Varianta 056

SUBIECTUL I

a) $\sqrt{2}$. b) aria triunghiului AOB este egală cu 1. c) $\cos\left(\widehat{AOB}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $a=b=1$.

e) Cum $AB\perp AO$, punctul C este situat pe dreapta AB, deci $C(a,2-a)$, $a\in\mathbf{R}$. Se poate să fie chiar B, deci $C(0,2)$.

f) Se poate alege orice punct D situat pe mediatoarea segmentului AB. Un punct D cu proprietatea cerută are coordonatele $D\left(\frac{1+0}{2},\frac{1+2}{2}\right)$, adică $D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\{1,2,8\}$. b) $x^2-6x+8=0$. c) $f(x)=x^2-8x+8$.

d) $a=3,b=1$. e) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

2.

a) $f'(x)=5x^4+3x^2$. b) $f(f(0))=f(1)=3$.

c) Avem $f''(x)=20x^3+6x$, iar $f''(x)=0$ are soluția $x=0$. Deci $x=0$ este unicul punct de inflexiune. d) 32. e) $\frac{31}{5}+\frac{7}{3}=\ln 2$.

SUBIECTUL III

a) $a=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4^2-2\cdot 2=12\in\mathbf{N}$.

b) $\det A=2, rang(A)=2$. c) $g(A)=A^2-4A+2I_2=O_2$, prin calcul direct.

d) $g(I_2)={I_2}^2-4I_2+2I_2=-I_2$, dar $f(1)=-1$ şi atunci avem $g(I_2)=f(1)\cdot I_2$.

e) $B=-I_2$, vezi punctul d). Deoarece $\det B=-1\neq 0\Rightarrow$ B este inversabilă.

f) $g(I_2)-g(A)=(I_2-A)\cdot C\Leftrightarrow(I_2-A)\cdot C=-I_2\Leftrightarrow(A-I_2)\cdot C=I_2$, deci $C=(A-I_2)^{-1}$, unică din unicitatea inversei unei matrice.

g) $g(X)=O_2\Rightarrow I_2=X^2-4X+3I_2=(I_2-X)\cdot(3I_2-X)$.

Avem $1=\det I_2=\det(I_2-X)\cdot\det(3I_2-X)\Rightarrow\det(I_2-X)\neq 0$, adică I_2-X este inversabilă.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{2x^2\left(3-x^4\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ este ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$.

c) $f'(x)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{3}$, $x_3=0$.

$f'(x)\le 0, \forall x\in\left(-\infty,\sqrt[4]{3}\right]\cup\left[\sqrt[4]{3},\infty\right)$ și $f'(x)\ge 0, \forall x\in\left[-\sqrt[4]{3},\sqrt[4]{3}\right]$. Funcția f are două puncte de extrem local $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{3}$.

d) $\left(x^2-1\right)^2\ge 0, \forall x\in\mathbf{R} \Leftrightarrow x^4+1\ge 2x^2, \forall x\in\mathbf{R} \Rightarrow \dfrac{1}{x^4+1}\le\dfrac{1}{2x^2}, \forall x\in\mathbf{R}^*$.

e) $\dfrac{\pi}{4}$.

f) Pentru funcția $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^4+1}$ are loc $f(-x)=-f(x), \forall x\in[-1,1]$,

deci este o funcție impară. Cum f este continuă, atunci $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$.

g) Din d) rezultă că $f(x)\le x, \forall x\in[0,m]$, $m\in\mathbf{N}^*$. Deci

$$\int_0^m f(x)dx\le\int_0^m xdx=\frac{m^2}{2}.$$