Varianta 043

SUBIECTUL I

a) *Soluția* 1. Ecuația dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. După calcularea determinantului se obține $x + y - 2 = 0$, deci $a = b = 1$.

Soluția 2. Dacă $A(1,1)$ este situat pe dreapta $ax + by - 2 = 0$, atunci $a + b = 2$. Dacă $B(2,0)$ este situat pe dreapta $ax + by - 2 = 0$, atunci $2a = 2$. Se obține sistemul $\begin{cases} a + b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$ cu soluția $a = b = 1$.

b) *Soluția* 1. Dacă $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x = \frac{\pi}{6}$ şi $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Soluția 2. Folosim formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbf{R}$.

c) Aria triunghiului ABC este $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = 12$.

d) $\overline{z} = -2 - 2i$.

e) $|z| = \sqrt{2}$

f) $y = x + 3$.

SUBIECTUL II

1.

a) $A_4^2 = 12$.

b) Progresia are rația $r = -2$. Avem $a_{10} = a_1 + 9r = -17$.

c) *Soluția* 1. Dacă ținem cont de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \le k \le n$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $C_9^2 + C_9^7 = 2 \cdot C_9^2 = 72$.

Soluția 2. $C_9^2 + C_9^7 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2} = 72$

d) $f(1+i) = (1+i)^2 - 2(1+i) = -2$.

e) Numerele care verifică inegalitatea sunt $\{-2, -1\}$. Probabilitatea cerută este $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

2.

a) $f'(x)=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$, $x>0$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(x)}{x-1}=f'(1)=\frac{2e}{9}$.

c) Deoarece $f'(x)>0$ oricare ar fi $x>0$, funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ şi atunci funcția f nu are puncte de extrem.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ne^n}{n+2}=\infty$.

e) $\int_0^1 f(x)\cdot(x+2)\,dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$.

SUBIECTUL III

a) Egalitatea $A_x=A_y$ este echivalentă cu $A_x-A_y=O_2$, adică $\begin{pmatrix}0 & x-y\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ceea ce este echivalent cu $x=y$.

b) Avem $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$ deoarece $x+y\in\mathbf{Z}$ pentru orice $x,y\in\mathbf{Z}$.

c) Egalitatea $A_x\cdot A_e=A_x$ revine la $x+e=x$, deci $e=0$. Atunci $A_e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$.

d)) Egalitatea $A_x\cdot A_a=A_e$ revine la $x+a=0$, deci $a=-x$. Atunci $A_a=\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$.

e) Avem $A_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Se arată prin inducție matematică că $(A_2)^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

f) Din a) rezultă injectivitatea funcției f. Pentru orice număr întreg x există matricea $A_x\in M$ pentru care $f(A_x)=x$, deci f este surjectivă. Atunci funcția f este bijectivă. În plus, $f(A_x\cdot A_y)=f(A_{x+y})=x+y=f(A_x)+f(A_y)$ oricare ar fi $A_x, A_y\in M$.

g) Se demonstrează, folosind metoda inducției matematice, că $(A_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\sum_{k=1}^{2007} (A_1)^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{2007} 1 & \sum_{k=1}^{2007} k \\ 0 & \sum_{k=1}^{2007} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007 & \sum_{k=1}^{2007} k \\ 0 & 2007 \end{pmatrix}$. Rezultă $\det(A_1 + A_1^2 + A_1^3 + ... + A_1^{2007}) = 2007^2$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^{-x}(-2x-1)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1 = -\frac{1}{2}$. Deoarece $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ rezultă că f este descrescătoare pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, iar din faptul că $f'(x) > 0$ pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ rezultă că f este crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

c) Aplicând regula lui l'Hospital, avem $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{e^x} = 0$, deci $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

d) $\int f(x)dx = -\frac{2x+5}{e^x} + C, \quad C \in \mathbf{R}$.

e) $\int_0^a f(x)dx = 5 - \frac{2a+5}{e^a}$.

f) Folosind faptul că $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$, obținem că $\lim_{a\to\infty} S(a) = 5$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x} \cdot \frac{1}{e^x} = 0$.