Varianta 100

SUBIECTUL I

a) $AB = 5\sqrt{2}$. b)a=10,b=10. c) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$. d) $\overline{-4-9i} = -4+9i$.

e) $a = 1, b = -1$. f) $BC = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{73}.$

SUBIECTUL II

1. a) -10 . b) $p = \frac{2}{5}.$ c) $2^{6x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}.$ d) $x = 8^3 = 512.$ e) Efectuând împărțirea obținem câtul $X^2 - X$ și restul $X+1$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-4}{x^5}, x \in \mathbf{R}^*$. b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = -4.$ c) $x = 0$ este unica asimptotă verticală. d) $\frac{31}{24}$. e) 1.

SUBIECTUL III

a) $1 = 2^0 \cdot 3^0 \in A; 2 = 2^1 \cdot 3^0 \in A; 3 = 2^0 \cdot 3^1 \in A; 4 = 2^2 \cdot 3^0 \in A.$

b) Egalitatea $5 = 2^i \cdot 3^j, i, j \in \mathbf{N}$ este imposibilă, deci $5 \notin A$. Analog $7 \notin A$.

c) Fie $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Dacă $n = 0,$ atunci $1 = \frac{1-a}{1-a}$, adevărat. Pentru n=1, $1 + a = \frac{1-a^2}{1-a}$ este adevărată. Presupunem că $1 + a + a^2 + ... + a^k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}, k \in \mathbf{N}^*$. Atunci

$1 + a + a^2 + ... + a^k + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+2}}{1-a}$, deci afirmația este adevărată și pentru $n = k+1$.

d) Utilizând c) avem $\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^k} < 2, \quad \forall k \in \mathbf{N}$.

e) Utilizând c) avem $\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{3^i} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{s+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^s} < \frac{3}{2}, \forall s \in \mathbf{N}$.

f) Mulțimea cerută conține 10 elemente.

g) Putem presupune că $a_1 < a_2 < ... < a_{n.}$. Suma $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$ ia valoarea maximă dacă numerele $a_1 < a_2 < ... < a_n$ sunt alese cât mai mici cu putință, adică $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 = 9, a_8 = 12, etc.$ Pentru această alegere $\exists p, s \in \mathbf{N}$ astfel încât

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^s}\right) < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, deci $S_n < 3$.

SUBIECTUL IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}, x \in A.$

b)

$f(x) \cdot u(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) =$

$= (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2).$

$f'(x) = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = g(x)$, deci are loc egalitatea cerută.

c) Din a) rezultă că $u'(x) < 0, \forall x \in A.$ d) Din b) , pentru $\forall x \in A$,avem:

$u(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow u'(x) = \frac{g'(x) f(x) - g(x) f'(x)}{f^2(x)} = \frac{h(x) f(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$, $\forall x \in A$.

e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. f) $\ln 4$.

g) Pentru orice $x \in A$, din c) avem $u'(x) < 0$ şi utilizând d) obținem

$f(x) \cdot h(x) - g^2(x) < 0$, adică $g^2(x) > f(x) \cdot h(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.