Varianta 055

SUBIECTUL I

a) $2\sqrt{2}$. b) $2\sqrt{2}$. c) $(x-1)^2+(y-2)^2=8$. d) Din $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow A,B,C$ sunt coliniare. e) 0 . f) Egalitatea devine $3+4i=a+bi \Rightarrow a=3, b=14$.

SUBIECTUL II

1.

a) Dacă $a=4, b=27$ avem $\sqrt{4}+\sqrt[3]{27}=2+3=5\in \mathbf{Z}$.

b) $f=X^2-6X+7$.

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\det(A)=0 \Rightarrow \text{rang}(A)=1$ şi

$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\det(B)=0, \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rang}(B)=2$. d) $x=4$.

e) $f(x)=x$.

2.

a) $A=\dfrac{5}{13}>B=\dfrac{3}{31}$.

b) $a_n=n^2+n+1=21 \Rightarrow n=4$.

c) Se poate considera numărul natural 2, deoarece ecuația $n^2+n+1=2$ nu are rădăcinile numere naturale.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=2$. e) $a_{n+1}-a_n=2n+2>0, \forall n\geq 1 \Rightarrow$ şirul este strict crescător.

SUBIECTUL III

a) $A=4, B=9$. b) $a=9, b=7$.

c)

$\circ$	**2**	**4**	**6**	**8**
2	**4**	**8**	**2**	**6**
4	**8**	**6**	**4**	**2**
6	**2**	**4**	**6**	**8**
8	**6**	**2**	**8**	**4**

Elementul neutru este $e=6$.

d) $y=2$.

e) Asociativitatea se verifică, comutativitatea se vede din tabel, din simetria față de diagonala principală, $e=6$ iar pentru elementele simetrizabile avem

$$x=2\Rightarrow x'=8$$
$$x=4\Rightarrow x'=4$$
$$x=6\Rightarrow x'=6$$
$$x=8\Rightarrow x'=2$$

Deci $(G,\circ)$ este grup abelian.

f) Nu există x astfel încât $x\circ x=2$ deoarece ultima cifră a pătratului unui număr natural nu poate fi 2 .

g) Folosind ultima cifră a puterilor lui 2 se arată că $2^{2n+1}\circ 2^{2n+1}=4$, oricare ar fi $n\geq 1$, Deci $2\circ 2=4; 2^3\circ 2^3=4; 2^5\circ 2^5=4;....; 2^{4013}\circ 2^{4013}=4$ şi astfel există cel puțin 2007 numere cu proprietatea cerută.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=4x^3-4$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+x+1)=0$ cu soluția $x=1$. Cum $f'(x)>0$ pentru $x>1$ şi $f'(x)<0$ pentru $x<1$, rezultă că $x=1$ este punct de extrem local.

c) $f(x)\geq 2x(x-2) \Leftrightarrow x^4-2x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2\geq 0$ inegalitate adevărată pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

d) $f''(x)=12x^2\geq 0$, deci funcția f este convexă pe **R**.

e) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\frac{e^4-16e+19}{4}$.

f) Notăm $x^4-4x+1=t$. Pentru valoarea $x=e$, obținem e^4-4e+1 pe care o notăm cu m. Avem $\int_2^e \frac{x^3-1}{f(x)}dx=\frac{1}{4}\int_9^m \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln\frac{e^4-4e+1}{9}$.

g) Din c) avem $f(x)\geq 2x(x-2), x\in[e,e^2] \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{2x(x-2)} \Leftrightarrow \frac{x-2}{f(x)}\leq\frac{1}{2x}$ şi integrând pe intervalul $[e,e^2]$, obținem $\int_e^{e^2}\frac{x-2}{f(x)}dx\leq\int_e^{e^2}\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}$.