Varianta 037

SUBIECTUL I

a) $AB = 5$.

b) $\sin\left(\widehat{OAB}\right) = \frac{4}{5}$.

c) Triunghiul OAB este dreptunghic în *O*. Aria triunghiului este 6

d) $|3-i|^2 = 10$.

e). $d(O, AB) = \frac{12}{5}$.

f) $z = 1 + 2i$.

SUBIECTUL II

1.

a) $r = 54$

b) Cum $g(-3) = 0$ rezultă $\prod_{k=-10}^{10} g(k) = 0$.

c) $x_1 + x_2 = -3$.

d) $x_1^2 + x_2^2 = -9$.

e) $p = \frac{1}{3}$.

2.

a) $f'(x) = 2 - \sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

c) Cum $\sin x \in [-1, 1]$, obținem $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deci f este strict crescătoare pe **R**, de unde rezultă că f nu are puncte de extrem.

d) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(1) = 2$.

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \left(x^2 + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = b = c = 0$ avem $O_2 \in \mathbf{C}$. Pentru $a = c = 1$ şi $b = 0$ avem $I_2 \in \mathbf{C}$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$. Atunci ${}^tA = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ şi $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2t \end{pmatrix} \in M$.

c) $\det(B)=\begin{vmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2t \end{vmatrix}=4xt-(y+z)^2$.

d) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\in M$. Atunci $A^2=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}\in M$, deoarece $a^2+b^2, b^2+c^2, ab+bc\in \mathbf{C}$.

e) Fie $Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\in M$ cu $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Egalitatea $P\cdot Q=O_2$ revine la $\begin{cases} 2a=3b \\ 2b=3c \end{cases}$, $a,b,c\in\mathbf{C}$. Există o infinitate de matrici $Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\in M$ pentru care $P\cdot Q=O_2$, se poate considera $Q=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

f) Considerăm $a=c=0$ şi $b=2007$, atunci $C=\begin{pmatrix} 0 & 2007 \\ 2007 & 0 \end{pmatrix}\in M$ şi $\det(C)=-2007^2$.

g) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\in M$ şi $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}\in M$, atunci egalitatea $X\cdot Y=I_2$ implică sistemul $\begin{cases} ax+by=1 \\ by+cz=1 \\ ay+bz=0 \\ bx+cy=0 \end{cases}$. Dacă se consideră $a=2$, $b=c=1$, se obține $x=1$, $y=-1$ şi $z=2$. Deci pentru matricele $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in M$ şi $Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\in M$ avem $X\cdot Y=I_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{x^2}{x-2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

b) $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$

c) Punctul $A(1,-1)$ este un punct al graficului funcției f. Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Rezultă $y=-3x+2$.

d) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=\infty$, deci f nu are asimptote orizontale. Avem $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=2$, de unde obţinem că dreapta $y=x+2$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

e) Deoarece $f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}>0$ pentru orice $x\in(2,\infty)$, rezultă că funcţia f este convexă pe $(2,\infty)$.

f) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}-4\ln 2$.

g) Pe intervalul $[3,4]$ funcţia f este descrescătoare, deci $f(3)=9\geq f(x)\geq 8=f(4)$ oricare ar fi $x\in[3,4]$. Prin integrare obţinem $8\int_3^4 dx\leq\int_3^4 f(x)dx\leq 9\int_3^4 dx$.