VARIANTA 029

SUBIECTUL I

a) BC = $\sqrt{3^2+4^2}=5$;

b) AC = $\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ AB = $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ şi cum AC^2 + AB^2 = BC^2 $\Rightarrow$ ABC dreptunghic în A

c) Fie h = d (A,BC); atunci σ[ABC]= $\frac{BC\cdot h}{2}\Rightarrow h=\frac{2\cdot 5}{5}=2$;

d) Formez sistemul $\begin{cases}1+3m+n=0\\5+m+n=0\end{cases}$ cu soluția $\begin{cases}m=2\\n=-7\end{cases}$

e) Paralelogramul cu un unghi drept este dreptunghi, deci este suficient BD = AC şi AB = CD; se obține sistemul

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b-5)^2=20\\(a-5)^2+(b-1)^2=5\end{cases} \text{ cu soluția } \begin{cases}a=\frac{32}{5}\\b=\frac{29}{5}\end{cases};$$

f) $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x\Leftrightarrow \cos^2 x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

SUBIECTUL II

1.

a) $5^{1+x^2}=25^x\Leftrightarrow 5^{1+x^2}=5^{2x}\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$

b) $C_5^3-C_5^2+C_5^5=C_5^3-C_5^3+1=1$

c) $\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\cdot 3)=\log_6 6=1\in N$

d) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=-2f(x)+7=4x-14+7=4x-7$ deci $(f\circ f)(3)=5$;

e) Notăm A=$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$; A^2 = $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi evident A^{2007} = $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2.

a) $f'(x)=2-\frac{2}{(x+2)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2-\frac{1}{9}=\frac{17}{9}$;

c) $\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2\ln(x+2)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+2\ln 3-2\ln 2=\frac{1}{2}+2\ln\frac{3}{2}$

d) m = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; n = $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=0$, deci dreapta y = x este asimptotă oblică către $+\infty$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nf(n)}{n^2+2007}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{2n}{n+2}}{n^2+2007}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+2n}{(n+2)(n^2+2007)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{2007}{n^2}\right)}=1$

SUBIECTUL III

a) $f(0)=i^{20}+(-i)^{20}=2$ pentru că $i^4=1$;

b) $a_{20}=1+i$, iar $a_0=2$

c) Se ştie că suma cerută este $f(1)$ adică $(1+i)^{20}+(1-i)^{20}=2^{20}\cdot i^{20}+(-2)^{20}\cdot i^{20}=2^{21}$;

d) $f(i)=(2i)^{20}=2^{20}\in R$

e) Restul împărțirii este $f(i)=2^{20}$

f) Fie $z\in C$ cu $f(z)=0 \Rightarrow (z+1)^{20}+(z-i)^{20}=0 \Rightarrow (|z+i|)^{20}=(|z-i|)^{20} \Rightarrow |z+i|=|z-i|$;

g) Fie $z=a+bi$, $a,b\in R$ rădăcină a lui f; folosind f) obțin $|z+i|=|z-i| \Rightarrow |a+(b+1)i|=|a+(b-1)i| \Rightarrow$
$a^2+(b+1)^2=a^2+(b-1)^2 \Rightarrow b=0$ adică $z=a\in R$;

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=2006(x+2)^{2005}-2006x^{2005}\ (\forall)x\in R = 2006\sum_{k=1}^{2005}x^{2005-k}\cdot 2^k\cdot C_{2005}^k$;

b) $f(-1-x)+f(-1+x)=(1-x)^{2006}-(1+x)^{2006}+(1+x)^{2006}-(-1+x)^{2006}=0,\ (\forall)\ x\in R$;

c) Cum $f'(x)=2006\left((x+2)^{2005}-x^{2005}\right)>0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe R.

d) Deoarece f este strict crescătoare pe R $\Rightarrow f$ injectivă $\Rightarrow$ ecuația $f(x)=0$ are cel mult o soluție şi cum $f(-1)=0$ rezultă $x=-1$ soluție unică;

e) $\int_{-3}^{1} f(x)dx=\int_{-3}^{1}\left((x+2)^{2006}-x^{2006}\right)dx=\left(\frac{(x+2)^{2007}}{2007}-\frac{x^{2007}}{2007}\right)\Bigg|_{-3}^{1}=0$

f) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left((x+2)^{2006}-x^{2006}\right)=\left(C_{2006}^1\cdot 2\right)(+\infty)=+\infty$;

g) $f''(x)=2006\cdot 2005[(x+2)^{2004}-x^{2004}]$, am $f''(x)>0 \Leftrightarrow (x+2)^{2004}>x^{2004} \Leftrightarrow (x+2)^2>x^2 \Leftrightarrow 4(x+1)>0 \Leftrightarrow$
$x>-1$ Deci f este convexă pe $[-1,\infty]$ şi concavă pe $(-\infty,-1]$