Varianta 084

SUBIECTUL I

a) $|2i| = 2$. b) 13. c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. d) 1. e) $\alpha = 4$. f) $a = 0, b = -1$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{5}^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{5}^{2007} = \left(\hat{5}^2\right)^{1003} \cdot \hat{5} = \hat{5}$. b) E=1. c) $\frac{25}{3}$. d) $x = 1$. e) $p = \frac{3}{5}$.

2.

a) $f'(x) = \frac{4 - x^2}{\left(x^2 + 4\right)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$. b) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$. c) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{2}\right)$.

d) $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-2, 2)$, f este strict crescătoare pe $(-2, 2)$. e) $\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$, $\operatorname{rang}(A) = 2$. b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Din relația de la c), rezultă că $A\left(A^2 + A + I_3\right) = \left(A^2 + A + I_3\right)A = O_3$. Atunci alegem $B = A^2 + A + I_3, B \neq O_3$.

e) Utilizând b) $\Rightarrow A^4 = A$. f) $A^{2007} = A^{3\cdot 669} = A^3$.

g) $\det\left(a \cdot A + b \cdot A^2 + c \cdot A^3\right) = 0 \neq 1 = \det(I_3), \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbf{R}$. b) 0.

c) Din a) rezultă că $f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 2\right)}, x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, $f'(0) = 0$ şi $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Aşadar funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right) = 0$, utilizând c) rezultă că $0 < f(x) \leq f(0) = \ln 2, \forall x \in \mathbf{R}$. e) 0.

f) Folosind metoda integrării prin părți, avem

$$\int_0^x \ln\left(t^2+a^2\right)dt = t\ln\left(t^2+a^2\right)\Big|_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= x\ln\left(x^2+a^2\right) - 2\left(t - a\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right)\Bigg|_0^x = x\ln\left(x^2+a^2\right) - 2x + 2a\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

g) Aria este : $\ln\frac{3}{2} + 2\sqrt{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2}$.