Varianta 069

SUBIECTUL I

a) $|z| = |3+i|^4 = \left(\sqrt{9+1}\right)^4 = 100$.

b) Deoarece $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem că $\sin a > 0$. Din formula fundamentală a trigonometriei avem $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin a = \frac{4}{5}$.

c) $(\cos\pi + i\sin\pi)^{10} = (-1)^{10} = 1 \Rightarrow$ partea reală este 1.

d) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6^2}} = 0 \Rightarrow m(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

e) Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{100+144-100}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{3}{5}$.

f) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ şi obținem soluțiile $(-2, 2)$ şi $(2, -2)$, acestea reprezentând coordonatele punctelor de intersecție ale cercului cu dreapta. Deci dreapta şi cercul se intersectează în două puncte.

SUBIECTUL II

1) a) $(x-1)^2 + (x-y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ şi $x-y+3=0$ ceea ce implică $x=1$ şi $y=4$.

b) Discriminantul ecuației este $\Delta = (a+2)^2 - 8a = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0$ pentru orice număr real a. Deci ecuația are rădăcini reale pentru orice număr real a.

c) $\log_3 9^5 = \log_3 3^{10} = 10$.

d) $\sqrt{x} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 16 \Leftrightarrow x \in [16, \infty)$.

e) Doar numerele 3, 4, 5 verifică inegalitatea, deci probabilitatea este $\frac{3}{5}$.

2)

a) $f'(x) = e^x + \cos x + 1$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = \left(e^x - \cos x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = e - \cos 1 + \frac{1}{2}$.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 3$.

d) $\cos x \ge -1, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \cos x + 1 \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}$, $e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, de unde deducem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(n)}{f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n + \cos n + 1}{e^n + \sin n + n} = 1$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = b = 0 \in \mathbf{Z}$ rezultă $O_2 \in G$. Pentru $a = 1 \in \mathbf{Z}$ şi $b = 0 \in \mathbf{Z}$ rezultă $I_2 \in G$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu *a*,*b* întregi şi $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ cu *c*,*d* întregi. Atunci $AB = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}$. Această matrice are forma matricelor din *G*, iar elementele *ac* + *bd* şi *ad* + *bc* sunt numere întregi. Deci $AB \in G$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu *a*,*b* întregi şi $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ cu *c*,*d* întregi. Atunci $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$. Această matrice are forma matricelor din *G*, iar elementele *a* + *c* şi *b* + *d* sunt numere întregi. Deci $A + B \in G$.

d) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, $a, b \in \mathbf{Z}$. Atunci $\det(X) = a^2 - b^2$. Presupunem că $\det(X) = 2$, atunci $(a-b)(a+b) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=-1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=-2 \end{cases}$. Dar niciunul din aceste sisteme nu are soluții întregi, deci det $X \neq 2$.

e) Fie $C, D \in G$ cu $C \neq I_2$ şi $D \neq I_2$. Atunci $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$. Din $CD = I_2 \Rightarrow \begin{cases} ac+bd=1 \\ ad+bc=0 \end{cases}$. O soluție a acestui sistem este $a = c = 0$ şi $b = d = 1$, deci avem $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) Fie $P, Q \in G$ cu $P \neq O_2$ şi $Q \neq I_2$. Atunci $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ şi $Q = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$.

Din $PQ = O_2 \Rightarrow \begin{cases} ac+bd=0 \\ ad+bc=0 \end{cases}$. Prin adunarea celor două ecuații obținem $(a+b)(c+d) = 0$ ceea ce implică $a = -b$ sau $c = -d$. Aşadar putem alege

$P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

g) Fie $M=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ cu a,b întregi $\Rightarrow \det(M)=a^2-b^2=2007 \Rightarrow$ o variantă ar fi $\begin{cases}a-b=9\\ a+b=223\end{cases}$ care are soluția $a=116, b=107$. Deci $M=\begin{pmatrix}116 & 107\\ 107 & 116\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$, $x\in \mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

c) Vom demonstra că $\sqrt{x^2+1}>x$, $\forall x\in \mathbf{R}$. Pentru $x\le 0$ este evidentă inegalitatea. Pentru $x>0$ avem $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow 1>0$, ceea ce este adevărat. Deci $f(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$.

d) Cum $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0, \forall x\in \mathbf{R}$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, rezultă că nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f. Căutăm asimptota oblică. Aceasta are ecuația $y=mx+n$, unde

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}=-2,\text{ iar}$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0.$$ Deci $y=-2x$ este ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

f) Avem $f''(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)'=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x\in \mathbf{R}$. De aici rezultă că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

g) $I=\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=I_1-\frac{1}{2}$.

Aplicând metoda integrării prin părți pentru integrala I_1 obținem

$$I_1=\int_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx-\left.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right|_0^1=$$

$$= x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - I_1 - \ln 2 = \sqrt{2} - I_1 - \ln 2 \Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{2}-\ln 2}{2}.\ \text{Deci}\ I = \frac{\sqrt{2}-\ln 2 - 1}{2}.$$