Varianta 007

SUBIECTUL I

a) $AB=5.$ b) $S=1.$ c) $(x-1)^2+(y-3)^2=25.$ d) 0. e) 0. f) 5.

SUBIECTUL II

1.

a) $x_1=1, \quad x_2=2.$ b) $p=\frac{3}{5}.$ c) $f(f(1))=f(0)=2.$ d) $k=1.$

e) $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)=x^2-\frac{1}{4}, \forall x\in \mathbf{R}.$

2.

a) $f'(x)=e^x(x+1),\ \forall x\in \mathbf{R}.$

b) $x=-1$ este punct de minim local, deci numărul cerut este 1.

c) $x=-2$ este punct de inflexiune, deci numărul cerut este 1.

d) $e-1$.

e) ∞.

SUBIECTUL III

a) $1=1+0\cdot\sqrt{2}$ şi $1,0\in \mathbf{Z}, 1^2-2\cdot 0^2=1$ rezultă $1\in M$.

$0=0+0\cdot\sqrt{2}$, dar $0^2-2\cdot 0^2\neq 1$ rezultă $0\notin M$.

b) $x,y\in M$, $x=a+b\sqrt{2}, a,b\in \mathbf{Z}, a^2-2b^2=1$ şi $y=c+d\sqrt{2}, c,d\in \mathbf{Z}, c^2-2d^2=1$.

Atunci $x\cdot y=ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$,

$ac+2bd, ad+bc\in \mathbf{Z}, (ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)=1.$

c) $x=a+b\sqrt{2}\in M$, $x\neq 0$ (din a)), $\frac{1}{x}=a+(-b)\sqrt{2}\in M$

d) Se verifică axiomele grupului.

e) $x=3+2\sqrt{2}.$

f) Pentru $n=1$ avem $x=a_1+b_1\sqrt{2}\Rightarrow a_1=a, b_1=b.$ Presupunem că

$x^k=a_k+b_k\sqrt{2}, a_k, b_k>1\Rightarrow x^{k+1}=x^k\cdot x=a\cdot a_k+2b\cdot b_k+(a\cdot b_k+b\cdot a_k)\sqrt{2}.$

Fie $a_{k+1}=a\cdot a_k+2b\cdot b_k, b_{k+1}=a\cdot b_k+b\cdot a_k$. Cum $a,b,a_k,b_k>1\Rightarrow a_{k+1},b_{k+1}>1.$

g) $x=3+2\sqrt{2}\in M$ şi din f) şi b) deducem că $x^n\in M$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$ şi $x<x^2<x^3<...<x^n<...,$ rezultă $A=\{x,x^2,...,x^n,...\}\subset M$ are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=-\ln x, \forall x\in(0,\infty).$

b) Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=1$ care este punct de maxim global pentru f, deci $f(x)\le f(1)=0$, $\forall x\in(0,\infty)$.

c) 2.

d) $\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}$.

e) $g'(x)=\frac{2x-(1+2x)\cdot\ln(1+2x)}{x^2\cdot(1+2x)}$.

f) Cu notația indicată, numărătorul de la $g'(x)$ devine exact $f(t)\le 0$, pentru orice $t>1$ (din $x>0$). Concluzia este imediată.

g) Din $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}$ și g este descrescătoare pe $(1,\infty)$, deducem $g(\sqrt{2})>g(\sqrt{3})$ de unde rezultă inegalitatea.

S.N.E.E.