Varianta 017

SUBIECTUL I

a) $a=5$. b) $y=k, k\in R$ constantă; c) 0; d) $|z|=2$; e) $AC=\sqrt{20-8\sqrt{3}}$; f) 2.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{5}$; b) $x=\frac{3}{2}$; c) $x=\frac{3}{2}$; d) 2000 de numere; e) $C_6^2=15$.

2.

a) $f'(1)=1$.

b) $y=x-1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}[f(n+1)-f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

e) $\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ rezultă $\det(A(1))=1$, deci $\operatorname{rang}(A(1))=3$;

b) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&1+y&2+y\\0&xy&x+y\\0&0&xy\end{pmatrix}$; $A(x)\cdot A(y)\in V$ dacă $1+y=2+y=1$ imposibil.

Deci $A(x)\cdot A(y)\notin V$ pentru orice $x,y\in\{0,1,2\}$.

c) folosind b), obținem $B^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B^3=\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

d) Folosim principiul inducției matematice ;

e) Dacă $A=A(x)\in V$ şi $B=B(y)\in V$, atunci $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)=x^2\cdot y^2$.

Pentru ca $x^2\cdot y^2\in\{0,1,2\}$ avem posibilitățile $x=0$ şi $y\in U$, sau $x=1$, $y=1$, sau $x\in\{1,2\}$ şi $y=0$.

f) Oricum am aşeza 8 elemente egale, determinantul va avea două linii şi două coloane egale, deci determinantul este nul.

g) Se poate considera $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\in T$, pentru care $\det(M)=-1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

b) $f'(x)=0$ admite soluția $x=2$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ respectiv $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,2)$, deci f este descrescătoare pe $(0,2)$. Atunci $x=2$ este punct de minim local.

c) Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\infty$, deci $x=0$ este asimptota verticală la graficul funcției f.

d) Avem $f''(x)=\dfrac{24}{x^4}>0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, deci f este convexă pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$.

e) Considerăm funcția continuă $g:(-\infty,0)\cup(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-3$. Avem $g(-1)=-3$ şi $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{19}{3}$, deci există $x_0\in\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)$ astfel încât $g(x_0)=0$. Avem $g\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot g(1)<0$, deci există $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ astfel încât $g(x_0)=0$ şi $g(2)\cdot g(6)<0$, deci există $x_0\in(2,6)$ astfel încât $g(x_0)=0$. Rezultă că ecuația $f(x)=3$ admite trei soluții reale.

f) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^2}{x^2}=-3$.

g) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}>0$.