1. Să se rezolve inecuaţia $3x - 1 < 2x + 2$. **(6 pct.)**

   a) $(1, 4)$; b) $(-1, 1)$; c) $(2, \infty)$; d) $(5, 11)$; e) $(10, \infty)$; f) $(-\infty, 3)$.

   Soluţie. Inecuaţia se rescrie: $3x - 1 < 2x + 2 \Leftrightarrow x < 3$, deci $x \in (-\infty, 3)$. ⓐ

2. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) 2; c) -11; d) -3; e) -2; f) 9.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Scăzând dublul liniei a treia din prima linie şi apoi dezvoltând după prima coloană, obţinem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2.$$

   Metoda 2. Dezvoltăm determinantul folosind regula lui Sarrus; rezultă $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (12+0+0)-(2+0+12) = -2$. ⓔ

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(6 pct.)**

   a) 3; b) -1; c) 4; d) 6; e) 7; f) 5.

   Soluţie. Derivând funcţia f, obţinem $f'(x) = 3x^2 + 2$, deci $f'(1) = 3 + 2 = 5$. ⓕ

4. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x-1} = 27$. **(6 pct.)**

   a) $x = 4$; b) $x = 0$; c) $x = -1$; d) $x = 1$; e) $x = 2$; f) $x = -2$.

   Soluţie. Logaritmând ecuaţia în baza 3, obţinem $3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. ⓔ

5. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x + 1) = 3$. **(6 pct.)**

   a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 6$; f) $x = 7$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a logaritmului este $x + 1 > 0$, deci $x \in (-1, \infty)$. Obţinem succesiv: $\log_2(x + 1) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x + 1 \Rightarrow x = 7 \in (-1, \infty)$. ⓕ

6. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6. \end{cases}$ **(6 pct.)**

   a) $x = 4$, $y = 1$; b) $x = 1$, $y = 4$; c) $x = 2$, $y = 4$; d) $x = 1$, $y = 3$; e) $x = 2$, $y = 3$; f) $x = 2$, $y = 2$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Extrăgând x din a doua ecuaţie şi apoi înlocuind în prima, obţinem: $x = 6 - 2y \Rightarrow 2(6 - 2y) - y = 7 \Leftrightarrow -4y - y = 7 - 12 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$. Apoi, din a doua ecuaţie, rezultă $x = 6 - 2y = 6 - 2 \cdot 1 = 4$. Deci $x = 4$, $y = 1$. ***Metoda 2.*** Scăzând din prima ecuaţie dublul ecuaţiei a doua, obţinem $2x - y - (2x + 4y) = 7 - 2 \cdot 6 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$; înlocuind în ecuaţia a doua, obţinem $x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$, deci $x = 4$, $y = 1$. ***Metoda 3.*** Sistemul are numărul de ecuaţii egal cu cel al necunoscutelor, iar determinantul matricei coeficienţilor necunoscutelor este nenul, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Deci sistemul este Cramer, compatibil determinat, cu soluţiile $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{20}{5} = 4$, iar $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{5}{5} = 1$, şi prin urmare $x = 4$, $y = 1$. ⓐ

7. Să se calculeze suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$. **(6 pct.)**

   a) -3; b) -1; c) 3; d) 4; e) 2; f) -2.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Ecuaţia se rescrie: $x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) = 0$, deci admite soluţia $x_1 = 0$, iar rădăcinile polinomului din paranteză sunt $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \in \{-3, 1\}$. Atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 0 - 3 + 1 = -2$. ***Metoda 2.*** Din prima relaţie Viete, obţinem $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{1} = -2$. ***Metoda 3.*** Polinomul ecuaţiei nu are termen liber, deci admite rădăcina $x_1 = 0$. Acelaşi polinom are suma coeficienţilor nulă, deci admite rădăcina $x_2 = 1$. Deci polinomul dat se divide prin $x(x - 1) = x^2 - x$. După efectuarea împărţirii (sau aplicând repetat schema lui Horner), obţinem câtul $x + 3$, deci polinomul admite şi rădăcina $x_3 = -3$. Deci $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 1 + (-3) = -2$. ⓕ

8. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 - 3x \leq 0$ este: **(6 pct.)**

   a) $(3, \infty)$; b) $[0, 3]$; c) $[-1, 3]$; d) $[1, \infty)$; e) $[2, \infty)$; f) $(-3, 3)$.

   Soluţie. Inecuaţia devine $x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-3) \leq 0$, deci $x \in [x_1, x_2]$, unde $x_1 < x_2$ sunt cele două rădăcini distincte ale ecuaţiei asociate $x(x-3) = 0$. Deci $x \in [0, 3]$. ⓑ

9. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele x, 8, $3x+2$ să fie (în această ordine) în progresie aritmetică. **(6 pct.)**

   a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{7}{2}$; f) $\frac{1}{6}$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Al doilea număr trebuie să fie media aritmetică a celorlalte două valori, deci $8 = \frac{x+(3x+2)}{2} \Leftrightarrow 16 = 4x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$. ***Metoda 2.*** Raţia este diferenţa dintre doi termeni consecutivi ai progresiei, deci egalând cele două diferenţe care dau raţia, obţinem: $8 - x = (3x+2) - 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$. ⓔ

10. Fie $M = \left\{ X \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; X^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, unde $M_2(\mathbb{C})$ reprezintă mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi, cu elemente în $\mathbb{C}$. Pentru $X \in M$, notăm cu $S(X)$ suma pătratelor elementelor matricei X. Să se calculeze $S = \sum\limits_{X \in M} S(X)$. **(6 pct.)**

    a) $S = 3$; b) $S = 4$; c) $S = 5$; d) $S = 11$; e) $S = 7$; f) $S = 1$.

    Soluţie. Fie $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M$. Atunci egalitatea $X^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ se rescrie ca sistem algebric cu necunoscutele a, b, c, d: $\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a+d) = -2 \\ c(a+d) = 4 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases}$. Din a doua şi a treia ecuaţie rezultă că b, c şi $a + d$ nu pot fi nule. Scăzând ultima ecuaţie din prima, se obţine

$$d^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (d+a)(d-a) = 0 \Leftrightarrow d = \pm a.$$

Dar $d + a \neq 0$, deci $d = a$. Împărţind ecuaţia a doua la a treia, obţinem $\frac{b}{c} = \frac{-2}{4}$, deci

$$c = -2b, \tag{1}$$

iar sistemul devine

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = -1 \\ ab = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Scăzând a doua ecuaţie din prima rezultă $a^2 - ab - 2b^2 = 0$, ecuaţie omogenă de gradul 2. Împărţind ecuaţia omogenă la $b^2 \neq 0$ şi notând $k = \frac{a}{b}$, rezultă

$$k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k \in \{-1, 2\} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \{-1, 2\} \Leftrightarrow b \in \{-a, 2a\},$$

deci distingem cazurile

(i) $b = -a$, caz în care înlocuind în (2) rezultă $b^2 = 1 \Leftrightarrow b \in \{-1, 1\}$.

Pentru $b = 1$ rezultă $a = -1 = d$ iar din (1), obţinem $c = -2b = -2$ şi avem soluţia $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Pentru $b = -1$ rezultă $a = 1 = d$, iar din (1), obţinem $c = -2b = 2$ şi avem soluţia $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(ii) $a = 2b$, caz în care înlocuind în (2) rezultă $2b^2 = -1 \Leftrightarrow b \in \{-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\}$.

Pentru $b = -\frac{i}{\sqrt{2}}$, rezultă $a = d = 2b = -2\frac{i}{\sqrt{2}}$, iar $c = -2b = 2\frac{i}{\sqrt{2}}$; avem soluţia $X_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Pentru $b = -\frac{i}{\sqrt{2}}$, rezultă $a = d = 2b = 2\frac{i}{\sqrt{2}}$, iar $c = -2b = -2\frac{i}{\sqrt{2}}$; avem soluţia $X_4 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

în concluzie, $M = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ şi

$$S = S(X_1) + S(X_2) + S(X_3) + S(X_4) = 2 \cdot (1 + 1 + 4 + 1) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4 + 1 + 4 + 4) = 14 - 13 = 1,$$

deci $S = 1$. ⓕ

11. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x+1} = x - 1$ este: **(6 pct.)**

a) 4; b) 0; c) 1; d) 2; e) 3; f) 5.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului conduce la $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. În plus, pozitivitatea radicalului conduce la $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, deci în final $x \in [1, \infty)$. Ridicând la pătrat ecuaţia din enunţ, rezultă $2x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$. Dar singura soluţie care satisface condiţia $x \in [1,\infty)$ este soluţia $x = 4$, deci suma soluţiilor este 4. ⓐ

12. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ să aibă şi soluţii nenule. **(6 pct.)**

a) $a = -5$; b) $a = 5$; c) $a = 1$; d) $a = -2$; e) $a = 4$; f) $a = -4$.

Soluţie. Sistemul este omogen şi admite şi soluţii nebanale d.n.d. rangul matricei coeficienţilor necunoscutelor este mai mic decât numărul de necunoscute. În cazul nostru, această condiţie revine la anularea determinantului matricei coeficienţilor necunoscutelor. Acesta este $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2a+1+2)-(1-4-a) = 3a+6$, şi se anulează pentru $a = -2$. ⓓ

13. Considerăm funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, dacă $x \in (-1,1]$, şi $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Fie $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuaţia } f(x) = mx \text{ are trei soluţii reale şi distincte}\}$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $M = \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$; b) $M = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$; c) $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$;d) $M = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$; e) $M = \left[1, \frac{\pi}{4}\right)$; f) $M = \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluţie. Discutăm ecuaţia $f(x) = mx$, pentru $x \in [-1,1]$. Se observă că $x = 0$ satisface ecauţia. Pentru $x \in [-1,0)\cup(0,1]$ căutăm $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are două soluţii distincte. Deoarece $x \neq 0$, împărţind prin x, ecuaţia se rescrie $h(x) = 0$, unde

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} - m = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - 2\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - m.$$

Se verifică uşor că are loc tabelul de variaţie:

x	-1			0			1
$h'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$\frac{\pi}{2}-m$	$\searrow$	$1-m$	$\vert$	$1-m$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-m$

Dorim ca ecuaţia $h(x) = 0$ să aibă soluţii în fiecare din intervalele $x \in [-1,0)$ şi $x \in [-1,0)$, ceea ce revine la $0 \in (1-m, \frac{\pi}{2}-m]$, adică $1 - m < 0 \leq \frac{\pi}{2} - m$, de unde obţinem $m \in (1, \frac{\pi}{2}]$. ⓕ

Notă. Soluţia se simplifică semnificativ, dacă observăm că $f(x) = \arcsin x$, $\forall x \in [-1,1]$. Pentru a arăta acest lucru, constatăm că pentru $x \in (-1,1]$, notând $\alpha = f(x)$, rezultă $\mathrm{tg}\,(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, deci $f(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; apoi notând $\sin t = x$ rezultă $f(x) = t$, deci $f(x) = \arcsin x$ pentru $x \in (-1,1]$. Egalitatea are loc pe întregul interval $[-1,1]$ deoarece $f(x)$ şi $\arcsin x$ sunt continue pe $[-1,1]$, derivabile cu aceeaşi derivată $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe $(-1,1)$ şi coincid la capetele intervalului $[-1,1]$.

14. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + 18$ şi $g = X^3 + bX + 12$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $S = a + b$ ştiind că polinoamele f şi g au două rădăcini comune. **(6 pct.)**

a) $S = 0$; b) $S = 1$; c) $S = 3$; d) $S = -2$; e) $S = 4$; f) $S = -1$.

Soluţie. Fie $f = X^3 + aX^2 + 18 = (X-m)(X-n)(X-p)$, $g = X^3 + bX + 12 = (X-m)(X-n)(X-q)$ $(m,n,p,q \in \mathbb{C})$. Se observă că f şi g au coeficienţi reali, deci $p, q \in \mathbb{R}$ iar m, n sunt fie reale, fie complexe conjugate. Din egalităţile de mai sus rezultă prin scădere $f - g = (q-p)d = aX^2 - bX + 6$, unde $p \neq q$ şi $a \neq 0$ (altfel se contrazice ultima egalitate). Atunci, asemenea lui d, $f - g$ divide f, deci restul r al împărţirii lui f la $aX^2 - bX + 6$ este identic nul. Prin calcul direct se obţine restul acestei împărţiri, $r(x) = \frac{a^2b+b^2-6a}{a^2}x + \frac{6(2a^2-b)}{a^2}$, care este identic nul d.n.d. $a = 1$ şi $b = 2$. Deci $S = a + b = 3$. ⓒ

Notă. Folosind valorile obţinute pentru a şi b, se obţin succesiv $\{m, n\} = \{1 \pm i\sqrt{5}\}$, $p = -3$ şi $q = -2$.

15. Pentru $a > 0$, considerăm funcţia $f : [0, a] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dacă $V(a)$ este volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox, să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$. **(6 pct.)**

a) $\frac{\pi^2}{3}$; b) π^2; c) $\frac{\pi^2}{4}$; d) $\frac{\pi^2}{2}$; e) $\frac{\pi^2}{6}$; f) $\frac{\pi^2}{8}$.

Soluţie. Volumul este dat de formula $V(a) = \pi \int_0^a f^2(x)dx = \pi \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Calculăm integrala nedefinită asociată $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, plecând de la $\operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2}$ şi integrând prin părţi:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}(x)'dx = \frac{x}{1+x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx\right)\end{aligned}$$

deci

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx,$$

de unde rezultă

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right).$$

Prin urmare

$$V(a) = \pi \cdot \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \pi \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{1+a^2} + \operatorname{arctg} a\right),$$

şi deci

$$\lim_{a\to\infty} V(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{1+a^2} + \operatorname{arctg} a\right) = \frac{\pi}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}. \quad \text{ⓒ}$$