Varianta79

SUBIECTUL I

a) Coordonatele punctlui M verifică ecuația dreptei, deci $a+2b-5=0 \Leftrightarrow a+2b=5$.

b) Ecuația se scrie $(x-0)^2+(y-1)^2=1^2 \Rightarrow r=1$. c) $AB=5$ .d)0. e) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .f) -1.

SUBIECTUL II

1.

a) Avem $\left(\hat{7}\right)^{-1}=\hat{7}$, deoarece $\hat{7}\cdot\hat{7}=\hat{1}$ în $\mathbf{Z}_{12}$. b) Suma cerută este $\hat{5}$. c) $\frac{3}{5}$. d) 4.

e) Numărul cerut este $3\cdot 2=6$.

2.

a) $f'(x)=\cos x-2\sin x, x\in\mathbf{R}$.

b) $f''(x)=-\sin x-2\cos x$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Deci , prin însumare se obține relația cerută.

c) $2\sin 1-\cos 1+1$.

d) Avem $\frac{f(x)}{x}=f(x)\cdot\frac{1}{x}$. Acesta este produsul dintre funcția *f* mărginită și funcția $\frac{1}{x}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Deci limita este 0. e) $\frac{1}{7}$.

SUBIECTUL III

a) $x,y\in\mathbf{R}\Rightarrow 2(x-1)(y-1)+1=2xy-2x-2y+2+1=x\circ y$.

b) $x,y,z\in\mathbf{R}\Rightarrow (x\circ y)\circ z=2(x\circ y-1)(z-1)+1=4(x-1)(y-1)(z-1)+1$

și analog $x\circ(y\circ z)=4(x-1)(y-1)(z-1)$, de unde rezultă că legea este asociativă.

c) Folosind a), avem că $x\circ 1=1=1\circ x, \forall x\in\mathbf{R}$.

d) Folosind rezultatul de la a) obținem *x*=2.

e) Utilizând eventual a), ecuația devine $8(x-1)^4+1=1\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

f) Fie P(n) egalitatea de demonstrat. P(1) devine $x_1=x_1-1+1$, adevărată. Presupunem că afirmația P(k) este adevărată și demonstrăm că P(k+1) este adevărată. Deoarece $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_k\circ x_{k+1}=2(A-1)(x_{k+1}-1)+1=2\cdot 2^{k-1}\cdot(x_1-1)\ldots(x_k-1)(x_{k+1}-1)$, avem că și P(k+1) este adevărată.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}, \forall x>0$. b) $f(e)=0, f'(e)=0$.

c) Din a) avem că $f'<0$ pe $(0,e)$ și $f'>0$ pe (e,∞).

d) $x=e$ este punct de minim global, deci $f(x)\geq f(e), \forall x\in(0,\infty)$.

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-e\cdot\frac{\ln x}{x}\right)=1-e\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=1$, utilizând eventual regula lui Hospital.

f) Utilizând d), pentru $\forall x>0\Rightarrow f\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge e\ln x\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)\ge \ln\left(x^{e}\right)\Leftrightarrow e^{x}\ge x^{e}$.

g) Integrând inegalitatea de la punctul anterior se obține cerința.