Varianta 074

SUBIECTUL I

a) $AB=\sqrt{(4-3)^2+(6-5)^2}=\sqrt{2}$.

b) $\bar{z}=12+i$.

c) Dacă perimetrul este $P=6$, atunci latura triunghiului este $a=2$. Aria va fi $A=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.

d) $\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

e) Fie M mijlocul segmentului $[AB]\Rightarrow M\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{3+5}{2}\right)=M(3,4)$.

f) Punctul $T(1,1)$ este un punct care aparține cercului, deci ecuația tangentei se obține prin dedublarea ecuației cercului. Rezultă $x_1x+y_1y=2\Leftrightarrow x+y-2=0$.

SUBIECTUL II

1)

a) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Calculăm $\det(A)=-2\neq 0$, deci matricea este inversabilă.

Transpusa matricei este ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, adjuncta este $A^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, iar inversa este

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

b) $\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2+\log_2\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\in\mathbf{Q}$.

c) Prin verificare se găsesc soluțiile $\hat{0},\hat{2},\hat{4}$.

d) Ecuația este bipătrată. Se notează $x^2=t$ și ecuația devine $t^2-5t+4=0$ cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=4$. Revenind la notație se obțin pentru ecuația în x soluțiile $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$ și $x_4=-2$.

e) $C_5^3=10$

2)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

b) $f'(x)=-\dfrac{2006}{x^{2007}}$.

c) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-2006$.

d) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală pentru graficul funcției către $-\infty$, respectiv $+\infty$.

Cum $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$ şi $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, rezultă că dreapta $x=0$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției f.

e) $\int f(x)dx=\int x^{-2006}dx=-\frac{1}{2005x^{2005}}+C$.

SUBIECTUL III

a) $x*y-(x-5)(y-5)-5=xy-5x-5y+30-(xy-5x-5y+25)-5=0$, $\forall\, x,y\in \mathbf{R}$
$\Rightarrow x*y=(x-5)(y-5)+5$, $\forall\, x,y\in \mathbf{R}$.

b) $\forall\, x,y\in(5,\infty)\Rightarrow x>5,\ y>5\Rightarrow (x-5)(y-5)>0\Rightarrow (x-5)(y-5)+5>5\Rightarrow$
$x*y\in(5,\infty)$.

c) $(x*y)*z=[(x-5)(y-5)+5]*z=(x-5)(y-5)(z-5)+5$ (1)

$x*(y*z)=x*[(y-5)(z-5)+5]=(x-5)(y-5)(z-5)+5$ (2)

Din rezultatele (1) şi (2) rezultă că $(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall\, x,y,z\in \mathbf{R}$.

d) Deoarece $x*y=(x-5)(y-5)+5=(y-5)(x-5)+5=y*x$, $\forall\, x,y\in \mathbf{R}$, rezultă că legea este comutativă.

Legea admite elment neutru dacă $\exists\, e\in(5,\infty)$ astfel încât $x*e=e*x=x$, $\forall\, x\in \mathbf{R}$.

Datorită comutativității este suficient să rezolvăm doar ecuația
$x*e=x\Leftrightarrow (x-5)(e-5)+5=x\Leftrightarrow (x-5)(e-6)=0\Rightarrow e=6\in(5,\infty)$.

e) Rezolvăm ecuația $x*x'=6\Leftrightarrow (x-5)(x'-5)+5=6\Rightarrow \exists\, x'=\frac{1}{x-5}+5$ pentru orice $x\in G$. Mai trebuie să verificăm $x'\in G\Leftrightarrow \frac{1}{x-5}+5>5\Leftrightarrow \frac{1}{x-5}>0$ ceea ce este adevărat pentru orice $x\in G$. Deci $\forall\, x\in G, \exists\, x'\in G$ astfel încât $x*x'=6$.

f) Din punctele anterioare rezultă că sunt verificate toate axiomele grupului comutativ.

g) $5^x*\sqrt{5^x}=5\Leftrightarrow (5^x-5)(\sqrt{5^x}-5)=0\Rightarrow 5^x=5\Leftrightarrow x=1$ sau $\sqrt{5^x}=5\Leftrightarrow x=2$.

SUBIECTUL IV

a)

$$f(x)-1+\frac{4x+8}{x^2+4x+5}=\frac{x^2-3}{x^2+4x+5}-\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+5}+\frac{4x+8}{x^2+4x+5}=0\Rightarrow$$

$$f(x)=1-\frac{4x+8}{x^2+4x+5},\ \forall\, x\in \mathbf{R}.$$

b) $f'(x)=0-\frac{4(x^2+4x+5)-(4x+8)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{4x^2+16x+12}{(x^2+4x+5)^2}$, $\forall\, x\in \mathbf{R}$.

c) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$ obținem soluțiile $x_1=-1$ şi $x_2=-3$.

x	$-\infty$ -3 -1 ∞
$f'(x)$	+ + + + + + 0 - - - - - - - - - -0 + + + + + + +
$f(x)$	↗ f(-3) ↘ f(-1) ↗

Din tabel se observă că $x_1=-1$ şi $x_2=-3$ sunt puncte de extrem local pentru funcția *f*.

d) $\lim_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției.

e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+4n+5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4n-8}{n^2+4n+5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4n-8}{n^2+4n+5}\right)^{\frac{n^2+4n+5}{-4n-8}}\right]^{\frac{-4n-8}{n^2+4n+5}\cdot n}=e^{-4}.$$

f) $\int f(x)dx=\int\left(1-\frac{4x+8}{x^2+4n+5}\right)dx=x-2\int\frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx=x-2\ln(x^2+4x+5)+C$.

g) $\int_0^1 f(x)dx=\left[x-\ln(x^2+4x+5)\right]\Big|_0^1=1-2\ln 2=\ln\frac{e}{4}<\ln 1=0$.

S.N.E.E.