Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 10-a

Problema 1. Fie $a \in (0,1)$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$a^{[x]} + \log_a\{x\} = x.$$

Soluţie. Evident, $x \notin \mathbb{Z}$ şi cum $a^{[x]} > 0$, $\log_a\{x\} > 0$, trebuie ca $x > 0$. Dacă $x \in (0,1)$, avem $0 < \log_a x = x - 1 < 0$, absurd. Prin urmare $x \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$. **1p**

Fie $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = a^x$, evident bijectivă şi descrescătoare. Ecuaţia se scrie echivalent $f([x]) + f^{-1}(\{x\}) = [x] + \{x\}$ **1p**

Să notăm $f^{-1}(\{x\}) = y$. Atunci $\{x\} = f(y)$ şi relaţia precedentă devine $f([x]) + y = [x] + f(y) \Leftrightarrow f([x]) - [x] = f(y) - y$.

Cum funcţia $g(t) = f(t) - t$ e strict descrescătoare, deci injectivă, deducem că $[x] = y$, deci $f([x]) = \{x\}$. **3p**

În fine, dacă $[x] = n \in \mathbb{N}$, deducem $a^n = x - n$, deci soluţiile ecuaţiei sunt numerele $x_n = n + a^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Problema 2. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}$ are proprietatea P dacă

$$f(xy) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*.$$

a) Demonstraţi că nu există funcţii injective cu proprietatea P.

b) Există funcţii surjective cu proprietatea P?

Soluţie. a) Pentru $x = y = 1$ deducem că $f(1) = 0$. Pentru $x = y$ obţinem $f(x^2) = 2f(x)$, şi apoi rezultă că $f(x^n) = nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}_+^*$. **1p**

Fie p şi q două numere prime distincte. Există atunci $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca $f(p) = \frac{a}{c}$, $f(q) = \frac{b}{c}$. Atunci

$$f(p)f(q) = f(p) \cdot \frac{b}{c} = \frac{f(p^b)}{c} = \frac{a}{c} \cdot f(q) = \frac{f(q^a)}{c}.$$

Dacă f ar fi injectivă, ar rezulta $p^b = q^a$, deci $a = b = 0$, contradicţie. **3p**

b) Dacă $x > 0$ e număr raţional, există unic numerele prime distincte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ şi numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, astfel ca $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$. Se verifică uşor că

$$f(x) = a_1 f(p_1) + a_2 f(p_2) + \ldots + a_n f(p_n),$$

deci e suficient să definim f pe mulţimea numerelor prime. Definim, pentru p prim, $f(p) = \frac{1}{p!}$. Astfel, pentru $a \in \mathbb{Z}$, avem $f(p^a) = \frac{a}{p!}$. Să arătăm că f e surjectivă. Fie $y \in \mathbb{Q}$, $y = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$; alegem p prim, suficient de mare astfel ca b să dividă $p!$. Atunci $p!y = p!\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, aşadar $f(p^{p!y}) = \frac{p!y}{p!} = y$. **3p**

Problema 3. Demonstraţi inegalitatea

$$\sin \frac{\pi}{4n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2n},$$

unde n este un număr natural nenul.

Soluţie. Dacă $a = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}$, atunci $|a| = 1$ şi $a^n = i$. Deducem

$$i - 1 = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1),$$

de unde $\sqrt{2} \leq |a-1| \cdot n$. **4p**

Pe de altă parte, $|a-1| = |-2\sin^2 \frac{\pi}{4n} + 2i \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{2n}| = 2 \sin \frac{\pi}{4n}$, de unde concluzia. . . **3p**

Problema 4. Fie A şi B două mulţimi finite. Să se determine numărul de funcţii $f : A \to A$ cu proprietatea că există două funcţii $g : A \to B$ şi $h : B \to A$ astfel încât $g(h(x)) = x$, $\forall x \in B$ şi $h(g(x)) = f(x)$, $\forall x \in A$.

Soluţie. Fie f, g, h funcţii cu proprietăţile din enunţ. Din condiţia $g \circ h = 1_B$, deducem că g e surjectivă şi h e injectivă. Cum şi $f = h \circ g$, rezultă că $|B| = |\mathrm{Im} f| \leq |A|$. **2p**

Observăm că $f(f(x)) = h(g(h(g)))) = h(g(x)) = f(x)$, deci, pentru $y \in \mathrm{Im} f$, $f(y) = y$. Astfel, orice funcţie cu proprietatea din enunţ are forma

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathrm{Im} f \\ \phi(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \mathrm{Im} f \end{cases}$$

unde $\phi : A \setminus \mathrm{Im} f \to \mathrm{Im} f$ e o funcţie arbitrară.

Fie $A' \subseteq A$, astfel ca $|A'| = |B|$ (în ipoteza $|B| \leq |A|$). Definim

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A' \\ \phi(x), & \text{dacă } x \in A \setminus A' \end{cases}$$

unde $\phi : A \setminus A' \to A'$ e o funcţie arbitrară. **2p**

Observăm că $\mathrm{Im} f = A'$ şi arătăm că f are proprietatea din enunţ. Fie $h : B \to A' \subseteq A$ o bijecţie arbitrară şi $g : A \to B$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} h^{-1}(x), & \text{dacă } x \in A' \\ h^{-1}(\phi(x)), & \text{dacă } x \in A \setminus A'. \end{cases}$$

Se verifică uşor că $g(h(x)) = x$, $\forall x \in B$ şi $h(g(x)) = f(x)$, $\forall x \in A$. **2p**

Submulţimea A' poate fi aleasă în $\binom{|A|}{|B|}$ moduri, iar funcţia ϕ în $|B|^{|A|-|B|}$ moduri, astfel încât numărul funcţiilor cerute este $\binom{|A|}{|B|}|B|^{|A|-|B|}$. **1p**