EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left((1-i)(i-1)\right)^4=(2i)^4=$	**3p**
	$=16$	**2p**
2.	$f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=$	**2p**
	$=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{3-x}{3+x}=$	**2p**
	$=-f(x)$	**1p**
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$	**2p**
	$x\in(-4,2)$	**1p**
	$(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	**2p**
4.	25 de numere sunt divizibile cu 4	**1p**
	20 de numere sunt divizibile cu 5	**1p**
	5 numere sunt divizibile cu 4 şi cu 5	**1p**
	Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	**2p**
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$	**2p**
	$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$	**2p**
	Punctul căutat este $Q(3,\ 1)$	**1p**
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$	**3p**
	$AD=\frac{4\sqrt{14}}{5}$	**2p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\det(A)=0$	**3p**
	$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$ (sau orice alt minor de ordinul 2 nenul), deci rangul matricei A este 2	**2p**
b)	Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat	**2p**
	De exemplu, luând $z=\alpha$ necunoscută secundară se obține $x=2\alpha-3,\ y=31-3\alpha,\ z=\alpha$	**3p**
c)	$x=2\alpha-3\geq 0,\ y=31-3\alpha\geq 0,\ z=\alpha\geq 0\Rightarrow$	**1p**
	$\frac{3}{2}\leq\alpha\leq\frac{31}{3}$	**2p**
	$\alpha\in\{2,3,4,...,10\}$	**1p**
	Sunt 9 soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	**1p**
2.a)	$a,b\in\mathbb{Z}_5$ şi card $\mathbb{Z}_5=5$	**2p**
	Deci mulțimea A are 25 de elemente	**3p**

b)	$\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ dacă $\hat{3}a = b$ şi $\hat{3}b = -a$	**1p**
	Un exemplu: $M = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$	**2p**
c)	Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2-y^2 & \hat{2}xy \\ -\hat{2}xy & x^2-y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^2-y^2=\hat{1}$ şi $xy=\hat{0}$	**1p**
	Dacă $x=\hat{0} \Rightarrow y^2=\hat{4} \Rightarrow y \in \{\hat{2};\hat{3}\}$; dacă $y=\hat{0} \Rightarrow x^2=\hat{1} \Rightarrow x \in \{\hat{1};\hat{4}\}$	**2p**
	Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$	**2p**

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$	**3p**
	Deci $y = \frac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.	**2p**
b)	$f'(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$	**2p**
	$2x^2+2x+1>0$ pentru orice x real, deci $f'(x)>0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	**2p**
	Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(-1,+\infty)$	**1p**
c)	$f''(x) = \frac{-2(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2},\ x \neq -1$	**2p**
	$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă că $x=-\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune al funcției f	**2p**
2.a)	$I_n = \int\limits_n^{n+1} \left(2-\frac{1}{x}\right)dx = (2x-\ln x)\Big\|_n^{n+1} = 2-\ln\frac{n+1}{n}$	**2p**
	$I_{n+1}-I_n = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n+1} =$	**1p**
	$=\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este strict crescător	**2p**
b)	$1 < \frac{n+1}{n} \le 2 < e \Rightarrow 0 < \ln\frac{n+1}{n} < 1$	**2p**
	$1 < 2-\ln\frac{n+1}{n} < 2$	**2p**
	$1 < I_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit	**1p**
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} n(2-I_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n} =$	**2p**

	$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$	**3p**