Varianta 088

SUBIECTUL I

a) 1. b) $\sqrt{2}$. c) $P = i^{36} = 1$. d) $a = -1, b = 3$ .e) $S = \dfrac{3}{2}$. f) $a = 0, b = 1$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{3}^{2006} = \left(\hat{3}^{2}\right)^{1003} = \hat{1}$. b) $E = 1$. c) $x = 5^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$. d) $2^{6x} = 2^{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{6}$. e) $p = \dfrac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 7x^{6} + 2, x \in \mathbf{R}$. b) $\dfrac{1}{8}$. c) 2.

d) $f'(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ .e) $\dfrac{2}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = -1$. b) $A^{2} = I_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^{2} = I_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. d) $A^{-1} = A$.

e) Fie $U, V \in C(A)$. Atunci $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$, deci $UV \in C(A)$.

f) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in C(A)$. Atunci

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y & x \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ x & y \end{pmatrix}$, de unde $t = x, z = y$, adică

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$. Considerăm $a = x, b = y \in \mathbf{C}$.

g) Se arată că $X \in C(A), X^{2} = O_{2} \Rightarrow X = O_{2}$. Din $Y^{2007} = O_{2} \Rightarrow Y^{2008} = O_{2}$ și notând $Z = Y^{1004} \Rightarrow Z^{2} = O_{2}, etc.$

SUBIECTUL IV

a) $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$, rezultă

$f(x + 2\pi) = 2 + \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = f(x), x \in \mathbf{R}$. b) $f(0) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

c) $2 - \dfrac{\pi}{2} \le f(x) \le 2 + \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) Pentru şirul $x_n = 2n\pi, n \in \mathbf{N}$, avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$, iar pentru şirul $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{N}$, avem că $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 2 + \frac{\pi}{4}$. Atunci nu există $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

e) Deoarece $F'(x) = f(x) \geq 2 - \frac{\pi}{2} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, rezultă că funcția *F* este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

f) Pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $\arcsin(\sin x) = x \Rightarrow f(x) = 2 + x.$ Cum $F(0) = 0$, vom avea $F(x) = \int_0^x (2+t)\,dt = 2x + \frac{x^2}{2}.$

g) Utilizând c), avem că $f(x) \geq 2 - \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$, deci

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \geq \int_0^x \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) dt = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)x, \forall x \geq 0.$ $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.