Varianta 048

SUBIECTUL I

a) $AB=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=5$, $AC=\sqrt{(5-2)^2+(-3-1)^2}=5$.

b) $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}-4\vec{j}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 3-3\cdot 4=0$.

c) Din rezultatul de la punctul b) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, deci $m(\hat{A})=90^\circ$.

d) Fie D simetricul lui C față de B, atunci B este mijlocul segmentului $[CD]$

$\Rightarrow x_B=\dfrac{x_C+x_D}{2}\Leftrightarrow 6=\dfrac{5+x_D}{2}\Rightarrow x_D=7$. Analog,

$y_B=\dfrac{y_C+y_D}{2}\Leftrightarrow 4=\dfrac{-3+y_D}{2}\Rightarrow y_D=11$. Deci punctul căutat este $D(7, 11)$.

e) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$.

f) $|z|=\dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{16+9}}=1$

SUBIECTUL II

1) a) $\lg 1000=3\in\mathbf{N}$

b) $a_4=a_3+r\Rightarrow 17=12+r\Rightarrow r=5$, $a_3=a_1+2r\Rightarrow 12=a_1+10\Rightarrow a_1=2$.

c) Prin calcul direct.

d) Aplicând formula termenului general al dezvoltării avem $T_{k+1}=C_4^k 2^{4-k}x^k$.

Înlocuind pe k cu 3 rezultă $T_4=C_4^3 2x^3$, deci coeficientul lui x^3 este $C_4^3\cdot 2=4\cdot 2=8$.

e) Conform punctului c) polinomul se poate scrie $f=\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right)$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul g $\Rightarrow$ restul împărțirii este 0.

2)

a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'(x)+\dfrac{1}{x^2}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$.

c) $\displaystyle\int_1^2 f''(x)dx=f'(x)\Big|_1^2=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{4}$.

d) Punctul $A(2,\alpha)$ aparține graficului dacă $f(2)=\alpha\Leftrightarrow 2+\dfrac{1}{2}=\alpha\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{5}{2}$.

e) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+x=f(x), \forall\, x>0$.

SUBIECTUL III

a) $I_2^2 = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$.

b) Se verifică prin calcul direct că $A^2 = I_2$ şi $B^2 = I_2$, deci $A, B \in G$.

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$, iar $B \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$. Deci $AB \neq BA$.

d) Din punctul b) se observă că $AA = I_2 \Rightarrow X = A \in M_2(\mathbf{Z}_3)$.

e) $(AB)^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} \neq I_2 \Rightarrow AB \notin G$.

f) $(AB)^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $(AB)^4 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow n = 4$.

g) Fie $X \in G \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}_3)$ şi $X^2 = I_2$. Din ecuația

$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=\hat{1} \\ b(a+d)=\hat{0} \\ c(a+d)=\hat{0} \\ d^2+bc=\hat{1} \end{cases}$. Deoarece inelul $\mathbf{Z}_3$ este fără divizori ai lui zero, din ecuația a doua se disting două cazuri:

1) Presupunem $b = \hat{0}$, de unde rezultă $a^2 = d^2 = \hat{1} \Rightarrow a, d \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$. Dacă $a = d$ avem două soluții, iar dacă $a \neq d$ avem şase soluții. Deci în acest caz avem deja 8 soluții.

2) Presupunem $a + d = \hat{0}$ şi mai obținem 8 soluții.

Deci, mulțimea are cel puțin 6 elemente.

SUBIECTUL IV

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$ este asimptota verticală.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției.

c) $f(x) - 1 + x - x^2 = -\dfrac{x^3}{x+1} \leq 0, \forall\, x \geq 0$.

d) $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 = \dfrac{x^4}{x+1} \geq 0, \forall\, x \geq 0$.

e) Din punctul c) avem $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0, \forall\, x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq 1 - x + x^2, \forall\, x \geq 0$, iar din punctul d) avem

$f(x)-1+x-x^2+x^3 \geq 0, \forall\, x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 1-x+x^2-x^3, \forall\, x \geq 0$. Deci

$1-x+x^2-x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1-x+x^2, \forall\, x \geq 0$.

f) Substituind pe $x>0$ cu $x^9>0$ în dubla inegalitate de la punctul anterior, rezultă cerința problemei.

g) Deoarece funcția g este o funcție pozitivă pe domeniul de definiție, atunci aria este

$A=\int_0^1 g(x)dx$. Integrând dubla inegalitate de la punctul f) avem :

$$\int_0^1 \left(1-x^9+x^{18}-x^{27}\right)dx \leq A \leq \int_0^1 \left(1-x^9+x^{18}\right)dx.$$

Calculând cele două integrale obținem $0,91<A<0,96$.