VARIANTA 052

SUBIECTUL I

a) $AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

b) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

c) Aria cerută este $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

d) $z = 2-5i \Rightarrow \bar{z} = 2+5i$

e) Se obține sistemul $\begin{cases} 3+4a+b=0 \\ 5+6a+b=0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

f) Aplicând teorema lui Pitagora am $BC = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

SUBIECTUL II

1.
a) Răspuns: 3 funcții injective

b) Deoarece numai 1, 2 şi 3 verifica inegalitatea, probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

c) $4^x = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

d) Suma este $\frac{5+95}{2}\cdot 10 = 500$

e) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \left(f(x)\right)^{15}+1 = \left(x^{10}-1\right)^{15}+1 \Rightarrow (g\circ f)(0) = (-1)^{15}+1 = 0$

2.
a) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} (\forall)x>0$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{3}{2}$

c) $f'(x)>0, (\forall)x>0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0;\infty)$

d) $\int_1^2 f'(x)dx = f(2)-f(1) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} 4xf'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x}{x^2+x} = 8$

SUBIECTUL III

a) $tr(A) = 5$

b) Fie $B = C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Atunci $tr(B) = e+h = tr(C)$

c) Alegem $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ si $tr(P) = tr(Q) = 5, P = Q$

d) Fie $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ cu $tr(U) = tr(V)$ si $tr(U^2) = tr(V^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a+d=m+q$ şi $a^2+bc+bc+d^2=m^2+np+np+q^2 \Rightarrow (a+d)^2-2ad+2bc=$
$=(m+q)^2-2mq+2np \Rightarrow bc-ad=np-mq \Rightarrow ad-bc=mq-np \Rightarrow \det U=\det V$

e) Fie $D=\begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$. Atunci $(aD+bE)=\begin{pmatrix} ad+bm & ae+bn \\ af+bp & aq+bq \end{pmatrix}$ şi
$tr(aD+bE)=ad+bm+ag+bq$. Apoi $a\cdot tr(D)+b\cdot tr(E)=a(d+g)+b(m+q)=$
$=tr(aD+bE)$

f) Luăm $F=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ si $F\cdot G=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cz+dz & cy+dt \end{pmatrix}$ sau $tr(F\cdot G)=ax+bz+cy+dt$. Apoi
$G\cdot F=\begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+tc & zb+dt \end{pmatrix}$ şi $tr(G\cdot F)=xa+yc+zb+dt=tr(F\cdot G)$

g) Fie $L=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Daca luăm $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vom obține c=g; pentru $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ va rezulta b=f, iar pentru $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vom avea d=h. Deci L = N

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+5)^2}, (\forall)x\geq 0$

b) Eident $f'(x)>0(\forall)x\geq 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0;+\infty)$

c) $f(0)=\dfrac{13}{10}\leq f(x)<3(\forall)x\in[0;+\infty)$

d) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(3-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)dx=[3x-\ln(x+1)(x+2)(x+3)]\Big|_0^1=3-\ln 36+$
$+\ln 10=3+\ln\dfrac{5}{18}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+1+1=3 \Rightarrow y=3$ asimptotă orizontală către $+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}[3x=\ln(x+1)(x+2)(x+5)+\ln 10]=\ln 10+$
$+\lim\limits_{x\to\infty} x\left(3-\dfrac{\ln(x+1)}{x}-\dfrac{\ln(x+2)}{x}-\dfrac{\ln(x+5)}{x}\right)=\ln 10+\infty=+\infty$, deoarece, cu l'Hospital, fiecare fracție din paranteză tinde la 0

g) $f(x)=0, x\geq 0 \Leftrightarrow 3-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}=2, x\geq 0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}=0,$
$x\geq 0 \Leftrightarrow x^3+5x^2+x-7\geq 0$, $x\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+6x+7)=0, x\geq 0 \Leftrightarrow x=1$