Varianta 099

SUBIECTUL I

a) 5.b) $AC=\sqrt{26}$ .c)0. d) $a=-\frac{1}{5}, b=-\frac{17}{5}$ .e) $S=\frac{9}{2}$. f) $a=\frac{60}{61}$ şi $b=-\frac{11}{61}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{2}^{2007}=\hat{2}^{3}\cdot\hat{2}^{2004}=\hat{0}$. b) $E=1$. c) $x=\sqrt{5}$ căci $x>0$. d) $4^{2x}=4^{3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. e) $p=\frac{3}{5}$.

2.

a) $f'(x)=ax^{8}+14x^{6}, x\in\mathbf{R}$. b) $\int_{0}^{1} f(x)dx=\left(\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{8}}{4}-x\right)\Big|_{0}^{1}=-\frac{13}{20}$. c) $f'(0)=0$.

d) Din a) avem că $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. e) $\frac{2}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $A+I_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=B$. b) $\det(B)=2,\quad \operatorname{rang}(B)=2.$

c) $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=A.$

d) Din c) se deduce că $A^n=A,\forall n\in\mathbf{N}^*$, deci $A^{2007}=A$.

e) Pentru $n=1, B=I_2+A$ este adevărată. Presupunem că $B^k=I_2+\left(2^k-1\right)A, k\in\mathbf{N}^*$. Atunci

$B^{k+1}=B^k\cdot B=\left(I_2+\left(2^k-1\right)A\right)\left(I_2+A\right)=I_2+A+\left(2^k-1\right)A+\left(2^k-1\right)A^2=I_2+\left(2^{k+1}-1\right)A$

deci afirmația este adevărată şi pentru $n=k+1$.

Rezultă că $B^n=I_2+\left(2^n-1\right)A$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

f) Pentru orice $a,b,c\in\mathbf{R}$, elementul de pe poziția $(1,2)$ din matricea $aA+bB+cI_2$ este 0, iar cel de pe aceeaşi poziție din matricea C este 2. Atunci, $aA+bB+cI_2\neq C$.

g) Din c) şi e) obținem $X=A+I_2+\left(2^n-1\right)A=I_2+2^n A=\begin{pmatrix}2^n+1&0\\2^n&1\end{pmatrix}$. Atunci

$\det(X)=2^n+1\neq 0$, de unde rezultă că matricea X este inversabilă.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=2x\cdot 2^{x^2}\cdot \ln 2, x\in \mathbf{R}$.

b) Dacă $x\in[1,2]$, atunci $x-1\geq 0$ şi $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2}$, de unde obținem inegalitatea dorită.

c) Efectuând înmulțirea la b), obținem $\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\leq\frac{3}{2}$, $x\in[1,2]$

d) Dacă $x\in[0,1]$, atunci $x^2\in[0,1]$, deci $f(x)\in[1,2]$ şi folosind c) obținem inegalitatea dorită.

e) Pentru $\forall u,v\in \mathbf{R}, (u+v)^2\geq 4uv \Leftrightarrow (u-v)^2\geq 0$, relație adevărată.

f) Din d) rezultă că $\int_0^1\left(\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{2}\right)dx\leq\int_0^1\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}$, şi folosind proprietatea de liniaritate a integralei definite, obținem inegalitatea cerută.

g) Fie $u=\int_0^1 f(x)dx\in[1,2]$ şi $v=\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$. Atunci avem

$v\cdot\left(\frac{1}{2}u\right)\overset{e)}{\leq}\frac{1}{4}\left(v+\frac{1}{2}u\right)^2\overset{f)}{\leq}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{16}$, de unde prin înmulțire cu 2, obținem inegalitatea cerută.