Varianta 090

SUBIECTUL I

a) $a=0, b=5$. b) $m_d=1$. c) $-i$. d) Din $2-a^2+2=0 \Rightarrow a\in\{\pm 2\}$. e) $2+\sqrt{2}$.

f) $\sin 75^0 = \sin\left(45^0+30^0\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=\left(\hat{5}\right)^{-1}\cdot\hat{7}=\hat{5}\cdot\hat{7}=\hat{3}$. b) $m=2$ .c)1. d) $2^{3x}=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. e) $p=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

2.

a) $f'(x)=6x^2+4, \quad x\in\mathbf{R}$. b) $\dfrac{3}{2}$. c) 4. d) $f'(x)>0$ pentru $x\in\mathbf{R}$**,** deci f este strict crescătoare pe **R**. e) $\dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $I_2, E\in M$ căci $0,1,2\in\mathbf{N}$.

b) Prin calcul imediat. c) Prin calcul imediat.

d) $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M, \quad \operatorname{rang}(C)=1.$ e) $D=\begin{pmatrix}2007 & 0\\ 10 & 1\end{pmatrix}\in M, \quad \det(M)=2007.$

f) Cum $\det(E)=1$, rezultă că E este inversabilă. Prin calcul, $E^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\notin M$.

g) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M$ şi $X^{-1}\in M$. Deoarece $X\cdot X^{-1}=I_2$ avem că $\det\left(X\cdot X^{-1}\right)=\det\left(I_2\right),$ deci $\det(X)\cdot\det\left(X^{-1}\right)=1,$ se consideră mai depatre doua cazuri.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}, x\in\mathbf{R}$.

b) Dacă $x\in[1,e]$, atunci $x-1\geq 0$ şi $\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{e}$, deci inegalitatea este adevărată.

c) Din b) efectuând înmulțirea, obținem $1-\dfrac{x}{e}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{e}\geq 0$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

d) Dacă $x\in[0,1]$, atunci $x^2\in[0,1]$, deci $f(x)=e^{x^2}\in[1,e]$ şi folosind c), rezultă inegalitatea cerută.

e) $(u+v)^2\geq 4uv \Leftrightarrow (u-v)^2\geq 0$, inegalitate adevărată pentru $\forall u,v\in\mathbf{R}$.

f) Din d) rezultă că $\int_0^1\left(\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{e}\right)dx \le \int_0^1 \frac{1+e}{e}dx=\frac{1+e}{e}\cdot x\Big|_0^1=\frac{1+e}{e}$, şi folosind proprietatea de liniaritate a integralei definite, rezultă concluzia.

g) Fie $u=\int_0^1 e^{x^2}dx\in[1,e], v=\int_0^1 e^{-x^2}dx\in\left[\frac{1}{e},1\right]$. Atunci avem

$u\cdot\left(\frac{1}{e}\cdot v\right)\overset{e)}{\le}\frac{\left(u+\frac{1}{e}\cdot v\right)^2}{4}\overset{f)}{\le}\frac{(e+1)^2}{4e^2}$, de unde se obține inegalitatea dorită.