Varianta 041

SUBIECTUL I

a) $\sin^2\frac{\pi}{2007}+\cos^2\frac{\pi}{2007}=1$.

b) $\cos1°\cdot\cos2°\cdot\ldots\cdot\cos179°=0$, deoarece $\cos90^\circ=0$.

c) $m=2$.

d) $\frac{8}{5}$.

e) $\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$.

f) Cum $AB=5$, aria triunghiului echilateral este $\frac{25\sqrt{3}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=\frac{1}{2}$.

b) $a_7=2^6=64$.

c) $f(-1)=0$.

d) Pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$ are loc relația $f(-3)=f(3)$.

e) $p=\frac{1}{10}$.

2.

a) $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$.

b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

c) $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=-1$.

d) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ este $y=mx+n$, deci $y=x-1$.

e) $\int_0^1\left[f(x)-\frac{1}{x+1}\right]dx=\int_0^1(x-1)\,dx=-\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=ad-bc$.

b) $f(0)=\det(A\cdot 0+B)=\det(B)=eh-fg$.

c) $Ax+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+e & bx+f \\ cx+g & dx+h \end{pmatrix}, \forall x\in \mathbf{R}$.

d) $\begin{vmatrix} a & f \\ c & h \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & b \\ g & d \end{vmatrix}=ah-fc+ed-bg$.

e) Prin calcul direct obținem

$$f(x)=\det(Ax+B)=\begin{vmatrix} ax+e & bx+f \\ cx+g & dx+h \end{vmatrix}$$

$$=(ad-bc)x^2+(ah-fc+ed-bg)x+eh-fg$$

$$=x^2\det(A)+mx+\det(B)$$

f) Folosind egalitatea de la e) avem $\det(A+B)=\det(A)+m+\det(B)=2$ şi $\det(A-B)=\det(B)-m+\det(A)=2$. Dacă adunăm cele două egalități obținem $\det(A)+\det(B)=2$.

g) Folosind f) şi condiția $\det(A-B)=\det(B)=\det(A+B)=2$ se obține $\det(A)=0$. Din e) rezultă $\det(Ak+B)=mk+2$. Pe de altă parte, din e) şi $\det(A-B)=\det(B)=\det(A+B)=2$ rezultă $m=0$. Atunci $\det(Ak+B)=2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0)=0$.

b) $f'(x)=r(1+x)^{r-1}-r$, $x\geq -1$.

c) Egalitatea $f'(x)=0$ implică $(1+x)^{r-1}=1$. Cum $r>1$, singura soluție este $x=0$.

d) Pentru $x\in[-1,0]$, avem $1+x\leq 1$, deci $r\cdot(1+x)^{r-1}<r$. Atunci $f'(x)<0$ pentru $x\in[-1,0]$ şi astfel, f este strict descrescătoare pe $[-1,0]$. Pentru $x\in[0,\infty)$, avem $1+x\geq 1$, deci $r\cdot(1+x)^{r-1}>r$. Atunci $f'(x)>0$ pentru $x\in[0,\infty)$ şi astfel, f este crescătoare pe $[0,\infty)$.

e) De la punctul d) rezultă că $x=0$ este punct de minim pentru funcția f . Atunci $f(x)\geq f(0)$ oricare ar fi $x\geq -1$. Aceasta implică $(1+x)^r \geq 1+rx;\ \forall x>-1.$

f) $\frac{e_{n+1}}{e_n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n\cdot\frac{n+2}{n+1}=\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\cdot\frac{n+2}{n+1}$, $n\geq 1$.

g) Pentru $\frac{e_{n+1}}{e_n}=\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\cdot\frac{n+2}{n+1}$ aplicăm inegalitatea de la e) şi obținem $\frac{e_n}{e_n}\geq\left[1+n\cdot\left(\frac{-1}{(n+1)^2}\right)\right]\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1$, $n\geq 1$, deci şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.