OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 8 februarie 2020

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

1. Arătați că

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{2020}}<\frac{5}{4}$$

SOLUȚIE:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{2020}}=S$$

$S-\frac{1}{5}S=1-\frac{1}{5^{2021}}$ 2p

$\frac{4}{5}S=1-\frac{1}{5^{2021}}$ 2p

$S=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{2021}}\right)<\frac{5}{4}$ justificare...3p

2. Câte numere de forma $\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$, care nu sunt raționale, există între numerele

$$a=\sqrt{4\cdot 1\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}1^2} \text{ și } b=\sqrt{2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3\cdot 2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3}$$

SOLUȚIE:

$4\cdot 1\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}1^2=\left(2\cdot 1\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}1\right)^2=\left(2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}2\right)^2$ 1p

$2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3 \cdot 2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3 = \left(2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3\right)^2$ ……………………………………………………1p

Numerele $2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}2$ și $2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3$ sunt consecutive………………………………..…1p

Între n^2 și $(n+1)^2$ se află $2n$ numere naturale care nu sunt pătrate perfecte…………..2p

Între $\left(2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}2\right)^2$ și $\left(2\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}3\right)^2$ sunt $4\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}4$ numere naturale care nu sunt pătrate perfecte. ………………………………………………………………………… ..1p

Deci, sunt $4\underbrace{00...0}_{9\ zerouri}4$ numere de forma $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ care nu sunt raționale............................1p

3. Fie ABCD paralelogram cu aria $64\sqrt{5}cm^2$. Dacă E este mijlocul lui AB. Să se afle aria triunghiului DEB.

SOLUȚIE:

$\Delta ADB \equiv \Delta DBC \Rightarrow A_{\Delta ADB} = 32\sqrt{5}$ 2p

$[DE]$ mediană $\Rightarrow A_{\Delta ADE} = A_{\Delta BDE}$ 3p

$A_{\Delta BDE} = 16\sqrt{5}cm^2$ 2p

4. Fie $C(O, r)$ și A un punct exterior cercului astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM și AN (M, N $\in C(O, r)$) are măsura de 30°.

Dacă P este mijlocul segmentului AO, arătați că ΔMNP este echilateral.

SOLUȚIE:

$[AM] \equiv [AN], OM \perp AM, ON \perp AN$ 1p

$\Delta AMO \equiv \Delta ANO \Rightarrow \prec AOM \equiv \prec AON$ 1p

$\prec MAO \equiv \prec NAO$

$\Delta AMP \equiv \Delta ANP \Rightarrow [MP] \equiv [NP]$..1p

$MP = \frac{AO}{2} = OP \Rightarrow \Delta POM$ isoscel..1p

$\Rightarrow m(\prec OMP) = 75^\circ$ 1p

$\Rightarrow m(\prec PMI) = 60^\circ$ 1p

$\Rightarrow \Delta MNP$ echilateral......................... ....1p

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*