Varianta 001

SUBIECTUL **I**

a) $14+18i$.
b) 5.
c) 5.
d) 2.
e) $m=2$, $n=-7$.
f) $\left(\frac{7}{2};3\right)$

SUBIECTUL II
1.
a) $x=-3$.
b) $a_{33}=195$.
c) -3
d) 2007.
e) $x=3$.
2.
a) $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{3}{2}+\ln 2$.
d) $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.
e) 1

SUBIECTUL III

a) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\in M$ deoarece elementele sale formează mulțimea $\{1,2,3,4\}$.

b) -2.
c) Fie $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1,2,3,4\}$ distincte .
Cum $C\in M$, atunci $C=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}$.
Atunci $\det C=a_1a_4-a_2a_3\in\{\pm 5,\pm 10,\pm 2\}$
Deci $\det C\neq 0, \forall C\in M$.
d) Rangul lui A este 2.
e) Din **c),** avem $\det C\in\{\pm 5,\pm 10,\pm 2\}$. Deci $-10\leq\det(X)\leq 10$, $\forall x\in M$.

f) Cum $B \in M$ atunci $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1,2,3,4\}$ distincte .

Din **c),** dacă $B \in M$, atunci $\det(B) \neq 0$ .Deci B este inversabilă.

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* = \begin{pmatrix} \frac{a_4}{a_1a_4 - a_2a_3} & -\frac{a_2}{a_1a_4 - a_2a_3} \\ -\frac{a_3}{a_1a_4 - a_2a_3} & \frac{a_1}{a_1a_4 - a_2a_3} \end{pmatrix}.$$

Dacă $a_1a_4 - a_2a_3 > 0 \Rightarrow -\frac{a_2}{a_1a_4 - a_2a_3} < 0 \Rightarrow B^{-1} \notin M$.

Dacă $a_1a_4 - a_2a_3 < 0 \Rightarrow \frac{a_4}{a_1a_4 - a_2a_3} < 0 \Rightarrow B^{-1} \notin M$.

g) $4! = 24$.

SUBIECTUL IV

a) $g(x) = f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

b) $g'(x) = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in (0,\infty)$ .Atunci g este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

c) $g(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ .Dar $x > 0$. Deci $g(x) > 0, \forall x > 0$.

d)Cum f este funcție *Rolle* pe $[n, n+1]$.din teorema lui *Lagrange* există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = (n+1-1)f'(c_n)$ .Dar $f'(c_n) = g(c_n)$.
Obținem $g(c_n) = f(n+1) - f(n)$.

e) $c_n \in (n, n+1)$ .Cum g este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$ obținem $g(n+1) < g(c_n) < g(n)$.Din **d) ,** avem $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

f) $P(1)$ este verificată : $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ .Presupunem

$P(n): \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall\, n \in \mathbf{N}^*$ adevarata.Demonstrăm

$P(n+1): \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \forall\, n \in \mathbf{N}^*$

Avem $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$,adică $\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$,

adică $\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$.

Deci $P(n)$ este adevărată $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

g) Din **e),** $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n),\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$ .Deci

$g(2) < f(2) - f(1)$

$g(3) < f(3) - f(2)$

……………………………..

$g(n+1) < f(n+1) - f(n)$.

Prin adunare obținem

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < f(n+1) - f(1)$$

Din **f) ,** avem $\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{1\cdot 2} < \ln\frac{n+1}{n+2} - \ln\frac{1}{2}$. Atunci $\frac{n}{2(n+2)} < \ln\frac{2n+2}{n+2},\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$ **.**