

Revista Electronică MateInfo.ro

SEPTEMBRIE 2012

ISSN 2065 – 6432

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

- | | |
|---|---------|
| 1. Alte soluții pentru problema G:330 din S.M. IX - 2012-08-27 | Pag.2 |
| 2. Demonstrarea unor inegalități geometrice folosind substituțiile Ravi | Pag. 5 |
| 3. PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL “ARII ȘI VOLUME ALE POLIEDRELOR” MATEMATICĂ – GEOMETRIE – clasa a VIII-a | Pag. 14 |
| 4. A generalization of the problem J209 from Mathematical Reflections 5 (2011) | Pag. 27 |
| 5. Problema lunii august 2012 | Pag. 28 |

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

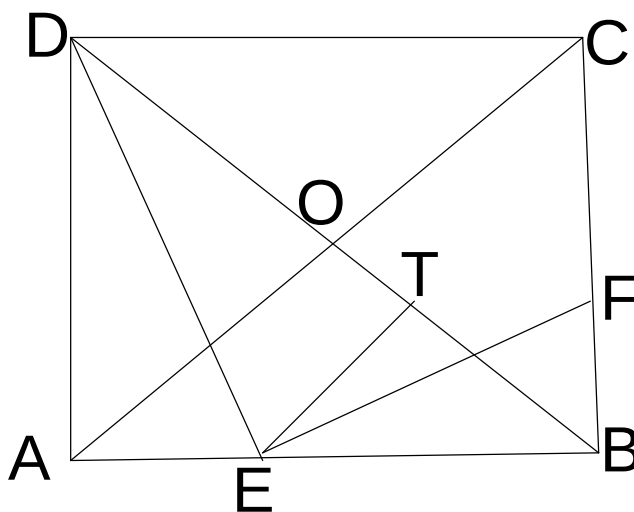
1. Alte soluții pentru problema G:330 din S.M. IX - 2012-08-27**de Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău**

Problema **G:330** din revista de matematică **Sclipirea Minții** are următorul enunț:

”În pătratul $ABCD$ se consideră punctele E pe (AB) și F pe (BC) astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$.
Arătați că $\angle BDE = \angle BEF$.”

Soluția autorului, prof. *Constantin Apostol* din Râmnicu Sărat, va fi publicată în **S.M. X-2012**.

Prezentăm în continuare alte soluții:

Soluția 1.

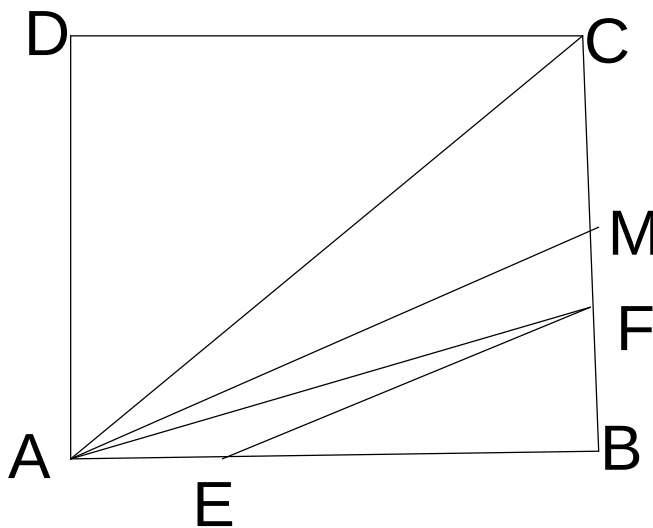
Notăm $\{O\} = AC \cap BD$ și fie T proiecția punctului E pe diagonala BD .

Deoarece $EB = 2AE$ și $OA = OB$, din asemănarea triunghiurilor BET și BAO , obținem:

$$\frac{TE}{OA} = \frac{EB}{AB} = \frac{TB}{OB} \Rightarrow TE = TB = \frac{2}{3} \cdot OB, \text{ adică } TE = TB = \frac{1}{3} \cdot BD \text{ și } DT = \frac{2}{3} \cdot BD.$$

Rezultă $\frac{TE}{DT} = \frac{1}{2} = \frac{BF}{BE}$, deci $\angle BDE = \angle BEF$.

Soluția 2.



Este ușor de văzut că: $\angle BDE = \angle CAF$. Ducem prin A paralela la EF; aceasta intersectează latura BC în punctul M. Avem:

$$\frac{EB}{BA} = \frac{FB}{BM} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{AB}{3 \cdot BM} \Rightarrow BM = \frac{AB}{2}, \text{ adică } M \text{ este mijlocul laturii } BC.$$

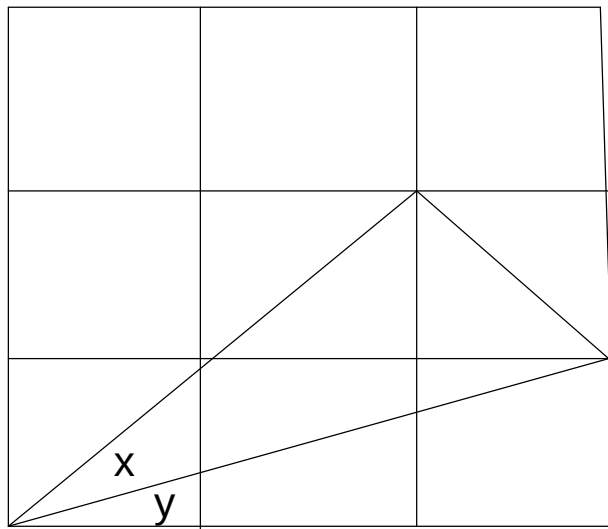
Deoarece $\frac{BF \cdot BM}{CM \cdot CF} = \frac{AB}{3} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{2}{AB} \cdot \frac{3}{2 \cdot AB} = \frac{AB^2}{AC^2}$, conform reciprocei teoremei lui Steiner pentru izogonale, rezultă că AF și AM sunt izogonale în triunghiul ABC, deci $\angle BEF = \angle BAM = \angle CAF = \angle BDE$.

Soluția 3. Notăm $x = \angle BEF$, $y = \angle ADE$, și vom arăta că $x + y = 45^\circ$, ceea ce demonstrează concluzia dorită deoarece $y + \angle BDE = 45^\circ$.

$$\text{Avem } \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}, \text{ adică } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \text{ și } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Vom arăta pe două căi că $x + y = 45^\circ$.

- (i) o demonstrație ”fără cuvinte” pentru relația: $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2} = 45^\circ$.



- (ii) O demonstrație pentru ale cărei detalii ne-am folosit de [1].
Avem:

$$\operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1;$$

cum

$$0 < \frac{1}{2} < 1, \quad 0 < \frac{1}{3} < 1,$$

și funcția $\arctg$ este strict crescătoare, deducem:

$$0 < \arctg \frac{1}{2} < 45^\circ, \quad 0 < \arctg \frac{1}{3} < 45^\circ,$$

adică

$$0 < \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} < 90^\circ.$$

Din această ultimă inegalitate și din

$$\operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}\right) = 1,$$

rezultă că

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 45^{\circ},$$

deci

$$x + y = 45^{\circ}.$$

Bibliografie:

[1] **L. Panaitopol**, *Cum am rezolvat o problemă*, **GM-A**, 1973, pp. 31-33.

Notă: Lucrarea citată a fost reprodusă în **Didactica Matematică** (supliment al **GM**), anul II, nr. 1/2012, pp. 11-13.

2. Demonstrarea unor inegalități geometrice folosind substituțiile Ravi

Profesor Codreanu Ioan Viorel

Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

În acest articol vom prezenta o metodă de rezolvare a inegalităților geometrice folosind substituțiile **Ravi** și inegalități algebrice clasice.

Propoziție. Numerele a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă există $x, y, z > 0$ astfel încât $a = y + z, b = z + x, c = x + y$.

Demonstrație. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, luăm

$x = p - a > 0, y = p - b > 0, z = p - c > 0$. Avem $y + z = p - b + p - c = a$ și analoagele.

Reciproc, dacă $a = y + z, b = z + x, c = x + y$, atunci $2x = b + c - a > 0$, adică $a < b + c$ și analoagele, relații ce arată că se poate forma un triunghi de laturi a, b, c .

În concluzie dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci pentru orice inegalitate geometrică există o inegalitate algebrică de forma $F(x, y, z) \geq 0$ sau $(\leq, >, < 0)$. Substituțiile $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ sunt cunoscute sub denumirea de substituțiile **Ravi**.

Folosind propoziția vom scrie în funcție de x, y, z unele relații cunoscute din geometria triunghiului.

$$\begin{aligned}
 & \bullet p = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z \\
 & \bullet S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(\sum x)(\prod x)} \\
 & \bullet R = \frac{abc}{4S} = \frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}} \\
 & \bullet r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} \\
 & \bullet r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{x} \\
 & \bullet \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \\
 & \bullet \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{x \sum x}{(x+y)(x+z)}} \\
 & \bullet \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{yz}{x \sum x}}
 \end{aligned}$$

În continuare vom demonstra câteva inegalități geometrice folosind substituțiile **Ravi** și inegalități algebrice clasice. Notățiile sunt cele obișnuite într-un triunghi iar unele enunțuri vor fi ușor modificate.

1. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\prod (h_a - 2r) \leq r^3$$

Marius Olteanu, Arhimede nr. 9-10, 2003

Soluție. Să exprimăm h_a în funcție de x, y, z . Avem $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{y+z}$ și

analoagele. Atunci inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\begin{aligned} \prod \left(\frac{2\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{y+z} - 2\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} \right) &\leq \sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^3 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^3 \cdot \prod \left(\frac{\sum x}{y+z} - 1 \right) \leq \sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^3 \\ \Leftrightarrow 8\prod \frac{x}{y+z} &\leq 1 \Leftrightarrow \prod (x+y) \geq 8\prod x \end{aligned}$$

Ultima inegalitate se obține din aplicarea inegalității mediilor MA-MG, mai exact avem

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $y+z \geq 2\sqrt{yz}$, $z+x \geq 2\sqrt{zx}$ și înmulțind aceste inegalități obținem

$$\prod (x+y) \geq 8\prod x.$$

2. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2} \sum \frac{a^2}{bc} \geq 2 - \frac{r}{R}$$

I.V. Maftei și P.G. Popescu, La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola

Soluție. Avem $\frac{1}{2} \sum \frac{a^2}{bc} \geq 2 - \frac{r}{R} \Leftrightarrow \sum \frac{a^2}{bc} + \frac{2r}{R} \geq 4$. Ultima inegalitate se scrie succesiv

$$\begin{aligned} \sum \frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}}{\frac{\prod (x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}} &\geq 4 \Leftrightarrow \sum \frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{8\prod x}{\prod (x+y)} \geq 4 \\ \Leftrightarrow \frac{\sum (y+z)^2}{\prod (x+y)} + \frac{8\prod x}{\prod (x+y)} &\geq 4 \Leftrightarrow \sum (y+z)^2 + 8\prod x \geq 4\prod (x+y) \end{aligned}$$

după care folosind identitățile $\sum (y+z)^3 = 2\sum x^3 + 3\sum xy(x+y)$ și

$\prod (x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x$ ultima inegalitate se scrie echivalent

$$2\sum x^3 + 3\sum xy(x+y) + 8\prod x \geq 4\sum xy(x+y) + 8\prod x \Leftrightarrow 2\sum x^3 \geq \sum xy(x+y) \quad (1)$$

Arătăm că $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$. Avem

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0 \text{ ce evident are loc. Similar,}$$

$y^3 + z^3 \geq y^2z + yz^2$ și $x^3 + z^3 \geq x^2z + xz^2$, iar după suma acestor inegalități rezultă (1).

3. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$2\left(\sum r_a\right)\left(\sum \frac{r_a}{a}\right) \geq 9p$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Gazeta Matematică nr. 4, 2005

Soluție. Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\begin{aligned} 2\left(\sum \frac{\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{x}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{x(y+z)}\right) &\geq 9\sum x \Leftrightarrow 2(\sum x)(\prod x)\left(\sum \frac{1}{x}\right)\left(\sum \frac{1}{x(y+z)}\right) \geq 9\sum x \\ \Leftrightarrow 2(\sum xy)\left(\sum \frac{1}{x(y+z)}\right) &\geq 9 \Leftrightarrow (\sum xy)\left(\sum \frac{1}{xy}\right) \geq 9 \end{aligned}$$

unde am folosit identitățile $(\prod x)\left(\sum \frac{1}{x}\right) = \sum xy$ și $\sum x(y+z) = 2\sum xy$. Ultima inegalitate rezultă ușor aplicând inegalitatea mediilor MH-MA pentru numerele xy, yz, zx .

4. Demonstrați că în orice triunghi au loc inegalitățile

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{4r-R}{R} \leq \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$$

A. Roșianu, The American Mathematical Monthly, 2007

Soluție. Inegalitatea din dreapta se scrie $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ care este tocmai inegalitatea mediilor

MA-MG pentru numerele y și z . Inegalitatea din stânga o scriem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{2} \cdot \frac{4\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} - \frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}}{\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}} &\leq \sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \cdot \frac{16\prod x - \prod(x+y)}{\prod(x+y)} \leq \sqrt{yz} \\ \Leftrightarrow 16\prod x - \prod(x+y) &\leq 2(x+y)(x+z)\sqrt{yz} \Leftrightarrow 16\prod x \leq (x+y)(x+z)(2\sqrt{yz} + y+z) \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea mediilor MA-MG, avem $y+z \geq 2\sqrt{yz}$ și analoagele.

Atunci

$$(x+y)(x+z)(2\sqrt{yz} + y+z) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 4\sqrt{yz} = 16\prod x$$

și soluția se încheie.

5. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum r_a l_a \leq p^2$$

Viorel Gh. Vodă, Vraja geometriei demodate, pag. 215**Soluție.** Pentru început să găsim o inegalitate în funcție de x, y și z pentru l_a . Avem

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)} \leq \sqrt{p(p-a)}, \text{ unde am folosit}$$

inegalitatea mediilor MA-MG: $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \leq 1$, deci $l_a \leq \sqrt{x \sum x}$ și analog

$$l_b \leq \sqrt{y \sum x}, l_c = \sqrt{z \sum x}. \text{ Avem}$$

$$\sum r_a l_a \leq \sum \frac{\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{x} \cdot \sqrt{x \sum x} = (\sum x)(\sum \sqrt{yz}) \leq (\sum x) \left(\sum \frac{y+z}{2} \right) = (\sum x)^2 = p^2$$

unde am folosit inegalitatea mediilor MA-MG: $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ și identitatea $\sum \frac{y+z}{2} = \sum x$.**6. În orice triunghi are loc inegalitatea**

$$\sqrt{p} \sum \sqrt{a} \leq \sqrt{2} \sum r_a$$

George Tsintsifas, Crux Mathematicorum**Soluție.** Trebuie să demonstrăm inegalitatea

$$\sum x^2(x+y)(x+z) \geq \frac{(\sum x)(\prod (x+y))}{2}$$

echivalentă cu

$$(\prod (x+y)) \cdot \sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{(\sum x)(\prod (x+y))}{2}$$

care devine

$$\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{\sum x}{2}.$$

Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, obținem

$$\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{(\sum x)^2}{\sum (y+z)} = \frac{(\sum x)^2}{2 \sum x} \geq \frac{\sum x}{2}$$

și soluția se încheie.

8. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{\prod a}{r} \geq \sum \frac{a^3}{r_a}$$

Ho Quang Vinh, The Mathscope

Soluție. Inegalitatea din enunț se scrie

$$\frac{\prod (y+z)}{\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}} \geq \sum \frac{(y+z)^3}{\frac{\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}{x}} \Leftrightarrow (\sum x)(\prod (y+z)) \geq \sum x(y+z)^3$$

În continuare folosind identitățile

$$\prod (x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x \text{ și } \sum x(y+z)^3 = \sum xy^3 + 3\sum xy^2z + 3\sum xyz^2 + \sum xz^3$$

ultima inegalitate se scrie

$$(\sum x)(\sum xy(x+y)) + 2\prod x \geq \sum xy^3 + 3\sum xy^2z + 3\sum xyz^2 + \sum xz^3$$

care după efectuarea calculelor și reducerea termenilor asemenea se transformă în

$$\sum x^2y^2 \geq (\prod x)(\sum x).$$

Folosind inegalitatea cunoscută $\sum \alpha^2 \geq \sum \alpha\beta$, obținem

$$\sum x^2y^2 \geq \sum xyxz = (\prod x)(\sum x)$$

și soluția se încheie.

9. Demonstrați că în orice triunghi au loc inegalitățile

$$9r(4R+r) \leq 3p^2 \leq (4R+r)^2$$

G. Colombier și T. Doucet, 1872, [3], pag. 103

Soluție. Să demonstrăm inegalitatea din dreapta. După înlocuiri și folosirea identității

$$\prod (x+y) + \prod x = (\sum x)(\sum xy)$$

avem

$$3(\sum x)^2 \leq \left(4 \cdot \frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}} + \sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} \right)^2 \Leftrightarrow 3(\sum x)^2 \leq \frac{(\prod(x+y) + \prod x)^2}{(\sum x)(\prod x)}$$

$$\Leftrightarrow 3(\sum x)(\prod x) \leq (\sum xy)^2$$

Folosind inegalitatea cunoscută $(\sum \alpha)^2 \geq 3\sum \alpha\beta$, obținem

$$(\sum xy)^2 \geq 3\sum xyxz = 3(\prod x)(\sum x)$$

ce încheie soluția.

Inegalitatea din stânga se reduce la $(\sum x)^2 \geq 3\sum xy$. Într-adevăr, avem succesiv

$$9\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} \cdot \left(4 \cdot \frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\prod x)(\sum x)}} + \sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} \right) \leq 3(\sum x)^2 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{\prod(x+y) + \prod x}{\sum x} \leq 3(\sum x)^2$$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{(\sum x)(\sum xy)}{\sum x} \leq (\sum x)^2 \Leftrightarrow (\sum x)^2 \geq 3\sum xy$$

și soluția se încheie.

10. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum a^4 - \sum a^3(b+c) + \sum a^2bc \geq 0$$

Problemă propusă în [1]

Soluție. Folosind identitatea $\sum a^2bc = (\prod a)(\sum a)$ inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\sum (y+z)^4 - \sum (y+z)^3(y+z+2x) + 2(\prod(x+y))(\sum x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (y+z)^4 - \sum (y+z)^4 - 2\sum x(y+z)^3 + 2(\prod(x+y))(\sum x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\prod(x+y))(\sum x) \geq \sum x(y+z)^3.$$

Folosind identitățile

$$\sum x(y+z)^3 = \sum x(y^3+z^3) + 6(\prod x)(\sum x) \text{ și } \prod(x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x$$

ultima inegalitate se scrie echivalent

$$(\sum xy(x+y) + 2\prod x)(\sum x) \geq \sum x(y^3+z^3) + 6(\prod x)(\sum x)$$

$$\Leftrightarrow (\sum x)(\sum xy(x+y)) \geq \sum x(y^3+z^3) + 4(\prod x)(\sum x)$$

În continuare, utilizând identitatea

$$(\sum x)(\sum xy(x+y)) = \sum x(y^3 + z^3) + 2\sum x^2 y^2 + 2(\prod x)(\sum x)$$

ultima inegalitate se scrie echivalent

$$2\sum x^2 y^2 + 2(\prod x)(\sum x) \geq 4(\prod x)(\sum x) \Leftrightarrow \sum (xy)^2 \geq (\prod x)(\sum x).$$

Avem

$$\sum (xy)^2 \geq \sum xy yz = (\prod x)(\sum x)$$

ce încheie soluția.

11. Demonstrați că în orice triunghi $\triangle ABC$, are loc inegalitatea

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geq 4 \sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

Călin Popa, [4], pag. 89

Soluție. Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{yz}{x \sum x}} + \sqrt{\frac{x \sum x}{yz}} &\geq 4 \sqrt{\frac{x}{\sum x}} \Leftrightarrow \frac{yz + x \sum x}{\sqrt{(\prod x)(\sum x)}} \geq 4 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sum x}} \\ \Leftrightarrow yz + x \sum x &\geq 4 \sqrt{x \prod x} \Leftrightarrow yz + x^2 + xy + xz \geq 4x \sqrt{yz} \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea mediilor MA-MG obținem

$$yz + x^2 + xy + xz \geq 4 \sqrt[4]{yz x^2 xy xz} = 4x \sqrt{yz}$$

ce încheie soluția.

12. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\prod II_a \leq 8R^3$$

Art of Problem Solving, Geometric Inequalities Marathon

Soluție. Folosind egalitatea $II_a = 4R \sin \frac{A}{2}$ și analoagele, obținem

$$\prod II_a \leq 8R^3 \Leftrightarrow 64R^3 \prod \sin \frac{A}{2} \leq 8R^3 \Leftrightarrow \prod \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Inegalitatea cunoscută $\prod \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{8}$ se demonstrează ușor folosind substituțiile Ravi. După

înlocuiri aceasta se scrie

$$\prod \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8\prod x \leq \prod (x+y)$$

Folosind inegalitatea mediilor obținem $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ și alte două inegalități similare.

Înmulțind aceste trei inegalități rezultă $\prod (x+y) \geq 8\prod x$.

Bibliografie:

- [1] Mircea Lascu, *Inegalități geometrice demonstrate prin dualitate*, Gazeta matematică nr. 4, 1989.
- [2] Mircea Ganga, *Teme și probleme de matematică*, Editura Tehnică, București, 1991.
- [3] Viorel Gh. Vodă, *Vraja geometriei demodate*, Editura Albatros, București, 1983.
- [4] Titu Andreescu, Marius Ghergu, Dinu Șerbănescu, Ion Șerdean, *Olimpiadele de matematică 2003, clasele IX-X*, Editura Gil, Zalău, 2003.

3. PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL “ARII ȘI VOLUME ALE POLIEDRELOR” MATEMATICĂ – GEOMETRIE – clasa a VIII-a

Profesor CAMELIA GRIGORAȘ
Școala “Petru Poni” IAȘI

Prezentul articol face parte dintr-o lucrare mai amplă care a fost gândită și concepută ca o continuare firească și de întregire a unei lucrări publicată anterior **Arii-matematică geometrie pentru clasa a VII-a**. Ea se adresează de data aceasta elevilor din clasa a VIII-a, și nu numai, care stăpânesc deja geometria plană și descoperă în clasa a VIII-a tainele geometriei în spațiu.

Lucrarea vine în sprijinul aceluia elev ideal care dorește să-și aprofundeze și să-și extindă cunoștințele cumulate la clasă, este utilă deasemenea și elevului care, indiferent de pregătire, aptitudine matematică și ritm propriu de dezvoltare poate să abordeze sarcini simple sau complexe și oferă tuturor categoriilor de elevi un instrument util în activitățile de pregătire a examenelor și concursurilor de matematică și interdisciplinare.

În speranța că, parcurgând această lucrare,... rezolvând învățând și învățând rezolvând..., veți dobândi competențe pentru a rezolva orice problemă de arii și volume, vă doresc spor în apropierea de matematică și obținerea succesului școlar.

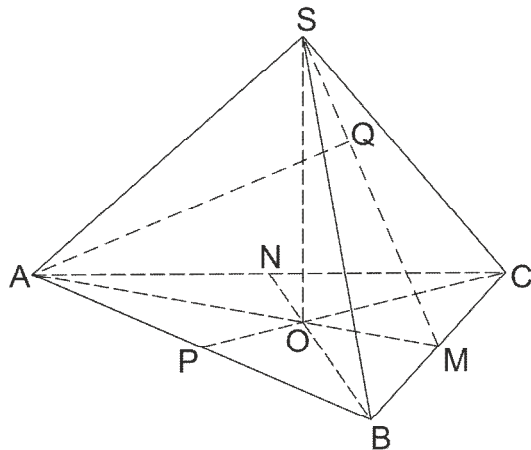
Mulțumesc mentorului meu, regretatul Prof. Univ. Dr. Dan Brânzei, pentru îndemnul de a continua a scrie, pentru observațiile, sfaturile și recomandările pe care le-am primit la redactarea lucrării.

Autoarea

Problema rezolvată 1

Fie piramida triunghiulară regulată $SABC$ cu latura bazei de lungime 10 cm și înălțimea de lungime 5 cm.

- Calculați aria laterală, totală și volumul.
- Calculați distanța de la A la planul (SBC) .
- Calculați $\sin \angle (SA, (SBC))$.



(figura 1)

Soluție:

$$a) A_l = 3 \cdot A_{\triangle SBC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SM$$

SM calculăm din $\triangle SOM$, $m(\angle SOM) = 90^\circ$, $SO = 5$ cm, $OM = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm, aplicând Teorema lui Pitagora.

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 \Rightarrow SM = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm};$$

$$A_l = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2, A_t = A_l + A_{\triangle ABC} = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 5 = \frac{125\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

b) Fie $AQ \perp (SBC)$. Cum $(SAM) \perp (SBC)$, rezultă că $AQ \subset (SAM)$, AQ va fi înălțime în $\triangle SAM$ deci, $d(A, (SBC)) = AQ$. Pentru a calcula AQ , exprimăm volumul piramidei în două moduri :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta SBC} \cdot AQ$$

$$A_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

$$\frac{125\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{50\sqrt{3}}{3} \cdot AQ \Rightarrow AQ = \frac{15}{2} \text{ cm, deci, } d(A, (SBC)) = \frac{15}{2} \text{ cm.}$$

$$c) \text{ În } \Delta SAQ \text{ dreptunghic cu } m(\angle(SQA)) = 90^\circ, AQ = \frac{15}{2} \text{ cm, } SA = \frac{5\sqrt{21}}{3} \text{ cm, } \sin(\angle(SQA))$$

$$= \frac{AQ}{SA} = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

Problema rezolvată 2

Fie SABC un tetraedru regulat și M mijlocul muchiei SC.

- Să se demonstreze că dreapta SC este perpendiculară pe planul (MAB).
- Să se afle raportul dintre volumele piramidelor SABM și MABC.
- Să se arate că ariile totale ale piramidelor SABM și MABC sunt egale.
- Determinați poziția punctului M pe SC pentru ca aria triunghiului ΔABM să fie minimă.

Soluție:

a) [AM] este înălțime în triunghiul echilateral ΔSAC, $AM \perp SC$ (1)

[BM] este înălțime în triunghiul echilateral ΔSBC, $BM \perp SC$ (2)

$AM \cap BM \neq \emptyset$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow SC \perp (AM, MB) \Rightarrow SC \perp (AMB)$.

b) Exprimăm $V_{SABM} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta AMB} \cdot SM$

Exprimăm $V_{CABM} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta AMB} \cdot CM$

Cum $SM = CM$ rezultă că volumele sunt egale deci, raportul volumelor este 1.

c) $A_{\Delta SABM} = A_{\Delta SAB} + A_{\Delta SBM} + A_{\Delta SAM} + A_{\Delta AMB}$

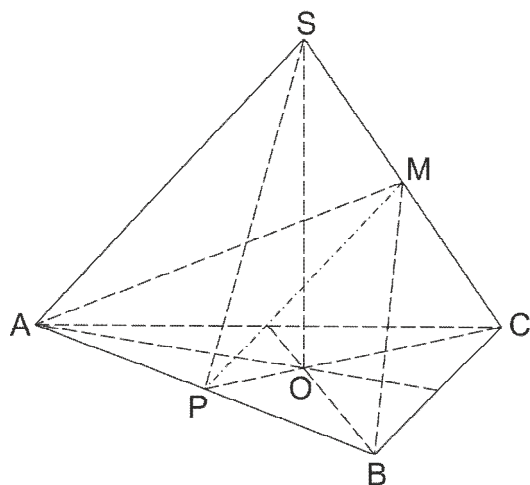
$A_{\Delta CABM} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta CBM} + A_{\Delta CAM} + A_{\Delta AMB}$

Cum triunghiurile sunt congruente două câte două, ariile vor fi egale deci, ariile totale sunt egale.

d) ΔAMB este isoscel cu $[AM] \equiv [MB]$. Fie P mijlocul segmentului [AB], $A_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} \cdot AB$

·MP va fi minimă dacă $MP \perp SC$ și $MP \perp AB$ deci, ca MP să fie minimă, se impune ca $MP \perp SC$.

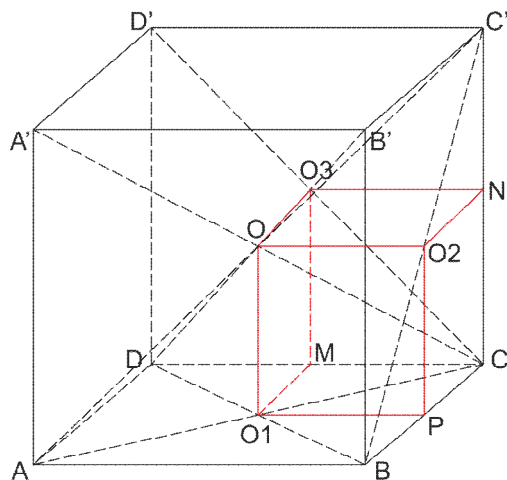
Concluzia finală: dacă M mijlocul segmentului [SC] $\Rightarrow$ PM minimă deci, aria triunghiului va fi minimă.



(figura 2)

Problema rezolvată 3

În cubul $ABCD A'B'C'D'$ de muchie a cm, O este centrul său, O_1 centrul feței $ABCD$, O_2 centrul feței $BB'C'C$, O_3 centrul feței $CDD'C'$, M mijlocul lui $[DC]$, N mijlocul lui $[CC']$ și P al lui $[CB]$. Cum s-a modificat aria corpului rămas față de aria totală a cubului? Dar volumul?



(figura 3)

Soluție:

Aria corpului rămas va fi egală cu aria cubului inițial. Exemplificând, una din fețele pe care le înlăturăm, aria pătratului O_2PCN , se adună la aria laterală a poliedrului - OO_1MO_3 reprezentând fața poliedrului format. Analog și pentru celelalte două fețe.

$$V_{\text{corp}} = a^3 - \frac{1}{8} \cdot a^3 = \frac{7}{8} \cdot a^3.$$

Problema rezolvată 4

Se consideră un cub $ABCD A'B'C'D'$.

a) Să se arate că vârfurile cubului se pot împărți în două mulțimi conținând fiecare patru puncte astfel încât oricare două puncte din aceeași mulțime să nu fie extremitățile unei muchii ale cubului.

b) Să se arate că punctele din fiecare mulțime sunt vârfurile unui tetraedru regulat.

c) Să se arate că fiecare din cele două tetraedre are volumul egal cu $\frac{1}{3}$ din volumul

cubului și aria totală egală cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ din aria totală a cubului.

Soluție:

a) Fie X și Y mulțimile ale căror elemente sunt vârfuri ale cubului și care satisfac condițiile impuse. Atunci $X \cup Y = \{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$ $A \in X \cup Y \Rightarrow A \in X$ sau $A \in Y$.

Dacă $A \in X$, atunci $B, D, A' \notin X$ pentru că B, D, A' sunt extremități ale muchiilor AB, AD, AA' . În acest caz, $B, D, A' \in Y$. Deci, $D', B', C \in X$ și $D', B', C \notin Y$. În sfârșit, $C' \notin X, C' \in Y$. Vom avea : $X = \{A, C, B', D'\}$ și $Y = \{B, D, A', C'\}$

b) Tetraedrele $ACB'D'$ și $BDA'C'$ sunt regulate deoarece au toate muchiile diagonale ale fețelor cubului cu lungimea $a\sqrt{2}$ u.m., dacă notăm muchia cubului cu a (u.m.).

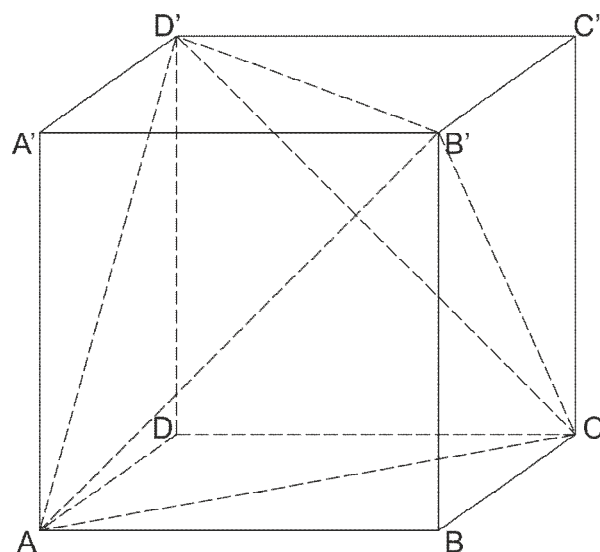
c) Calculăm $V_{ACB'D'} = V_{\text{cub}} - V_{ABCB'} - V_{C'B'CD'} - V_{A'AB'D'} - V_{D'DAC} = V_{\text{cub}} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot$

$$V_{\text{cub}}$$

$$A_t = 2\sqrt{3} a^2$$

$$A_{\text{tcub}} = 6a^2$$

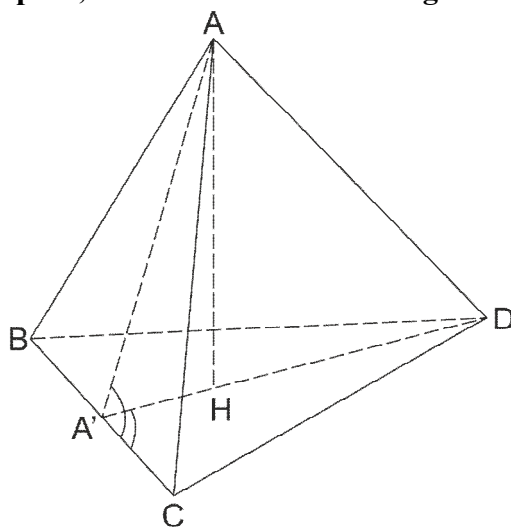
$$A_t / A_{\text{tcub}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



(figura

Problema rezolvată 5

Să se arate că dacă un tetraedru are toate înălțimile egale și una din ele trece prin ortocentrul feței opuse, atunci tetraedrul este regulat.



(figura 5)

Soluție:

Notăm cu H ortocentrul feței BCD unde „cade” înălțimea din A a tetraedrului. Toate înălțimile fiind egale, rezultă că toate fețele au aceeași arie.

Deci, $AA' = DA'$ unde $AA' \perp BC$ și $DA' \perp BC$.

$\triangle AA'B \equiv \triangle DA'C$ (C.C.), analog $\triangle AA'B \equiv \triangle DA'B$ (C.C.) $\Rightarrow [AC] \equiv [CD]$ și $[AB] \equiv [BD]$ (1).

Ducem $BB' \perp CD$ și obținem $[AD] \equiv [BD]$ și $[AC] \equiv [BC]$ (2)

Ducem $CC' \perp BD$ și obținem $[AD] \equiv [DC]$ și $[AB] \equiv [BC]$ (3)

Din relațiile (1), (2), (3), ținând cont că egalitățile sunt disjuncte două câte două obținem egalitatea tuturor muchiilor. Deci, tetraedrul este regulat.

Problema rezolvată 6

O piramidă regulată VABCD are ca bază un pătrat de latură a (u.m.) iar muchiile laterale sunt egale ca lungime cu lungimea diagonalei pătratului de la bază. Prin mijlocul M al muchiei [VA] se duce un plan perpendicular pe muchia [CV].

a) Să se afle aria secțiunii făcută de acest plan în piramida dată.

b) Care este măsura unghiului făcut de planul secțiunii cu planul bazei?

Soluție:

Construim $AE \perp CV$. $\triangle VAC$ este echilateral cu $VA = AC = CV = a\sqrt{2}$, $AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}$;

Construim $MP \perp CV$, MP va fi linie mijlocie în $\triangle VAE$, $MP = \frac{1}{2} AE = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Construim $QN \parallel BD$, $N \in [VB]$, $Q \in [VD]$; $QN = \frac{1}{3} BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Intersecția planului cu piramida este suprafața patrulaterului MNPQ ortodiagonal (care are diagonalele perpendiculare) cu $MP \perp QN$.

Justificare: $VP \perp (MNP)$

$VO' \perp QN$, conform Teoremei reciproce a celor trei perpendiculare ($RT3 \perp$)

$\Rightarrow PQ \perp QN$

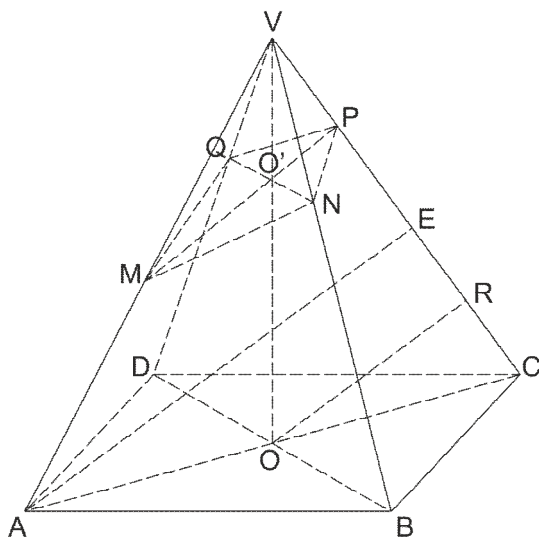
$$A_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot QN = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

b) Construim $QR \perp VC$, $R \in [VC]$.

Avem $O'P \parallel OR \parallel MP$

$QN \parallel BD$, $QN \cap MP \neq \emptyset$, $BD \cap OR \neq \emptyset \Rightarrow (MP, QN) \parallel (QR, BD)$

$\Rightarrow (MNP) \parallel (BRD) \Rightarrow \angle((MNP), (ABC)) = \angle((BRD), (ABC)) = \angle RQC$ (de măsură 30°),
deci măsura unghiului căutat este de 30° .



(figura 6)

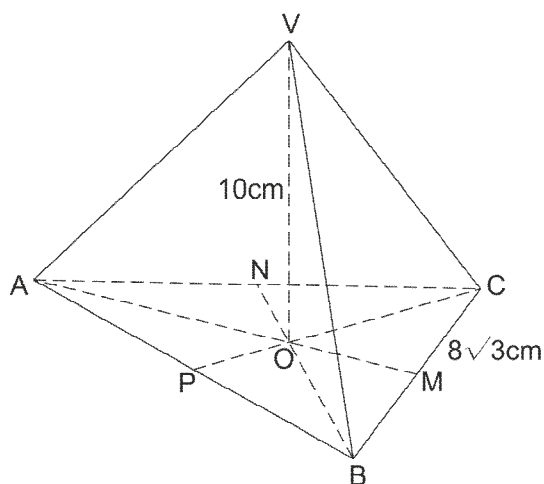
Problema rezolvată 7

Tetraedrul VABC are fața ABC un triunghi echilateral cu latura de lungime $8\sqrt{3}$ cm. Știind că distanța de la V la planul (ABC) este de 10 cm, să se afle volumul său.

Soluție :

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h$$

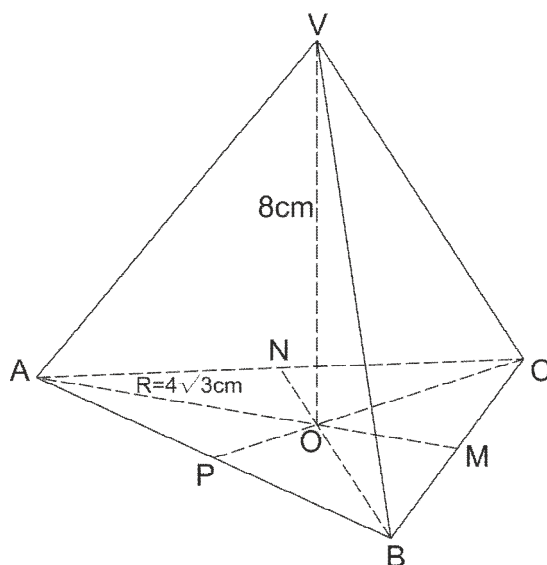
$$A_{\text{bazei}} = \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} = 768\sqrt{3} \text{ cm}^2, V = \frac{1}{3} \cdot 768\sqrt{3} \cdot 10 = 2560\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$



(figura 7)

Problema rezolvată 8

Tetraedrul VABC are fața ABC un triunghi echilateral, iar distanța de la V la planul (ABC) este de 8 cm. Știind că raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R = 4\sqrt{3}$ cm, să se calculeze volumul tetraedrului.



(figura 8)

Soluție:

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$R = 4\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow l = 6 \text{ cm}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Problema rezolvată 9

Se dă tetraedrul regulat ABCD și se notează cu G centrul său de greutate. Se ia punctul $P \in (DG)$ astfel încât $DP = PG = a$. Să se calculeze:

- volumul și aria tetraedrului;
- volumul tetraedrului cu vârful în P și baza ABC.

Soluție:

$$a) \frac{GO}{GD} = \frac{1}{3} \Rightarrow GO = \frac{2}{3} \cdot a, DO = DG + GO = \frac{8}{3} \cdot a$$

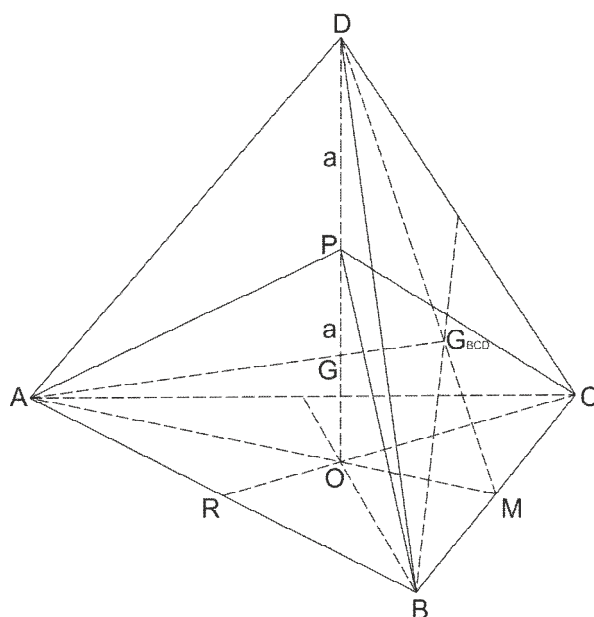
$$DO = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot l$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot l = \frac{8}{3} \cdot a \Rightarrow l = \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot a = AB = AC = BC$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3 = \frac{64\sqrt{3}}{27} a^3 \text{ u.m.}^3; A = \frac{32\sqrt{3}}{3} a^2.$$

$$\text{b) } PO = PG + GO = \frac{5}{3} \cdot a$$

$$V = \frac{1}{3} A_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{40\sqrt{3}}{27} a^3 \text{ u.m.}^3.$$



(figura 9)

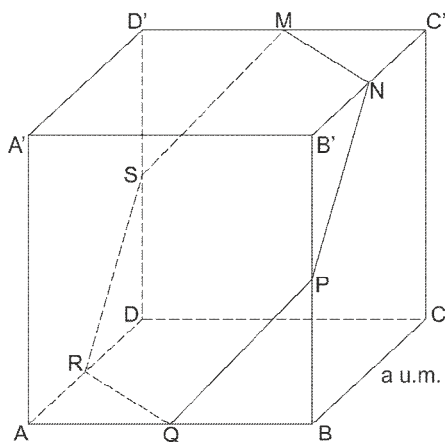
Problema rezolvată 10

Se dă cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de lungime a u.m. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor $C'D', B'C', BB', AB, AD, DD'$.

a) Să se demonstreze că punctele M, N, P, Q, R, S sunt coplanare.

b) Să se calculeze A_1 și A_t a piramidei cu vârful în C și baza $MNPQRS$.

c) Să se afle volumul piramidei $CMNPQRS$.



(figura 10)

Soluție:

a)

$$MN \text{ linie mijlocie în } \triangle B'C'D' \Rightarrow MN \parallel B'D', MN = \frac{1}{2} B'D' \quad (1)$$

$$RQ \text{ linie mijlocie în } \triangle ADB \Rightarrow RQ \parallel BD, RQ = \frac{1}{2} BD \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow MN \parallel RQ, [MN] \equiv [RQ] \left(= \frac{1}{2} a\sqrt{2} \right) \quad (3)$$

$$\text{Analog, } NP \parallel RS, [NP] \equiv [RS] \left(= \frac{1}{2} a\sqrt{2} \right) \quad (4)$$

$$MS \parallel PQ, [MS] \equiv [PQ] \left(= \frac{1}{2} a \sqrt{2} \right) \quad (5)$$

Din (3), (4) și (5) $\Rightarrow$ M, N, R, Q coplanare, N, P, R, S coplanare, M, N, P, Q coplanare deci, M, N, P, Q, R, S sunt coplanare.

b) Piramida cu baza MNPQRS și vârf C este hexagonală regulată cu lungimea laturii de la

$$\text{bază } MN = \frac{1}{2} a \sqrt{2} \text{ și muchie laterală } \frac{1}{2} a \sqrt{5}. A_l = 6 \cdot A_{\Delta CMN} = \frac{5}{4} a^2 \text{ u.m}^2. A_t = A_l + A_{MNPQRS}$$

$$= \frac{3}{4} a^2 (3 + \sqrt{3}) \text{ u.m}^2.$$

$$\text{c) } V = \frac{1}{3} A_{MNPQRS} \cdot h = \frac{3}{8} a^3 \text{ u.m}^3.$$

BIBLIOGRAFIE

1. **Geometria în spațiu** – N. N. Mihăileanu, C. Ionescu Bujor, C. Ionescu Țiu, Ed. Didactică și pedagogică, 1967;
2. **Matematică** – manual pentru clasa a VIII a – Ion Cuculescu, Constantin Ottescu, Olimpia Popescu - Ed. Didactică și pedagogică, 1997;
3. **Exerciții și probleme de matematică** – pentru clasele IX- X- C. Ionescu Țin, I. Șt. Mușat, Ed. Didactică și pedagogică, 1978;
4. **Matematică pentru cercurile de elevi din clasele V – VIII**, Revista „Tomis”, 1988;
5. **Matematică** – Probleme pentru clasele V – VIII, Ion Petrică, Cornel Ștefan, Editura Petrion.
6. **Arii și volume ale poliedrelor. Matematică – geometrie, clasa a VIII-a**, Camelia Grigoraș, Editura Taida, 2011.

4. A generalization of the problem J209 from Mathematical Reflections 5 (2011)

by Titu Zvonaru, Comănești and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

If $n \geq 1$ is a natural number and a, b, c are positive nenule real numbers such that $a + b + c = 1$, then:

$$\frac{(a+b)^{2n+1}}{c} + \frac{(b+c)^{2n+1}}{a} + \frac{(c+a)^{2n+1}}{b} \geq \frac{2^{2n+1}}{3^{2n-2}}(ab+bc+ca).$$

Proof. By Bergström's inequality we obtain that

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^{2n+1}}{c} + \frac{(b+c)^{2n+1}}{a} + \frac{(c+a)^{2n+1}}{b} &= \frac{(a+b)^{2n+2}}{c(a+b)} + \frac{(b+c)^{2n+2}}{a(b+c)} + \frac{(c+a)^{2n+2}}{b(c+a)} \geq \\ &\geq \frac{[(a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (c+a)^{n+1}]^2}{2(ab+bc+ca)}, \end{aligned}$$

So it is sufficient to prove that

$$\begin{aligned} [(a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (c+a)^{n+1}]^2 &\geq \frac{2^{2n+2}}{3^{2n-2}}(ab+bc+ca)^2, \text{ i.e.} \\ (a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (c+a)^{n+1} &\geq \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}(ab+bc+ca)(a+b+c)^{n-1} \end{aligned} \quad (*)$$

We prove the inequality (*) by mathematical induction.

For $n = 1$ we have

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \geq 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ca, \text{ which is true.}$$

We assume that (*) is true and we must to prove the inequality

$$(a+b)^{n+2} + (b+c)^{n+2} + (c+a)^{n+2} \geq \frac{2^{n+2}}{3^n}(ab+bc+ca)(a+b+c)^n \quad (1)$$

We multiply (*) with $\frac{2}{3}(a+b+c)$, so we must to prove that

$$(a+b)^{n+2} + (b+c)^{n+2} + (c+a)^{n+2} \geq \frac{2}{3}(a+b+c)[(a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (c+a)^{n+1}]$$

Which is write successively

$$\begin{aligned} 3(a+b)^{n+2} + 3(b+c)^{n+2} + 3(c+a)^{n+2} &\geq [(a+b) + (b+c) + (c+a)][(a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (c+a)^{n+1}] \\ 2(a+b)^{n+2} + 2(b+c)^{n+2} + 2(c+a)^{n+2} &\geq (a+b)^{n+1}(a+b+2c) + (b+c)^{n+1}(b+c+2a) + \\ &\quad + (c+a)^{n+1}(c+a+2b) \end{aligned} \quad (2)$$

We have:

$$\begin{aligned} 2(a+b)^{n+2} - (a+b)^{n+1}(a+b+2c) &= (a+b)^{n+1}(a-c) + (a+b)^{n+1}(b-c); \\ 2(b+c)^{n+2} - (b+c)^{n+1}(b+c+2a) &= (b+c)^{n+1}(b-a) + (b+c)^{n+1}(c-a); \\ 2(c+a)^{n+2} - (c+a)^{n+1}(c+a+2b) &= (c+a)^{n+1}(c-b) + (c+a)^{n+1}(a-b). \end{aligned}$$

Since:

$$(a+b)^{n+1}(a-c) + (b+c)^{n+1}(c-a) = (a-c)[(a+b)^{n+1} - (b+c)^{n+1}] =$$

$$= (a - c)(a + b - b - c) \left[(a + b)^n + (a + b)^{n-1}(b + c) + \dots + (a + b)(b + c)^{n-1} + (b + c)^n \right] \geq 0$$

and analogous:

$$(b + c)^{n+1}(b - a) + (c + a)^{n+1}(a - b) \geq 0;$$

$$(c + a)^{n+1}(c - b) + (a + b)^{n+1}(b - c) \geq 0,$$

and by adding we obtain that the inequality (2) is true, so (*) is true.

We have equality iff $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remark. For $n = 2$ we obtain the problem J209, proposed by *Marius Stănean* and *Mircea Lascu*, Zalău, Romania.

5. Problema lunii august 2012

Există două bijecții $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât

$$x = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}?$$

Autor: Prof. Velcov Gheorghe Ioan, Grupul Școlar „Traian Grozăvescu” Nădrag, județul Timiș

Soluție:

Autor: Prof. Gheorghe ROTARIU – Grupul Școlar „Al. Vlahuță” Șendriceni, jud. Botoșani

Răspunsul este afirmativ. Pentru a determina (construi) cele două bijecții, vom realiza o partiție a mulțimii numerelor întregi nenule, partiție formată din două submulțimi A_1 și A_2 ($\mathbb{Z}^* = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) pe care le vom construi inductiv.

Această partiție este realizată cu ajutorul a două funcții (h) și (s) care vor fi definite mai jos.

În construcție intervine și mulțimea $\mathbb{N}^*$ prin care se asigură pașii inductivi.

Pentru o mai bună vizualizare a celor două submulțimi, vom completa următorul tabel. Facem următoarele precizări pentru o înțelegere exactă a datelor din tabel:

1) Coloana mulțimii A_1 este completată „în jos” (în ordinea crescătoare a pașilor) considerând numerele întregi nenule în „ordinea”: $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ și considerând (luând) elementele care nu au apărut până atunci în mulțimea A_2 .

2) Funcția h este definită astfel: $h: \{(i, a_i) \mid i \in \mathbb{N}^*, a_i \in A_1\} \rightarrow \mathbb{Z}$, dată de relația:

$$h(i, a_i) = i \cdot \text{sgn}(a_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Funcția h „acționează pe linie” iar imaginea ei este o submulțime a lui $\mathbb{Z}$.

3) Funcția s este definită astfel: $s: \left\{ (a_i, h(i, a_i)) \mid i \in \mathbb{N}^* \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$, dată de relația:

$$s(a_i, h(i, a_i)) = a_i + h(i, a_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Elementele mulțimii A_2 se obțin adunând *pe linie* elementele celor două coloane (A_1 și h).

Observație. Definiția lui h este naturală pentru că trebuie să obținem mulțimi disjuncte A_1 și A_2 (adunăm numere întregi pozitive între ele și numere întregi negative între ele, altfel există riscul să obținem elemente comune în cele două mulțimi).

$\mathbb{N}^*$	A_1	h	A_2
1	$a_1 = 1$	1	$b_1 = 2$
2	$a_2 = -1$	-2	$b_2 = -3$
3	$a_3 = -2$	-3	$b_3 = -5$
4	$a_4 = 3$	4	$b_4 = 7$
5	$a_5 = 4$	5	$b_5 = 9$
6	$a_6 = -4$	-6	$b_6 = -10$
7	$a_7 = 5$	7	$b_7 = 12$
8	$a_8 = 6$	8	$b_8 = 14$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	a_i	$i \cdot \text{sgn}(a_i)$	$b_i = a_i + i \cdot \text{sgn}(a_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observație. În coloana A_1 , la pasul 3 nu putem lua elementul 2 care urma în „ordinea firească”, stabilită mai sus, deoarece acest element a apărut la pasul 1 în coloana A_2 .

Continuând în acest mod (după regula specificată anterior), vom obține două mulțimi infinite

$$A_1 \text{ și } A_2 \text{ astfel încât } (\mathbb{Z}^* = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset)$$

Nu ne rămâne acum decât să definim cele două bijecții f și g care să verifice identitatea din enunț.

$$f, g: \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \{0\}}_{=\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ b_i, & x=a_i \in A_1 \\ a_k, & x=b_k \in A_2 \end{cases} \quad \text{și} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ -h(i, a_i), & x=a_i \in A_1 \\ h(k, a_k), & x=b_k \in A_2 \end{cases}$$

Evident, f și g astfel definite, sunt bijecții de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$ și verifică identitatea din enunț.

x	1	-1	-2	3	4	-4	5	...	0	2	-3	-5	7	9	-10	12	..
$f(x)$	2	-3	-5	7	9	-10	12	...	0	1	-1	-2	3	4	-4	5	...
$g(x)$	-1	2	3	-4	-5	6	-7	...	0	1	-2	-3	4	5	-6	7	...
$f(x)+g(x)$	1	-1	-2	3	4	-4	5	...	0	2	-3	-5	7	9	-10	12	...