Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z-z^2=2(1+i)-(1+i)^2=$	**2p**
	$=2+2i-\left(1+2i+i^2\right)=2+2i-2i=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2-8m$	**2p**
	$f(x)>0$ pentru orice număr real x, deci $\Delta<0$, de unde obținem $m\in(0,8)$	**3p**
3.	$\log_5\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\right)=2\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-1=5^2$	**3p**
	$x=26$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**2p**
	$2^n=32$, deci $n=5$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow ABDC$ paralelogram, deci segmentele AD și BC au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x=8$ și $y=5$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	**2p**
	$\cos x-\sin x=\sin x-\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}4-2a-2b+2ab&0&2a+2b-2ab\\0&4&0\\2a+2b-2ab&0&4-2a-2b+2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}ab-a-b+2&0&2-(ab-a-b+2)\\0&2&0\\2-(ab-a-b+2)&0&ab-a-b+2\end{pmatrix}=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(pq-p-q+2)=2I_3\Leftrightarrow A(pq-p-q+2)=A(2)\Leftrightarrow pq-p-q=0$	**2p**
	Cum p și q sunt numere întregi, din $(p-1)(q-1)=1$, obținem $p=0$, $q=0$ sau $p=2$, $q=2$	**3p**

2.a)	$x * y = -\frac{3}{5}xy + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x + y = -\frac{3}{5}x\left(y-\frac{5}{3}\right) + y - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} =$	**3p**
	$=\left(y-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x+1\right)+\frac{5}{3} = -\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} = -\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3x}-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3} = \frac{5}{3}\frac{(x-1)^2}{x}+\frac{5}{3},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x>0 \Rightarrow \frac{5(x-1)^2}{3x} \geq 0$, deci $\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x * \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ și $\frac{5}{3} * y = \frac{5}{3}$, unde x și y sunt numere reale	**3p**
	$\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \ldots * \frac{2020}{3} = \left(\left(\frac{1}{3} * \ldots * \frac{4}{3}\right) * \frac{5}{3}\right) * \left(\frac{6}{3} * \ldots * \frac{2020}{3}\right) = \frac{5}{3} * \left(\frac{6}{3} * \ldots * \frac{2020}{3}\right) = \frac{5}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x =$	**3p**
	$=\frac{4x^2+4-2x}{x^2+1} = \frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right) =$	**2p**
	$=4-\ln 1 = 4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1\left(25-x^2\right)dx = \left.\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1 =$	**3p**
	$=25-\frac{1}{3}=\frac{74}{3}$	**2p**
b)	$\int_{-3}^{3}\left\|x f(x)\right\|dx = -\int_{-3}^{0} x\sqrt{25-x^2}\,dx + \int_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx =$	**2p**
	$=\left.\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-3}^{0} - \left.\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^3 = \frac{125}{3}-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+\frac{125}{3}=\frac{122}{3}$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^{n+1}(x)}dx - \int_0^1\frac{1}{f^n(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}\left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1\right)dx$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}>0$ și $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1<0$, pentru orice $x\in[0,1] \Rightarrow I_{n+1}-I_n \leq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător	**3p**