Varianta 014

SUBIECTUL I

a) 0; b) $x=\frac{\pi}{2}$. c) 1; d) $AB\ C(2,-1)$. e) $(x-2)^2+(y+1)^2=10$. f) $\frac{5}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $a_{15}=8$; b) $p=\frac{1}{2}$; c) $3!=6$; d) $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=1$; e) $f(i)=1$.

2.

a) $f'(x)=\frac{1}{x}-1,\quad x\in(0,\infty).$

b) $f'(x)=0$ admite soluția $x=1$ și $f'(x)>0$ pentru $x\in(0,1)$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,\infty)$. Deci $x=1$ este punct de extrem (maxim).

c) $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, $x\in(0,\infty)$, deci f este concavă pe $(0,\infty)$.

d) -1.

e) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{3}{2}-e$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $z=\overline{z}=1$ şi $u=-\overline{u}=0$ rezultă $I_2\in M$. Pentru $z=\overline{z}=0$ şi $u=-\overline{u}=0$ rezultă $O_2\in M$.

b) calcul direct;

c) calcul direct;

d) calcul direct;

e) $\det A=z\cdot\overline{z}+u\cdot\overline{u}=|z|^2+|u|^2\in\mathbf{R}$.

f) se aplică principiul inducției matematice;

g) Folosind f), ecuația revine la $\sum_{k=1}^{2007} z^k=0$ cu soluția unică $z=0$ în **R**.

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct;

b) $y=0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$;

c) Avem $f'(x)=-\frac{e-1}{e^{x+1}}=-f(x)$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$;

d) $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}}\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$;

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{e}$;

f) $\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$;

g) Folosind c) avem $\int_1^n f(x)\,dx = -\int_1^n f'(x)\,dx = f(1) - f(n)$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Atunci

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \int_1^n f(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f(1) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)\right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2}$.