Varianta 096

SUBIECTUL I

a) $\overline{z}=2+5i$. b) $AC=4\sqrt{2}$. c) Centrul este $C(0,0)$ şi raza $r=5$. d) $m_{AC}=\frac{1-5}{5-1}=-1$.

e) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. f) $a=0$ şi b=1.

SUBIECTUL II

1.

a) 10.b) rangul matricei date este 1. c) $x=\frac{1}{9}$. d) $2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. e) $p=\frac{1}{5}$.

2.

a) $f'(x)=e^x+2, x\in \mathbf{R}.$ b) $e+1$. c) 3. d) Din a) rezultă că $f'(x)>0$ pentru orice $x\in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe **R.** e) $\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $\Delta=-3<0, x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. b) $x^2+x<0\Leftrightarrow x\in(-1,0).$ c) Avem:

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{g(n)}, \forall n\in \mathbf{N}^*$.

d) Utilizând c) avem S= $\frac{1}{g(1)}+\frac{1}{g(2)}+...+\frac{1}{g(2007)}=\frac{2007}{2008}$.

e) Avem că $\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=X^2+X+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=f$.

f) Presupunem că există două polinoame $s,t\in \mathbf{R}[x]$ astfel încât $g=s^2+t^2$.
Atunci $g(x)=s^2(x)+t^2(x)$, $\forall x\in \mathbf{R}$, de unde $g(x)=x^2+x\geq 0,\forall x\in \mathbf{R}$, contradicție deoarece $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0$. Așadar, presupunerea făcută este falsă.

g) Avem că $g=X^2+X=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^2$. Putem lua $u=X+\frac{1}{2}$ şi $v=\frac{1}{2}i\in \mathbf{C}[X]$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=2007\cdot x^{2006}, x\in \mathbf{R}.$b) $x-1\geq 0$ şi $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x}\leq 1$, de unde rezultă $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$.

c) Efectuând înmulțirile de la b), obținem $1-\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\leq\frac{3}{2}$.

d) Pentru $x\in[0,1]$ avem $x^{2007}\in[0,1]$ deci $f(x)\in[1,2]$ şi utilizând c) obținem $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{2}\leq\frac{3}{2}$.

e) $(u+v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow (u-v)^2 \geq 0,$ relație adevărată pentru $\forall u, v \in \mathbf{R}$.

f) Din d) rezultă că $\int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}$ şi utilizând proprietatea de liniaritate a integralei definite, obținem inegalitatea cerută.

g) Fie $u = \int_0^1 f(x) dx \in [1,2]$ şi $v = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx.$ Atunci avem

$v \cdot \left(\frac{1}{2} u \right) \overset{e)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left(v + \frac{1}{2} u \right)^2 \overset{f)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{16},$ de unde obținem că $v \cdot u \leq \frac{9}{8}$.