Inegalitățiii Integrale

Prof. Nicusor Zlota

Colegiul Tehnic Auto " Traian Vuia" Focsani

1.Fie f, g:[0,1]->R doua funcții integrabile

Să se arate că :

$$\int_0^1 \frac{f(x)g(x)dx}{f(x)+g(x)} \le \frac{(\int_0^1 f(x)dx)(\int_0^1 g(x)dx)}{\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx}$$

Demonstrație

1.Vom demonstrata mai intâi inegalitatea :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \le \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}, a_i, b_i \in R_+^*, (*)$$

Vom utiliza inducția matematica

Pentru n=1, are loc egalitatea;

Pentru

$$n = 2: \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} \le \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2} \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \ge 0$$

Presupunem inegalitatea adevarata pentru n=k şi o demonstrăm pentru n=k+1, avem succesiv :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \le \frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i)(\sum_{i=1}^{k} b_i)}{\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}} \le \frac{(\sum_{i=1}^{k+1} a_i)(\sum_{i=1}^{k+1} b_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k+1} b_i}$$

Deci inegalitatea (*) este adevarata.

2.Consideram diviziunea

$\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n} = 1)$ cu $a_i -> f(\frac{i}{n}), b_i -> g(\frac{i}{n})$,

Inegalitatea (*) devine

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(\frac{i}{n})g(\frac{i}{n})}{f(\frac{i}{n}) + g(\frac{i}{n})}(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) \le \frac{[\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})][\sum_{i=1}^{n} g(\frac{i}{n})(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})]}{\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) + \sum_{i=1}^{n} g(\frac{i}{n})(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})}$$

Avem sumele Riemann corespunzatoare diviziunii, trec ând la limita pentru n->∞, obținem inegalitatea din enuț.

2.

Fie f:[0,1]->R o funcție integrabila

Sa se arate ca :

$$\int_0^1 f^k(x)dx \ge (\int_0^1 f(x)dx)^k, k \ge 1$$

Demonstratie

Vom demonstrata că :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \ge \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^k}{n^{k-1}}, a_i \in R_+^*, i = \overline{1,n}, k \in N^*$$

Vom utiliza inegalitatea lui Jensen pentru functia, avem succesiv:

$$f : R_{+}^{*} -> R_{+}^{*},\ f(x) = x^{k}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^k}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^k$$

Consideram f:[0,1]->R$^*_+$ integrabila cu $a_i -> f(\frac{i}{n})$

Si trecând la limita pentru n->∞,obtinem inegalitatea din enut.

3 Fie f,g:[a,b]->R integrabile

Sa se arate că:

$$\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx \geq \sqrt{\left(\int_a^b f\ (x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)dx\right)^2}$$

Demonstrație

Intr-adevar vom considera inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2}$$

k>=1, care se demonstreaza prin inducție

$$\Delta_n odiviziune : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \Rightarrow$$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

$$\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{f^2(x_k)+g^2(x_k)} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k)(x_k - x_{k-1})\right]^2 + \sum_{k=1}^{n} g^2(x_k)(x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{\left(\int_a^b f\ (x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)dx\right)^2}$$

4.Aplicații

Fie f:[a,b]->R o functie integrabila

Sa se arate ca :

$$\frac{1}{\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx} \leq e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ind. Se utilizeaza inegalitatea mediilor dintre media armonica, geometrica si artitimetica

5.Fie f:[0,1]->R integrabila

Să se demonstreze

$$\left(\int_0^1 f^{\alpha}(x)dx\right)^{1/\alpha} \geq \left(\int_0^1 f^{\beta}(x)dx\right)^{1/\beta}$$

$$\alpha, \beta \in R, \alpha \geq \beta$$

Ind. Se aplica inegalitatea mediilor generalizate

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}}{n}\right)^{1/\alpha} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}}{n}\right)^{1/\beta}$$

$$a_i \in R, \alpha \geq \beta$$

Obs. Pentru α =2, β =1 se obtine inegalitatea mediilor

6.Sa se demonstreze inegalitatea

$$a(a^2-12)\sin 2a + 6(a^2-1)\cos 2a \leq 2(a^4-3a^2-3), a \in R$$

(Mihai Haivas, Iasi, Problema 17812, G.M.B. 6/1979, pag. 246)

Indicatie.

Se foloseşte inegalitatea lui Holder

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

unde f.g:[a,b]->R sunt functii integrabile, in care consideram a=0, b=a, f(x)=x si g(x)=sinx si dupa efectuarea calculelor se obtine inegalitatea din enut.

7. Sa se demonstreze

$$\left(\int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x)dx\right) \leq \sqrt[3]{\int_0^1 f_1^3(x)dx\int_0^1 f_2^3(x)dx\int_0^1 f_3^3(x)dx}$$

Unde, f_i, i=1,3, sunt functii integrabile pe [0,1]

8.Fie f,g:[0,1]->R, functii integrabile, sa se arate ca :

$$\int_0^1 \frac{f^p(x)}{g^{p-1}(x)}dx \geq \frac{\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^p}{\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^{p-1}}, p \geq 1$$

PATRULATERE INSCRIPTIBILE

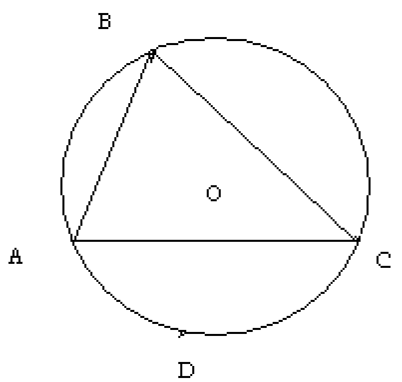
Prof. Gurău Cornelia, Şcoala cu clasele I - VIII nr.4
Moineşti, Bacău

Spunem că un patrulater ABCD este inscriptibil dacă există un cerc *C* circumscris lui, adică *C* să conţină vârfurile A, B, C, D. Se mai spune că ABCD este înscris în *C*.

Teorema 1. Un patrulater inscriptibil este convex.

Demonstraţie.

Fie A, B, C, D vârfuri ale patrulaterului ABCD înscris în *C*.



(Fig.1)

Notăm prin α arcul de extremităţi A, C ce nu conţine B, prin β arcul de extremităţi B, C şi nu conţine A, prin γ arcul AB căruia nu-i aparţine C. Dacă al patrulea vârf, D ar fi pe γ, atunci laturile $|AB|$ şi $|CD|$ ar avea un punct comun deci ABCD nu ar fi patrulater. Analog, $D \notin \beta$. Deoarece D nu poate coincide cu o extremitate A, B,C a arcelor considerate, urmează $D \in \alpha$ drept unica soluţie posibilă. Rezultă că C, D sunt pe un acelaşi arc de extremităţi A, B deci într-un acelaşi semiplan delimitat de AB. Se verifică analog celelalte condiţii ce asigură convexitatea lui ABCD.

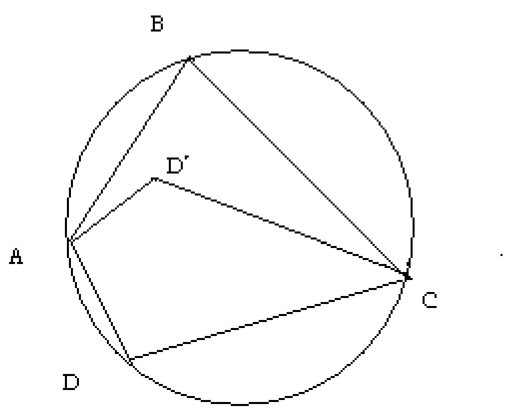
Teorema 2. Fie ABCD un patrulater convex; ABCD este inscriptibil dacă şi numai dacă $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$.

Demonstraţie.

Dacă ABCD este inscriptibil, fie *C* cercul circumscris lui; atunci măsurile unghiurilor $\angle$ABC şi $\angle$ADC sunt jumătăţi ale măsurii arcelor lui *C* de extremităţi A, C deci însumează $\frac{1}{2}360^0 = 180^0$.

Dacă $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$ considerăm cercul *C* ce trece prin A, B, C. Condiţia de convexitate impune plasarea lui D într-un semiplan H delimitat de AC şi neconţinând A. Deci D se găseşte în H, $\angle ADC = 180^0 - \angle ABC$. Condiţiile menţionate impun plasarea lui D pe un arc capabil de unghi $180^0 - \angle ABC$ situat în H, arc ce coincide cu $C \cap$ H. Rezultă $D \in C$.

Observaţie. În absenţa ipotezei că ABCD este convex nu mai este suficient să ştim $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$ pentru a deduce că ABCD este inscriptibil (vezi fig.2).



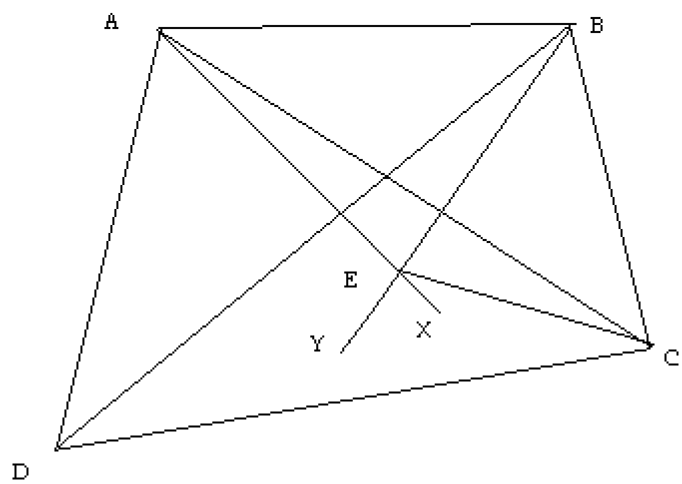
(Fig.2)

Teorema 3. Fie ABCD un patrulater convex . ABCD este inscriptibil dacă şi numai dacă $\angle ABD \equiv \angle ACD$.

Demonstraţia este analoagă celei de mai sus. Condiţia enunţată se poate formula: „ o latură este văzută din vârfuri consecutive sub unghiuri congruente” sau „ un unghi format de o diagonală cu o latură este congruent celui format de latura opusă cu cealaltă diagonală”. Ca o regulă formală menţionăm că în cadrul unui patrulater inscriptibil se compară $\angle$ XZY cu $\angle$ MNP (pentru a decide că sunt suplementare sau congruente) numai când X = M, Z = P, Y $\neq$ N şi { X, Y, Z, N} este mulţimea vărfurilor patrulaterului.

Teorema 4. (Prima teoremă a lui Ptolemeu) Un patrulater convex ABCD este inscriptibil dacă şi numai dacă $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Demonstraţie.



(Fig.3)

De acea parte a lui AB de care sunt vârfurile C, D construim semidreptele |AX, |BY încât ∠XAB ≡ ∠BDC şi ∠YBA ≡ ∠DBC. Deoarece ∠XAB + ∠YBA = ∠BDC + ∠DBC = 180^0 - ∠BCD < 180^0 cele două semidrepte au în comun un punct E. triunghiurile ABE şi DBC sunt asemenea (cazul UU) şi din proporţionalitatea laturilor deducem

(1) $AE = \frac{AB \cdot CD}{DB}$ şi (2) $\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{DB}$.

Constatăm apoi ∠EBC = ∠ABC - ∠ABE = ∠ABC - ∠DBC = ∠ABD. Congruenţa de unghiuri dedusă, ∠EBC ≡ ∠ABD şi proporţionalitatea (2) asigură Δ EBC ~ Δ ABD. Din proporţionalitatea laturilor reţinem

(3) $EC = \frac{AD \cdot BC}{BD}$.

Acum, dacă patrulaterul ABCD este doar convex, are loc

(4) AE + EC ≥ AC.

Înlocuind aici egalităţile (1) şi (3), după amplificare cu BD deducem

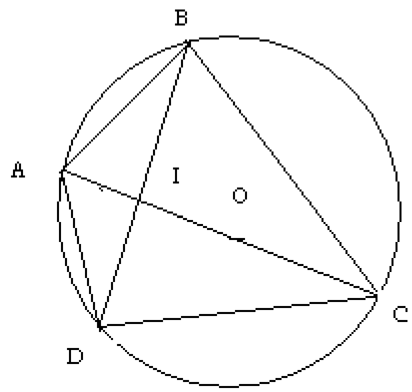
(5) AB · CD + AD · BC ≥ AC · BD.

Inegalitatea (5) devine egalitate atunci şi numai atunci când E ∈ |AC|, adică |AE = |AC, adică ∠BDC = ∠BAC. Conform teoremei precedente această condiţie este echivalentă cu inscriptibilitatea lui ABCD.

Teorema 5. (A doua teoremă a lui Ptolemeu). Într -un patrulater inscriptibil ABCD are loc egalitatea:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AD \cdot CD + AB \cdot BC}.$$

Demonstraţie. Fie I punctul comun diagonalelor $|AC|$ şi $|BD|$ (fig. 4).



(Fig.4)

Sunt evidente: Δ AIB ~ Δ BIC şi ΔAID ~ ΔBIC ce ne conduc la următoarele proporţionalităţi de segmente

(1) $\frac{AI}{DI}=\frac{BI}{CI}=\frac{AB}{CD}$ şi (2) $\frac{AI}{BI}=\frac{DI}{CI}=\frac{AD}{AC}$.

Urmează de aici

$\frac{AI}{CI}=\frac{AI}{DI},\frac{DI}{CI}=\frac{AB\cdot AD}{CD\cdot AC}$ şi deci

(3) $\frac{AC}{CI}=\frac{AB\cdot AD+CD\cdot AC}{CD\cdot AC}$ $\frac{BI}{DI}=\frac{BI}{CI}\cdot\frac{CI}{DI}=\frac{AB\cdot AC}{DC\cdot AD}$,

deci

(4) $\frac{BD}{DI}=\frac{AB\cdot AC+AD\cdot CD}{AD\cdot CD}$.

Împărţind membru cu membru egalităţile (3) şi (4) obţinem:

$\frac{AC}{BD}\cdot\frac{DI}{CI}=\frac{AB\cdot AD+CD\cdot AC}{AB\cdot AC+AD\cdot CD}\cdot\frac{AD}{AC}$.

Dar, conform

(2) $\frac{DI}{CI}=\frac{AD}{AC}$ şi după simplificare obţinem tocmai relaţia din enunţ .

Bibliografie

1. Bazele raţionamentului geometric, Dan Brânzei , Eugen Onofraş, Sebastian Aniţa, Gheorghe Isvoranu, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.
2. Metodica predării geometriei în gimnaziu, Olimpia Popescu, Valeria Radu, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

PROBLEME DATE LA EXAMENUL DE ADMITERE ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ A UNIVERSITĂŢII DIN MOSCOVA ÎNTRE ANII 1970 – 1980

Corneliu Mănescu-Avram

Aşteptăm soluţii de la cititori pentru aceste probleme.

1.Punctul *K* este mijlocul unei coarde *AB*, *MN* şi *ST* sunt coarde care trec prin *K*. *MT* intersectează *AK* în punctul *P*, iar *NS* intersectează *KB* în punctul *Q*. Să se demonstreze egalitatea *KP* = *KQ*.

2. Un patrulater în spaţiu este tangent unei sfere. Demonstraţi că punctele de tangenţă sunt coplanare.

3. Feţele unei piramide triunghiulare au aceeaşi arie. Demonstraţi că ele sunt congruente.

4. Numerele naturale *m* şi *n* au aceiaşi factori primi. Aceeaşi proprietate o au numerele *m* + 1 şi *n* + 1. Numărul unor astfel de perechi (*m*, *n*) este finit?

5. Să se ducă o dreaptă care înjumătăţeşte perimetrul şi aria unui triunghi.

6. Să se demonstreze inegalitatea $\frac{1}{\sin^2 x} \le \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$, pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

7. Se alege câte un punct pe fiecare dintre muchiile unui tetraedru. Să se demonstreze că volumul cel puţin unuia dintre tetraedrele astfel obţinute este $\le \frac{1}{8}$ din volumul tetraedrului iniţial.

8. Să se arate că dacă $a^2 + 4b^2 = 4$, $cd = 4$, atunci $(a-d)^2 + (b-c)^2 \ge 1,6$.

9. Se dă un punct *K* pe latura *AB* a trapezului *ABCD*. Să se găsească un punct *M* pe latura *CD* care maximizează aria patrulaterului obţinut prin intersecţia triunghiurilor *ABM* şi *CDK*.

10. Se poate tăia un unghi triedru printr-un plan astfel încât intersecţia să fie un triunghi echilateral?

11. Fie H_1, H_2, H_3, H_4 lungimile înălţimilor unei piramide triunghiulare, *O* un punct interior al piramidei şi h_1, h_2, h_3, h_4 lungimile perpendicularelor duse din *O* pe feţele tetraedrului. Să se demonstreze că

$$H_1^4 + H_2^4 + H_3^4 + H_4^4 \ge 1024 h_1 h_2 h_3 h_4 .$$

12. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} y(x+y)^2 = 9 \\ y(x^3 - y^3) = 7 \end{cases}.$$

13. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{b+c-2a}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{c+a-2b}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{a+b-2c}{\sin\frac{C}{2}}\geq 0.$$

notaţiile fiind cele uzuale într-un triunghi.

14. În câte moduri se poate reprezenta un patrulater ca reuniunea a două triunghiuri?

15. Să se arate că $\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}<\frac{1}{4}$.

16. Să se rezolve ecuaţia $x^4-14x^3+66x^2-115x+66,25=0$.

17. Se poate înscrie un cub într-un con astfel încât 7 dintre vârfurile cubului să fie situate pe suprafaţa conului?

18. Să se arate că bisectoarele unghiurilor exterioare *A* şi *C* ale unui triunghi *ABC* nu se intersectează pe cercul circumscris triunghiului *ABC*.

19. Un tetraedru regulat *ABCD* cu muchia de lungime *a* este înscris într-un con cu măsura unghiului din vârf de 90° astfel încât *AB* este pe generatoarea conului. Să se găsească distanţa de la vârful conului la dreapta *CD*.

20. Să se compare numerele $\log_3 4\cdot\log_3 6\cdot...\cdot\log_3 80$ şi $2\log_3 3\cdot\log_3 5\cdot...\cdot\log_3 79$.

21. Un cerc este înscris într-o faţă a unui cub cu muchia de lungime *a*. Un alt cerc este circumscris unei feţe vecine. Să se găsească cea mai mică distanţă dintre două puncte ale acestor cercuri.

22. Să se demonstreze că numărul triunghiurilor cu laturile care aparţin unei mulţimi date de k segmente este mai mic decât $Ck^{3/2}$, pentru o anumită constantă pozitivă *C* independentă de *k*.

23. Să se construiască cu rigla şi compasul axele de coordonate pentru parabola $y=x^2$.

24. Să se găsească numerele reale *a* astfel încât pentru orice *x* < 0 să fie adevărată inegalitatea

$$ax^2-2x>3a-1.$$

25. Să se demonstreze inegalitatea

$$60^\circ\leq\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\leq 90^\circ.$$

notaţiile fiind cele uzuale într-un triunghi.

Bibliografie

[1] Shifman, M., *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein*, World Scientific Publishing Co.,Singapore, 2005

ASUPRA UNEI PERECHI DE ŞIRURI LINIAR RECURENTE STUDIATĂ PRIN METODE MATRICIALE

NECULAI STANCIU[1]

Abstract. In this study, we define the Jacobsthal F-matrix, the Jacobsthal M-matrix and the Jacobsthal – Lucas E-matrix, the Jacobsthal – Lucas R-matrix alike to Fibonacci Q-matrix.Using this matrix representation we have found some equalities and Binet-like formula, Cassini-like formulas for Jacobsthal and Jacobsthal – Lucas numbers.

Keywords: Jacobsthal numbers; Jacobsthal – Lucas numbers; Matrix method
M SC: 11B39; 11K31; 15A24; 40C05

Introducere. Spunem că un şir $(a_n)_{n\geq 2}$ de numere reale, satisface o recurenţă liniară (reală), omogenă de ordinul al doilea, dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ şi există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât:
$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, \forall n \geq k.$
În funcţie de valorile coeficienţilor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi de condiţiile iniţiale,$a_k = u \in \mathbb{R}$, $a_{k+1} = v \in \mathbb{R}$, se obţin diferite şiruri, dintre care unele cunoscute şi de elevii de liceu.
De exemplu, pentru $(\alpha,\beta) \in \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ şi $(a_0,a_1) \in \{(0,1),(2,1),(2,2)\}$ se obţin şirurile:

1. *Şirul Fibonacci:*$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$
2. *Şirul Lucas:*$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $L_0 = 2, L_1 = 1$;$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
3. *Şirul Pell:*$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $P_0 = 0, P_1 = 1$;$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$
4. *Şirul Pell-Lucas:*$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$, $Q_0 = 2, Q_1 = 2$;
   $Q_n = (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n$
5. *Şirul Jacobsthal:*$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, $J_0 = 0, J_1 = 1$;$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$
6. *Şirul Jacosthal-Lucas:*$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$, $j_0 = 2, j_1 = 1$;$j_n = 2^n + (-1)^n$

Rezultatele principale.În această notă matematică vom evidenţia câteva proprietăţi, stabilite prin metode matriciale, pentru perechea de şiruri - *Jacobsthal* - *Jacosthal-Lucas.*
Studiul şirurilor prin metode matriciale, datează din 1960, când, Charles H. King a studiat următoarea Q - matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \det(Q) = -1 \qquad (1)$$

şi a arătat că

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

de unde a dedus formula lui Cassini

[1] Profesor, Şcoala cu clasele I-VIII „George Emil Palade”, Buzău

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad (3)$$

Egalităţile de mai sus demonstrează legătura dintre numerele lui *Fibonacci* şi matrici.

În $[6]$, *Silvester* demonstrează un număr mare de proprietăţi ale şirului lui Fibonacci utilizând reprezentarea matricială.Se pleacă de la matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

şi se arată că

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

În $[1]$, este definit şirul Jacobsthal astfel:

$$J_0 = 0,\ J_1 = 1,\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2},\ n \geq 2 \qquad (6)$$

În $[2]$, sunt definite matricile:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Se vede uşor că

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ J_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} J_n \\ J_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

În $[1]$, este definit şirul Jacobsthal-Lucas astfel:

$$j_0 = 2, \qquad j_1 = 1, \qquad j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

În $[3]$, sunt definite matricile:

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Se vede uşor că

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{pmatrix}$$

Propoziţia 1. Dacă F este matricea definită în (7), atunci:

$$F^n = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

*Demonstraţie.*Se foloseşte principiul inducţiei matematice

Dacă $n = 1$,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2 & 2J_1 \\ J_1 & 2J_0 \end{pmatrix},$$

rezultatul este adevărat.

Presupunem că relaţia (12) este adevărată pentru orice număr natural $n = k$:

$$F^k = \begin{pmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{pmatrix}$$

şi o vom demonstra pentru $n = k + 1$.

$$F^{k+1} = F^k F = \begin{pmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} \\ J_{k+1} & 2J_k \end{pmatrix}. \square$$

Propoziţia 2. Pentru orice număr natural n, avem egalităţile:

$(i)\ \det(F^n) = (-2)^n$,

$(ii) J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$ (*similara formulei lui Cassini*)

Demonstraţie. Se observă că $\det(F) = -2$,

apoi $\det(F^n) = \det(F)\cdot\det(F)\cdots\det(F) = (-2)^n (relația\ (i))$ şi din propoziţia1. rezultă(ii). $\square$

Propoziţia 3. Dacă n este un număr întreg atunci

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3},\ (\textit{similara formulei lui Binet}).$$

Demonstraţie.

Se utilizează o teoremă din algebra liniară (procedeul de diagonalizare a matricilor), care spune că o matrice este similară cu o matrice diagonală.

Avem relaţia $\Lambda = C^{-1}\cdot F\cdot C$, unde Λ este matricea diagonală a valorilor proprii a matricei A iar matricea C este matricea vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii.

Calculăm valorile proprii din ecuaţia $\det(F - \lambda I) = 0$, unde I este matricea unitate.

În cazul nostru $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.Rezultă $a = 2$, $b = -1$.

Calculăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii din sistemul de ecuaţii $(F - \lambda_i I)X_i = O$.

Pentru $\lambda_1 = 2$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$, de unde $x_1 = 2\alpha, x_2 = \alpha$.

Vectorul propriu corespunzător este $X_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Pentru $\lambda_2 = -1$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$, de unde $x_1 = -\beta, x_2 = \beta$.

Vectorul propriu corespunzător este $X_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix}$.

Prin urmare avem o infinitate de matrici $C = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Alegem matricea $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ corespunzătoare valorilor $\alpha = 1, \beta = 1$.

Din $\Lambda = C^{-1}\cdot F\cdot C$ rezultă $A = C\Lambda C^{-1}$ şi de aici

$F^n = C\Lambda C^{-1} C\Lambda C^{-1} C\Lambda C^{-1} \cdots C\Lambda C^{-1} = C\Lambda^n C^{-1}$

Se înlocuieşte $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de unde

$$F^n = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 2^n + (-1)^n}{3} & \frac{2\cdot 2^n - 2(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix} \qquad (13).$$

Din (12) şi (13) $\square$

Propoziţia 4. Dacă M este matricea din (8), atunci

$$M^n = \begin{pmatrix} J_{2n+1} & 2J_{2n} \\ J_{2n} & 2J_{2n-1} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1.$$

*Demonstraţie.*Se demonstrează uşor prin inducţie matematică.

Propoziţia 5. Pentru orice număr natural n, avem relaţiile:

$(i)\ \det(M^n) = 2^{2n}$,

$(ii) J_{2n+1}J_{2n-1} - J_{2n}^2 = 2^{2n-1}$.

*Demonstraţie.*Relaţiile rezultă uşor din propoziţia 4.(se procedează ca în propoziţia 2.).

Propoziţia 6. Pentru orice număr natural $n \geq 1$, avem:

$$\sum_{i=0}^{n} J_i = \frac{J_{n+2} - 1}{2}$$

*Demonstraţie.*Ecuaţia caracteristică a matricei F este $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

Din Teorema Cayley-Hamilton avem$F^2 - F - 2I = 0$.

De asemenea are loc relaţia:

$$(I + F + F^2 + \cdots + F^n)(F - I) = F^{n+1} - I \qquad (14)$$

Din $\det(F - I) = -2 \neq 0$, rezultă că $F - I$ este inversabilă.Din $F^2 = F + 2I$ şi $F^2 - F = 2I$, avem $F(F - I) = 2I$.Deci $\frac{1}{2}(F - I) = F^{-1}$.Înmulţim ambii membri ai ecuaţiei (14) cu $(F - I)^{-1} = \frac{1}{2}F$ şi obţinem :

$$I + F + F^2 + \cdots + F^n = \frac{1}{2}(F^{n+1} - I) \cdot F = \frac{1}{2}(F^{n+2} - F) \qquad (15)$$

Adunând elementele (2,1) din ambii membri se obţine

$$\sum_{i=0}^{n} J_i = \frac{J_{n+2} - 1}{2} \qquad \sqsubset$$

Propoziţia 7. $$E^n = \begin{cases} 3^n \begin{pmatrix} J_{2n+1} & 2J_{2n} \\ J_{2n} & 2J_{2n-1} \end{pmatrix}, \text{dacă } n \text{ este par} \\ 3^{n-1} \begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{pmatrix}, \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases} \qquad (16)$$

Demonstraţie. Se utilizează principiul inducţiei matematice.

a) n *este impar*

$E^1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & 2j_1 \\ j_1 & 2j_0 \end{pmatrix}$, adevărată.

Presupunem (16) adevărată pentru $n = k$ şi o demonstrăm pentru $n = k + 2$.

$E^{k+2} = E^k \cdot E^2 = 3^{k+1} \begin{pmatrix} j_{k+3} & 2j_{k+2} \\ j_{k+2} & 2j_{k+1} \end{pmatrix}$, adevărată.

b) n *este par*

$E^2 = \begin{pmatrix} 27 & 18 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = 3^2 \begin{pmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{pmatrix}$, adevărată

Presupunem (16) adevărată pentru $n = k$ şi o demonstrăm pentru $n = k + 2$.

$E^{k+2} = E^k \cdot E^2 = 3^{k+2}\begin{pmatrix} J_{k+3} & 2J_{k+2} \\ J_{k+2} & 2J_{k+1}\end{pmatrix}$, adevărată.□

Propoziţia 8.

$i)\ \det(E^n) = 3^{2n} \cdot 2^n$,

$ii) J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$,

$iii) j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^{n+1} \cdot 3^2 \cdot 2^{n-1}$.

*Demonstraţie.*Relaţia (i) se demonstrează prin inducţie matematică.Pentru $n = 1$ relaţia este adevărată.Presupunem (i) adevărată pentru $n = k$ şi o demonstrăm pentru $n = k + 1$.

Avem $\det(E^{k+1}) = \det(E^k) \cdot \det(E) = 3^{2k+2} \cdot 2^{k+1}$, şi demonstraţia este completă.

Din relaţiile (i) şi (16) rezultă uşor (ii) şi (iii). □

Propoziţia 9.

$J_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$ şi $j_n = 2^n + (-1)^n$.

Demonstraţie. Se procedează ca în propoziţia 3.

Avem relaţia $\Lambda = C^{-1} \cdot E \cdot C$, unde Λ este matricea diagonală a valorilor proprii a matricei E iar matricea C este matricea vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii.

Calculăm valorile proprii din ecuaţia $\det(E - \lambda I) = 0$, unde I este matricea unitate.

În cazul nostru $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$.Rezultă $a = 3$, $b = 6$.

Calculăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii din sistemul de ecuaţii $(E - \lambda_i I)X_i = O$.

Pentru $\lambda_1 = 3$ rezolvăm sistemul$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$, de unde $x_1 = -\alpha, x_2 = \alpha$.

Vectorul propriu corespunzător este $X_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Pentru $\lambda_2 = 6$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$, de unde $x_1 = 2\beta, x_2 = \beta$.

Vectorul propriu corespunzător este $X_2 = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$.

Prin urmare avem o infinitate de matrici $C = \begin{pmatrix} -\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Alegem matricea $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ corespunzătoare valorilor $\alpha = 1, \beta = 1$.

Din $\Lambda = C^{-1} \cdot E \cdot C$ rezultă $E = C\Lambda C^{-1}$ şi de aici

$E^n = C\Lambda C^{-1} C\Lambda C^{-1} C\Lambda C^{-1} \cdots C\Lambda C^{-1} = C\Lambda^n C^{-1}$.

Se înlocuieşte $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de unde

$$E^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + 1 & 2(2^n - 1) \\ 2^n - 1 & 2(2^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Din (16) şi (17) rezultă □.

Propoziţia 10.

$RF^n = \begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{pmatrix}$ şi $R\begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{pmatrix} = 9F^n$.

*Demonstraţie.*În [1] sunt demonstrate relaţiile:

$j_{n+1} = J_{n+1} + 4J_n$, $j_n = 2J_{n+1} - J_n$, $9J_{n+1} = j_{n+1} + 4j_n$, $9J_n = 2j_{n+1} - j_n$.

Folosind relaţiile de mai sus rezultă uşor identităţile matriciale din teoremă. □

În încheiere propunem ca exerciţiu demonstrarea identităţilor de mai jos:

1) $9J_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2j_{m-1}j_n$,
2) $J_{m+n} = J_m J_{n+1} + 2J_{m-1}J_n$,
3) $j_{m+n} = j_n J_{m+1} + 2j_{m-1}J_m$,
4) $9 \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot J_{m-n} = j_{n-1}j_{m+1} - j_n j_m$,
5) $(-1)^n \cdot 2^{n-1} \cdot J_{m-n} = J_m J_{n-1} - J_{m-1}J_n$,
6) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot j_{m-n} = J_m j_{n-1} - J_{m-1}j_n$,
7) $(-1)^{n+1} \cdot 2^n = J_n j_{n-1} - J_{n-1}j_n$.

BIBLIOGRAFIE

[1] A.F. Horadam, *Jacobsthal Representation Numbers*, Fibonacci Quarterly, **34** (1996), 40-54.

[2] F. Koken and D. Bozkurt, *On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 13, 605 – 614.

[3] F. Koken and D. Bozkurt, *On The Jacobsthal-Lucas Numbers by Matrix Methods*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 33, 1629 – 1633.

[4] D.M. Bătineţu – Giurgiu, *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

[4] D.M. Bătineţu – Giurgiu, *Asupra unor perechi de şiruri liniar recurente*, Recreaţii Matematice, Iaşi, Nr 1 / 2003, 25-27

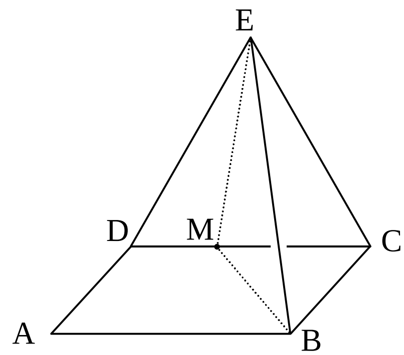
[6] J.R. Silvester, *Fibonacci properties by matrix methods*, Mathematical Gazette, 63(1979), 188-191.

APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (1)**

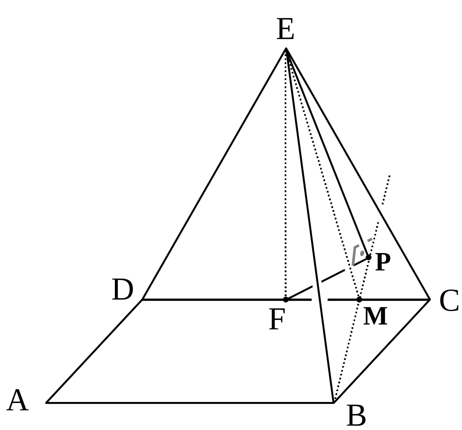
Prof. Poenaru Dan , Colegiul Economic „I.Pop” Cluj - Napoca

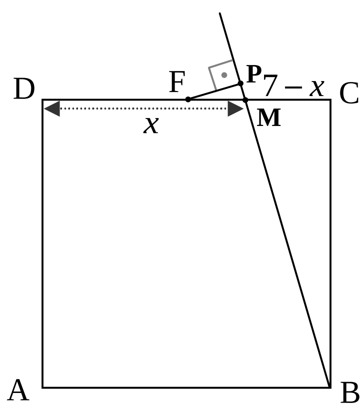
Aplicaţia nr.1

> Se dau pătratul $ABCD$ şi triunghiul echilateral EDC astfel încât $(EDC)\perp(ABC)$ cu $AB=7$. Să se determine poziţiile unui punct mobil $M\in[DC]$ astfel încât aria triunghiului MBE să fie minimă respectiv maximă.



SOLUŢIE: Fie $F\in[DC]$ astfel încât $EF\perp DC$. Din $EF\perp DC$ şi $(EDC)\perp(ABC)$ $\Rightarrow EF\perp(ABC)$. Construim $P\in(BM$ astfel încât $FP\perp BM$. Din $EF\perp(ABC)$ şi $FP\perp BM\overset{T3\perp}{\Rightarrow}EP\perp BM$ ceea ce înseamnă că EP este înălţime în triunghiul MBE . Astfel, $A_{\Delta MBE}=\dfrac{BM\cdot EP}{2}$ (1) . Notăm cu $x=DM\Rightarrow MC=7-x$. Din triunghiul





dreptunghic BCM avem $MB=\sqrt{(7-x)^2+7^2}=\sqrt{x^2-14x+98}$ (2).

$A_{\Delta MBF}=\dfrac{FM\cdot 7}{2}=\dfrac{7(2x-7)}{4}$; aria aceluiaşi triunghi este

$$A_{\Delta MBF}=\frac{MB\cdot FP}{2}\Rightarrow\frac{7(2x-7)}{4}=\frac{MB\cdot FP}{2}\Rightarrow FP=\frac{7(2x-7)}{2\cdot MB}\overset{(2)}{=}\frac{7(2x-7)}{2\cdot\sqrt{x^2-14x+98}}.$$

Din triunghiul EFP , dreptunghic în F , obţinem:

$$EP=\sqrt{EF^2+FP^2}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{7^2(2x-7)^2}{4(x^2-14x+98)}}=\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{7x^2-70x+7^3}}{\sqrt{x^2-14x+98}}\ .$$

În final din (1) şi (3) avem $A_{\Delta MBE}=\frac{7}{4}\cdot\sqrt{7x^2-70x+7^3}$ ceea ce permite construcţia

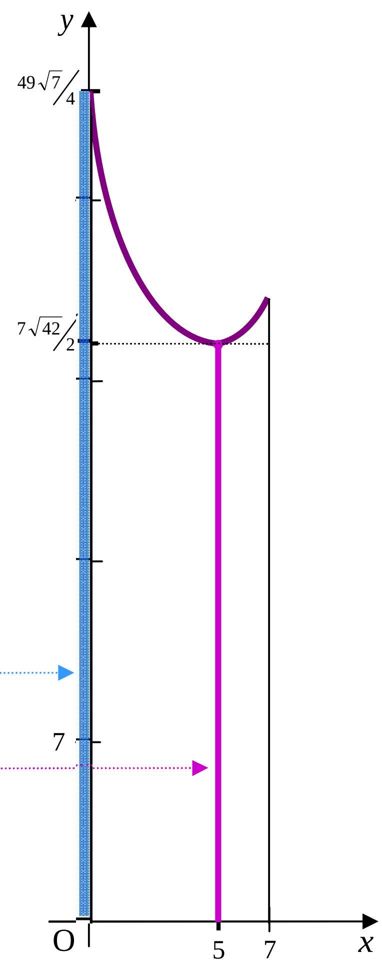
funcţiei: $f:[0,7]\to R$, $f(x)=\frac{7}{4}\sqrt{7x^2-70x+7^3}$

Funcţia este continuă şi derivabilă pe [0,7] iar derivata ei are expresia:

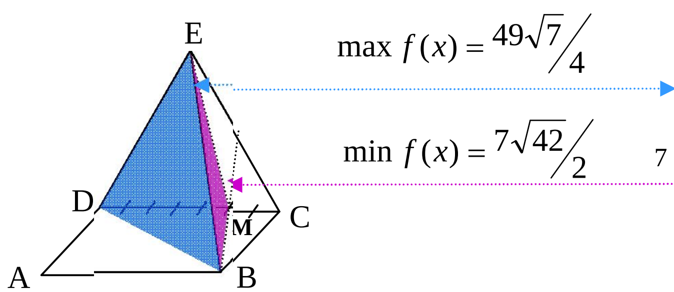
$f'(x)=\frac{49}{4}\cdot\frac{x-5}{\sqrt{7x^2-70x+7^3}}$; ecuaţia $f'(x)=0$

are soluţia $x_0=5$ iar $f(5)=\frac{7\sqrt{42}}{2}$

Prezentăm alături tabelul de variaţie şi graficul aferent ce pune în evidenţă şi valorile minimă şi maximă a funcţiei respectiv a ariei invocată în problemă.



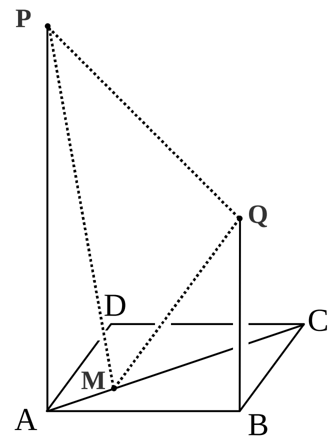
x	0		5		7
$f'(x)$		- - - - - - - -	0	+ + + + + +	
$f(x)$	$\frac{49\sqrt{7}}{4}$	↘ ↘ ↘	$\frac{7\sqrt{42}}{2}$	↗ ↗ ↗	$\frac{49}{2}$



Aplicaţia nr.2

Se dă pătratul $ABCD$ de latură $AB = 1$. Pe planul pătratului, în A şi B, se ridică perpendicularele PA şi QB astfel încât $PA = 2$ respectiv $QB = 1$.

Să se studieze variaţia ariei triunghiului MQP dacă M este un punct variabil al segmentului $[AC]$.

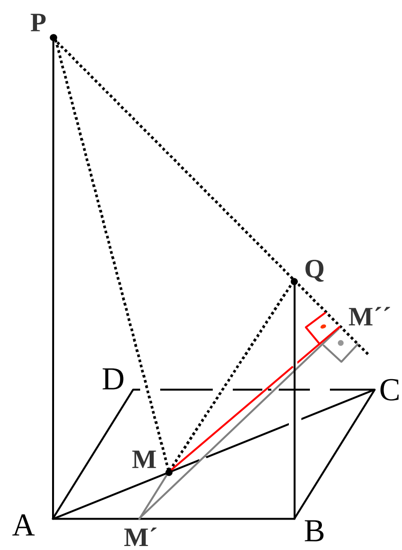


SOLUŢIE: Notăm $AM = x$. Construim $MM' \perp AB$ şi $M'M'' \perp PQ$

Din $\left.\begin{matrix} MM' \perp (ABQ) \\ M'M'' \perp PQ \end{matrix}\right| \overset{T3\perp}{\Rightarrow} MM'' \perp PQ \Rightarrow d(M, PQ) = MM''$. Aşadar MM'' este înălţime

În triunghiul PQM, astfel $\mathcal{A}_{\Delta MQP} = \dfrac{PQ \cdot MM'}{2}$ (1)

În planul trapezului dreptunghic $PABQ$, utilizând metoda calculului de arii în două moduri, se obţine $M'M'' = \dfrac{2\sqrt{2} - x}{2}$; apoi, triunghiul $MM'M''$ fiind dreptunghic în M', aplicăm teorema lui Pitagora avem: $MM'' = \dfrac{1}{2}\sqrt{3x^2 - 4\sqrt{2}x + 8}$. Înlocuind în (1) obţinem aria triunghiului MQP :



$$\mathcal{A}_{\Delta MQP} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{3x^2 - 4\sqrt{2}x + 8}$$

Funcţia cu ajutorul căreia vom studia variaţia ariei triunghiului MQP este:

$$f : [0, \sqrt{2}] \to R, \quad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{3x^2 - 4\sqrt{2}x + 8}$$

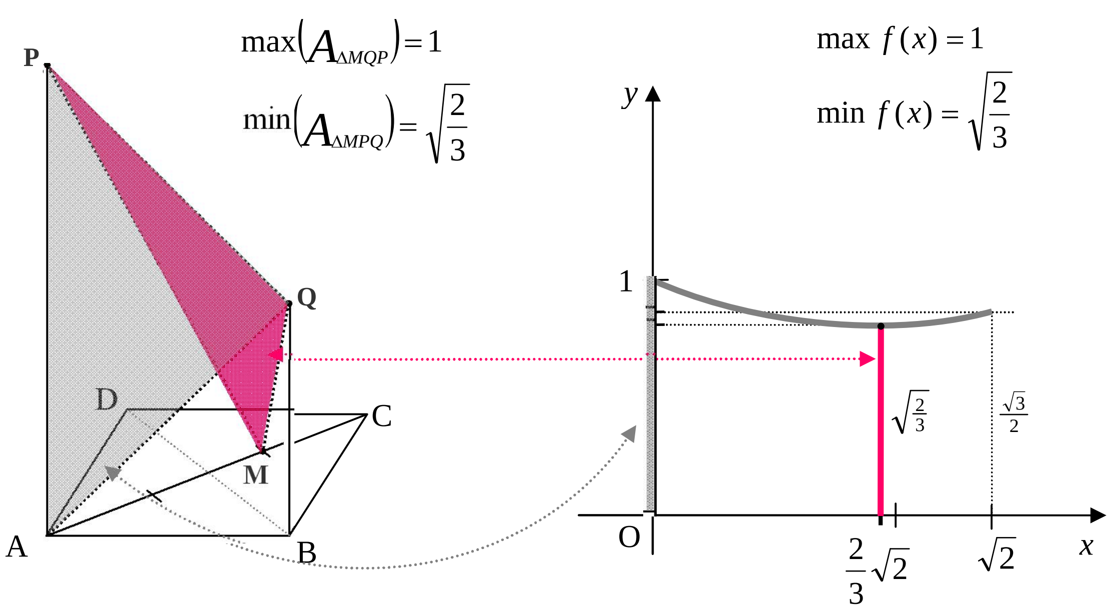
În vederea întocmirii tabloului de variaţie sunt utile u rmătoarele calcule:

$f(0)=1$ şi $f(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (valorile funcţiei la capetele domeniului)

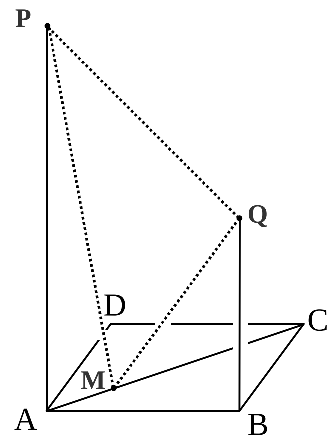
Derivata funcţiei este dată de $f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{3x-2\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2-4\sqrt{2}x+8}}$; derivata se anulează pentru $x_0=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ iar valoarea funcţiei este $f(x_0)=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Urmează tabloul de variaţie şi graficul funcţiei ilustrându -se conexiunile aferente:

x	0		$2\sqrt{2}/3$		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$- - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + + + +$	
$f(x)$	1	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	$\sqrt{2/3}$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$\sqrt{3}/2$

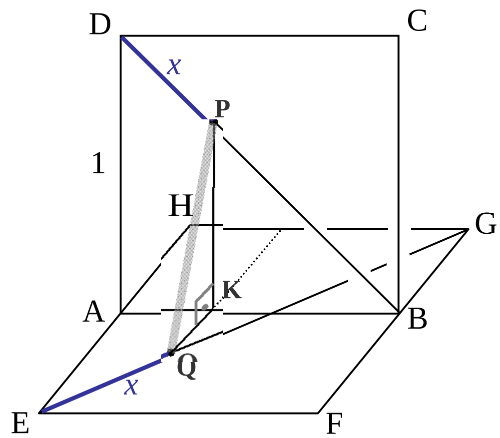


Aplicaţia nr.3



Pătratele congruente $ABCD$ (A şi C opuse)şi $EFGH$ (E şi G opuse) sunt situate în plane perpendiculare astfel încât A şi B sunt mijloacele laturilor $[EF]$ respectiv $[FG]$. Fie $P \in [DB], Q \in [EG]$ puncte variabile astfel încât $[DP] \equiv [EQ]$.

Dacă $AB = 1$, să se studieze variaţia distanţei PQ.



SOLUŢIE: Notăm $DP = x = EQ$. Construim $PK \perp AB$; dar $PK \subset (ABC)$ şi $(ABC) \perp (EFG) \Rightarrow PK \perp (EFG)$. Din $PK \perp (EFG)$ şi $KQ \subset (EFG) \Rightarrow PK \perp QK \Rightarrow \Delta PKQ$ este dreptunghic în K. Din $PK \parallel AD \Rightarrow \frac{PK}{AD} = \frac{BP}{BD}$

$\Rightarrow PK = \frac{AD \cdot BP}{BD} = \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}$. Asemănător se află şi $QK = \frac{1 - \sqrt{2}x}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PKQ obţinem:

$$PQ = \sqrt{PK^2 + QK^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4x^2 - 6\sqrt{2}x + 5}}{2}$$

Relativ la variabila x şi distanţa PQ se construieşte funcţia:

$$f : \left[0, \sqrt{2}\right] \to R, \quad f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 6\sqrt{2}x + 5}}{2}$$

Elemente premergătoare trasării graficului: $f(0) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}$

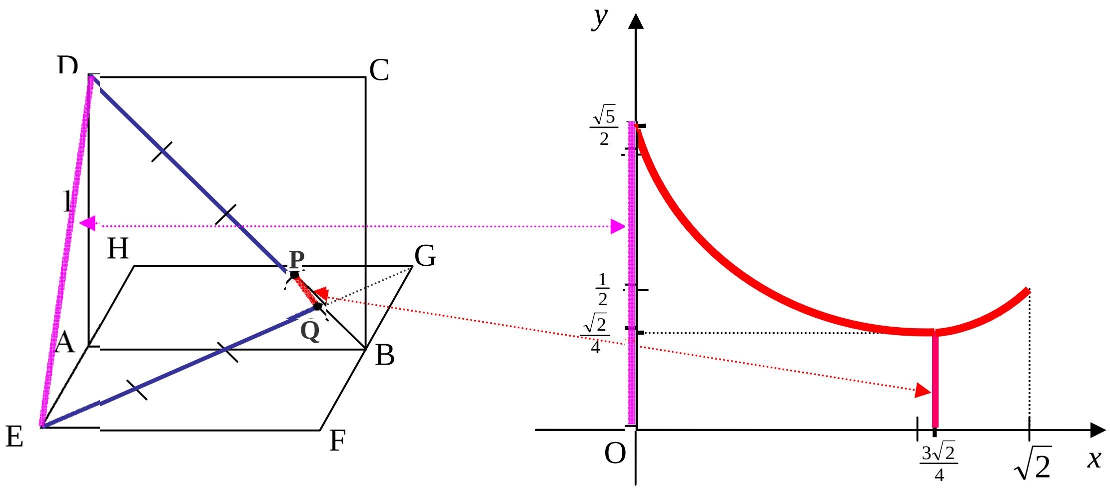
Derivata funcţiei este dată de $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x-3\sqrt{2}}{\sqrt{4x^2-6\sqrt{2}x+5}}$, apoi ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţia $x_0=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ iar valoare funcţiei este $f(x_0)=\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Urmează tabloul de variaţie şi graficul funcţiei:

x	0		$3\sqrt{2}/4$		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	$\sqrt{5}/2$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	$1/4\sqrt{2}$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$1/2$

$\max PQ=\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $\max f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

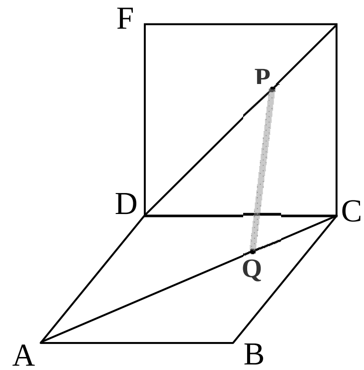
$\min PQ=\frac{1}{4}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\min f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{2}$



Aplicaţia nr.4

Pătratele congruente $ABCD$ (A şi C opuse)şi $DCEF$ (D şi E opuse) sunt situate în plane perpendiculare.

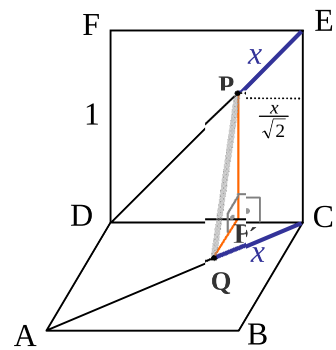
Două puncte mobile $P \in [ED], Q \in [CA]$ parcurg distanţa de la E la D respectiv de la C la A pornind în acelaşi moment şi cu aceeaşi viteză.



SOLUŢIE: Notăm $EP = x = CQ$. Construim $PP' \perp DC$; dar $PP' \subset (DCE)$ şi $(DCE) \perp (ABC) \Rightarrow PP' \perp (ABC)$. Din $PP' \perp (ABC)$ şi $P'Q \subset (ABC) \Rightarrow PP' \perp P'Q \Rightarrow \Delta PP'Q$ este dreptunghic în P'. Se pot calcula relativ uşor catetele acestui dreptunghi şi anume:

$QP' = \frac{x}{\sqrt{2}}$ şi $PP' = 1 - \frac{x}{\sqrt{2}}$, apoi aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $PP'Q$

se obţine $PQ = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$.



Se ajunge la $PQ = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$. Studiem în continuare această distanţă prin studiul variaţional al funcţiei:

$$f : \left[0, \sqrt{2}\right] \to R, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

Elemente premergătoare trasării graficului funcţiei: $f(0) = 1 = f\left(\sqrt{2}\right)$; derivate funcţiei are expresia : $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}}$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iar valoarea funcţiei în x_0 este $f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Prezentăm în continuare tabloul de variaţie

x	0		$\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$- - - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + + + +$	
$f(x)$	1	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	1

Graficul funcţiei este prezentat alături de figura geometrică aferentă problemei; aceasta pune în evidenţă posibilitatea de ,,monitorizare" a distanţei prin studiul variaţiei funcţiei.

$\max PQ = 1$ $\qquad\qquad$ $\max f(x) = 1$

$\min PQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\min f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$