ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Str. General Berthelot nr. 26, sector 1, Bucureşti, 010168,
Tel.:+40-21-3144411; 3144511; 3144424. Tel/fax: +40-21-3103207

Evaluarea la disciplina *Matematică*
în cadrul examenului național de bacalaureat 2010

Examenul național de bacalaureat este modalitatea esențială de evaluare a competențelor, a nivelului de cultură generală şi de specializare atins de absolvenții de liceu.

În conformitate cu *Ordonanța de urgență nr. 97/2009, pentru modificarea Legii Învățământului nr. 84/1995* şi cu **Art.41** (1) din *Anexa 2 la O.M.E.C.I. nr.5507/06.10.2009, privind aprobarea calendarului şi a metodologiei de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat -2010*, se susține o probă scrisă de evaluare a competențelor formate pe durata învățământului liceal, la disciplina matematică în cadrul probei **E - c)**, diferențiată în funcție de filieră, profil şi specializare.

În consecință, susțin proba scrisă la disciplina *matematică* elevii care au absolvit liceul în cadrul profilului real din filiera teoretică, în cadrul tuturor profilurilor din filiera tehnologică şi în cadrul profilului pedagogic, specializarea învățător-educatoare şi a profilului militar, din filiera vocațională. Proba scrisă la *matematică* are statut de disciplină obligatorie.

Testul elaborat în cadrul probei scrise la matematică contribuie la îndeplinirea funcțiilor evaluării urmărite prin examenul de bacalaureat. Prin el se realizează o evaluare sumativă la finalul învățământului preuniversitar. Fiecare test proiectat asigură o cuprindere echilibrată a materiei studiate, are un grad de complexitate corespunzător conținutului programelor şcolare şi a programei de bacalaureat, putând fi tratat în timpul stabilit de 3 ore.

Testul pentru proba scrisă la disciplina *matematică* este format din trei subiecte. Fiecare subiect conține câte şase itemi subiectivi de tip rezolvare de probleme.

Competențe de evaluat

Proba scrisă la disciplina *matematică*, susținută în cadrul examenului de bacalaureat 2010, evaluează competențele dezvoltate pe parcursul învățământului liceal, în conformitate cu programele şcolare pentru clasele a IX-a - a XII-a, în vigoare pentru absolvenții promoției 2010.

Competențele generale şi competențe specifice asociate conținuturilor programei de bacalaureat care urmează a fi evaluate în cadrul probei scrise la *matematică*.

1. **Identificarea unor date şi relații matematice şi corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite**

- Utilizarea proprietăților algebrice ale numerelor, a estimărilor şi aproximărilor în contexte variate
- Recunoaşterea unor corespondențe care sunt şiruri, progresii, funcții
- Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică
- Descrierea sintetică sau vectorială a proprietăților unor configurații geometrice
- Identificarea unor metode posibile în rezolvarea problemelor
- Interpretarea primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor şi a diagramelor

2. **Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice**

- Utilizarea unor metode algebrice şi grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații
- Completarea unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului
- Aplicarea unor metode diverse pentru optimizarea calculelor de distanțe, unghiuri şi arii
- Identificarea, într-o situație-problemă dată, a formulei adecvate de numărare
- Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz
- Identificarea unor metode de calcul ale integralelor, prin realizarea de legături cu reguli de derivare
- Interpretarea unor proprietăți ale şirurilor şi ale altor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice
- Evidențierea asemănărilor şi a deosebirilor dintre proprietățile unor operații definite pe mulțimi diferite şi dintre calculul polinomial şi cel cu numere

3. **Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete**

- Alegerea formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu numere
- Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice
- Operarea cu funcții reprezentate în diferite moduri şi caracterizarea calitativă a acestor reprezentări
- Utilizarea unor formule combinatoriale în raționamente de tip inductiv
- Utilizarea operațiilor cu vectori pentru a descrie o problemă practică
- Aplicarea algoritmilor de calcul în situații practice

4. **Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora**

- Caracterizarea unor mulțimi de numere şi a unor relații dintre acestea utilizând limbajul logicii matematice şi teoria mulțimilor
- Exprimarea proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice
- Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice
- Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice
- Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative şi calitative ale unei funcții
- Analiza unor configurații geometrice pentru optimizarea algoritmilor de rezolvare
- Analiza şi interpretarea unor situații practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice
- Utilizarea proprietăților operațiilor în calcule specifice unei structuri algebrice

5. **Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă**

- Analiza unor contexte uzuale şi matematice (de exemplu: redactarea soluției unei probleme) utilizând limbajul logicii matematice şi teoria mulțimilor
- Analiza unor situații practice şi descrierea lor cu ajutorul funcțiilor

- Interpretarea unor situații problemă cu conținut practic cu ajutorul funcțiilor şi a elementelor de combinatorică
- Stabilirea unor condiții de existență şi/sau de compatibilitate a unor sisteme şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora
- Folosirea proprietăților unei funcții continue, pentru calcularea integralei acesteia pe un interval

6. **Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoştințelor din diferite domenii**

- Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei şi interpretarea rezultatului
- Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări grafice prin utilizarea de estimări, aproximări şi strategii de optimizare
- Optimizarea calculului trigonometric prin alegerea adecvată a formulelor
- Modelarea unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial
- Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații problemă prin alegerea unor strategii şi metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)
- Explorarea unor proprietăți cu caracter local şi/ sau global ale unor funcții utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică

Testele şi baremele corespunzătoare, elaborate în vederea asigurării transparenței şi informării persoanelor interesate, sunt prezentate ca modele pentru examenul propriu-zis:

Precizări referitoare la evaluarea probei scrise

Ponderea diferitelor comportamente cognitive în evaluarea competențelor elevilor prin proba scrisă la examenul de bacalaureat 2010, disciplina *matematică*, este ilustrată în tabelul de mai jos:

Competență / Tip de comportament	Cunoştințe, abilități/ deprinderi, atitudini				
Comportamente cognitive	**Cunoaştere**	**Înțelegere**	**Aplicare**	**Analiză – Sinteză**	**Evaluare**
Pondere	**10%**	**15%**	**50%**	**15%**	**10%**

Cunoaşterea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, problematicii specifice disciplinei *matematică* se evaluează prin sarcini de lucru precum: ***enumerați, precizați/menționați, specificați, caracterizați, determinați, arătați etc.***

Înțelegerea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, problematicii specifice disciplinei *matematică* se evaluează prin sarcini de lucru precum: ***recunoaşteți, exemplificați, precizați, identificați, specificați, evidențiați, scrieți, descrieți, calculați, explicați, verificați etc.***

Aplicarea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, modalităților de operare şi de abordare specifice disciplinei *matematică* în contexte noi şi în rezolvarea de probleme, se evaluează prin sarcini de lucru precum: ***calculați/efectuați, alegeți, exprimați, estimați, transpuneți, construiți/completați un grafic/un tabel, trasați, utilizați, justificați, rezolvați, demonstrați, redactați, prelucrați, interpretați etc.***

Analiza - Sinteza conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, modalităților de operare şi de abordare specifice disciplinei *matematică* în contexte noi şi în rezolvarea de probleme, se evaluează prin sarcini de lucru precum: ***organizați, aranjați, optimizați, corelați, măsurați, calculați/efectuați, comparați, asociați, formulați, reprezentați grafic, caracterizați, compuneți, prelucrați, elaborați, deduceți, proiectați, analizați, argumentați/justificați etc.***

Evaluarea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, modalităților de operare şi de abordare specifice disciplinei *matematică* în contexte noi şi în rezolvarea de probleme, se evaluează prin sarcini de lucru precum: ***estimați, selectați, alegeți, comparați, ierarhizați, stabiliți, studiați, argumentați, judecați, transferați etc.***

Competențele de evaluat, înscrise în programele pentru examenul de bacalaureat 2010 la *matematică* sunt urmărite, în cadrul probei scrise, având în vedere raportul dintre competență şi comportamentele cognitive corespunzătore, conform prezentării anterioare.

Baremul de evaluare şi de notare este instrumentul pe baza căruia se apreciază lucrările elevilor. Este un instrument de evaluare şi de notare asociat unei/unor sarcini concrete de lucru date elevilor.

Baremul de evaluare şi de notare este elaborat cu grad înalt de obiectivitate şi aplicabilitate, astfel încât să reducă la minim diferențele de notare dintre corectori.

Baremul de evaluare şi de notare este proiectat pe baza notării analitice. Aceasta implică determinarea principalelor performanțe (unități de răspuns) pe care elevul trebuie să le evidențieze în răspunsul său la fiecare item. Unităților de răspuns li se acordă puncte care, însumate, determină nota pentru fiecare item. Notarea analitică are avantajul de a asigura rigurozitatea corectării, favorizând realizarea unei aprecieri obiective.

Baremul de evaluare şi de notare, în cazul itemilor de tip rezolvare de probleme, include elemente ale răspunsului care vor fi punctate. În acest fel candidatul primeşte punctaj pentru rezolvări parțiale ale cerinței itemului. Pentru o evaluare unitară, în barem se vor regăsi rezolvări complete ale itemilor. Se vor puncta însă corespunzător oricare alte metode de rezolvare corectă a problemei.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Calculați distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Calculați produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Dați un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ și numerele $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

5p **b)** Arătați că $I_n\le \ln 2$.

5p **c)** Arătați că $I_n\ge \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$z^6=2^6\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-2^6\Rightarrow \operatorname{Re} z^6=-64$	**3p**
2.	$f(512)=\frac{1}{8}$	**2p**
	$(f\circ f)(512)=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$	**3p**
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, cu soluțiile $\sin x=-\frac{1}{2}$ şi $\sin x=1$.	**3p**
	Obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, sau $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.	**2p**
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	**3p**
	Acesta este $C_6^3=20$.	**2p**
5.	Punctul $A(0,\ 3)$ se află pe prima dreaptă.	**2p**
	Distanța este $\mathrm{d}(A,\ d_2)=\frac{\lvert 2\cdot 0+4\cdot 3-11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.	**3p**
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$	**3p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1+2^2=5$	**1p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$	**2p**

	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde rezultă concluzia	**3p**
b)	Observăm că $x=0,\ y=1,\ z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	**3p** **2p**
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta,\ z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1\le 0$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3=64$ matrice.	**3p** **2p**
b)	Luăm $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A)=\hat{2},\ \det(A^2)=\hat{0}$	**3p** **2p**
c)	$X=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2=\hat{1}$, $b(a+c)=\hat{0}, c^2=\hat{0}$. Obținem $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c\in\{\hat{0},\hat{2}\}, b=\hat{0}$, deci există 4 soluții	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci avem asimptota oblică $y=x$.	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci f este concavă pe $(-\infty,-1)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^{\pi}\|\sin 2x\|dx=\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx$ $I=\frac{-\cos 2x}{2}\Big\|_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Big\|_{\pi/2}^{\pi}$ $I=2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx\le\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx$ $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_{\pi}^{2\pi}=\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\|\sin t\|}{t}dt$	**1p**

	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \ldots + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt$	**2p**
	$I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \ldots + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \lvert \sin t \rvert dt$	**1p**
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \lvert \sin t \rvert dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	**1p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3)=2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=8$, $AC=8$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Calculați $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Demonstrați că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Arătați că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Determinați numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x), x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\, dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$	**2p**
	$a_{10} = 21$	**1p**
	$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$	**2p**
2.	$A(m,-1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$	**3p**
	$m = 2$ sau $m = 1$	**2p**
3.	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	**1p**
	$2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	**4p**
4.	$C_5^3 =$	**3p**
	$= 10$	**2p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0,0)$	**2p**
	Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte	**1p**
	$CM = \sqrt{5}$	**2p**
6.	Aria $\Delta ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$	**2p**
	$= \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	**3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(I_3 + B) = 1$	**3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}$	**2p**
	$f(A)=A^2-3A+I_3=$	**1p**
	$=I_3+B$	**2p**
c)	$\left(f(A)\right)^3=\left(I_3+B\right)^3=I_3+3B+3B^2+B^3$	**2p**
	$B^3=O_3$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$(x-3)^2-2(x-3)=0$	**2p**
	$(x-3)(x-5)=0$	**1p**
	$x=3$ sau $x=5$	**2p**
b)	$(x-3)(a-3)+3=3$	**2p**
	$a=3\in$ **Z**	**3p**
c)	$\begin{cases}x+y=6\\(x-y-3)(-2)=2\end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\left(x^3\right)'=3x^2$	**2p**
	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**3p**
	$f'(1)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1]$ şi pe $[1;+\infty)$	**2p**
	şi f descrescătoare pe $[-1;0)$ şi pe $(0;1]$	**2p**
2.a)	$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx=$	**1p**
	$=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$	**2p**
	$=\frac{7\pi}{15}$.	**2p**
b)	$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{t}\,dt=$	**3p**

	$=\frac{t\sqrt{t}}{3}\Big\|_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{3}\cdot(-2x)}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 4x + 3 = 0$.

5p **2.** Calculați suma $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 40$.

5p **3.** Determinați valorile parametrului real m astfel încât ecuația $x^2 - 4mx + 1 = 0$ să aibă soluții reale.

5p **4.** Calculați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta $d : x + y + 1 = 0$.

5p **5.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

5p **6.** Calculați $\frac{1}{2}\cos 135^\circ + 3\sin 135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + a$, cu $a \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Determinați $a \in \mathbb{Z}$ ştiind că legea "$*$" admite element neutru.

5p **b)** Pentru $a = 2$ demonstrați că legea "$*$" este asociativă.

5p **c)** Dacă $a = 2$ arătați că $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

5p **d)** Pentru $a = 2$ determinați mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{există } x' \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x * x' = -1\}$.

5p **e)** Pentru $a = 2$ determinați $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * y = 3$.

5p **f)** Fie mulțimea $H = \{-3, -1\}$. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x, y \in H$, să rezulte că $x * y \in H$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Fie numerele reale a, b, c şi determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$, $b = 2$ şi $c = 3$, calculați determinantul D.

5p **b)** Arătați că dacă $a = b$, atunci $D = 0$.

5p **c)** Pentru $b = 2$ şi $c = 3$, determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $D = 2$.

5p **d)** Demonstrați că $D = (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$.

5p **e)** Arătați că dacă $D = 0$, atunci cel puțin două dintre numerele a, b şi c sunt egale.

5p **f)** Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1)	$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$ Finalizare: $P=\frac{2}{5}$	**2p** **3p**
2)	$1+2+3+\ldots+40=\frac{40\cdot 41}{2}=$ $=820$	**3p** **2p**
3)	$\Delta=16m^2-4$ $m\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$	**2p** **3p**
4)	Scrierea formulei $d(A,d)=\frac{\lvert 1+2+1\rvert}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	**3p** **2p**
5)	$7^x=y$; $y^2-8y+7=0$ $y_1=1\Rightarrow x_1=0$ $y_2=7\Rightarrow x_2=1$	**1p** **2p** **2p**
6)	$\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$; $\sin 135^\circ=\sin 45^\circ$ Finalizare: $\frac{1}{2}\cos 135^\circ+3\sin 135^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

a)	Din definiția elementului neutru şi cum legea este comutativă, avem $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ $(e+2)x+2e+a=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ de unde $\begin{cases}e+2=1\\2e+a=0\end{cases}$ Deci $a=2$ şi $e=-1$.	**1p** **2p** **2p**
b)	$(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ $(x*y)*z=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$ $x*(y*z)=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$	**1p** **2p** **2p**
c)	$x*y=(x+2)(y+2)-2\Rightarrow(x+y+2)*z=(x+y+4)(z+2)-2$	**2p**

	$\left(x*z\right)+\left(y*z\right)+2=(x+2)(z+2)-2+(y+2)(z+2)-2+2=$ $=(x+y+4)(z+2)-2=\left(x+y+2\right)*z$	2p 1p
d)	Din $x*x'=(x+2)(x'+2)-2=-1$, rezultă $x'=-2+\dfrac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}$ pentru $x\in\mathbb{Z}$ $(x+2)\mid 1$, adică $(x+2)\in\{-1,1\}$ $M=\{-3,-1\}$	2p 2p 1p
e)	Din $x*y=3$ se obține $(x+2)(y+2)=5$ Finalizare: $(x;y)\in\{(-1;3),(-3;-7),(3,-1),(-7;-3)\}$	1p 4p
f)	$(-3)*(-3)=a-3=(-1)*(-1)\in\{-3,-1\}\Rightarrow a\in\{0,2\}$ $(-3)*(-1)=(-1)*(-3)=a-5\in\{-3,-1\}\Rightarrow a\in\{2,4\}$ $a=2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

a)	$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=2$	2p 3p
b)	$a=b\Rightarrow D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&a&a^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=0$	2p 3p
c)	$D=a^2-5a+6$ $D=2\Rightarrow a^2-5a+4=0$ $a=1$ sau $a=4$	2p 1p 2p
d)	Scăzând prima linie din celelalte două obținem $D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}$ $D=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\cdot\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c+a\end{vmatrix}=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)$	2p 3p
e)	$D=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)=0\Rightarrow b-a=0$ sau $c-a=0$ sau $c-b=0$ Finalizare	3p 2p
f)	Dintre cele 3 numere întregi *a*, *b*, *c*, cel puțin două au aceeaşi paritate, deci diferența lor este număr par. Dar cum $D=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)$ rezultă că D este număr par	3p 2p