Varianta 050

SUBIECTUL I

a) $m_{OA}=\frac{1-0}{1-0}=1$. b) $A_0A_1: y-1=0$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\sqrt{n^2+1}$. e) 12 drepte.

f) $10+9+...+1=55$ de triunghiuri.

SUBIECTUL II

1.

a) -8. b) Patru mulțimi.

c) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^2=O_2$ şi deci $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{2007}=O_2$. d) $x_1=1, x_2=2, x_3=3$. e) $\frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbf{R}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$.

d) $y=x$ este ecuația asimptotei oblice către $+\infty$. e) -1.

SUBIECTUL III

a) Din $f,g\in G$ obținem $f(x)=ax+1-a, a\in\mathbf{R}^*$ şi $g(x)=bx+1-b, b\in\mathbf{R}^*$.
Prin calcul obținem $(f\circ g)(x)=abx+1-ab=f_{ab}\in G$.

b) $1_R(x)=x=1\cdot x+1-1\in G$, pentru $a=1$.

c) $(f\circ 1_R)(x)=f(x)$ și $(1_R\circ f)(x)=f(x)$. Deci $f\circ 1_R=1_R\circ f=f$.

d) $(f\circ g)(x)=x=1_R(x)$ și $(g\circ f)(x)=x=1_R(x)$. Deci $f\circ g=g\circ f=1_R$.

e) $1_R(1)+1_R(2)+...+1_R(100)=1+2+...+100=5050$.

f) funcția cerută este f_8 (Sau calcul efectiv).

g) $\forall f_a, f_b, f_c\in G$ avem: $(f_a\circ f_b)\circ f_c=f_{ab}\circ f_c=f_{abc}=f_a\circ(f_b\circ f_c)$, deci legea este asociativă. Legea de compunere a funcțiilor este comutativă deoarece $f_a\circ f_b=f_b\circ f_a$. Din c) obținem că $\exists 1_R\in G$ astfel încât $1_R\circ f_a=f_a\circ 1_R=f_a$, $\forall f_a\in G$. Din d) obținem că $\forall f_a\in G$ $\exists f_{a'}=f_{\frac{1}{a}}=g\in G$ astfel încât $f_a\circ f_{a'}=1_R$.Din toate acestea rezultă că $(G,\circ)$ este grup abelian.

SUBIECTUL IV

a) $\int f(x)dx=-\frac{1}{2x^2}+C, \forall x\in(0,\infty)$. b) $f'(x)=-\frac{3}{x^4}$.

c) $f'(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$ rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

d) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător.

e) Din $\frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2}$ se obține echivalent $0 < 3k+1, k > 0$, care este o inegalitate evidentă.

f) Pentru $n \geq 4$ avem $a_n \geq a_4 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \geq 1 + 0{,}12 + 0{,}3 = 1{,}15$.

g) Se demonstrează uşor că şirul $(b_n)_{n>0}$, $b_n = a_n + \frac{1}{2n^2}$ este descrescător şi că

$a_n < b_n < b_{n-1} < ... < b_3 = a_3 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{18} < 1{,}21$.