Varianta 94

SUBIECTUL I

a) 1. b) $AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. c) partea reală este 5. d) $a=-1, b=9$. e) $S=\frac{9}{2}$.

f) $a=0, b=1$.

SUBIECTUL II

1. a) $\hat{2}^{2007}=\hat{2}^3\cdot\hat{2}^{2004}=\hat{0}$. b) $E=0+1=1$. c) $x=\frac{1}{5}$. d) $6x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$. e) $p=\frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x)=3x^2+5, x\in\mathbf{R}$. b) $\frac{7}{4}$. c) 5. d) Din a) rezultă că $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. e) $\frac{2}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=0$ şi $\operatorname{rang}(A)=2$, căci $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$.

b) $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 1 & 1\\ 1 & x+2 & 3\\ 3 & 2 & x+1\end{pmatrix}$. Atunci

$$f(x)=\begin{vmatrix}x+1 & 1 & 1\\ 1 & x+2 & 3\\ 3 & 2 & x+1\end{vmatrix}=x^3+4x^2-5x, \forall x\in\mathbf{C}.$$

c) $x(x^2+4x-5)=0\Leftrightarrow x_1=0, x_2=1, x_3=-5$.

d) $\det B(2)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=14\neq 0\Rightarrow B(2)$ este inversabilă.

e) Ecuația $A\cdot U=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=0\\ a+2b+3c=0\\ 3a+2b+c=0\end{cases}$. Sistemul este compatibil fiind liniar omogen şi simplu nedeterminat conform lui a). Soluția sa este $\begin{cases}a=\alpha\\ b=-2\alpha, \alpha\in\mathbf{C}.\\ c=\alpha\end{cases}$

Putem considera, de exemplu. $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

f) Putem considera $C=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\\ c & 0 & 0\end{pmatrix}$, unde $U=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

g) Dacă am avea $A\cdot V=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, atunci $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+z=0\\ 3x+2y+z=0\end{cases}$. Cum rangul matricei A a sistemului este 2 şi rangul matricei extinse este 3 $\left(\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}\neq 0\right)$, avem că sistemul este incompatibil.

SUBIECTUL IV

a) $\frac{1}{6}$. b) $B(0,n)=\frac{1}{n+1}$ .c) $B(n,0)=\frac{1}{n+1}$.

d) Dacă $x=1-t$, atunci $B(p,q)=-\int_1^0(1-t)^q\cdot t^p dt=\int t^p\cdot(1-t)^q\,dt=B(q,p)$.

e) $B(p,q)=\int_0^1\left(\frac{x^{q+1}}{q+1}\right)'(1-x)^p\,dx=-\frac{1}{q+1}\int_0^1 x^{q+1}(1-x)^{p-1}(-p)dx=\frac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.

f) Aplicând repetat e), avem

$B(n,q)=\frac{n}{q+1}\cdot B(n-1,q+1)==\frac{n!\cdot q!}{(q+n)!}\cdot B(0,n+q),\forall n,q\in\mathbf{N}$.

g) Utilizând f) şi b) avem

$B(p,q)=\frac{p!\cdot q!}{(p+q)!}\cdot B(0,p+q)=\frac{p!\cdot q!}{(q+p)!(q+p+1)}=\frac{p!\cdot q!}{(p+q+1)!},\forall p,q\in\mathbf{N}$.