Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-5x+7\right)=\log_2 3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$ și $D(8,5)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin x+3\cos x=2\sqrt{2}$, știind că $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 5 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(X(1)\right)=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $X(-a)+X(a)=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(2)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$, atunci polinomul f se divide cu X^2-3X+2.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=11$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3e^2+4e-4}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+a-2.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=1+i+\left(i^2-1\right)-i+1=$	**3p**
	$=1+i-2-i+1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$f\left(f(1)\right)=f(0)=1$	**3p**
3.	$x^2-5x+7=3\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale pare de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$x_A+x_C=6$, $x_B+x_D=6\Rightarrow x_A+x_C=x_B+x_D$	**2p**
	$y_A+y_C=6$, $y_B+y_D=6\Rightarrow y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow$ segmentele AC și BD au același mijloc, deci $ABCD$ este paralelogram	**3p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg}x=1$, obținem $x=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin\dfrac{\pi}{4}+3\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(1)=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(X(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot 5=$	**3p**
	$=1-5=-4$	**2p**
b)	$X(-a)+X(a)=\begin{pmatrix}-a & 5\\ 1 & -a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 5\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10\\ 2 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-2018 & 5\\ 1 & -2018\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2018 & 5\\ 1 & 2018\end{pmatrix}=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}ab+5 & 5(a+b)\\ a+b & ab+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & 10\\ 2 & a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $a+b=2$ și $ab=-3$, obținem perechile $(-1,3)$ și $(3,-1)$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-X+2\Rightarrow f(2)=2^3-2\cdot 2^2-2+2=$	**3p**
	$=8-8-2+2=0$	**2p**
b)	$f(-1)=0\Rightarrow m=2$, deci $f=X^3-2X^2-X+2$	**3p**
	Restul împărțirii lui f la X^2-3X+2 este 0, deci f se divide cu X^2-3X+2	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$, $x_1x_2x_3=-m$	**3p**
	$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=6 \Leftrightarrow \frac{6}{-m}=6$, deci $m=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}+\frac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}+\frac{1\cdot(x+3)-(x+2)\cdot 1}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}+\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}+\frac{x+3-x-2}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}\right)=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,+\infty)$	**2p**
	f este continuă pe $(-1,+\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, deci $\operatorname{Im} f=(-\infty,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 (f(x)-\ln x)dx=\int_1^2\left(3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^3+x^2+x\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=(8+4+2)-(1+1+1)=11$	**2p**
b)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\left(3x+2+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}+2x+\ln x\right)\Big\|_1^e+\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=$	**3p**
	$=\frac{3e^2+4e-5}{2}+\frac{1}{2}\ln^2 x\Big\|_1^e=\frac{3e^2+4e-4}{2}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a \|f(x)\|dx=\int_1^a\left(3x^2+2x+1+\ln x\right)dx=\left(x^3+x^2+x\right)\Big\|_1^a+(x\ln x-x)\Big\|_1^a=a^3+a^2+a\ln a-2$	**3p**
	$a^3+a^2+a\ln a-2=a^3+a^2+a-2\Rightarrow \ln a=1$, deci $a=e$	**2p**