Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015
## CLASA a X-a

**Problema 1.** Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq \frac{n-1}{2n+2}.$$

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Să se determine numerele întregi $x, y$, pentru care

$$5^x - \log_2 (y+3) = 3^y \text{ şi } 5^y - \log_2 (x+3) = 3^x.$$

**Problema 3.** Să se determine numerele complexe $z$ pentru care are loc relaţia

$$|z| + |z-5i| = |z-2i| + |z-3i|.$$

**Problema 4.** Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie neconstantă care are proprietatea

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)},$$

pentru orice $x, y > 0$. Să se arate că

$$f(xy) = f(x) f(y) \text{ şi } f(x+y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y > 0$.

*Timp de lucru 4 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*