Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 6-a

Problema 1. Doi copii, Alex şi Cristi, joacă de mai multe ori un joc în urma căruia câstigătorul primeşte x puncte, iar cel care pierde primeşte y puncte (x şi y sunt numere naturale nenule cu $x > y$, iar la fiecare joc unul dintre copii câştigă şi celălalt pierde). Scorul final este 147 la 123 în favoarea lui Alex. Cristi a câştigat 6 partide. Aflaţi numerele x şi y.

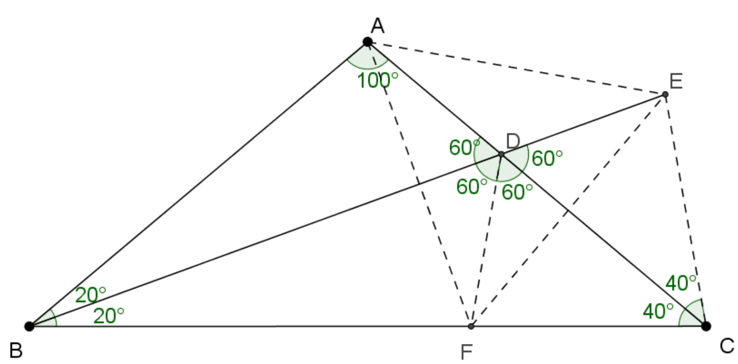
Soluţie. Notăm cu a numărul jocurilor câştigate de Alex. Atunci $ax + 6y = 147$ şi $6x + ay = 123$. **1p**
De unde, prin scădere, obţinem $ax + 6y - 6x - ay = 24$, adică $(a - 6)(x - y) = 24$ **1p**
$a - 6$ şi $x - y$ sunt numere naturale, deoarece x, y naturale cu $x > y$ şi $a > 6$ pentru că Alex a câştigat mai multe jocuri. **1p**
Din $ax + 6y = 147$ rezultă că ax este număr impar, deci a este impar, astfel $a - 6$ este divizor impar al lui 24.
Avem două cazuri:

- $a - 6 = 1$ şi $x - y = 24$, de unde $7(y + 24) + 6y = 147$, adică $13y = -21$ nu convine.
- $a - 6 = 3$ şi $x - y = 8$, de unde $9(y + 8) + 6y = 147$, adică $15y = 75$, de unde $y = 5$ şi $x = 13$.

.... **4p**
Notă: Fără observaţia de paritate (sau altă restrângere a cazurilor) tratarea fiecărui caz
$(a - 6, x - y) \in \{(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)\}$ se notează cu câte **0.5** puncte.

Problema 2. Considerăm triunghiul isoscel ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 100^\circ$. Fie BD bisectoarea unghiului ABC cu $D \in (AC)$, punctul $E \in BD$ astfel încât $D \in (BE)$ şi $BE = BC$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $AB = BF$. Demonstraţi că dreptele AC şi EF sunt perpendiculare.

Soluţie



În triunghiul ABD avem $m(\sphericalangle ABD) = \frac{m(\sphericalangle ABF)}{2} = 20^\circ$, $m(\sphericalangle BAD) = 100^\circ$, deci $m(\sphericalangle ADB) = 60^\circ$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle EDC) = 60^\circ$ (fiind opuse la vârf) **2p**
Triunghiurile ABD şi FBD sunt congruente (L.U.L.), deci $m(\sphericalangle FDB) = m(\sphericalangle ADB) = 60^\circ$, de unde $m(\sphericalangle FDC) = 60^\circ$. **2p**
Triunghiul EBC este isoscel ($BE = BC$) cu $m(\sphericalangle EBC) = 20^\circ$, deci $m(\sphericalangle BCE) = 80^\circ$, iar din ipoteză avem $m(\sphericalangle ACB) = 40^\circ$, deci $\sphericalangle(FCD) \equiv \sphericalangle(DCE)$. **1p**
Astfel triunghiurile FCD şi ECD sunt congruente (U.L.U.), deci triunghiul FCE este isoscel. CD este bisectoare, deci şi înălţime. Deci $CD \perp FE$. **2p**

Problema 3. Dacă pentru numerele naturale nenule a, b, c sunt adevărate inegalităţile $a > b > c$ şi $12b > 13c > 11a$, arătaţi că $a + b + c \geq 56$.

Soluţie. Deoarece $a, b, c \in \mathbb{N}$, din $a > b > c$ rezultă $a \geq b + 1 \geq c + 2$, deci $a - c \geq 2$ **2p**
Dacă $a - c \geq 4$, atunci $13c > 11a \geq 11(c + 4)$ deci $c \geq 22$. Rezultă că $a + b + c > c + c + c > 66 > 56$.
.... **1p**
Deci rămân de discutat cazurile $a - c = 2$ şi $a - c = 3$.
Dacă $a - c = 2$, atunci din $a \geq b + 1 \geq c + 2$ rezultă $a = b + 1 = c + 2$, deci $12(c + 1) > 13c > 11(c + 2)$, de unde $12 > c$ şi $c > 11$ contradicţie, deci $a - c \neq 2$. **2p**
Dacă $a - c = 3$, atunci $a = c + 3$ şi $b = c + 1$ sau $b = c + 2$.
Pentru $b = c + 1$, avem $12(c + 1) > 13c > 11(c + 3)$, de unde $12 > c$ şi $c > \frac{33}{2}$ contradicţie.
Pentru $b = c + 2$, avem $12(c + 2) > 13c > 11(c + 3)$, de unde $24 > c$ şi $c > \frac{33}{2}$, deci $c \geq 17$, astfel $b \geq 19$ şi $a \geq 20$. De unde $a + b + c \geq 56$. **2p**

Problema 4. Pe fiecare dintre laturile unui triunghi considerăm câte 9 puncte distincte, diferite de vârfurile triunghiului. Determinaţi numărul de triunghiuri care au vârfurile în câte trei din cele 3×9 puncte.

Soluţie. Triunghiurile pot fi de două tipuri: cu vârfurile pe laturi diferite sau cu 2 vârfuri pe o latură şi al treilea vârf pe a treia latură. **1p**
În cazul în care vârfurile sunt pe laturi diferite, fiecare vârf se poate alege în 9 moduri, deci sunt în total $9^3 = 729$ astfel de triunghiuri. **2p**
Putem alege două vârfuri de pe o latură în $\dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ moduri. Al treilea vârf se poate alege în $2 \cdot 9$ moduri de pe celelalte două laturi, deci sunt în total $2 \cdot 9 \cdot 36 = 648$ astfel de triunghiuri pentru fiecare latură, adică în total $3 \cdot 648 = 1944$ de triunghiuri. **3p**
Deci în total sunt $729 + 1944 = 2673$ de triunghiuri. **1p**