Varianta 026

SUBIECTUL I

a) $y = 4x + 1$; b) Deaoarece $1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 4$, rezultă că punctul $A\left(1, -\sqrt{3}\right)$ aparține cercului. c) $\left|BC\right| = 2\sqrt{2}$; d) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$; e) $a = \frac{\pi}{2}$ şi $b = 0$; f) 1.

SUBIECTUL II

1.

a) $A = \{2, 3\}$; b) $x = -1$; c) $y \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$; d) $\hat{4}$; e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2007 & 5 \end{pmatrix}$.

2.

a) $x = 4$ este punct de extrem local;

b) $x = 4$ este punct de inflexiune;

c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 8x$;

d) $\left(\frac{4n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$;

e) 5.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$ şi $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

b) calcul direct;

c) $\operatorname{rang}(A) = 2$, deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

d) De exemplu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = O_3$.

f) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$. Egalitatea $A\cdot X = X\cdot A$ implică $d=h=g=0$, $a=e=j$ şi $b=f$. Atunci $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

g) Se foloseşte principiul inducției matematice.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{2}$.

c) $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$, deci funcția f nu este derivabilă în $x=0$.

d) $f'(x)>0$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$, rezultă că f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

e) Se observă că $x=4$ este soluție. Dacă $x>4$, atunci monotonia funcției f implică $f(x)+f(x^2)+f(x^3)>f(4)+f(4^2)+f(4^3)=14$, deci nu există nici o altă soluție mai mare decât 4. Analog se arată ca nu există altă soluție mai mică decât 4. Deci $x=4$ este unica soluție a ecuației.

f) $\int_1^4 f(x)dx=\frac{14}{3}$.

g) Se poate considera funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\frac{28}{45}x$.