Numere complexe

Mulțimea numerelor complexe

Ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are soluție în mulțimea numerelor reale. Considerăm cea mai mică mulțime care include $\mathbb{R}$, în care această ecuație are soluții. În acest caz, notăm cu i o soluție a ecuației date și o numim *unitate imaginară*; $i^2 = -1$.

Pentru orice pereche de numere reale (a, b), $z = a + ib$ se numește *număr complex*; $a = \operatorname{Re} z$ este *partea reală* a lui z și $b = \operatorname{Im} z$ este *partea imaginară* a lui z; $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Mulțimea $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + ib,\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$ se numește *mulțimea numerelor complexe*. Dacă $\operatorname{Im} z = 0$, numărul complex z este real; dacă $\operatorname{Re} z = 0$, numărul complex z este imaginar.

Operații cu numere complexe

Pentru $z = a + ib$, $z_1 = a_1 + ib_1$ și $z_2 = a_2 + ib_2$ avem:

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$; $\quad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$; $\quad \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} - i\dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}$.

Numere complexe conjugate

Conjugatul numărului complex $z = a + ib$ este numărul complex $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$.

Pentru orice numere complexe z și z' avem:

$a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$; $ib = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$; $\quad \overline{\alpha z} = \alpha \cdot \bar{z}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$; $\quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$.

Modulul unui număr complex

Se numește *modulul numărului complex* z, $z = a + ib$, numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Oricare ar fi numerele complexe z, z', unde $z = a + ib$ și $z' = a' + ib'$,avem:

1) $|z| \geqslant 0$; **2)** $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; **3)** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; **4)** $|z| = |\bar{z}|$.

5) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$; **6)** $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$; **7)** $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$, $z' \neq 0$.

8) *Inegalitatea triunghiului*: $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Forma trigonometrică a unui număr complex

Pentru orice număr complex nenul $z = a + ib$, există și este unic numărul $\varphi \in [0, 2\pi)$ cu $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$; φ se numește *argumentul redus* al numărului z și se notează $\varphi = \arg z$.

Dacă în scrierea trigonometrică a unui număr complex, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, înlocuim φ cu $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, scrierea rămâne valabilă: $z = \rho[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]$. Așadar, există mai multe valori Φ pentru care $z = \rho(\cos\Phi + i\sin\Phi)$.

Numerele complexe $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ și $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ sunt egale dacă și numai dacă au același modul ($\rho_1 = \rho_2$) și există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$.

Utilizarea formei trigonometrice în operații

Oricare ar fi numerele complexe nenule $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ avem:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1}[\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)]$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)] \qquad z_1^n = \rho_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$$

Formula lui Moivre: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie z un număr complex nenul, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Se numește *rădăcină de ordinul n a lui z* orice număr complex ω care verifică relația $\omega^n = z$. Există n numere complexe $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$, cu $z_k^n = z$ și anume:

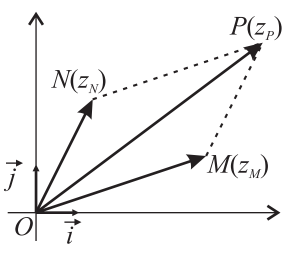
$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi + \varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{n}\right),\ 0 \leqslant k \leqslant n - 1.$$

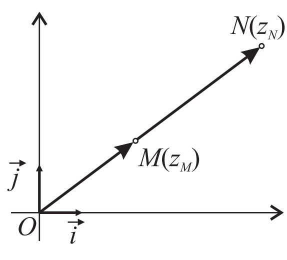
Interpretarea geometrică a operațiilor în $\mathbb{C}$

Fie xOy un reper în plan. Asociem punctului $M(x; y)$ numărul complex $z_M = x + iy$, numit afixul lui M.

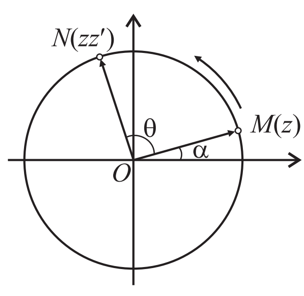
Pentru oricare trei puncte M, N, P din planul complex și orice număr real λ, avem echivalențele: 1° $z_M \pm z_N = z_P \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \pm \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$

2° $z_N = \lambda z_M \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

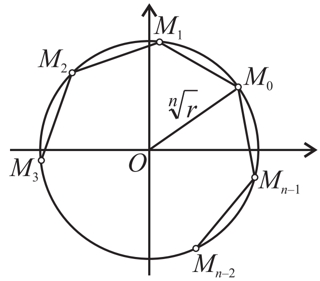




Fie $z \in \mathbb{C}^*$, $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ și $z' \in \mathbb{C}^*$ cu $|z'| = 1$, $z' = \cos\theta + i\sin\theta$. Imaginea geometrică a numărului complex $z \cdot z'$ se obține din imaginea geometrică a lui z prin rotația de centru O și unghi θ.



Fie $a \in \mathbb{C}^*$. Rădăcinile de ordinul n ale lui a au ca imagini geometrice vârfurile unui poligon regulat cu centrul în O.



Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

• *Distanța dintre două puncte.*

Fie A și B puncte în plan. Atunci $AB = |z_B - z_A|$.

• *Ecuația cercului*

Ecuația cercului de centru $M_0(z_0)$ și rază $r > 0$ este $|z - z_0| = r$.

• *Măsura unui unghi*

Fie punctele $M_1(z_1)$ și $M_2(z_2)$. Măsura unghiului orientat $\widehat{M_2OM_1}$ este $m(\sphericalangle M_2OM_1) = \arg\dfrac{z_2}{z_1}$.

Fie punctele distincte $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$. Atunci $m(\sphericalangle M_3M_1M_2) = \arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ (se translatează originea în punctul M_1 și se aplică metoda precedentă).

• *Condiția ca un triunghi să fie echilateral*

Fie A, B, C trei puncte în plan. Triunghiul ABC este echilateral dacă $z_A + \varepsilon z_B + \varepsilon^2 z_C = 0$, unde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.