VARIANTA 039

SUBIECTUL I

a) $AB = \sqrt{9+16} = 5$

b) Punând condiția ca m să verifice ecuația elipsei obțin $\frac{a^2}{2} = 1$ şi cum $a > 0$, convine numai $a = 2$

c) $tg\frac{\pi}{3} + tg\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} + 1$

d) Cercul înscris în pătratul de latură 2 are diametrul egal cu latura pătratului, adică raza 1; deci aria cercului este π

e) Distanța cerută este $\frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $a = 2z - z^2 = 2(1+i) - (1+i)^2 = 2 + 2i - 2i = 2$

SUBIECTUL II

1.

a) Evident $n \geq 2$ şi convin $n = 5$

b) $a_{10} = a_1 + 9r$ unde $r = a_2 - a_1 = 2;$ deci $a_{10} = 1 + 18 = 19$

c) Deoarece soluțiile ecuației $z^4 = 1$ sunt 1, -1, i, -I, probabilitatea ca o soluție să fie reală este $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d) Evident $g(x) = \frac{x-3}{2}$ şi $g(5) = 1$

e) Restul este $f(\sqrt{2}) = 4 - 4 + 5 = 5$

2.

a) $f(1) = 1\ln 1 = 0$

b) $f'(x) = \ln x + 1 (\forall) x > 0$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ şi cum în jurul său f' isi schimbă semnul rezultă $x = \frac{1}{e}$ punct de extreme local

d) $\int_1^e f'(x) = f(e) - f(1) = e\ln e - 1\ln 1 = e$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (am aplicat l'Hopital)

SUBIECTUL III

a) $|x|<1$ şi $|y|<1 \Rightarrow |xy|<1$ sau $-1<xy<1$ sau $1+xy>0$. Inegalitățile $-1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1$ sunt echivalente cu $-1-xy<x+y<1+xy(\forall)x,y\in(-1{,}1)$. Prima este echivalentă cu $(1+x)(1+y>0,)$ iar a doua cu $(1-x)(1-y)>0,$ care sunt echivalente

b) Se verifică prin calcul direct

c) Se calculează $(x\circ y)\circ z$ si se obtine $\dfrac{(1+x)(1+y)(1+z)-(1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x)(1+y)(1+z)+(1-x)(1-y)(1-z)}$, iar apoi $x\circ(y\circ z)$ dă acelasi rezultat

d) Se obține $e=0\in G$

e) Se obține $y=-x\in G$

f) Cum verificarea s-a făcut, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Avem $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n\circ x_{n+1}=$

$$=\frac{(1+x_1\circ\ldots\circ x_n)(1+x_{n+1})-(1-x_1\circ\ldots\circ x_n)(1-x_{n+1})}{(1+x_1\circ\ldots\circ x_n)(1+x_{n+1})+(1-x_1\circ\ldots\circ x_n)(1-x_{n+1})}=$$

$$=\frac{2(1+x_1)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1})-2(1-x_1)\ldots(1-x_n)(1-x_{n+1})}{2(1+x_1)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1})+2(1-x_1)\ldots(1-x_n)(1-x_{n+1})}$$

g) $$\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\ldots\circ\frac{1}{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}}=$$

$$=\frac{\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2}+\frac{1}{n}}=\frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(\forall)x\in R$

b) $f'(x)=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)<0,(\forall)x>0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[0;+\infty)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală către $-\infty$

e) $f(\sqrt{k})=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\sqrt{k})=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(\sqrt{k})}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{2}{n}}\right)}{\sqrt{n}}=1$$

f) $\int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\,dt=\int_0^x \frac{t^2+a^2}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt=\int_0^x t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt+a^2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}\,0}\,dt=t\sqrt{t^2+a^2}\Big|_0^x-$

$-\int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\,dt+a^2\ln(t+\sqrt{t^2+a^2})\Big|_0^x \Rightarrow \int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\,dt=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-$

$-\frac{a^2}{2}\ln a$

g) Deoarece f este strict pozitivă si continuă pe (0;1] rezultă ca aria cerută este

$\int_0^1 (\sqrt{x^2+2})dx-\int_0^1 (\sqrt{x^2+1})dx$ si aplicând punctual f) pentru x=1 si a $\sqrt{2}$, respectiv x=1 si a=1,

obțin: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}+\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$