Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a IX-a

Problema 1. Se consideră paralelogramul $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în O. Bisectoarele unghiurilor DAC şi DBC se intersectează în T. Se ştie că $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TO}$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABT.

Problema 2. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care egalitatea

$$[ax + by] + [bx + ay] = (a + b)[x + y]$$

este adevărată oricare ar fi numerele reale x şi y (unde $[t]$ desemnează partea întreagă a numărului real t).

Problema 3. Fie m şi n numere naturale, cu $m \geq 2$ şi $n \geq 3$. Demonstraţi că există m numere naturale nenule distincte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, toate divizibile cu $n - 1$, astfel încât

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{a_m}.$$

Gazeta Matematică

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică relaţia

$$d(x, f(y)) \cdot m(f(x), y) = d(x, y) \cdot m(f(x), f(y)), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{N}^*,$$

unde $d(a, b)$ şi $m(a, b)$ desemnează cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Timp de lucru: 4 ore