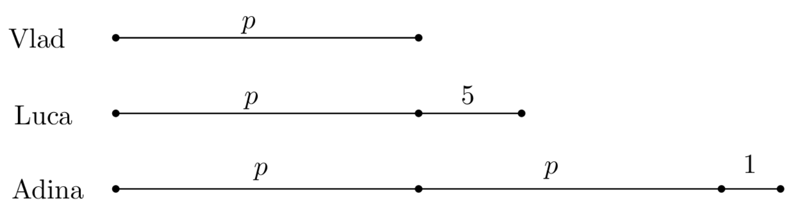
Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a V-a, varianta 2

Problema 1. Vlad, Luca şi Adina au cumpărat de la o librărie rechizite în valoare totală de 118 lei. Vlad a cumpărat 5 pixuri, 4 caiete şi 3 cutii cu creioane colorate, Luca a cumpărat 7 pixuri, 3 caiete şi 4 cutii cu creioane colorate, iar Adina a cumpărat 8 pixuri, 7 caiete şi 7 cutii cu creioane colorate.

Ştiind că Luca a plătit cu 5 lei mai mult decât Vlad, iar Adina cu 4 lei mai puţin decât Vlad şi Luca la un loc, aflaţi cât costă un creion, cât costă un caiet şi cât costă o cutie cu creioane colorate.

Soluţie. Folosim metoda grafică pentru a afla sumele plătite de fiecare copil. În reprezentarea de mai jos, p este suma plătită de Vlad:



. . . . **1p**

$p + p + 5 + 2p + 1 = 118$, de unde $p = 28$, deci Vlad a plătit 28 de lei, Luca a plătit 33 de lei, iar Adina 57 de lei **2p**

Folosim metoda comparaţiei pentru a afla preţul fiecărui tip de rechizite:

5 pixuri .... 4 caiete .... 3 cutii cu creioane .... 28 lei
7 pixuri .... 3 caiete .... 4 cutii cu creioane .... 33 lei
8 pixuri .... 7 caiete .... 7 cutii cu creioane .... 57 lei

Adunând primele două relaţii obţinem

12 pixuri .... 7 caiete .... 7 cutii cu creioane .... 61 lei

. . . . **1p**

Comparând cu a treia relaţie şi efectuând diferenţa, obţinem că 4 pixuri costă 4 lei, deci un pix costă 1 leu **1p**

Înlocuind în primele două relaţii, obţinem:

4 caiete .... 3 cutii cu creioane .... 23 lei
3 caiete .... 4 cutii cu creioane .... 26 lei

Pentru a aduce la acelaşi termen de comparaţie, vom egala numărul de caiete, înmulţind cu 3 prima relaţie şi cu 4 pe cea de-a doua:

12 caiete .... 9 cutii cu creioane .... 69 lei
12 caiete .... 16 cutii cu creioane .... 104 lei

Obţinem că 7 cutii cu creioane costă 35 de lei, deci o cutie cu creioane costă 5 lei **1p**

Înlocuind într-una dintre relaţii, obţinem că un caiet costă 2 lei **1p**

Problema 2. Suma a 15 numere naturale consecutive este un număr cu cifre diferite, printre care se află cifrele 0, 1, 2 şi 4. Care este cel mai mic număr posibil dintre cele 15 numere?

Soluţie. Dacă n este cel mai mic număr căutat, atunci cele 15 numere consecutive din enunţ sunt n, $n+1$, ..., $n+14$, a căror sumă S este egală cu $15n+105$, adică $S = 3 \cdot 5 \cdot (n+7)$ **3p**

Întrucât suma S este divizibilă cu 3, suma cifrelor lui S este, la rândul ei, divizibilă cu 3. Cum 0, 1, 2 şi 4 sunt cifre ale lui S, iar $0+1+2+4=7$ nu se divide cu 3, rezultă că S mai are cel puţin încă o cifră, diferită de 0, 1, 2 şi 4. Condiţiile de minim şi de divizibilitate cu 3 conduc la faptul că S mai are o singură altă cifră, egală cu 5 .... **2p**

Cel mai mic număr de forma $15\,(n+7)$ care se scrie cu cifrele 0, 1, 2, 4 şi 5 este 10 245, pentru care se obţine $n = 676$ **2p**

Problema 3. Determinaţi numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiţii:

a) suma pătratelor cifrelor este divizibilă cu 4;

b) restul împărţirii numărului $\overline{abcd}$ la c este 7.

Soluţie. Pătratul unui număr natural este de forma $4k$ sau $4k+1$ **1p**

$a^2+b^2+c^2+d^2$ este divizibil cu 4 dacă a, b, c, d au aceeaşi paritate **1p**

Din teorema împărţirii cu rest există numerele naturale q şi r astfel încât $\overline{abcd} = c \cdot q + 7$ şi $7 < c$, deci $c = 8$ sau $c = 9$ **1p**

Dacă $c = 8$, toate cifrele sunt pare şi $\overline{abcd} = 8q+7$, imposibil, deoarece membrul stâng este par, iar membrul drept este impar **1p**

Dacă $c = 9$, toate cifrele sunt impare şi, cum $\overline{ab9d}$ dă restul 7 la împărţirea cu 9, rezultă că $a+b+d+9$ este un număr par care dă restul 7 la împărţirea cu 9; se obţine că $a+b+d$ poate fi 7 sau 25 .... **1p**

Pentru $a+b+d = 7$ se obţin soluţiile 1393, 3193, 3391, 1195, 1591 şi 5191 .... **1p**

Pentru $a+b+d = 25$ se obţin soluţiile 7999, 9799 şi 9997 .... **1p**

Problema 4. Într-o cutie se află 50 de cartonaşe pe care sunt scrise primele 100 de numere naturale nenule, astfel: pe primul cartonaş sunt scrise numerele 1 (pe o parte) şi 2 (pe cealaltă parte), pe al doilea cartonaş sunt scrise numerele 3 (pe o parte) şi 4 (pe cealaltă parte) şi aşa mai departe, până la al 50-lea cartonaş, pe care sunt scrise numerele 99 (pe o parte) şi 100 (pe cealaltă parte).

Eliza scoate patru cartonaşe din cutie şi calculează suma celor opt numere scrise pe ele. Câte sume distincte poate obţine Eliza?

Soluţie. Sumele celor două numere de pe fiecare cartonaş sunt: 3, 7, 11, 15, ..., 195, 199, adică numerele de forma $4k-1$, unde k este un număr natural care ia valori între 1 şi 50 .... **2p**

Dacă $4a-1$, $4b-1$, $4c-1$ şi $4d-1$ sunt sumele de pe cele 4 cartonaşe, suma totală este $4(a+b+c+d)-4$, deci problema se reduce la a calcula numărul de valori pe care le poate lua suma a patru numere naturale nenule $a < b < c < d$, cuprinse între 1 şi 50.

Suma minimă este $1+2+3+4 = 10$, iar suma maximă este $47+48+49+50 = 194$ **1p**

Vom arăta că fiecare sumă $a+b+c+d$ poate lua toate valorile de la 10 la 194, adică în total 185 de valori. Astfel avem:

- sumele de la 10 la 56 se obţin pentru $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ şi d luând valori de la 4 la 50: $1+2+3+4$, $1+2+3+5$, $1+2+3+6$, ..., $1+2+3+50$
- sumele de la 57 la 102 se obţin pentru $a = 1$, $b = 2$, $d = 50$ şi c luând valori de la 4 la 49: $1+2+4+50$, $1+2+5+50$, $1+2+6+50$, ..., $1+2+49+50$

- sumele de la 103 la 148 se obţin pentru $a = 1$, $c = 49$, $d = 50$ şi b luând valori de la 3 la 48: $1 + 3 + 49 + 50$, $1 + 4 + 49 + 50$, $1 + 5 + 49 + 50$, ..., $1 + 48 + 49 + 50$
- sumele de la 149 la 194 se obţin pentru $b = 48$, $c = 49$, $d = 50$ şi a luând valori de la 2 la 47: $2 + 48 + 49 + 50$, $3 + 48 + 49 + 50$, $4 + 48 + 49 + 50$, ..., $47 + 48 + 49 + 50$

În concluzie, Eliza poate obţine 185 de sume diferite, şi anume toate numerele cuprinse între $4 \cdot 10 - 4 = 36$ şi $4 \cdot 194 - 4 = 772$, numărate din 4 în 4 .... **4p**