Varianta 057

SUBIECTUL I

a) $z=-2i \Rightarrow |z|=2$. b) $AO=5$.

c) Deoarece $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$, rezultă că punctul B este situat pe cercul dat.

d) $\text{tg}3 \cdot \text{ctg}3=\text{tg}3 \cdot \frac{1}{\text{tg}3}=1$. e) $G(2,2,2)$. f) $a=1, b=-5$.

SUBIECTUL II

1.

a) Calcul direct.

b) Conform punctului a), avem $\left(\hat{x}+\hat{y}\right)^3=\hat{x}+\hat{y}=\hat{x}^3+\hat{y}^3, \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_6$.

c) Deoarece $f(0)=1$, avem $g(1)=0$.

d) Ecuația devine: $\left(x^2+7\right)=\left(2x^2+3x+7\right) \Leftrightarrow x \in \{-3,0\}$.

e) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=49$.

2.

a) $f'(x)=\frac{-6x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$. b) $\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=\ln 5-\ln 8$.

c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x) \leq 0, \forall x \in [0, \infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-\frac{3}{5}$.

e) $1<\frac{x^2+4}{x^2+1} \leq 4, \forall x \in \mathbf{R}$ și atunci $0<\ln\left(x^2+4\right)-\ln\left(x^2+1\right) \leq \ln 4, \forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=1, b=0$ și $1^2-2 \cdot 0=1$ avem $I_2 \in G$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, a^2-2b^2=1$ și $B=\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}, x^2-2y^2=1, A, B \in G$. Prin calcul direct obținem $A \cdot B=\begin{pmatrix} u & v \\ 2v & u \end{pmatrix}$ cu $u^2-2v^2=1$, deci $A \cdot B \in G$.

c) $\det A=1$.

d) $\det X = a^2 - 2b^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists X^{-1}$, se verifică egalitățile $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_2$. $\det\left(X^{-1}\right) = a^2 - 2b^2 = 1$ şi atunci $X^{-1} \in G$.

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in G$ .f) Arătăm inductiv că dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d > 0$, atunci $X^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$. Într-adevăr, pentru $n = 1$ este adevărat, iar pentru demonstrația $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, observăm că $X^{n+1} = X^n \cdot X = \begin{pmatrix} aa_n + cb_n & ba_n + db_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix}$. Deci $B^n \neq I_2, \forall n \in \mathbf{N}^*$, deoarece $b_n > 0$ .g) Din f) rezultă că $B, B^2, B^3, ..., B^n$ sunt matrice diferite pentru că, dacă $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $B^\alpha = B^\beta \Big| \cdot B^{-\alpha} \Rightarrow B^{\beta-\alpha} = I_2$, contradicție cu f). Deci G conține cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

b) $f'(0) = 0, g'(0) = 0$.

c) Avem $f'(x) < 0, \forall x > 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ şi atunci $f(x) < \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Avem $g'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow g$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$, astfel $g(x) > \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$. Deci $f(x) < 0 < g(x), \forall x > 0$.

d) $1 + 3 + ... + (2n-1) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} k - \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - n = n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

e) Fie $P(n)$ egalitatea de demonstrat. După parcurgerea etapei de verificare vom demonstra $P(n) \to P(n+1)$.

$$P(n+1): \underbrace{1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2}_{\frac{n(4n^2-1)}{3}} + (2n+1)^2 = (2n+1) \cdot \left[\frac{n(2n-1)}{3} + (2n+1)\right]$$

$= \dfrac{n\left[4(n+1)^2 - 1\right]}{3}$. Rezultă $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3}{\frac{n(4n^2-1)}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

g) Folosind c) rezultă $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x, \forall x>0$. Atunci

$$\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx<\int_0^1 \ln(1+x)dx<\int_0^1 xdx.$$

După calcularea integralelor rezultă

$$\frac{1}{3}<\int_0^1 \ln(1+x)dx<\frac{1}{2}.$$