Varianta 065

SUBIECTUL I

a) 5. b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A, B, C$ coliniare. c) $a = 1, b = 2$. d) $\sin A = \dfrac{1}{2}$.

e) $\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. f) Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\dfrac{5}{2}$.b) $a = 0$.

c) $(a * b) * c = \dfrac{2a + 3b}{2} * c = \dfrac{2a + 3b + 3c}{4}$ şi $a * (b * c) = \dfrac{4a + 6b + 9c}{4}$. Egalând cele două relații obținem: $4a + 6b + 6c = 4a + 6b + 9c \Leftrightarrow c = 0$.

d) $2^x * 2^x = 10 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x = 20 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. e) Ecuația devine $\log_2 y = 4 \Leftrightarrow y = 16$.

2.

a) Rezultatul este 0 pentru că $f(1) = 0$. b) $f'(-2) + f'(2) = -2 + 2 = 0$.

c) $x \in \{-1, 3\}$. d) 1. e) 1.

SUBIECTUL III

a) $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \det A(2) = 4 \Rightarrow \operatorname{rang} A(2) = 3$.

b) $B = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A(1)$. Presupunem $B^k = 3^{k-1} \cdot B$ şi arătăm că $B^{k+1} = 3^k \cdot B$, folosind inducția matematică.

c) Avem $A(-2), A(-1), A(0), A(1), A(2)$, deci sunt 5 elemente.

d) Fie $A(x), A(y) \in H$. Atunci

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + 2 & x + y + 1 & x + y + 1 \\ x + y + 1 & xy + 2 & x + y + 1 \\ x + y + 1 & x + y + 1 & xy + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A(-2)\cdot A(-2)=\begin{pmatrix}6 & -5 & -5\\ -5 & 6 & -5\\ -5 & -5 & 6\end{pmatrix}\notin H\ ;\ A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=A(1)\in H\ .$$

e) $\det A(x)=\begin{vmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{vmatrix}=x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)\in\{0,2,4\}$.

f) Avem
$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$,
sunt 6 termeni. Din $\det(A)$=impar obținem că cel puțin un termen din sumă este impar şi deci cel puțin 3 elemente din matrice impare $\Rightarrow$ cel puțin 3 elemente egale cu 1 sau -1.

g) Din $\det(A)=$ impar obținem cel puțin un termen din sumă este par şi cel puțin un element din matrice este par.

SUBIECTUL IV

a) $x=0$ este asimptotă verticală, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală.

b) Cum $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^4}=\dfrac{-2}{x^3}<0$ pentru $\forall x\in(0,\infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. c) $\dfrac{1}{2}$.

d) Deaorece f este descrescătoare şi $2<e<3$, rezultă $\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{e^2}<\dfrac{1}{4}$. Deoarece f este descrescătoare şi $3<\pi<4$, rezultă $\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{\pi^2}<\dfrac{1}{9}$. Prin adunarea celor două inegalități se obține $\dfrac{25}{144}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{\pi^2}<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{13}{36}=\dfrac{52}{144}$.

e) $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\Leftrightarrow (k-1)<k^2-k(k-1)\Leftrightarrow k-1<k \Leftrightarrow -1<0$ adevărată pentru orice $k\geq 2$.

f) Folosind f) avem $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-...+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}=2-\dfrac{1}{n}<2$ pentru orice $n\geq 1$. Atunci $a_1=1$ şi $a_n<2$, $\forall n\geq 2$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

g)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]-\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right]\right\}=$$

$$\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{3\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}.$$