Varianta 019

SUBIECTUL I

a) $a=2$; b) $C_8^2-8=20$; c) $|z|=|-1|=1$; d) $(x-1)^2+y^2=4$, $r=2$; e) 0;

f) $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$.

SUBIECTUL II

1.

a) Avem $f(x)=(x-1)^2+2\geq 2$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$;

b) Cum $f(a)=f(b)=0$ rezultă $2a-a^2=2b-b^2=3$, atunci $\frac{1}{2a-a^2}+\frac{1}{2b-b^2}=\frac{2}{3}$;

c) $y=1$;

d) 4;

e) $\begin{vmatrix}3a & 2b\\ a & b\end{vmatrix}=ab=3$.

2.

a) $f'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $f(x)\leq\frac{1}{2x}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{2x\left(x^2+1\right)}\geq 0$, deci $x\in(0,\infty)$.

c) $y=0$ asimptota orizontală spre $+\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=1$.

e) $\int_0^1 f(x)dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL III

a) Calcul direct.

b) Calcul direct.

c) Se poate alege matricea $C=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(C)=0$ şi $tr(C)=5$.

d) Dacă pentru $Y\in M_2(\mathbf{R})$ satisface $\det(Y)=0$ şi $tr(Y)=5$, atunci, folosind rezultatul de la b) avem $Y^2=5Y$. Prin inducție matematică se arată că $Y^n=5^{n-1}Y$ pentru orice $n\geq 2$.

e) Calcul direct.
f) Conform rezultatului de la b), trebuie să alegem două matrice cu determinantul şi urma nule. Se poate considera $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

g) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$. Egalitatea $X^2=O_2$ implică $a=b=c=d=0$ sau $a+d=0$. În fiecare caz avem $tr(X)=0$, deci oricare ar fi $X\in M_2(\mathbf{R})$ dacă $X^2=O_2$, atunci $tr(X)=0$. Folosind a), rezultă că $tr(X+Y)=tr(X)+tr(Y)=0$ oricare ar fi $X,Y\in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $X^2=Y^2=O_2$.

SUBIECTUL IV
a) $f(0)=0$ şi $f'(0)=0$;
b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ adevărat pentru $a,b\in(0,\infty)$;
c) Cum $\cos x\in(0,1]$ pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, iar funcția putere este descrescătoare pentru baza subunitară, rezultă $\cos x\geq\cos^2 x$ pentru orice $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.
d) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x-2\geq\frac{1}{\cos x}+\cos x-2$ şi folosind b) pentru $\frac{a}{b}=\cos x$, obținem $f'(x)\geq 0$ oricare ar fi $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci funcția f este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.
e) Funcția f este continuă şi crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $f(x)\geq f(0)=0$ oricare ar fi $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.
f) Avem $f(x)+g'(x)=\text{tg}\, x+\sin x-2x-\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}+2x=0$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.
g) Din f) rezultă $g'(x)=-f(x)\leq 0$ oricare ar fi $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci funcția g este descrescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

h) g este descrescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $g(x)\le g(0)=1$ oricare ar fi $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Atunci $\cos x-\ln(\cos x)=g(x)-x^2\le 1-x^2$, de unde

$\int_0^1 \cos x-\ln(\cos x)\,dx\le\int_0^1 (1-x^2)\,dx=\frac{2}{3}$.