

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
08.02.2020
BAREM

CLASA a VI-a

Subiectul I

Aflați numerele naturale nenule a și b care au proprietățile: $3a + 16b = 2020$ și $\text{cmmmc}[a, b] = 35 \cdot \text{cmmdc}(a, b)$.

Dacă notăm $\text{cmmdc}(a, b) = d$, atunci

$a=dx$, $b=dy$, $\text{cmmdc}(x, y) = 1$ și $xy=35$ 2p

(x, y) pot fi $(1, 35)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$, $(35, 1)$ 1p

$3x+16y \in \{563, 121, 127, 101\}$ 1p

$d(3x+16y)=2020$, deci $(3x+16y)$ divide 2020 1p

$D_{2020} \cap \{563, 121, 127, 101\} = \{101\}$ 1p

$d=20$, $(x, y)=(7, 5)$, deci $(a, b)=(140, 100)$ 1p

Subiectul II

Un număr de 6 muncitori au început o lucrare pe care și-au propus să o termine în 20 de zile, lucrând câte 8 ore pe zi. După 4 zile 2 muncitori pleacă. În cât timp va fi terminată lucrarea, dacă cei rămași lucrează câte 6 ore pe zi?

1 muncitor termină lucrarea în $6 \times 20 \times 8 = 960$ ore..... 2p

În 4 zile, cei 6 muncitori lucrează $6 \times 4 \times 8 = 192$ ore 1p

rămân 768 ore de lucru pentru 4 muncitori ce lucrează 6 ore/zi 2p

numărul de zile în care termină lucrarea este $768/24 = 32$ zile 2p

Subiectul III

Semidreptele $[OA_1, [OA_2, [OA_3, \dots, [OA_{100}$ determină o sută de unghiuri congruente în jurul punctului O . Se colorează semidreapta $[OA_1$ și apoi se colorează fiecare a șasea semidreaptă după cea colorată (deci se colorează $[OA_1, [OA_7, [OA_{13}, \dots)$. În acest procedeu de stabilire a semidreptei ce urmează să fie colorată, se numără și semidreptele colorate întâlnite pe parcurs.

- a) Să se determine câte semidrepte rămân necolorate.
- b) Să se demonstreze că rămân semidrepte opuse necolorate după finalizarea procedurii și să se determine numărul dreptelor determinate de acestea.
- c) Să se precizeze dacă rămân semidrepte necolorate perpendiculare.
- a) Întâi se colorează semidreptele $[OA_1, [OA_7, [OA_{13} \dots [OA_{97} \dots \dots \dots 0,5p$
- la a doua trecere se colorează $[OA_3, [OA_9, [OA_{15} \dots [OA_{99} \dots \dots \dots 0,5p$
- la a treia trecere se colorează $[OA_5, [OA_{11}, [OA_{17} \dots [OA_{95} \dots \dots \dots 0,5p$
- se reia colorarea $[OA_1, [OA_7, [OA_{13} \dots [OA_{97}$, deci rămân necolorate semidreptele $[OA_2, [OA_4, [OA_6 \dots [OA_{100}$, în număr de 50 $\dots \dots \dots 1p$
- b) unghiurile $\widehat{A_2OA_{52}}, \widehat{A_4OA_{54}}, \dots$ au măsura de $180^\circ \dots \dots \dots 1,5p$
- numărul dreptelor necolorate este 25 $\dots \dots \dots 1p$
- c) unghiurile $\widehat{A_1OA_{26}}, \widehat{A_2OA_{27}}, \dots$ au măsura de $90^\circ \dots \dots \dots 1p$
- cum indicii sunt de parități diferite, rezultă că nu există semidrepte necolorate perpendiculare $\dots \dots \dots 1p$

Subiectul IV

Considerăm numerele prime $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ și aceleași numere, eventual în altă ordine, notate $q_1, q_2, \dots, q_n$.

- a) Aflați n , știind că produsul $(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \dots (p_n + q_n)$ este impar.
- b) Demonstrați că $(14^{p_n} - 9^{q_n})(14^{p_{n-1}} - 9^{q_{n-1}}) \dots (14^{p_1} - 9^{q_1})$ este divizibil cu 5^{n-2} , pentru orice $n > 2$.
- a) produsul este impar, deci fiecare paranteză este impară $\dots \dots \dots 1p$
- parantezele impare sunt sume dintre un număr impar și un număr par $\dots \dots \dots 1p$
- 2=singurul număr prim par și poate să apară doar în două paranteze,
- deci $n=2$ și $p_1=2$ $\dots \dots \dots 1p$
- b) Din cele n paranteze, cel puțin $n-2$ au puteri cu ambii exponenți impari $\dots \dots \dots 2p$
- Pentru acestea, $Uc(14^{p_k} - 9^{q_k}) = 5$, de unde concluzia $\dots \dots \dots 2p$