Varianta 044

SUBIECTUL I

a) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|-4\vec{i} - 3\vec{j}\right| = 5$.

b) AB este dreapta verticală $x = 4$, deci orice altă dreaptă verticală este paralelă cu AB, de exemplu $x = 0$, adică axa Oy.

c) Avem $|AB| = 3$, $|BC| = 4$ şi $|CA| = 5$, deci perimetrul triunghiului ABC este 12.

d) $G\left(\frac{8}{3}, -2\right)$.

e) *Soluția* 1. $\cos\left(\widehat{CAB}\right) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{9}{5 \cdot 3} = \frac{3}{5}$.

Soluția 2. Triunghiul ABC este dreptunghic, $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, deci $\cos\left(\widehat{CAB}\right) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{5}$.

f) Triunghiul ABC este dreptunghic, $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este jumătate din lungimea ipotenuzei, adică $r = \frac{|AC|}{2} = \frac{5}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $A_4^2 = 12$.

b) Progresia are rația $r = -2$. Avem $a_{10} = a_1 + 9r = -17$.

c) *Soluția* 1. Dacă ținem cont de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \le k \le n$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $C_9^2 + C_9^7 = 2 \cdot C_9^2 = 72$.

Soluția 2. $C_9^2 + C_9^7 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2} = 72$.

d) $f(1+i) = (1+i)^2 - 2i = 0$.

e) Numerele care verifică inegalitatea dată sunt $\{-2, -1\}$. Probabilitatea cerută este $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

2.

a) $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \sin x$, deoarece $\sin 2\pi = 0$ şi $\cos 2\pi = 1$.

b) $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$.

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=\cos\pi=-1$.

d) Ecuația $\cos x=0$ are două soluții în $(0,2\pi)$. Funcția f are două puncte de extrem local în $(0,2\pi)$.

e) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$.

SUBIECTUL III

a) $I_2^{\,2}=I_2$, deci $I_2\in G$.

b) $A^2=B^2=I_2$, deci $A\in G$ și $B\in G$.

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $B\cdot A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}$, deci $A\cdot B\neq B\cdot A$.

d) Cum $A\cdot B\neq I_2$, rezultă că $A\cdot B\notin G$.

e) Cum $\det A=\hat{2}$, inversabil în $\mathbf{Z}_3$, avem că A este inversabilă. Din $A^2=I_2$, rezultă $X=A$.

f) Cum $(A\cdot B)^3=I_2$, rezultă $n=3$.

g) Se poate arăta că $\left\{I_2, A, B, \begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{2} & \hat{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{2}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\right\}\subset G$, deci G are mai mult de 6 elemente.

SUBIECTUL IV

a) $f(x)-1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{10}{x+3}-\dfrac{1}{x}\right)=0$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,0\}$.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-2x-3}{\left(x^2+3x\right)^2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,0\}$.

c) Cum

$$\lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}}\frac{x^2+1}{x(x+3)}=\frac{10}{-3\cdot0^-}=\infty \text{ și } \lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\frac{x^2+1}{x(x+3)}=\frac{10}{-3\cdot0^+}=-\infty$$

rezultă că dreapta $x=-3$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

Cum

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^2+1}{x(x+3)}=\frac{1}{0^-\cdot3}=-\infty \text{ și } \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^2+1}{x(x+3)}=\frac{1}{0^+\cdot3}=+\infty$$

rezultă că dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

d) Ecuația $f'(x)=0$ admite două soluții reale. Funcția f admite două puncte de extrem local.

e) $\int f(x)dx = \int\left(1-\frac{10}{3(x+3)}+\frac{1}{3x}\right)dx = x-\frac{10}{3}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln x + C$.

f) Pentru calculul limiei $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ se poate aplica teorema lui l'Hospital şi se obține

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

g)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(x-\frac{10}{3}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln x\right)\Bigg|_1^n=1-\frac{10}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+3)}{n}+\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=1$$