Varianta 023

SUBIECTUL I

a) 3; b) Se poate alege orice număr întreg mai mare decât 2. c) $(x-2)^2+(y-3)^2=1$;
d) $a=3$ şi $b=4$; e) d=1; f) $\det(A)=\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)$. Dacă alegem $x=\frac{\pi}{3}$ şi $y=\frac{\pi}{6}$, obținem $\det(A)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $C_4^2=6$.

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$;

c) $m=-1$ este singurul număr întreg care verifică cele două inegalități.

d) Se poate considera $x^2-4x=0$.

e) Pentru orice $a\in\mathbf{R}^*$ avem $f(a)=f(-a)=a^2$.

2.

a) Calcul direct.

b) $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$, $x\geq 0$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

d) $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{x+2}dx=\ln\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL III

a) Fie $x,y\in A$, atunci $x+1>0$ şi $y+1>0$. Prin înmulțirea celor două inegalități se obține $xy+x+y+1>0$, de unde rezultă $xy+x+y>-1$ oricare ar fi $x,y\in A$. Atunci $x\Delta y\in A$.

b) Calcul direct;

c) $e=0$;

d) Pentru $x\in A$, $x^{-1}=-\frac{x}{x+1}$, $x^{-1}\in A$;

e) $x=1$;

f) $b=-1$;

g) Conform punctului f), rezultă $H=-1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=-\frac{x}{e^x}$, $x\in \mathbf{R}$.

b) $f'(x)=0$ admite soluția $x=0$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,0)$ resprctiv $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,\infty)$, deci $x=0$ este punct de extrem (maxim).

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$;

d) Inegalitatea $0<f(x)$ revine la $0<x+1$ care este adevărată pentru orice $x\in(0,\infty)$. Din punctul b) rezultă că $x=0$ este punct de maxim pentru funcția f . Atunci $f(x)\le f(0)=1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

e) Prin înmulțirea cu numărul pozitiv y , inegalitatea devine $y^2+1\ge 2y$, care este echivalentă cu inegalitatea adevărată $(y-1)^2\ge 0$, $y\in(0,\infty)$.

f) $\int_0^1 f(x)dx=2-\frac{3}{e}$.

g) Conform relației de la e) avem $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\ge 2$ și folosind f) avem $\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx\ge\frac{3}{e}$.