# Varianta 034

SUBIECTUL I

a) $BC = 2\sqrt{2}$.

b) $D(1,3)$.

c) $|z| = \dfrac{|1-i|}{|-1+i|} = 1$.

d) $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(2i) = 0$.

e) $a = \dfrac{\pi}{4}$.

f) Aria triunghiului $ABC$ este 2.

SUBIECTUL II

1.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14$.

b) Cum $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$, suma elementelor matricei $A^2$ este 53.

c) Rația progresiei este $q = 2$. Se obține $c = 1$, $d = 4$ şi $c + d = 5$.

d) Prin verificarea elementelor din $\mathbf{Z}_8$ se obține $x \in \{\hat{2}, \hat{6}\}$.

e) $C_7^2 = 21$.

2.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{5n-1} = \dfrac{2}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x-1} = 10$.

c) $\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \dfrac{2}{5}$.

d) $f'(x) = 2^x \ln x$.

e) Cum $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, rezultă că $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

SUBIECTUL III

a) $E_2(2,2) + F_2(2,2) = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 + \left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 12 \in \mathbf{N}$.

b) $E_n(2,2)\cdot F_n(2,2)=\left(2+\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)^n=2^n\in\mathbf{N}$

c) Inegalitatea se demonstrază prin inducție matematică. Pentru $n=5$, avem inegalitatea adevărată $2^5=32\geq 25=5^2$. Presupunem că are loc $2^k\geq k^2$ şi demonstrăm că $2^{k+1}\geq\left(k+1\right)^2$. Cum $2^k\geq k^2$, atunci $2^{k+1}\geq 2k^2\geq k^2+2k+1=\left(k+1\right)^2$.

d) Egalitatea $E_n(2,2)\cdot F_n(2,2)=n^2$ implică ecuația $2^n=n^2$ pentru care $n\in\{2,4\}$.

e) Cum $E_1(2,3)=3+\sqrt{2}$, iar ecuația este cu coeficienți întregi, cea de a doua soluție este $x_2=3-\sqrt{2}$. Ecuația este $x^2-6x+7=0$.

f) Se poate considera polinomul $f=X^2-6X+7$.

g) În dezvoltarea $E_{20}(3,2)=\left(3+\sqrt{2}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k 3^{20-k}\left(\sqrt{2}\right)^k$ există 11 termeni raționali.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=1-3x^2$, $x\in\mathbf{R}$

b) Ecuația $f'(x)=0$, admite soluțiile $x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ şi $x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. În plus, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ şi $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Atunci $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ este punct de minim local, iar $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ este punct de maxim local pentru funcția $f$.

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=-\frac{9}{4}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1-x^2}=1$.

e) Pe intervalul $[0,1]$ maximul funcției $f$ se atinge în $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, adică

$f(x)\leq f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ oricare ar fi $x\in[0,1]$. Rezultă $m=1$.

f) Avem că $a_1\in(0,1)$. Presupunem că $a_k\in(0,1)$ atunci, conform punctului e), avem $a_{k+1}=f(a_k)\in(0,1)$. Folosind principiul inducției matematice am demonstrat că $a_n\in(0,1)$ oricare ar fi $n\geq 1$. Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

g) Avem $a_{n+1} - a_n = a_n - a_n^3 - a_n = -a_n^3 < 0$ oricare ar fi $n \geq 1$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton.