VARIANTA 033

SUBIECTUL I

a) fie M mijlocul segmentului [AB]; atunci x_M =2 , y_M =2 , z_M =2;

b) $\sin\frac{\pi}{6}+tg\ \frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$;

c) $z = (1+i)^{10} = (1-1+2i)^{10} = 2^{10}\cdot i^{10} = -2^{10} \Rightarrow$ Real z = -2^{10} ;

d) Rezolvând sitemul $\begin{cases} x+y+3=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$ obțin $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$;

e) Aria [ABC] = $\frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2-3=-5$ adică aria este $\frac{5}{2}$;

f) Punctul se află pe cerc $\Leftrightarrow 9\alpha^2 + 16\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha=1$ sau $\alpha = -1$;

SUBIECTUL II

1.

a) Numerele 100, x, 10 sunt in progresie aritmetica dacă $x=\frac{100+10}{2}=55$;

b) Inegalitatea este verificată de numerele de la 1 la 6 deci probabilitatea este $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$;

c) $2^{2x}-2\cdot 2^x-8=0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-8=0$ si notând 2^x = y>0 obțin $y^2 - 2y - 8 = 0$; $\Delta_y = 4 + 32 = 36$;
$y_1 = -2 < 0$ nu convine; $y_2 = 4 > 0$ convine $\Rightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x=2$;

d) Restul este $f(-1) = -1$;

e) $\log_2(\log_3 9)=\log_2 2=1\in Z$;

2.

a) $f(0) = e^0 - 0 = 1$;

b) $f'(x) = e^x - 1\ (\forall)x\in R$;

c) $f'(x) = e^x - 1 > 0\ (\forall)x > 0 \Rightarrow f$ e strict crescătoare pe $[0,\infty)$

d) $f(0) = 1 > 0$ şi f strict crescătoare $\Rightarrow f(x) > 0\ (\forall)x\in[0,1]$. În plus f continuă pe [0,1], deci aria cerută este:

$$\int_0^1 f(x)dx=\left(e^x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=e-\frac{1}{2}-1=e-\frac{3}{2};$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$ (am aplicat de două ori l'Hospital).

SUBIECTUL III

a) $0 = 0 + 0\sqrt{2}$; $1 = 1 + 0\sqrt{2}$; $\varpi = 1 + 1\sqrt{2}$ şi $\overline{\varpi} = 1 + (-1)\sqrt{2}$ deci $0,1,\varpi,\overline{\varpi}\in$ H.

b) Se verifică prin calcul direct;

c) Fie z = $a + b\sqrt{2}$ si y = $c + d\sqrt{2}$ cu a,b,c,d$\in$ Z. Atunci x + y = (a + c) + (b + d) $\sqrt{2}$, deci z + y$\in$ H si
z·y = ac + 2bd+$\sqrt{2}$ (ad + bc) deci z·y$\in$ H;

d) Se verifică prin calcul direct;

e) Rezultă din d)

f) Deoarece $\varpi \in G$, rezultă $\varpi \cdot \varpi = \varpi^2 \in G$ şi inductiv obţinem că $\varpi^n \in G, (\forall) n \in N^*$. Atunci $\{\varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^{2006}\} \subset G$ si $\varpi^i \neq \varpi^j, \forall i \neq j$. Deci mulțimea G conține cel puțin 2006 elemente.

g) $\varpi^{2007} = (1+\sqrt{2})^{2007} = C_{2007}^0 + C_{2007}^2 \cdot 2 + C_{2007}^4 \cdot 2^2 + \dots + C_{2007}^{2006} \cdot 2^{1003} + \sqrt{2}\left(C_{2007}^1 + C_{2007}^3 \cdot 2 + \dots + C_{2007}^{2007} \cdot 2^{1003}\right) =$
$= a + b\sqrt{2}$ şi cum b>0, deci b$\neq$0, rezultă că $\varpi^{2007} \notin Q$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}, (\forall) x > 0$;

b) $\displaystyle\int_1^2 f^2(x)dx = \int_1^2 e^{2x}dx = \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^2\right) = \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)$

c) $\displaystyle\int_1^2 g^2(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

d) Deoarece g continuă pe $(0,\infty)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty$ rezultă că singura asimptota verticala este $x=0$;

e) $t^2 e^{2x} - 2t\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(t \cdot e^x - \dfrac{1}{x}\right)^2 \geq 0$ da, $(\forall) t \in R, (\forall) x > 0$;

f) Din e) am $t^2 e^{2x} - 2t\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(t \cdot e^x - \dfrac{1}{x}\right)^2 \geq 0 \ (\forall) t \in R, (\forall) x > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_1^2 \left(t^2 e^{2x} - 2t\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx \geq 0 \Rightarrow$

$\displaystyle t^2\int_1^2 e^{2x}dx - 2t\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \geq 0, (\forall) t \in R$;

g) Notând $A = \displaystyle\int_1^2 e^{2x}dx$, $B = -2\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx$ şi $C = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$, evident A>0 şi folosind f) am $At^2 + Bt + C \geq 0 (\forall) t \in R$

$\Leftrightarrow \Delta_t \leq 0 \Leftrightarrow B^2 - 4AC \leq 0 \Leftrightarrow B^2 \leq 4BC$ adică tocmai inegalitatea cerută.