Varianta 097

SUBIECTUL I

a) $AB=\sqrt{3}$. b) $\sqrt{3}$. c) 0. d) 1. e) $x_1=-2,\ x_2=1+\sqrt{3}\cdot i,\ x_3=1-\sqrt{3}\cdot i$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{3}^{-1}=\hat{2}$, căci $\hat{3}\cdot\hat{2}=\hat{1}$ în $\mathbf{Z}_5$. b) Suma cerută este 1. c) $n=2$. d) $x^2+1>0 \Leftrightarrow x\in\mathbf{R}$. e) $p=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$.

2.

a) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2},\ x\in\mathbf{R}^*$. b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-1$ .c) $y=0$ .d) 1.f)1.

SUBIECTUL III

a) $A\in M$ deoarece A are 3 linii, 3 coloane şi reuniunea elementelor matricei este mulțimea {1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
b) Cele 9 elemente pot fi aşezate pe cele 9 poziții în 9! moduri. Aşadar există 9! matrice.

c)0. d) Luăm $C=\begin{pmatrix}1&4&9\\2&6&5\\7&8&3\end{pmatrix}\in M$ şi avem $\det(C)=-140\neq 0$.

e) Presupunem că există $B\in M$ inversbilă astfel încât $B^{-1}\in M$. Fie $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_4&a_5&a_6\\a_7&a_8&a_9\end{pmatrix}$ şi $B^{-1}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_4&b_5&b_6\\b_7&b_8&b_9\end{pmatrix}$.

Deoarece $B\cdot B^{-1}=I_3$ rezultă că $b_1a_2+b_2a_5+b_3a_8=0$, adică o sumă de numere naturale nenule este egală cu 0, contradicție. Deci presupunerea este falsă.
f) Fie $D\in M$. Atunci $\operatorname{rang}(\mathrm{D})\le 3$. Fie d un minor de ordinal întâi care îl conține pe 7 $(d=|7|=7)$. Bordând pe d , obținem un determinant d' de ordinul 2 de forma: $\begin{vmatrix}7&a\\b&c\end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix}a&7\\b&c\end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix}a&b\\7&c\end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix}a&b\\c&7\end{vmatrix}$ cu a,b,c$\in\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$. Atunci $d_1\neq 0$ (altfel un multiplu de 7 ar fi egal cu un număr nedivizibil cu 7), deci $\operatorname{rang}(D)\ge 2$. Cum elementele din M sunt matrice de orin 3, rezultă $\operatorname{rang}(D)\in\{2,3\}$.
g) există cel puțin 12 matrice cu proprietatea cerută.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\ln(x+\dfrac{2}{3})-\ln x+\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{3}}-\dfrac{1}{x}\right)=\ln\left(x+\dfrac{2}{3}\right)-\ln x-\dfrac{2(3x+1)}{3x(3x+2)}\ \ ,x\in(0,\infty)$.

b) $f''(x)=\dfrac{4}{3x^2(3x+2)^2}$ $,x\in(0,\infty)$. c) Din b) rezultă că $f''(x)>0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, deci funcția f' este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. d) 0. e) $\int_1^e f'(x)dx=f(x)\Big|_1^e=f(e)-f(1)=\left(e+\dfrac{1}{3}\right)\left[\ln(e+\dfrac{1}{3})-1\right]-\dfrac{4}{3}\cdot\ln\dfrac{5}{3}$.

f) Din b) avem că $f''(x)>0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, deci f' este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ şi folosind d) obținem $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, de unde rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

g) Prin logaritmare, inegalitatea de demonstrat se transformă echivalent şi deoarece $f(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left[\ln\left(x\left(1+\frac{2}{3x}\right)\right)-\ln x\right]=\left(x+\frac{1}{3}\right)\ln\left(1+\frac{2}{3x}\right)$ şi f este descrescătoare pe $(0,\infty)$, avem că $f(n)>f(n+1), \forall n\in \mathbf{N}^*$, adică relația (1) este adevărată şi atunci inegalitatea cerută este demonstrată.