide cu 641.

Soluție : Avem $5^{32} - 2^{32} = (5 - 2)(5 + 2)(5^2 + 2^2)(5^4 + 2^4)(5^8 + 2^8)(5^{16} + 2^{16})$ se divide cu $641 =$ $= 5^4 + 2^4$. Numărul $2^{32} + 1 = 2^{28} \cdot 2^4 + 1 = 2^{28}(2^7 \cdot 5 + 1 - 5^4) + 1 =$
$= 2^{28}(2^7 \cdot 5 + 1) - [(2^7 \cdot 5)^4 - 1] = (2^7 \cdot 5 + 1)[2^{28} - (2^7 \cdot 5 - 1)(2^{14} \cdot 5^2 + 1)]$ se divide cu $641 =$ $= 2^7 \cdot 5 + 1$. Rezultă că şi numărul $5^{32} + 1 = (5^{32} - 2^{32}) + (2^{32} + 1)$ se divide cu 641.

9. Să se găsească baza unui sistem de numerație în care este adevărată egalitatea :

$$\overline{aaa} = a^4, \quad a \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție : Fie x baza sistemului de numerație respectiv. Deducem $ax^2 + ax + a = a^4$, de unde, prin simplificare, se obține $x^2 + x + 1 = a^3$. Numărul din stânga este impar, deci şi a este impar. Prin încercări găsim $a = 7$, $x = 18$.

10. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ o matrice astfel încât $\det(A^3 - A)$ nu se divide cu 3. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ sistemul de ecuații

$$ax_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$

$$ax_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$

$\vdots$

$ax_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$

are soluție unică.

Soluție : Fie I matricea unitate şi X matricea coloană a necunoscutelor. Sistemul poate fi scris sub forma $(A - aI)X = 0$ (evident, în dreapta avem matricea coloană cu n elemente nule) şi el are soluție unică dacă şi numai dacă $\det(A - aI) \neq 0$.

Fie $P(X) = \det(A - X\cdot I)$ polinom în variabila X. Evident, $P \in \mathbb{Z}[X]$. Prin ipoteză, niciunul dintre numerele $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ nu se divide cu 3, deoarece $\det(A^3 - A) =$

$= \det(A - I)\det(A)\det(A + I) = P(-1)P(0)P(1)$. Vom arăta că $P(a) \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr, din

$P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$, $Q \in \mathbb{Z}[X]$ şi $P(a) = 0$, rezultă că cel puțin unul dintre numerele

$P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ se divide cu 3, contradicție.

11. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinomul $X^7 - X + 280$ să fie divizibil cu polinomul $X^2 - X + a$.

Soluție : Fie $f = X^7 - X + 280$, $g = X^2 - X + a$. Din $g \mid f$ în $\mathbb{Z}[X]$, deducem că $g(x) \mid f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

În particular, $g(1) \mid f(1)$, $g(-1) \mid f(-1)$, deci $a \mid 280$ şi $a + 2 \mid 280$ (*).

Fie ε o rădăcină cubică complexă nereală a lui -1, deci $\varepsilon^3 = -1$, $\varepsilon \neq -1$, astfel că $\varepsilon^2 - \varepsilon = -1$ şi $\varepsilon^7 - \varepsilon = 0$. Rezultă că $g(\varepsilon) \mid f(\varepsilon)$ în $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, deci şi în $\mathbb{Z}$, deoarece ε este întreg algebric, iar numerele $f(1)$ şi $g(1)$ sunt întregi raționali. Obținem că $a - 1 \mid 280$ (**).

Mulțimea divizorilor întregi ai numărului 280 este

$D_{280} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \pm 20, \pm 28, \pm 35, \pm 40, \pm 56, \pm 70, \pm 140, \pm 280\}$.

Din condițiile (*) şi (**) rezultă că trebuie să căutăm divizori consecutivi $a - 1$, $a \in D_{280}$ astfel încât $a + 2 \in D_{280}$. Deducem că $a \in \{-7, -4, -1, 2, 5, 8\}$. Avem şi $g(2) \mid f(2)$, deci $a + 2 \mid 2^7 - 2 + 280$, aşadar $a + 2 \mid 2^7 - 2$. Cel mai mare divizor comun al numerelor $2^7 - 2 = 126$ şi 280 este egal cu 14, astfel că $a + 2 \in \in D_{14}$, de unde $a \in \{-16, -9, -4, -3, -1, 0, 5, 12\}$. Obținem că $a \in \{-4, -1, 5\}$.

Se verifică prrin calcul că singura valoare convenabilă este $a = 5$, pentru care există descompunerea

$$X^7 - X + 280 = (X^2 - X + 5)(X^5 + X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 11X + 56).$$

12. Fie $p \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul 2 cu proprietatea că $|p(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Să se arate că $|p(3)| \leq 7^2$, $|p(15)| \leq 41^2$. Generalizare.

Soluție : Dacă $p = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci

$$a = 2p(0) - 4p\left(\frac{1}{2}\right) + 2p(1),\ b = -3p(0) + 4p\left(\frac{1}{2}\right) - p(1),\ 2a + b = p(0) - 4p\left(\frac{1}{2}\right) + 3p(1)$$

şi deci $|a| \leq 8$, $|2a + b| \leq 8$, în ipoteza $|p(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$.

Avem

$$p(x) = a(x - 1)^2 + (2a + b)(x - 1) + p(1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

de unde

$$|p(x)| \leq 8(x - 1)^2 + 8(x - 1) + 1 = 2(2x - 1)^2 - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În particular, dacă (u, v) este o soluție oarecare a ecuației $u^2 - 2v^2 = -1$ (1), atunci

$$\left|p\left(\frac{v+1}{2}\right)\right| \leq u^2.$$

Soluția generală în numere naturale a ecuației (1) este

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^n - \left(\sqrt{2}-1\right)^n}{2}, \quad v_n = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^n + \sqrt{2} - 1^n}{2\sqrt{2}},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ este impar. Avem $v_1 = 1$, $v_3 = 5$, $v_5 = 29$, ..., $\left|p\left(\frac{v_n+1}{2}\right)\right| \leq u_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ impar şi $u_n^2 - 2v_n^2 = -1$.

13. Să se găsească rădăcinile reale ale polinomului $P = (X^m - 1)^n + (X^n - 1)^m$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ au parități diferite.

Soluție : Avem $P(0) = (-1)^n + (-1)^m = 0$, deoarece $m - n$ este impar ; $P(1) = 0$, deci P are rădăcinile 0 şi 1. Vom arăta că P nu are alte rădăcini reale. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că este m par şi n este impar.

Dacă $x \in (-\infty, -1)$, atunci $x^m > 1$, $x^m - 1 > 0$ şi $x^n < -1$, $x^n - 1 < -2$, deci $P(x) > 0$.

Avem $P(-1) = 2^m \neq 0$.

Dacă $x \in (-1, 0)$, atunci $0 < x^m < 1$ şi $-1 < (x^m - 1)^n < 0$; $-1 < x^n < 0$, $-2 < x^n - 1 < -1$ şi $1 < (x^n - 1)^m < 2^m$, de unde rezultă că $P(x) > 0$.

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $-1 < (x^m - 1)^n < 0$ şi facem substituțiile $x^m - 1 = -y^m$, $x^n - 1 = -z^n$ cu $y, z \in (0, 1)$, de unde $-y^{mn} + z^{mn} = 0$, aşadar $y = z$. Putem presupune că $0 < x < y < 1$ şi dacă, de exemplu $m < n$, atunci $x^n < x^m$, $y^n < y^m$, aşadar $1 = x^n + y^n < x^m + y^m = 1$, contradicție, deci P nu are rădăcini în intervalul (0, 1).

Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $P(x) > 0$.

Observație. Rădăcinile 0 şi 1 au acelaşi ordin de multiplicitate, egal cu $\min(m, n)$.

14. Să se determine numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin^m x + \cos^m x}{m} - \frac{\sin^n x + \cos^n x}{n}$$

să fie constantă.

Soluție : Dacă $m = n$, atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă $m \neq n$, atunci putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $m > n$. Avem $f(0) = f(\pi)$, deci

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^n}{n},$$

aşadar m şi n sunt numere pare, $m = 2k$, $n = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}^*$. Funcția dată este constantă dacă şi numai dacă polinomul

$$P = \frac{X^k + (1-X)^k}{k} - \frac{X^l + (1-X)^l}{l} \quad , k, l \in \mathbb{N}^*, k > l$$

este constant. Pentru k par, gradul lui P este egal cu k, pentru k impar avem în mod necesar $k - 1 = l$. În acest caz, coeficientul lui X^{k-1} trebuie să fie nul

$$1 - \frac{2}{k-1} = 0,$$

de unde $k = 3$, $l = 2$, aşadar $m = 6$, $n = 4$.

Calcule directe arată că pentru aceste valori funcția dată este constantă.