Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că suma elementelor mulţimii $\{n \in \mathbb{N} \mid n(n+2) < 14\}$ este egală cu 3.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați numerele reale a și b, știind că $f(0)=1$ și $f(x+1)=f(x)+2$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x+5)^2-9>0$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ şi $C(-1,3)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Calculaţi sinusul unghiului D al triunghiului DEF, știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, $DE=4$ și $DF=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\det A=2$.
5p	**b)** Determinaţi numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.
5p	**c)** Determinați inversa matricei $B=A+I_3$.
	2. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{2\log_3 y}$.
5p	**a)** Arătaţi că $2\circ 9=16$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=25$.
5p	**c)** Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $e^{x-2}-x+1\ge 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.
5p	**c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n(n+2)<14$ și $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$b=1$	**2p**
	$a(x+1)+1=ax+1+2$, pentru orice număr real $x\Rightarrow a=2$	**3p**
3.	$(x+2)(x+8)>0$	**2p**
	Mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty,-8)\cup(-2,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor ordonate cu două elemente din $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ este egal cu $A_5^2=$	**3p**
	$=20$	**2p**
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului BC	**2p**
	Coordonatele simetricului punctului A față de punctul M sunt $x=2$ și $y=6$	**3p**
6.	$EF=3$	**2p**
	ΔDEF este dreptunghic în E, deci $\sin D=\frac{3}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=0+0+0-(-1)-(-1)-0=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=1$, $y=2$	**3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det B=2$	**2p**
	$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$2\circ 9=2^{2\log_3 9}=2^{2\cdot 2}=$	**3p**
	$=2^4=16$	**2p**
b)	$x^{2\log_3 3}=25\Leftrightarrow x^2=25$	**2p**
	$x=-5$ care nu convine, $x=5$ care convine	**3p**
c)	$x\circ y=x^{2\log_3 y}=x^{\log_3 y^2}=\left(y^2\right)^{\log_3 x}=$	**3p**
	$=y^{2\log_3 x}=y\circ x$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(e^x\right)'\cdot(x-1)-e^x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$	**2p**
	$x\in(1,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ şi $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f(2)=e^2$, deci $\dfrac{e^x}{x-1}\ge e^2\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-2}}{x-1}\ge 1\Leftrightarrow e^{x-2}-x+1\ge 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}+0\cdot\cos 0+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} g^2(x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{\pi}{2}x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{\pi}{4}\sin 2x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi(\pi-2)}{8}$	**3p**