Varianta 004

SUBIECTUL I

a) $\vec{AB}(-4,-2)$. b) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5}$. c) $\left(\frac{1}{2},3\right)$. d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. e) $2y - x - 3 = 0$.

f) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) -3,-2,-1,0,1,2,3. b) $n = 3$. c) $a = 3$. d) $x = 6$. e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x) = x^2$ sau $f(x) = x^4$ sau $f(x) = |x|$ sau …

2.

a) $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x,\ x \in \mathbf{R}$. b) Funcția nu are puncte de extrem local fiind strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, deci mulțimea cerută este $\varnothing$. c) $f''(x) = \left(x^2+4x+3\right)e^x$, $x_1 = -1$ și $x_2 = -3$. d) $y = 0$ asimptotă orizontală. e) $\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL III

a) Avem $(A - I_2)(B - I_2) + I_2 = AB - A - B + I_2 + I_2 = A * B,\ \forall\ A,B \in M_2(\mathbf{R})$

b) $A*(2I_2) = (A - I_2)I_2 + I_2 = A = 2I_2 * A,\ \forall\ A \in M_2(\mathbf{R}), 2I_2 \in M_2(\mathbf{R})$, deci $2I_2$ este element neutru.

c) $\forall\ A,B,C \in M_2(\mathbf{R})$, avem

$(A*B)*C = X*C = (X - I_2)(C - I_2) + I_2 \overset{a)}{=} (A - I_2)(B - I_2)(C - I_2)$ și

$A*(B*C) = A*Y \overset{a)}{=} (A - I_2)(Y - I_2) \overset{a)}{=} (A - I_2)(B - I_2)(C - I_2)$, de unde deducem că legea “$*$” este asociativă pe $M_2(\mathbf{R})$.

d) Dacă $A,B \in H$, atunci matricele $A - I_2$ și $B - I_2$ sunt inversabile. Cum $A*B \in M_2(\mathbf{R})$, $\det(A*B - I_2) \overset{a)}{=} \det\left((A - I_2)(B - I_2)\right) = \det(A - I_2)\det(B - I_2) \neq 0$, deducem că $A*B \in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu legea ”*”.

e) Din d) rezultă că H este parte stabilă în raport cu legea “$*$”. Asociativitatea rezultă din $H \subset M_2(\mathbf{R})$ și c). Elementul neutru este $E = 2I_2 \in H$. Simetrizabilitatea: $\forall A \in H$, relația $A*A' = A'*A = E \Leftrightarrow (A - I_2)(A' - I_2) = I_2 = (A' - I_2)(A - I_2)$, deci

$A' - I_2 \in M_2(\mathbf{R})$ este inversa matricei $A - I_2 \in M_2(\mathbf{R})$ şi din $\det\left((A - I_2)(A' - I_2)\right) = \det(I_2) \Rightarrow \det(A' - I_2) = 1$, deci $A' \in H$.

f) Dacă $X, Y \in H$, atunci $f(X * Y) = f\left((X - I_2)(Y - I_2) + I_2\right) = f(X) \cdot f(Y)$.

g) Fie $(G, \cdot)$ grupul multiplicative al matricelor pătratice inversabile de ordinal doi. Atunci funcția $f : H \to G,\ f(X) = X - I_2$ este corect definită, bijectivă, iar din f) rezulă că este morfism de grupuri.

SUBIECTUL IV

a) $x \in [0,1] \Rightarrow x \cdot \operatorname{arctg} x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset [0,1]$ şi $\ln(1 + x^2) \in [0, \ln 2] \subset [0,1]$.

b) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2},\ g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad x \in [0,1]$.

c) $(f - g)''(x) = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} \geq 0, x \in [0,1]$, deci $f - g$ este convexă.

d) Din c) avem că $(f - g)'$ este crescătoare pe $[0,1]$, deci

$(f - g)'(x) \geq (f - g)'(0), \forall x \in [0,1]$. Atunci $f - g$ este crescătoare pe $[0,1]$ şi $(f - g)(0) = 0$ implică $f \geq g$.

e) Funcția radical fiind crescătoare pe $[0, \infty)$, din a) şi d) rezultă inegalitatea de demonstrat.

f) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{4}$.

g) $\int_0^1 g(x)dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \ln 2 - 2(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{4} + \ln 2$.