Varianta 020

SUBIECTUL I

a) $|AB| = 5$. b) $x + y - 4 = 0$. c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$. d) 6. e) Deoarece $\frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7}$, rezultă $b < 0 < a$. f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $3! = 6$. b) $2^4 = 16$. c) Soluțiile sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = -1$. Atunci suma soluțiilor este 0.

d) $1 + 5 + 9 + 13 + ... + 117 = 1711$. e) -2

2.

a) $f'(x) = 1 + \cos x$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

d) $\int_0^\pi f(x)dx = \frac{\pi^2}{2} + 2$.

e) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 + 0 = 0$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$ şi $\operatorname{rang}(A) = 1$;

b) $C = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$;

d) folosind principiul inducției matematice se obține $x_n = 7^{n-1},\ n \ge 1$.

e) Avem $G = \left\{ X \in M_2(\mathbf{R}) \middle| \ A \cdot X = B \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-2a & 1-2b \\ a & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$, deci G are o infinitate de elemente.

f) $Y = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

g) Matricele $D \in M_2(\mathbf{R})$, $D \neq O_2$, pentru care $A \cdot D = D \cdot A = O_2$ sunt $D = \begin{pmatrix} 6x & -2x \\ -3x & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$. Se poate alege matricea $D = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 + \ln x$ şi $g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

b) $f'(x) = 0$ admite soluția $x = \frac{1}{e}$ şi $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ respectiv $f'(x) > 0$ pentru $x > \frac{1}{e}$, deci $x = \frac{1}{e}$ este puncte de extrem (minim) local.

c) $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x > 0$, rezultă că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $x > 0$, rezultă că funcția g este concavă pe $(0, \infty)$.

d) $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim pentru funcția f, rezultă că $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ oricare ar fi $x > 0$ deci $x \ln x \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + ex \ln x \geq 0$, $x > 0$.

e) f este continuă pe $(0, \infty)$ şi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, deci nu are asimptote verticale

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ rezultă că f nu are asimptotă orizontală spre ∞

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ funcția f nu are asimptotă oblică spre ∞.

f) $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{1 + e^2}{4}$.

g) Fie $G : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui g. Din a) avem $G(x) = f(x) + C$, unde C este o constantă reală. Cum funcția f este crescătoare pe $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ avem $G(2007) > G(2006)$.