Varianta 032

SUBIECTUL I

a) $\overline{z} = -1 - i$.

b) $a \in \{-1, 1\}$.

c) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

d) $tg15^\circ \cdot ctg15^\circ = 1$.

e) Condiția ca punctele A, B să fie situate pe dreapta $2x - y - 3 = 0$ implică sistemul $\begin{cases} 2c - 4 = 0 \\ 1 - d = 0 \end{cases}$ cu soluția $c = 2$ şi $d = 1$.

f) Se poate considera punctul $M(1, 2)$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 \frac{3}{6} = -1 \in \mathbf{Z}$.

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = 0$.

c) Polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 1$ are suma rădăcinilor -2.

d) $f\left(g\left(\sqrt{3}\right)\right) = f(0) = -3$.

e) $m = 3$.

2.

a) Cum $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Se pot considera funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g(x) = x^2 + 1$, pentru care $f'(1) = g'(1) = 2$.

c) Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$ şi $f'(x) = 3x^2 - 3$, $x \in \mathbf{R}$. Cum $f'(x) > 0$ pentru $x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$ şi $f'(x) < 0$ pentru $x \in [-1, 1]$, rezultă că $x = -1$ şi $x = 1$ sunt puncte de extrem. Deci f are două puncte de extrem.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}$.

e) Avem $\int_2^3 x dx = \frac{5}{2}$, deci $n = 3$.

SUBIECTUL III

a) $(1-i)\circ i = i$.

b) Se arată că legea este comutativă, deci este suficient să rezolvăm ecuația $z\circ e = z$. Această egalitate revine la $e(z+i) = (z+i)(1-i)$, $\forall z\in \mathbf{C}$, ceea ce implică $e = 1-i$.

c) Calcul direct.

d) Folosind b) rezultă $z = 3+i$.

e) Egalitatea $z\circ f = f$ implică, folosind c), $(z+i)(f+i) = f+i$, $\forall z\in \mathbf{C}$. Atunci $f+i=0$, deci $f=-i$.

f) Folosind c) avem $(z\circ u)\circ w = (z+i)(u+i)(w+i)-1 = z\circ(u\circ w)$, $\forall z,u,w\in$ **C.**

g) Pentru $n=1$, avem egalitatea $z=(z+i)^1 - i$. Presupunem că

$\underbrace{z\circ z\circ\ldots\circ z}_{\text{de } k \text{ ori}} = (z+i)^k - i$ şi demonstrăm că $\underbrace{z\circ z\circ\ldots\circ z}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = (z+i)^{k+1} - i$. Avem

$\underbrace{z\circ z\circ\ldots\circ z}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \left((z+i)^k \circ z\right) = \left((z+i)^k - i + i\right)(z+i) - i = (z+i)^{k+1} - i$. Atunci

$\underbrace{z\circ z\circ\ldots\circ z}_{\text{de } n \text{ ori}} = (z+i)^n - i$ pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, $\forall z\in \mathbf{C}$

SUBIECTUL IV

a) $f_1'(x) = x^{n-1} - 1$, $x\geq 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} f_1(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$.

c) $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{n} - x\right)dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}$.

d) Funcția f_k este continuă şi $f_k'(x) = k\left(x^{n-1} - x^{k-1}\right)$, $x\geq 0$. Avem $f'(x) < 0$ pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$. Deci $x=1$ este puncte de extrem (minim) local pentru funcția f.

e) Din d) rezultă $f_k(x) \geq f(1) = \frac{k}{n} - 1$ oricare ar fi $x\geq 0$, $n\geq 2$. După înlocuire se obține $\frac{k}{n}\cdot x^n \geq x^k + \frac{k}{n} - 1$, $x\geq 0$, $n\geq 2$, $k\leq n-1$. Pentru $k=n$ inegalitatea devine $x^n \geq x^n$, $x\geq 0$.

f) Deoarece $f_k(x) \geq f(1) = \frac{k}{n} - 1$ oricare ar fi $x \geq 0$, $n \geq 2$ rezultă

$\int_0^1 f_k(x)\,dx \geq \int_0^1 \left(\frac{k}{n} - 1\right) dx = \frac{k}{n} - 1$.

g) Folosind inegalitatea de le e), avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} x^n \geq \sum_{k=1}^{n} x^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - n$. Dacă se efectuează sumele, se obține $\frac{n+1}{2} x^n \geq \frac{n+1}{2} - n + \sum_{k=1}^{n} x^k$. Se împarte inegalitatea cu $\frac{2}{n+1}$ şi rezutlă $x^n + 1 \geq \frac{2}{n+1}\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1\right)$, $x \geq 0$, $n \geq 2$.