Varianta 078

SUBIECTUL I

a) 5. b) 2. c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. d) $\operatorname{Re}(z)=4$. e) $\sqrt{77}$. f) $a=2, b=4$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=\left(\hat{5}\right)^{-1}\cdot\hat{4}=\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{5}$. b) 5. c) Dacă $\log_2 x=y$, atunci: $y^2=y \Leftrightarrow y\in\{0,1\}$, deci $x\in\{1,2\}$. d) x=1. e) $p=\frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}, x\in\mathbf{R}$. b) $1-\frac{\pi}{4}$. c) 0.

d) Din a) avem că $f'(x)>0, \forall x\in\mathbf{R}^*$ şi $f'(0)=0$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. e) 0.

SUBIECTUL III

a) $A^2=B^2=O_2$. b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B\neq B\cdot A$. c) rang(A)=1.

d) Din b) se obține $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, C^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$. e) $C\cdot C=I_2\Rightarrow C^{-1}=C$.

f) Folosind d) rezultă că $C^{2n}=I_2, C^{2n+1}=C, \forall n\in\mathbf{N}^*$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{2007}C^k=1003\cdot(C+I_2)+C=\begin{pmatrix}2007&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

g) Fie $X=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Atunci $AX=BY=O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{-1}{x(x+1)}, \forall x\in(0,\infty)$.

b) Din a) rezultă că $f'<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. c) 0.

d) 1. e) Integrând prin părți, obținem

$$\int_1^e f(x)dx=x\cdot f(x)\Big|_1^e-\int_1^e x\left(\frac{-1}{x(x+1)}\right)dx=e\left(\ln(e+1)-1\right)+\ln(x+1)\Big|_1^e$$

$$=e\ln(e+1)-e+\ln(e+1)-\ln 2.$$

f) $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

g) Avem că $x=1$ este soluție, deoarece $f(1)=\ln 2$. Folosind b), pentru $x\in(0,1)\Rightarrow x^2,x^3\in(0,1)$, deci $f(x)+f(x^2)+f(x^3)>f(1)+f(1)+f(1)=3\ln 2$, deci nu avem soluție. Dacă $x>1\Rightarrow x,x^2\in(1,\infty)$ şi $f(x)+f(x^2)+f(x^3)<3\ln 2$, deci nu avem soluție. Deci unica soluție a ecuației este $x=1$.