Varianta 035

SUBIECTUL I

a) $a+2b=\frac{5}{2}$.

b) Ecuația cercului este $x^2+(y-1)^2=1$, deci raza este $r=1$.

c) $\cos\frac{\pi}{3}$.

d) $z=3-i$.

e) $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$.

f) -1.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{7}\cdot\hat{7}=\hat{1}$ în $\mathbf{Z}_8$, deci $\hat{7}$ este elementul căutat.

b) $\hat{1}$.

c) $x=\frac{3}{2}$.

d) $f(1)=2$.

e) $C_5^4=5$.

2.

a) $f'(x)=2007x^{2006}$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Cum funcția f este strict crescătoare, atunci $a>b$.

c) Cum $f'(x)=2007x^{2006}>0$, $x\in\mathbf{R}$, atunci funcția f este crescătoare pe $\mathbf{R}$

d) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2008}$.

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{2007}}\cdot\sin x=0$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=\det(B)=1$.

b) $\text{rang}(B)=2>1=\text{rang}(C)$.

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ecuația $X \cdot A = C$ revine la egalitatea $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

care admite soluția $a=2$, $b=-3$, $c=d=0$. Rezultă $X=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Fie $W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ecuția $W \cdot Y = O_2$ implică sistemul $\begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \end{cases}$. Atunci

$W=\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$. Pentru $a=b=1$, obținem $Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, iar pentru $a=b=2$

avem $Z=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

e) Fie $D=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se arată prin inducție matematică că $D^n=\begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 1$. Atunci

$A^m=\begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $B^n=\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Egaliatea $A^m=B^n$ revine la ecuația $2m=3n$

pentru care orice pereche $(3k, 2k)$, $k \in \mathbf{Z}$ este soluție.

f) Cum $\det(A)=1$, rezultă că matricea A este inversabilă şi $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) Egalitatea $xA+yB+zC=O_2$ implică $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, de unde rezultă

$x=y=z=0$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=-x\sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Deoarece $\sin x \geq 0$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $f'(x) \leq 0$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci funcția f este descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Avem $g'(x)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)<0$ oricare ar fi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Atunci g este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

e) Deoarece g este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\le g(x)\le\lim\limits_{x\to 0}g(x)$. Atunci $\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}<1$, oricare ar fi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{5\pi-12\sqrt{3}}{12}$.

g) Deoarece $\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ rezultă $\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$, adică $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx\ge\frac{2}{3}$.