Varianta 81

SUBIECTUL I

a) 10.b)2. c) partea reală cerută este 12. d) $P(2,1)$.

e) $AB \parallel Oy, CC' \perp AB \Rightarrow C'(3,4)$, deci $CC'=1$. f) De exemplu $n=4$.

SUBIECTUL II

1.

a) Avem că $x \in \{\hat{2}, \hat{6}\}$, deci $\hat{2}+\hat{6}=\hat{0}.$ b) 7 submulțimi. c) $x=1$. d) $x=0$ .e) $p=\dfrac{2}{5}.$

2.

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, x\in \mathbf{R}.$ b) $\ln 2$.

c) Avem $1+x^2 \geq 1, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(x)=\ln(1+x^2) \geq \ln 1 = 0 = f(0), \forall x \in \mathbf{R}.$

d) $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$ sunt puncte de inflexiune.e) 0.

SUBIECTUL III

a) $I_2=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a=c=1\in(0,\infty), b=0\in \mathbf{R} \Rightarrow I_2 \in G.$ b) $\det(M)=a\cdot c.$

c) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in G, B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\in G \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}\in G$, deoarece $ax, cz>0, ay+bz\in \mathbf{R}.$

d) $D\in G$ deoarece $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{c}>0, -\dfrac{b}{ac}\in \mathbf{R}$ şi prin calcul $C\cdot D=D\cdot C=I_2.$

e) $U=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\in G, V=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\in G \Rightarrow U\cdot V=\begin{pmatrix} 2 & 20 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\neq V\cdot U=\begin{pmatrix} 2 & 31 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

f) Pentru $n=1$ afirmația este adevărată. Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n=k\in \mathbf{N}^*$ şi o demonstrăm pentru $n=k+1$. Avem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{k}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^k & b\cdot x_k \\ 0 & c^k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^{k+1} & b\cdot a^k+b\cdot c\cdot x_k \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & b\left(a^k+c\cdot x_k\right) \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & b\cdot x_{k+1} \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}$$, deci afirmația este adevărată şi pentru $n=k+1$. Deci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix} a^n & b\left(a^{n-1}+a^{n-2}c+\ldots+ac^{n-2}+c^{n-1}\right) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, \quad \forall n\in \mathbf{N}^*,\ \forall a,b,c\in \mathbf{R}.$$

g) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$. Căutăm $X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G, X^n = A$. Folosind f), ecuația se transformă echivalent în sistemul de ecuații $\begin{cases} x^n = a, z^n = c \\ y\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot z + ... + z^{n-1}\right) = b. \end{cases}$ Se poate considera $x = \sqrt[n]{a} \in (0,\infty), z = \sqrt[n]{c} \in (0,\infty), y = \dfrac{b}{x^{n-1} + x^{n-2} \cdot z + ... + z^{n-1}} \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 - 2^x \cdot \ln 2, x \in \mathbf{R}.$ b) $f'(0) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Din $f'(x) = 2^x\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^x \cdot \ln 3 - \ln 2\right) \geq 2^x(\ln 3 - \ln 2) > 0, \forall x \in [0,\infty)$, avem că funcția f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

d)

$$f''(x) = 3^x \cdot \ln^2 3 - 2^x \cdot \ln^2 2 = 2^x\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x \cdot \ln^2 3 - \ln^2 2\right] \geq 2^x\left(\ln^2 3 - \ln^2 2\right) \geq 0, \forall x \in [0,\infty) .$$

Rezultă că f este convexă pe $[0,\infty)$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3^x - 2^x\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

f) $\displaystyle\int_0^x a^t dt = \left.\frac{a^t}{\ln a}\right|_0^x = \frac{a^x - 1}{\ln a}.$

g) Aria cerută este $\dfrac{2}{\ln 3} - \dfrac{1}{\ln 2}$.