Varianta 016

SUBIECTUL I

a) 1; b) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}\right)=\frac{1}{2}$; c) $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) 8; e) 1; f) $x=0$.

SUBIECTUL II

1.

a) $g(3)=0$; b) $C_8^0+C_8^1+...+C_8^8=2^8$; c) $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 3 .

2.

a) Calcul direct.

b) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$.

d) $y=x$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

e) $f'(x)=0$ admite soluțiile $x_1=1$, $x_2=-1$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ şi $f'(x)<0$ pentru $x\in(-1,0)\cup(0,2)$. Atunci $x_1=1$ şi $x_2=-1$ sunt puncte de extrem local.

SUBIECTUL III

a) Calcul direct.

b) Dacă ω este o rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$, atunci $\omega^2+\omega+1=0$. Prin înmulțira cu $\omega-1$ şi ținând cont de a), rezultă $\omega^3-1=0$, deci $\omega^3=1$.

c) $A^2=O_2$.

d) $(I_2+A)(I_2-A)=I_2-A^2=I_2$.

e) $\det(I_2+A)=1\neq0$, rezultă că matricea I_2+A este inversabilă şi ținând cont de d) avem $(I_2+A)^{-1}=I_2-A$.

f) Deoarece $A^2=O_2$, rezultă că $B=A$. Cum $\det(B)=0$ avem că $\mathrm{rang}(B)=1$.

g) $f(B)=f(A)=-3A$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $g'(x)=\frac{1-2x}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

c) $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe **R**, deci nu are puncte de extrem.

$g'(x)=0$ admite soluția $x=\frac{1}{2}$ și $g'(x)>0$ pentru $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ respectiv $g'(x)>0$ pentru $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, rezultă că $x=\frac{1}{2}$ este punct de maxim local.

d) Cum $a_{n+1}-a_n=f(n+1)>f(0)=0$ pentru orice $n\geq 1$, rezultă că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

e) $\frac{\pi-2\ln 2}{4}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$.

g) $g(x)\leq g\left(\frac{1}{2}\right)$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$ și $\int_0^1 g(x)dx\leq\int_0^1 g\left(\frac{1}{2}\right)dx=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\ln\frac{5}{4}$.