Varianta 064

SUBIECTUL I

a) -1. b) 5. c) 1.

d) dreapta intersectează cercul într-un singur punct. e) Patru puncte. f) $6x-2y+1=0$.

SUBIECTUL II

1.

a) $b>a$. b) 56 de numere. c)trei numere întregi. d) Două numere întregi şi anume 3,4.

e) $f=X^3+7X^2-5X-2$, $f\neq 0 \Rightarrow x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{-2}{1}=2$.

2.

a) $f'(x)=\dfrac{6-2x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$. b) $x=\sqrt{3}$ şi $x=-3$.

c) $f\left(\sqrt{3}\right)< f(2)$ pentru că f este strict descrescătoare pe $\left[\sqrt{3},\infty\right)$; se poate dovedi şi prin calcul direct.

d) $y=0$ este ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$. e) $\ln\dfrac{4}{3}$.

SUBIECTUL III

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. b) $\det\left(A^n\right)=\left(\det(A)\right)^n=1^n=1\neq 0, \forall n\in\mathbf{N}^*$

c) $\det(A)=1\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}(A)=2$.

d) Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Din $A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow x=t=a$, $y=0, z=b$ şi atunci

$X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbf{R}$.

e) Se parcurg etapele inducţiei matematice, folosind:

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}^{n}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ nba^{n-1} & a^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n+1} & 0\\ ba^n(n+1) & a^{n+1}\end{pmatrix}.$$

f) $X^{n+1}=X^n\cdot X=A\cdot X$, dar $X^{n+1}=X\cdot X^n=X\cdot A$ şi atunci

$A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow X\in G$. g) $a=1, b=\dfrac{1}{2007}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(1)=1, g'(1)=1$.

b) Fie $d(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow d'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\geq 0,\forall x>0$, deci

$f'(x)\geq g'(x),\forall x>0$.

c)

x	0		1		∞
$d'(x)$	+ + + + + +	+	**0**	+ + + + + + + + + +	
$d(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	**0**	$\nearrow$	∞

Din tabel $\Rightarrow f(x)\geq g(x),\forall x\in[1,\infty)$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, am aplicat regula lui l'Hospital.

e) $\int_1^2 \ln x dx=2\ln 2-1$, am aplicat formula integrării prin părți.

f) Pentru că $f(x)\geq g(x),\forall x\in[1,2]$, avem $\int_1^2 f(x)dx\geq\int_1^2 g(x)dx$.

g) Din f) rezultă $2\ln 2+3\leq 4\ln 3\Leftrightarrow \ln 4+\ln e^3\leq \ln 3^4\Leftrightarrow 4\cdot e^3\leq 81$ şi cum e este un număr irațional, se obține $4\cdot e^3<81$.