Varianta 024

SUBIECTUL **I**

a) 0.
b) $\sqrt{11}$**.**
c) $x+y+3=0$.

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$**.**

e) $n=3$
f) $a=1$ şi $b=-3$.

SUBIECTUL II
1.
a) 110.
b) $\frac{1}{2}$.
c) 1
d) $S=\{-1,1\}$
e) 0.
2.
a) $f(x)=\frac{x^3}{3}$**.**
b) $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=4014x$;
c) $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=-x^2$;
d) $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $u(x)=-\frac{x^3}{3}$.
e) 1

SUBIECTUL III

a) Cum $A\cdot A=A\cdot A$, atunci $A\in G$.
$AI_2=I_2A$, atunci $I_2\in G$.

b) $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2$.

d) Fie $X\in M_2(\mathbf{C}),\ X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$A^2X = -I_2X = -X$ iar $XA^2 = X(-I_2) = -X$.

Deci $A^2X = XA^2$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.

e) Fie $B = aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & ai \\ ai & -b \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & ai \\ ai & -b \end{pmatrix}$.

Atunci $AB = BA$,deci $aI_2 + bA \in G$ ..

f)Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, a, b, c, d \in \mathbf{C}$**.**

Cum $Y \in G$,avem $AY = YA$.

Atunci

$\begin{pmatrix} ic & id \\ ia & ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib & ia \\ id & ic \end{pmatrix}$ sau $c = b,\ \ a = d$. Obținem $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aI_2 - bi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Alegem $x = a \in \mathbf{C}$ **,** iar $y = -bi \in \mathbf{C}$**.**

g)Se obtine $A^k = \begin{cases} I_{2,} daca\ n = 3k \\ A, daca\ n = 3k+1 \\ -I_2, daca\ n = 3k+2 \end{cases}$.

Cum $\det I_2 = 1 \neq 0 \Rightarrow I_2$ este inversabilă.

Cum $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

$\det(-I_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow -I_2$ este inversabilă .

Atunci matricea A^n este inversabilă $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x}$.

b) $f(a) = 0$, $f'(a) = \ln a - 1$.

c)Presupunem că $f(x) \geq 0, \forall x > 0$ **.**Cum $f(a) = 0$ **,** avem $f(x) \geq f(a), \forall x > 0$ **,** rezultă că $x = a$ este punct de minim local ,deci din teorema lui *Fermat* , $f'(a) = 0$, adică $a = e$.Deci ,in mod necesar $a = e$.

Avem $f(x) = x - e\ln x$.

Arătăm că pentru $a = e, f(x) \geq 0, \forall x > 0$.

Avem tabelul de variație:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert -\infty$	-	0	+	1
$f(x)$	$\vert\ \infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

$x_0 = e$ este punct de minim local $\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 0$.

d) Cum $f(x) \geq 0, \forall x > 0$ atunci $x \ln a - a \ln x \geq 0$ sau $\ln a^x \geq \ln x^a$ rezultă că $a^x \geq x^a, \forall x \in (0,\infty), \forall a > 0$.

Atunci $e^x \geq x^e, \forall x \in (0,\infty)$.

e)Din **d)**,avem $e^x \geq x^e, \forall x \in (0,\infty)$. Atunci $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 x^e dx$.

f)Dacă $x = e$,evident .

Dacă $e^x = x^e \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = e.$

g) $c^x + b^x \geq x^c + x^b, \forall x \in (0,\infty)$**,** pentru $x = e$ avem $c^e + b^e \geq e^c + e^b \geq c^e + b^e$.

Aceasta este posibilă numai când $e^c = c^e$ şi când $e^b = b^e$,adică $c = e$ şi $b = e$ .Deci $c = b = e$.