Varianta 027

SUBIECTUL I

a) $\sqrt{5}$; b) $2x+4y-5=0$; c) $a=-2$; d) $x^2+y^2=5$. e) 1; f) $\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $p=\dfrac{1}{2}$; b) $1,3,5$; c) $x=2$; d) $x=2$; e) $f_{\min}=-4$.

2.

a) $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $x>1$.

b) Cum f este continuă și $f'(x)<0$ oricare ar fi $x>1$, avem că f este descrescătoare pe $(1,\infty)$.

c) $y=1$ asimptotă orizontală către ∞.

d) Calcul direct.

e) $\int_2^3 f(x)\,dx=1+2\ln 2$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=1$ și $b=0$ are loc egalitatea $a^2-3b^2=1$, deci $I_2\in G$.

b) calcul direct;

c) $\det(X)=a^2-3b^2$ și cum $X\in G$ rezultă că $\det(X)=1$, deci matricea X este inversabilă.

d) Se verifică că $X\cdot X^{-1}=\begin{pmatrix} a^2-3b^2 & 0 \\ 0 & a^2-3b^2 \end{pmatrix}$ și cum $X\in G$, rezultă $X\cdot X^{-1}=I_2$.

e) Se poate considera matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\in G$.

f) Dacă $B\in G$, atunci există șirurile cu termeni pozitivi $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $B^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 3b_n & a_n \end{pmatrix}$, unde ${a_n}^2-3{b_n}^2=1$, $n\geq 1$. Egalitatea $B^n=I_2$ implică $a\cdot b_{n-1}+b\cdot a_{n-1}=0$, de unde rezultă $a_{n-1}=b_{n-1}=0$, dar atunci ${a_{n-1}}^2-3{b_{n-1}}^2=0\neq 1$, contradicție. Deci $B^n\neq I_2$.

g) Avem că $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\in G$ şi $A^n \in G$, $n\geq 1$, unde $A^n \neq A^p$ oricare ar fi $n\geq 1$, $p\geq 1$, $n\neq p$. Deci în G există o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in \mathbf{R}$ şi $g'(x)=-\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x\in \mathbf{R}$.

b) Funcția f este continuă şi $f'(x)>0$ oricare ar fi $x\in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe **R**.

c) Funcția g este continuă şi $g'(x)<0$ oricare ar fi $x\in \mathbf{R}$, deci g este strict descrescătoare pe **R**.

d) Deaorece funcția g este continuă şi strict descrescătoare pe **R**, atunci g este injectivă, deci ecuația $g(x)=0$ are soluție unică. Cum $g(0)=0$, rezultă $g(x)=0$ dacă şi numai dacă $x=0$.

e) Din $a_{n+1}=\operatorname{arctg}(a_n)$ şi $a_0=1$ rezultă $a_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ oricare ar fi $n\geq 1$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Avem $a_{n+1}-a_n=g(a_n)$, $n\geq 1$. Dar funcția g strict descrescătoare pe **R**, deci $g(x)<g(0)=0$ oricare ar fi $x>0$. Atunci $a_{n+1}-a_n=g(a_n)<0$ pentru orice $n\geq 1$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

f) $y=\dfrac{\pi}{2}$ este asimptota orizontală la graficul funcției f.

g) Deoarece $f(x)>0$ oricare ar fi $x>0$, rezultă $0<\int_0^1 f(x)dx$. Din $g(x)<0$ oricare ar fi $x>0$, rezultă $f(x)<x$ pentru $x>0$. Atunci $\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}$.