Varianta 095

SUBIECTUL I

a) $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(1+i-1)=0$. b) $|z|=|-1-i|=\sqrt{2}$. c) $S=6$. d) 0.

e) Avem $MN=MP$, deoarece M este mijlocul segmentului NP. f) $t=-\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) De exemplu progresia:-1,5,11,17,23.

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 10 & 1\end{pmatrix}$. c) $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rang}(B)=2$, căci $\begin{vmatrix}7 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\neq 0$ şi $\det(B)=0$.

d) $a=b=1$.

e) Legea $*$ definită de $x*y=x+y-1, \forall x,y\in \mathbf{R}$.

2.

a) $\sum_{k=2}^{15}\log_2 f(k)=\log_2\left(\prod_{k=2}^{15} f(k)\right)=\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{16}{15}\right)=\log_2 8=3\in \mathbf{N}$.

b) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}, x\in(0,\infty)$.

c) nu există puncte de extrem local ale funcţiei f .

d) $y=0$ este asimptotă orizotală spre $+\infty$, $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

e) $\int_1^e f(x)dx=(x+\ln x)\Big|_1^e=e.$

SUBIECTUL III

a) Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G, B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$, atunci $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=X(a+b)\in G$, căci $a+b\in \mathbf{Z}$.

b) Avem $I_2=X(0)\in G$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, deci $O_2\notin G$.

c) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G, B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G.$ Atunci $\det(A\cdot B)=1=\det(A)\cdot\det(B).$

d) Pentru orice $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G,$ considerăm $C=\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G,$ şi utilizând a) avem că $A\cdot C=C\cdot A=X(a)\cdot X(-a)=I_2$.

e) Dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci avem $X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$X^2(a) = X(a) \cdot X(a) = X(2a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Presupunând că $X^k(a) = X(ka), k \in \overline{\mathbf{N}^*}$,

avem că $X^{k+1}(a) = X^k(a) \cdot X(a) = X(ka) \cdot X(a) = X(a(k+1)), k \in \overline{\mathbf{N}^*}$. Conform

principiului inducției matematice rezultă $X^n(a) = X(na) = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \overline{\mathbf{N}^*}$, deci

$X^n(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $\det(X(3)) = 1$, $\operatorname{rang}(X(3)) = 2$. g) Fie $A = X(a) \in G, B = X(b) \in G$ .Din

$X(a)X(b) = X(2007) \overset{a)}{\Rightarrow} X(a+b) = X(2007) \Rightarrow a+b = 2007$. Fie $D = X(d) \in G$.
Folosind rezultatele de la a) şi e), ecuația $D^{2007} = B \cdot A$ devine
$D^{2007} = X(b+a) \Leftrightarrow X(2007d) = X(2007)$, deci $d = 1$ şi $D = X(1) \in G$ este soluție.
SUBIECTUL IV
a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbf{R}$. b) Din a) rezultă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci

funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.
c) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ .d) $a = 1, b = -1$.

e) Dacă $x \in (0, \infty)$, atunci $f(x) \le \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{1+x^2} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x(1+x^2)} \ge 0$, relație

adevărată.
f) $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = 2\operatorname{arctg} x\Big|_1^e = 2\left(\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}\right)$.

g) Din e) rezultă că $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx \le \int_1^e \frac{1}{x}\,dx \overset{f)}{\Rightarrow} 2 \cdot \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{2} \le \ln x\Big|_1^e = 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} e \le \frac{\pi+2}{4}$.