

Varianta 053

Subiectul I

- a) Aplicând teorema lui Pitagora obținem că lungimea ipotenuzei este $\sqrt{36+64} = 10$
- b) $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- c) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- d) Obținem sistemul $\begin{cases} 3+3a+b=0 \\ 4+4a+b=0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$
- e) Aria $[ABC] = \frac{|\Delta|}{2}$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$; deci $\text{Aria}[ABC] = \frac{1}{2}$.
- f) $a+bi = \frac{2+i}{i-2} \Leftrightarrow a+bi = \frac{(2+i)(-2-i)}{5} \Leftrightarrow \frac{-4-2i-2i-i^2}{5} = a+bi \Leftrightarrow a+bi = \frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i \Leftrightarrow$
 $a = -\frac{3}{5}$ și $b = -\frac{4}{5}$.

Subiectul II

- 1.
- a) Suma este -4
- b) $\frac{C_5^2}{C_5^3} = \frac{C_5^2}{C_5^2} = 1$
- c) Cu $x > 0$, ecuația este echivalentă cu $x+1 = x^2 + x$ deci $x = \pm 1$ și convine numai $x = 1$.
- d) $10^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$
- e) Numai 4 și 5 verifică inegalitatea, deci probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.
- 2.
- a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, (\forall)x \in \mathbb{R}$
- b) $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$
- c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} > 0, (\forall)x > 0$ și $f'(x) < 0, (\forall)x < 0$ rezultă că $x=0$ este punct de minim global pentru f deci $f(x) \geq f(0), (\forall)x \in \mathbb{R}$
- d) $x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$ deci $O(0,0)$ este punctul de minim global pentru f
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$

Subiectul III

- a) Fie $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
 $x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

b) $g(x+y) = t(x+y) = tx + ty = g(x) + g(y), (\forall) x, y \in Z[\sqrt{2}] \Rightarrow g \in f$

c) Fie $f \in F \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in Z[\sqrt{2}]$; pentru $x=y=0$ obțin
 $f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

d) Fie $f \in F \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in Z[\sqrt{2}]$

$$f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1);$$

Presupun $f(n) = nf(1)$ și am $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$

Conform principiului inducției matematice $f(n) = nf(1), (\forall) n \in N$

e) Fie $f \in F$ și $a, b \in Z$; $f(a_1) = f(a_1)$ și

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2), (\forall) a_1, a_2 \in Z[\sqrt{2}];$$

Presupun $f(a_1 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$ și am

$$f(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) = f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1})$$

Conform principiului inducției matematice

$$f(a_1 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n), (\forall) a_1, \dots, a_n \in Z[\sqrt{2}] \text{ și } \forall n \in N^*.$$

Pentru $x = a_1 = a_2 = \dots = a_n$ obțin $f(nx) = nf(x), \forall n \in N^*$ și $(\forall) x \in Z[\sqrt{2}]$ și

$$f(kx) = kf(x), \forall x \in Z[\sqrt{2}] \text{ și } \forall k \in Z$$

Atunci $f(a + b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2}), \forall a, b \in Z$

f) f crescătoare $\Rightarrow f(1) \geq f(0) = 0$

g) Fie $f \in F$ și $f(\sqrt{2}) = 0$ și $x = a + b\sqrt{2} \in Z[\sqrt{2}]$; Conform e) am

$$f(x) = f(a + b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2}) = af(1), \forall x \in Z[\sqrt{2}]$$

Aleg $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ și deci $f(x) = 0, \forall x \in Z[\sqrt{2}]$

Subiectul IV

a) $f_1(x) = f_0'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}, \forall x \in R$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către $-\infty$.

c) Pentru $n=0$ am $f_0(x) = 2^0 \cdot e^{2x} = e^{2x}$ da;

Presupun $f_n(x) = 2^n e^{2x}$ și am $f_{n+1}(x) = f_n'(x) = (2^n e^{2x})' = 2^{n+1} e^{2x}, \forall x \in R$.

Conform principiului inducției matematice $f_n(x) = 2^n e^{2x}, \forall x \in R, \forall n \in N$

d) $\sum_{k=0}^n f_k(0) = \sum_{k=0}^n 2^k e^0 = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_n(t) dt}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{n-1}'(t) dt}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(0)}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} e^{2x} - 2^{n-1}}{2^n e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{2^{n-1}}{2^n e^{2x}} \right] = \frac{1}{2}$

g) $f_0(x) + f_1(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^{2x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$