OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \to R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \ldots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall\, n \in N^*$$

Soluție.

Pentru n=1 relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru n=2 relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3\big(1 + f(1)\big)$. (1 punct)

Pentru n=3 relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot \big(1 + f(1)\big)$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}\big(1 + f(1)\big)$, pentru orice $n \geq 2$. (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

(3 puncte)

Notând f(1)=a, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \to R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases}.$$ (1 punct)

Notă:

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în ℝ ecuația:

$$\sqrt{x^2+31x}+\sqrt{x+31}=x+\sqrt{x}+8$$

Soluție:

$\sqrt{x(x+31)}+\sqrt{x+31}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$

$\sqrt{x+31}\,(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$

$(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt{x+31}-\sqrt{x}\right)=8$ 2p

$notăm \quad a=\sqrt{x+31} \text{ și } b=\sqrt{x}$

$\begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ a^2-b^2=31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ (a-b)(a+b)=31\end{cases}$ 2p

$dar \quad a\neq b \Rightarrow \dfrac{b+1}{a+b}=\dfrac{8}{31} \Leftrightarrow a=\dfrac{23b+31}{8} \Rightarrow 15b^2+46b-33=0$ 2p

$b_1=-\dfrac{11}{3}, \qquad b_2=\dfrac{3}{5} \quad \Longrightarrow x=\dfrac{9}{25}$ 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul *ABCD* și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului *MNP* aparține dreptei *AC* dacă și numai dacă *AM* + *DP* = *BN*.

Soluție:

Fie *R* mijlocul lui $[NP]$ $iar\ MR \cap AC = \{G\}$

$Considerăm\ \frac{MG}{GR} = k, AB = a,$ ………………………………………………………………….1p

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AR} = \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right)$$

$$= \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right)$$

$$= \frac{AM}{(1+k)a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{BN}{a}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{DP}{a}\overrightarrow{DC}$$

$$= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AD} \text{ ………..2p}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}\ \ coliniari \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2}DP = \frac{k}{2}BN\ \ (*) \text{ ………………………………………………………………….3p}$$

$$G\ centru\ de\ greutate \Leftrightarrow k = 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} AM + DP = BN \text{ ……………………………………..1p}$$

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.
   a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.
   b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Barem

a)

$\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+3y} = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)} = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 0.$ **3p**

b) $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{y}{xy+2z} + \frac{z}{yz+2x} + \frac{x}{zx+2y} \Longrightarrow \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y+z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z+x}{(x+y)(y+z)}\right)$ (1)...**1p**

Notăm. $x + y = a, y + z = b, z + x = c$, $a, b, c > 0$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (2)............................**1p**

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c} \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4}$ (3)............................**1p**

$\xRightarrow{(1),(2),(3)} \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$ **1p**

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$. Să se arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

Din $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$ rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_{2020}} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{2020}} = 0$ (2p)

$$\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{2020} |z_k| \cdot \left|\frac{z}{z_k} - 1\right| = \sum_{k=1}^{2020} \left|\frac{z}{z_k} - 1\right| \quad (2p)$$

Folosind inegalitatea triunghiului avem $\sum_{k=1}^{2020} \left|\frac{z}{z_k} - 1\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{2020} z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{20201}}\right) - 2020\right| = 2020$ (3p)

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3\lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

Soluție:

Notăm *lg x – lg 2020 =a* și *lg y – lg 2020 =b*

Avem $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuația devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

$dacă\ b \neq 0\ atunci\ avem\ ecuația\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0, nu\ are\ soluții\ reale$

$deci\ b = 0$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este $a = b = 0$. (2p)

Deci x = y = 2020 . (1p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5}+\sqrt[5]{x-2}=\sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

Soluție:

Observăm că x=2 este soluție. (1p)

Deoarece $x=\frac{1}{2}$ nu este soluție, putem împărți ecuația prin $\sqrt[5]{2x-1}$.

Obținem $\sqrt[5]{\frac{4x-5}{2x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-2}{2x-1}}=1$. (1p)

Deoarece $\frac{4x-5}{2x-1}=2-\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{x-2}{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2x-1}\right)$ putem nota $-\frac{3}{2x-1}=t$ (2p)

Ecuația devine $\sqrt[5]{2+t}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}=1$ (*).

Deoarece funcția $f(t)=\sqrt[5]{2+t}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}$ este strict crescătoare pe R , ecuația (*) are soluția unică

t = -1.

Deci x=2 soluție unică. (3p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \le 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \le f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluție :

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

$\log_5(f(x)) \le x$ și $\log_5(f(x+y)) \le \log_5(f(x)) + \log_5(f(y))$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Notând g(x)= $\log_5(f(x))$ avem $g(x) \le x$ (1) și $g(x+y) \le g(x) + g(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Din (1) rezultă $g(0) \le 0$ și din (2) pentru x=y=0 rezultă $g(0) \ge 0$, deci $g(0) = 0$ ....(2p)

Din (2) pentru y = - x avem $0=g(0) \le g(x)+g(-x)$, adică $g(x) \ge - g(-x)$ ....(2p)

Din (1) $g(-x) \le - x$, adică $-g(-x) \ge x$, deci $g(x) \ge x$. ....(2p)

În concluzie g(x)=x, adică $f(x) = 5^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ....(1p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in \mathbb{N}\ impar$

$Dacă\ A \cdot A^t = I_n, arătați\ că\ det(A^2 - I_n) = 0, unde\ A^t\ este\ transpusa\ maticei\ A$

Soluție:

$det(A^2 - I_n) = det(A^2 - A \cdot A^t) = det(A) \cdot det(A - A^t) \quad (1)$ 3p

$Dar\ det(A - A^t) = det(A - A^t)^t = det(A^t - A) = (-1)^n det(A - A^t) = -det(A - A^t)$

$\Longrightarrow det(A - A^t) = 0$ 3p

$\overset{(1)}{\Rightarrow} det(A^2 - I_n) = 0$ 1p

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ $și$ $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ $pentru\, n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gazeta matematică

Soluție:

a.) Se arată că $a_n \in (0,1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow șirul\ (a_n)_{n\geq 1}\ este\ strict\ descrescător.$

$deci\ șirul\ (a_n)_{n\geq 1}\ este\ convergent$ 2p

$Fie\ l = \lim_{n\to\infty} a_n$

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 2^l - 1 \quad \Rightarrow l = 0\ \ sau\ l = 1$

Cum șirul este descrescător, *l = 0.* *2p*

b.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$$

....3p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimle $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $nesingulare$;
ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

$Fie\ X \in \mathcal{A}, \quad X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}\ a.î.\ X^p = X^q$

$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A}$ ………………………………………………… 2p

1) $Dacă\ X^2 = I_2\ , fie\ \mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, Y^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
$Deci, XY = Y \Rightarrow Y = I_2, contradicție$ …………………………………………………….. 1p
2) $Dacă\ X^2 \neq I_2\ \ cum\ X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2\ \ deci, \mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$ …………………….. 1p

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$\det(X) = 1;\ X^2 - Tr(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = Tr(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$

$X^3 = Tr(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = Tr(X)(Tr(X)X - I_2) - X \Rightarrow (Tr(x)^2 - 1)X = (Tr(X) + 1)\, I_2$

$Dacă\ \ Tr(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $există\ o\ infinitate\ de\ matrice\ X$ ………………… 2p

$Dacă\ \ Tr(X) \neq -1 \Rightarrow (Tr(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \dfrac{1}{Tr(X) - 1} \cdot I_2\ și$

$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{Tr(X) - 1}\right)^2 = 1 \Rightarrow Tr(x) = 2\ sau\ Tr(x) = 0\ caz\ care\ nu\ convine$ ……… 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Procedăm prin reducere la absurd

Presupunem
$f(x) + g(x) = \sin\frac{1}{x} \;\; \forall\, x \in (0,1]$ ……………………………………………………2p

Fie șirul
$(x_n)_{n\geq 1}\, cu\; x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\; n \geq 1 \implies \sin\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ $y_n = (-1)^n$ nu este convergent (1) 2p

Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ $și$ $(b_n)_{n\geq 1}\,, unde\;\; a_n = f(x_n)$ $și$ $b_n = g(x_n)\;\; \forall\, n \geq 1$ sunt monotone și mărginite, deci convergente. 2p

Așadar $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$, este convergent contradicție cu (1). 1p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$Să\ se\ calculeze\ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$$

Soluție:

$$\varphi(x) = 2\pi - x; \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi - x;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{cos\ x}(-1) \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{cos\ x} \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi}{cos\ x} \cdot dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{cos\ x} \cdot dx \ldots\ldots 3p$$

$$\Rightarrow I = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{cos\ x} \cdot dx = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - sin^2 x} \cdot dx = -\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2 - 1} \cdot dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2} \ln\left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}\right| =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| = -\frac{\pi}{2} \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = -\pi \ln\left(\sqrt{2}+1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4p$$

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m,n\in N^*$ notăm $I_{m,n}=\int_0^1 x^m tg^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m\to\infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0\le tgx\le tg1 \quad \forall x\in[0,1]$,

deci $0\le tg^{2020}x\le (tg1)^{2020} \quad \forall x\in[0,1]$ 1p

Atunci

$0\le I_{m,2020}=\int_0^1 x^m tg^{2020}xdx\le (tg1)^{2020}\int_0^1 x^m dx=\frac{(tg1)^{2020}}{m+1}\to 0,\Rightarrow \lim_{m\to\infty} I_{m,2020}=0$ 2p

Fie $\alpha\in R$ astfel încât $\frac{\pi}{4}<\alpha<1$ 1p

$I_{1,n}=\int_0^1 xtg^n xdx\ge\int_\alpha^1 xtg^n xdx\ge\alpha\int_\alpha^1 tg^n xdx\ge\alpha\int_\alpha^1 tg^n\alpha dx\ge\alpha=\alpha(1-\alpha)$ … …. . … .2p

Cum $tg\alpha>1$ și $1-\alpha>0$ avem $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}=\infty$ 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$ avînd *m*, *n* respectiv *p* elemente, unde *(m,n) = 1*, *(n,p) = 1* și *(m,p) = 1*. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \ \cup \ H_2 \ \cup \ H_3$.

Soluție:

H subgrup cu *n* elemente a lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$

$H = \{x_1, x_2, \dots, \ x_n\} \ \Rightarrow \ H = \{xx_1, x\,x_2, \dots, \ xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, \ x_n\} \ pentru \ \forall\, x \ \in H \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ (xx_1)(xx_2) \dots (xx_n) = \ x_1x_2 \dots x_n \ \Rightarrow \ x^n \ = 1 \ \Rightarrow \ H = \ U_n \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots..2p$

$Dacă \ (m,n) = 1 \ și \ x_0 \ rădăcină \ comună \ a \ ecuațiilor$

$x^m = 1 \ și \ x^n = 1 \ \Rightarrow \ \exists\, k, l \ \in \ \mathbb{Z} \ și \ \ 1 = km + \ln \ \Rightarrow$

$x_0 = \ x_0^{km+ln} = \ (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.3p$

Dacă notăm *n(A)* numărul de elemente ale mulțimii *A*$\Rightarrow$

$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$

$= n(H_1) + \ n(H_2) + \ n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$

$= m + n + p - 2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2p$

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Soluție (barem de corectare)

Din ipoteză obținem: $a(a^2+b^2) = a^2b, (a^2+b^2)b = ab^2$ și prin adunarea celor două avem

$a^3 + b^3 = 0 \quad (1)$ ……………………………………………………………………………..2p

Din $a^2(a^2+b^2) = a^3b$ și din (1) obținem $a^2b^2 = -a^4 - b^4, (2)$ ……………………..1p

$b(a^2+b^2)a = baba \Rightarrow ba^3 + b^3a = (ba)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (ba)^2 = -a^4 - b^4$ ……………………..1p

$\overset{(2)}{\Rightarrow} (ba)^2 = a^2b^2$ ……………………………………………………………………..1p

$(ab)^2 = (a^2+b^2)^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2 \overset{(2)}{=} a^4 + b^4 - a^4 - b^4 + b^2a^2 = b^2a^2$ ………2p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*