Varianta 086

SUBIECTUL I

a) $OC=\sqrt{5}$. b) 2. c) Centrul este $\mathrm{O}(0,0)$ şi raza $r=\sqrt{2}$. d) $p=\dfrac{1}{2}$.

e) $\overline{AB}(0,-2)$. f) $\operatorname{Re}(1+2i)^2=\operatorname{Re}(-3+4i)=-3$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x^2+x=2\Leftrightarrow x\in\{1,-2\}$. b) $a_7=13$. c) 0.d) 1.

e) Dacă $f=X^4-2X^3+3X^2-4X+a,$ atunci restul este $r=f(1)$. Rezultă $2=a-2\Leftrightarrow a=4$.

2.

a) $f'(x)=(x\cdot e^{-x})'=(1-x)\cdot e^{-x}, x\in\mathbf{R}$. b) 1. c) 1.d) -1 . d)0.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=0,\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, deci $\det(B)=0$.

b) $\operatorname{rang}(A)=2$, $\operatorname{rang}(B)=2$. c) $B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=B.$

d) Pentru $n=1$ afirmaţia este adevărată. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n=k, k\in\mathbf{N}^*$, şi o demonstrăm pentru $n=k+1$. Avem

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}2^{k-1}&0&2^{k-1}\\0&1&0\\2^{k-1}&0&2^{k-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0&2^k\\0&1&0\\2^k&0&2^k\end{pmatrix},$$

adică afirmaţia este adevărată şi pentru $n=k+1$.

e) $I_3+aB+bB^2=A^2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+b&0&a\\0&1&0\\a&0&b^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=2$ şi $b=1.$

f) Din c) rezultă că $B^3=B$, $B^4=B^2, B^5=B.$ Atunci $B^{2n}=B^2$, $B^{2n+1}=B$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Considerăm $k=2m+1, m\in\mathbf{N}$. Atunci egaliatatea $A^n=I_3+B+B^2+...+B^k$ revine la

$A^n = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $2^{n-1} = m+1$ cu $m = 2^{n-1} - 1$. Deci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există $k = 2^n - 1 \in \mathbf{N}$ astfel încât $A^n = I_3 + B + B^2 + ... + B^k$.

g) Avem că $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & n & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Cum elementul de pe poziția $(2,2)$ din matricea $B^k \left(k \in \mathbf{N}\right)$ este 0, vom deduce că elementul de pe aceeaşi poziție din matricea $\sum_{k=0}^{p} B^k$ este 1. Cum $n \geq 2$, cei doi membri nu pot fi egali.

SUBIECTUL IV

a) $f_k'(x) = \frac{k}{e + kx}, x \in \left(-\frac{e}{k}, \infty\right)$. b) 1. c) $1 - a + a(1-b) = 1 - a + a - ab = 1 - ab, \forall a, b \in \mathbf{R}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{f_k(x) - 1}{x} = f_k'(0) = \frac{k}{e}$. e) Utilizând c) şi d) avem

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - f_1(x) \cdot f_2(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - f_1(x)}{x} + \frac{f_1(x) \cdot (1 - f_2(x))}{x} \right) = \frac{-1}{e} - \frac{2}{e} = -\frac{3}{e}.$$

f) Efectuând înmulțirile din membrul drept, acesta devine

$1 - a_1 + (a_1 - a_1 a_2) + (a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3) + ... + (a_1 a_2 ... a_{n-1} - a_1 a_2 ... a_n) =$
$= 1 - a_1 a_2 ... a_n$, adică are loc egalitatea cerută.

g) Utilizând f) şi d), limita cerută devine

$$L_n = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - f_1(x)}{x} + \frac{f_1(x)(1 - f_2(x))}{x} + ... + \frac{f_1(x) f_2(x) .... f_{n-1}(x)(1 - f_n(x))}{x} \right] =$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{2}{e} - .... - \frac{n}{e} = \frac{-n(n+1)}{2e}.$$