Varianta 93

SUBIECTUL I

a) 1. b) $M(1,1)$. c) 0. d) $2\sqrt{3}y = 3(x+2)$.

d) $2\sqrt{3}y = 3(x+2)$. e) $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$. f) $a = 2$.

SUBIECTUL II

a) Funcția f este bijectivă și $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$. Inversa funcției f este funcția $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x-1}{2}$. b) $E = 20 - 15 + 1 = 6.$ c) De exemplu $k = 17$ (de fapt $k \in \{17,18,...,63\}$). d) Soluția este $x = 4$. e) $p = \frac{3}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbf{R}$. b) 3. c) $f'(0) = 2$.

d) $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. e) $-\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(X) = 2$. b) $\operatorname{rang}(X) = 2$.

c) Cum $\det(U) = 1 \neq 0$ rezultă U este inversabilă. Matricea U^{-1} se determină prin calcul sau se verifică faptul că $U^{-1} \cdot U = U \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Avem că $U \cdot A \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e) $a = -3, b = 1.$ f)

f) $(B^{-1} \cdot Z \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot W \cdot B) = ((B^{-1} \cdot Z \cdot B)B^{-1})(W \cdot B) = B^{-1} \cdot Z \cdot W \cdot B$, deci are loc egalitatea cerută.

g) $P = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, a, x \in \mathbf{R}$ verifică ecuația dorită.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}, \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Dacă $x \in [1, \ln(e+1)]$, atunci $x - 1 \geq 0$ și $1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\ln(e+1)}$, de unde obținem inegalitatea dorită.

c) Efectuând înmulțirea în inegalitatea de la b), obținem inegalitatea de demonstrat.
d) Din a) avem că $f'(x)>0$ pentru $x\in[0,1]$, deci f este crescătoare pe $[0,1]$.
Atunci $1=f(0)\le f(x)\le f(1)=\ln(e+1),\forall x\in[0,1]$ şi înlocuind în c) pe x cu $f(x)\in[1,\ln(e+1)]$, obținem inegalitatea de demonstrat.
e) Pentru $\forall u,v\in \mathbf{R}, (u+v)^2\ge 4uv \Leftrightarrow (u-v)^2\ge 0$, adevărată.
f) Din d) avem $\int_0^1\left(\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{\ln(e+1)}\right)dx\le\int_0^1\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}dx=\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$, şi utilizând proprietatea de liniaritate a integralei definite, găsim inegalitatea de demonstrat.
g) Luăm $u=\int_0^1 f(x)dx, v=\frac{1}{\ln(e+1)}\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$ în inegalitatea de la e) şi avem

$u\cdot\left(\frac{1}{\ln(e+1)}\cdot v\right)\overset{e)}{\le}\frac{1}{4}\cdot\left(u+\frac{1}{\ln(e+1)}\cdot v\right)^2\overset{f)}{\le}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}\right)^2$, de unde se obține inegalitatea cerută.