1. Să se rezolve inecuaţia $3x - 1 < 2x + 2$. **(6 pct.)**

   a) $(1, 4)$; b) $(-1, 1)$; c) $(2, \infty)$; d) $(5, 11)$; e) $(10, \infty)$; f) $(-\infty, 3)$.

   Soluţie. Inecuaţia se rescrie: $3x - 1 < 2x + 2 \Leftrightarrow x < 3$, deci $x \in (-\infty, 3)$. ⓐ

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x + 1) = 3$. **(6 pct.)**

   a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 6$; f) $x = 7$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a logaritmului este $x + 1 > 0$, deci $x \in (-1, \infty)$. Obţinem succesiv: $\log_2(x + 1) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x + 1 \Rightarrow x = 7 \in (-1, \infty)$. ⓕ

3. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x + 1} = x - 1$ este: **(6 pct.)**

   a) 4; b) 0; c) 1; d) 2; e) 3; f) 5.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului conduce la $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. În plus, pozitivitatea radicalului conduce la $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, deci în final $x \in [1, \infty)$. Ridicând la pătrat ecuaţia din enunţ, rezultă $2x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$. Dar singura soluţie care satisface condiţia $x \in [1, \infty)$ este soluţia $x = 4$, deci suma soluţiilor este 4. ⓐ

4. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + 4x + 3 = 0$ este: **(6 pct.)**

   a) $\{2, 4\}$; b) $\{-2, 1\}$; c) $\{-3, -1\}$; d) $\{-4, 0\}$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{-2, 3\}$.

   Soluţie. Soluţiile ecuaţiti sunt $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$, deci $x \in \{-3, -1\}$. ⓒ

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(6 pct.)**

   a) 3; b) -1; c) 4; d) 6; e) 7; f) 5.

   Soluţie. Derivând funcţia f, obţinem $f'(x) = 3x^2 + 2$, deci $f'(1) = 3 + 2 = 5$. ⓕ

6. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) 2; c) -11; d) -3; e) -2; f) 9.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Scăzând dublul liniei a treia din prima linie şi apoi dezvoltând după prima coloană, obţinem:

   $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2.$$

   Metoda 2. Dezvoltăm determinantul folosind regula lui Sarrus; rezultă $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (12+0+0)-(2+0+12) = -2$. ⓔ

7. Să se calculeze suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$. **(6 pct.)**

   a) -3; b) -1; c) 3; d) 4; e) 2; f) -2.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Ecuaţia se rescrie: $x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) = 0$, deci admite soluţia $x_1 = 0$, iar rădăcinile polinomului din paranteză sunt $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \in \{-3, 1\}$. Atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 0 - 3 + 1 = -2$. ***Metoda 2.*** Din prima relaţie Viete, obţinem $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{1} = -2$. ***Metoda 3.*** Polinomul ecuaţiei nu are termen liber, deci admite rădăcina $x_1 = 0$. Acelaşi polinom are suma coeficienţilor nulă, deci admite rădăcina $x_2 = 1$. Deci polinomul dat se divide prin $x(x - 1) = x^2 - x$. După efectuarea împărţirii (sau aplicând repetat schema lui Horner), obţinem câtul $x + 3$, deci polinomul admite şi rădăcina $x_3 = -3$. Deci $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 1 + (-3) = -2$. ⓕ

8. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6. \end{cases}$ **(6 pct.)**

   a) $x = 4$, $y = 1$; b) $x = 1$, $y = 4$; c) $x = 2$, $y = 4$; d) $x = 1$, $y = 3$; e) $x = 2$, $y = 3$; f) $x = 2$, $y = 2$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Extrăgând x din a doua ecuaţie şi apoi înlocuind în prima, obţinem: $x = 6 - 2y \Rightarrow 2(6-2y) - y = 7 \Leftrightarrow -4y - y = 7 - 12 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$. Apoi, din a doua ecuaţie, rezultă $x = 6 - 2y = 6 - 2 \cdot 1 = 4$. Deci $x = 4$, $y = 1$. ***Metoda 2.*** Scăzând din prima ecuaţie dublul ecuaţiei a doua, obţinem $2x - y - (2x + 4y) = 7 - 2 \cdot 6 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$; înlocuind în ecuaţia a doua, obţinem $x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$, deci $x = 4$, $y = 1$. ***Metoda 3.*** Sistemul are numărul de ecuaţii egal cu cel al necunoscutelor, iar determinantul matricei coeficienţilor necunoscutelor este nenul, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Deci sistemul este Cramer, compatibil determinat, cu soluţiile $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{20}{5} = 4$, iar $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{5}{5} = 1$, şi prin urmare $x = 4$, $y = 1$. ⓐ

9. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 - 3x \leq 0$ este: **(6 pct.)**

   a) $(3, \infty)$; b) $[0, 3]$; c) $[-1, 3]$; d) $[1, \infty)$; e) $[2, \infty)$; f) $(-3, 3)$.

   Soluţie. Inecuaţia devine $x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-3) \leq 0$, deci $x \in [x_1, x_2]$, unde $x_1 < x_2$ sunt cele două rădăcini distincte ale ecuaţiei asociate $x(x-3) = 0$. Deci $x \in [0, 3]$. ⓑ

10. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ să aibă şi soluţii nenule. **(6 pct.)**

    a) $a = -5$; b) $a = 5$; c) $a = 1$; d) $a = -2$; e) $a = 4$; f) $a = -4$.

    Soluţie. Sistemul este omogen şi admite şi soluţii nebanale d.n.d. rangul matricei coeficienţilor necunoscutelor este mai mic decât numărul de necunoscute. În cazul nostru, această condiţie revine la anularea determinantului matricei coeficienţilor necunoscutelor. Acesta este $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2a + 1 + 2) - (1 - 4 - a) = 3a + 6$, şi se anulează pentru $a = -2$. ⓓ

11. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele x, 8, $3x + 2$ să fie (în această ordine) în progresie aritmetică. **(6 pct.)**

    a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{7}{2}$; f) $\frac{1}{6}$.

    Soluţie. ***Metoda 1.*** Al doilea număr trebuie să fie media aritmetică a celorlalte două valori, deci $8 = \frac{x + (3x+2)}{2} \Leftrightarrow 16 = 4x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$. ***Metoda 2.*** Raţia este diferenţa dintre doi termeni consecutivi ai progresiei, deci egalând cele două diferenţe care dau raţia, obţinem: $8 - x = (3x + 2) - 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$. ⓔ

12. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x-1} = 27$. **(6 pct.)**

    a) $x = 4$; b) $x = 0$; c) $x = -1$; d) $x = 1$; e) $x = 2$; f) $x = -2$.

    Soluţie. Logaritmând ecuaţia în baza 3, obţinem $3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. ⓔ

13. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$. **(6 pct.)**

    a) $x = \sqrt{2}$; b) $x = \frac{e}{2}$; c) $x = 2$; d) $x = 3$; e) $x = 1$; f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

    Soluţie. Punctele de extrem sunt puncte ctitice ale lui f, deci puncte ale căror abscisă anulează derivata funcţiei f. Dar $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Dar singura valoare care aparţine domeniului de definiţie $(0, \infty)$ este $x_* = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Deoarece $f''(x_*) = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=\sqrt{2}/2} = 4 \neq 0$, rezultă că $x_* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de extrem (mai exact, dat fiind că $f''(x_*) > 0$, punct de minim) pentru funcţia f. ⓕ

14. Să se calculeze integrala $\int_0^1 xe^x dx$. **(6 pct.)**

    a) $\frac{e}{3}$; b) $3 - e$; c) 1; d) $\frac{e}{2}$; e) e; f) $e - 1$.

    Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem: $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = (xe^x)\big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e^x)\big|_0^1 = e - (e - 1) = 1$. ⓒ

15. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^{2017} + (X-3)^{2016} + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - 4X + 4$. Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g. **(6 pct.)**

    a) $6X + 1$; b) $X - 1$; c) $6X - 3$; d) $2X + 1$; e) $2X - 3$; f) $X + 1$.

Soluţie. Folosind împărţirea cu rest a polinomului f la g, se observă că deoarece gradul împărţitorului g este 2, rezultă că restul are cel mult gradul întâi, deci este de forma $R(x) = ax + b$. Prin urmare avem:

$$P(x) = g(x) \cdot h(x) + R(x). \tag{1}$$

Derivând această egalitate, obţinem

$$P'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) + R'(x). \tag{2}$$

Înlocuind expresia din enunţ a polinomului f, relaţiile (1) şi (2) conduc la sistemul

$$\begin{cases} (x-1)^{2017} + (x-3)^{2016} + x^2 + x + 1 &= g(x) \cdot h(x) + ax + b \\ 2017 \cdot (x-1)^{2016} + 2016 \cdot (x-3)^{2015} + 2x + 1 &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) + a. \end{cases}$$

Înlocuind $x = 2$ şi folosind faptul că această valoare este rădăcină dublă pentru g (deci $g(2) = g'(2) = 0$), sistemul devine

$$\begin{cases} 1^{2017} + (-1)^{2016} + 2^2 + 2 + 1 &= g(2) \cdot h(2) + 2a + b \\ 2017 \cdot 1^{2016} + 2016 \cdot (-1)^{2015} + 2 \cdot 2 + 1 &= g'(2) \cdot h(2) + g(2) \cdot h'(2) + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 9 \\ a = 6, \end{cases}$$

deci $a = 6$ şi $b = -3$. Prin urmare restul căutat este $R = aX + b = 6X - 3$. ⓒ