Varianta 002

SUBIECTUL I

a) $AB=\sqrt{(-3-3)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}.$

b) $z=3^3\cdot i^3=-27i$, deci $\mathrm{Re}(z)=0.$

c) $\left|4\vec{i}+3\vec{j}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5.$

d) $y-3x=0.$ (justificați alegerea făcută !)

e) Cam simplu $1+0=1$.

f) Triunghiul fiind dreptunghic $\left(5^2=3^2+4^2\right)$ avem că $S=\dfrac{3\cdot 4}{2}=6.$

SUBIECTUL II

1.

a) Un număr $\overline{abc}$ convine dacă $a\in\{1,2,...,9\}$ şi $b+c=3$, deci $(b,c)\in\{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$. În total sunt 36 de numere.

b) De exemplu $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru care $\det A=3\cdot 1-0\cdot 0=3$.

c) Convine $x>3$ şi $3+x=27$, deci $x=24$ este soluție.

d) Verificând elementele lui $\mathbf{Z}_6$, obținem $\hat{y}\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$.

e) De exemplu -9,-2,5. (de ce este progresie ? mai găsiți şi alte exemple ?)

2.

a) $f'(x)=\cos x,\quad x\in\mathbf{R}.$

b) Avem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3.$

c) Deoarece $\sin t\in[-1,1], \forall t\in\mathbf{R}$, avem că limita cerută este 0.

d) Deoarece $-1\le\sin x\le 1, \forall x\in\mathbf{R}$, avem că $x_1=\dfrac{\pi}{2}, x_2=2\pi+\dfrac{\pi}{2}$ sunt puncte de maxim, iar $x_3=-\dfrac{\pi}{2}$ este punct de minim. (de exemplu)

e) $\displaystyle\int_0^{3\pi} f(x)\,dx=-\cos x\Big|_0^{3\pi}=2$. (calcule complete la examen !)

SUBIECTUL III

a) $\det H=-1.$

b) $(A+i\cdot I_2)(A-i\cdot I_2)=A^2-i\cdot A+i\cdot A-i^2\cdot I_2=A^2+I_2.$

c) Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, atunci

$$A - z\cdot I_2 = \begin{pmatrix} a-z & b \\ c & d-z \end{pmatrix},\ f_A(z) = \begin{vmatrix} a-z & b \\ c & d-z \end{vmatrix} = z^2 - (a+d)\cdot z + ad - bc \quad (1)$$

Din (1) avem: $f_H(z)=0 \Leftrightarrow z^2-3z-1=0,$ deci $z_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\notin \mathbf{Q}.$

d) Luăm $A=I_2, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi folosind (1) avem $f_A(1)=0=f_B(1), A\neq B.$

e) Folosind (1) avem că $f_H(i)=-2-3i.$

f) Deoarece $f_H(-i)=-2+3i,$ avem că

$f_H(-i)\cdot f_H(i)=13, \det\left(H^2+I_2\right)=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}=13,$ adică are loc egalitatea cerută.

g) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R}), ad-bc=-1.$ Avem:

$$\det\left(X^2+I_2\right)=\det\left(X+i\cdot I_2\right)\cdot\det\left(X-i\cdot I_2\right)=\begin{vmatrix} a+i & b \\ c & d+i \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a-i & b \\ c & d-i \end{vmatrix}=4+(a+d)^2\geq 4.$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=2x,\ g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2},\ x\in\mathbf{R}.$

b) Deoarece $f'(x)<0, g'(x)<0$ pentru $x<0$, $f'(x)>0, g'(x)>0$ pentru $x>0$ şi $f'(0)=0, g'(0)=0$, avem că $x=0$ este punct de minim local atât pentru f, cât şi pentru g.

c) Cu regula lui L'Hospital avem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=1.$ (se poate şi altfel ?)

d) $I=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{1}{3}.$

e) $J=x\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1-\displaystyle\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2\left(x-\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$

f) Din $f'(x)-g'(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^2},$ deducem că $x=0$ este punct de minim pentru $f-g$, deci $f(x)-g(x)\geq f(0)-g(0), \forall x\in\mathbf{R}$, deci are loc inegalitatea dorită.

g) Din f) deducem că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 g(x)dx \Leftrightarrow \ln 2+\frac{\pi}{2}\leq\frac{7}{3}.$