Varianta 010

SUBIECTUL I

a) 5 diagonale; b) $x = \frac{\pi}{6}$; c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $m_{AB} = 1$; e) $M(1,1)$; f) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$; b) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot r = 5$; c) $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{55}{2}$; d) $\det(A) = -\frac{1}{2}$;

e) $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

2

a) $f(0) = \ln\frac{2}{2} = 0$; b) $x = 2$ este asimptotă verticală la stânga, $x = -2$ este asimptotă verticală la dreapta. c) $f'(x) = \frac{2-x}{2+x} \cdot \left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = \frac{4}{4-x^2}$; d) $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-2, 2)$ deci f este crescătoare pe $(-2, 2)$; e) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right) = 0$.

SUBIECTUL III

a) Dacă $x, y \in (-2, 2)$, atunci $4 + xy > 0$. Condiția $x * y \in G$ revine la $-8 - 2xy < 4x + 4y < 8 + 2xy$ sau echivalent $\begin{cases} 0 < 2(x+2)(y+2) \\ 0 < 2(x-2)(y-2) \end{cases}$ inegalități care au loc pentru orice $x, y \in (-2, 2)$, deoarece $t + 2 > 0$ şi $t - 2 > 0$ pentru orice $t \in (-2, 2)$.

b) calcul direct;

c) $e = 0$;

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x$;

e) $f \circ g = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$ şi $g \circ f = \mathbf{1}_{(-2,2)}$ rezultă că f este inversabilă şi inversa funcției f este funcția g ;

f) calcul direct;

g) $N = \frac{2}{2} * \frac{2}{4} * \frac{2}{6} * ... * \frac{2}{2006}$ atunci, din e) rezultă $N = g(2007) = \frac{1003}{502}$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0) = 0$, $g(0) = 0$.

b) $g'(x) - f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$;

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{1+x^2} = 0$;

d) Avem $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci g este crescătoare pe **R**;

e) Inegalitatea $-\frac{1}{2} \le f(x)$ este echivalentă cu $0 \le \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$, care are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Analog $f(x) \le \frac{1}{2}$.

f) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$;

g) conform pct. b) funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$ este crescătoare pe **R**, deci $h(x) > h(0)$ pentru orice $x \in (0,\infty)$.