Varianta 070

SUBIECTUL I

a) $z=(2+i)^2=4+4i-1=3+4i \Rightarrow \text{Re}(z)=3$.

b) $|AB|=\sqrt{64+225}=17$.

c) Cum $|AC|=\sqrt{(-6-9)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{225+64}=17=|AB|$ rezultă că triunghiul ABC este isoscel.

d) *Soluția* 1. $BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x+y+7=0 \Rightarrow m=1$ şi $n=7$.

Soluția 2. Prin înlocuirea coordonatelor punctelor *B* şi *C* în ecuația dreptei obținem sistemul $\begin{cases} 1-8m+n=0 \\ -6-m+n=0 \end{cases}$ care are soluția $m=1$ şi $n=7$.

e) Fie *M* mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow M\left(\frac{1-6}{2}, \frac{-8-1}{2}\right)=M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

f) *Soluția* 1. Punctele *B*, *C*, *D* sunt coliniare

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -1+56-7-48=0 \Leftrightarrow 0=0$. Deci punctele sunt coliniare.

Soluția 2. Punctele sunt coliniare dacă punctul *D* se găseşte pe dreapta *BC*. Înlocuind coordonatele lui *D* în ecuația dreptei *BC* avem : $-7+0+7=0$ ceea ce este adevărat, deci punctele B, C, D sunt coliniare.

SUBIECTUL II

1)

a) $27^{x+1}=3 \Leftrightarrow 3^{3x+3}=3 \Leftrightarrow 3x+3=1 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \in \mathbf{R}$.

b) $3+6+9+...+2007=3(1+2+3+...+669)=3\frac{669\cdot 670}{2}=672345$.

c) Numerele sunt de forma $\overline{ab}$ cu $a\neq b, a\neq 0$ şi $a,b \in \{0,2,5,7\}$. Din faptul că $\overline{ab}$ trebuie să fie divizibil cu 5 rezultă că $b=0$ sau $b=5$. În acest caz numerele care îndeplinesc aceste condiții sunt 20, 50, 70, 25, 75. Deci , în total sunt 5 numere.

d) Elementele inversabile în $\mathbf{Z}_8$ sunt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$. Probabilitatea este $\frac{4}{8}=0{,}5$.

e) Ecuația devine $3+4x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$.

2)

a) $f'(x)=2007x^{2006}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2007$.

c) $\int\limits_0^1 f(x)dx=\left(\dfrac{x^{2008}}{2008}-e^{2007}x\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2008}-e^{2007}$.

d) Avem $f'(x)=2007x^{2006}\geq 0, \forall x\in \mathbf{R}$. Atunci funcția f este strict crescătoare pe **R**.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007}f(0)}{f(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-e^{2007}n^{2007}}{n^{2007}-e^{2007}}=-e^{2007}$.

SUBIECTUL III

a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}4^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x+y & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$,

$\forall\ A(x), A(y)\in G$.

b) $\det\big(A(x)\big)=4^x>0$, $\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow\det\big(A(x)\big)\neq 0$, $\forall\ A(x)\in G$.

c) Rezolvăm ecuația $A(x)A(e)=A(x)\Leftrightarrow A(x+e)=A(x)\Leftrightarrow x+e=x\Leftrightarrow e=0\in\mathbf{R}$.
Analog, din ecuația $A(e)A(x)=A(x)\Rightarrow e=0\in\mathbf{R}$. Deci, există $A(e)=A(0)\in G$ astfel încât $A(x)A(e)=A(e)A(x)=A(x)$, $\forall\ A(x)\in G$.

d) Din punctul a) avem $A(x)A(x')=A(x+x')=A(x'+x)=A(x')A(x)=A(0)$,
deci $x+x'=0\Rightarrow\exists x'=-x\in\mathbf{R}$, pentru orice *x* real
$\Rightarrow\forall\ A(x)\in G, \exists\ A(x')=A(-x)\in G$ astfel încât $A(x)A(x')=A(x')A(x)=A(0)$.

e) $B=A(1)=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Avem $\det B=4\neq 0\Rightarrow$ matricea B este inversabilă.

$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3\in G$. Din punctul anterior avem că $A(1)A(-1)=A(0)=I_3$. Deci

$B^{-1}=[A(1)]^{-1}=A(-1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\in G$.

f) Prin inducție matematică se demonstrează, că $B^n=A(n)=\begin{pmatrix}4^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & n & 1\end{pmatrix}$, $\forall\ n\in\mathbf{N}^*$.

g) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$. Faptul că $X\in C(B)$ implică egalitatea

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4a & b+c & c \\ 4d & e+f & f \\ 4g & h+i & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix}.$$

Din egalitățile obținute rezultă că $a,h\in\mathbf{R}$, $e=i$ și $b=c=d=f=g=0$. Notând $e=b$ și $h=c$ rezultă că există $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-2x=\frac{-2x^3}{x^2+1}$.

b) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$ obținem singura soluție $x=0\in\mathbf{R}$.

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ ∞
$f'(x)$	+ + + + + + 0 - - - - - - - -
$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\searrow$

Se observă că funcția este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$ și strict crescătoare pe $(-\infty,0]$.

c) Punctul $x=0$ este punct de maxim local. Valoarea maximă a funcției este $f(0)=0$. Atunci $f(x)\le f(0)=0, \forall x\in\mathbf{R}$.

d) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \ln(t^2+1)dt-\int_0^x t^2dt=\int_0^x t'\ln(t^2+1)dt-\frac{t^3}{3}\Big|_0^x=t\ln(t^2+1)\Big|_0^x-$

$-\int_0^x\frac{2t^2}{t^2+1}dt-\frac{x^3}{3}=x\ln(x^2+1)-2\left(t\Big|_0^x-\operatorname{arctg}t\Big|_0^x\right)-\frac{x^3}{3}=x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{3}$.

e) Din punctul c) rezultă că $f(x)\le 0, \forall x\in\mathbf{R}$, deci $f(x)\le 0, \forall x\ge 0$. Atunci $\int_0^x f(t)dt\le 0, \forall x\ge 0$, adică $F(x)\le 0, \forall x\ge 0$.

f) $f(-x)=\ln((-x)^2+1)-(-x)^2=\ln(x^2+1)-x^2=f(x), \forall x\in\mathbf{R}$.

g) Din punctul anterior rezultă că funcția *f* este o funcție pară, deci graficul ei este simetric față de axa Oy . Pe intervalul $[0, \infty)$ funcția este strict descrescătoare, deci restricția ei pe acest interval este injectivă, adică pe acest interval ecuația are soluție unică. Se observă că $x = \sqrt{e-1} \in [0, \infty)$ este soluția. Din simetria graficului rezultă că ecuația mai are o soluție $x = -\sqrt{e-1} \in (-\infty, 0]$.