Varianta 083

SUBIECTUL I

a) -10. b) $S=4$. c) $AB=\sqrt{2}$. c) $G\left(0,\frac{7}{3}\right)$. e) $a=1, b=-1$. f) $\sin A\hat{B}C=1$.

SUBIECTUL II

1.

a) Convine $2x^2-1=7 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x\in\{-2,2\}$. b) $p=\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{x+3-x}{3x(x+3)}=\frac{1}{x(x+3)}, \forall x\in(0,\infty)$.

d) Utilizând c) avem

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{2004\cdot 2007}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+...+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2004}-\frac{1}{2007}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2007}\right)$$

e) $q=3$ și $b_1=2$.

2.

a) Limita cerută este $f'(1)=2007\cdot\ln 2007$.

b) $\int_1^2 2007^x\,dx=\left.\frac{2007^x}{\ln 2007}\right|_1^2=\frac{2007\cdot 2006}{\ln 2007}$.

c) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2007^{g(x)}=2007^{\log_{2007}x}=x, \forall x\in(0,\infty)$.

d) $f'(x)=2007^x\cdot\ln 2007, f''(x)=2007^x\cdot\ln^2 2007>0, \forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ este convexă pe $\mathbf{R}$, deci va fi convexă și pe $[0,\infty)$. e) Utilizând c), ecuația devine

$4x^3=x\Leftrightarrow x(4x^2-1)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. b) $\det(A)=1=\det(B)$.

c) $AB=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow AB-BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

e) Cum A este inversabilă, $A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

f) Prin calcul obținem $B^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B^3=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Prin inducție matematică se demonstrază că $B^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbf{N}^*$. Rezultă că

$$\det(Y)=\begin{vmatrix}2007 & 2+4+\ldots+2\cdot 2007\\ 0 & 2007\end{vmatrix}=2007^2.$$

g) Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, atunci $XA=BX \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2a-b & a\\ 2c-d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ c & d\end{pmatrix} \Leftrightarrow d=c$ şi

$b=a-2c$, deci $X=\begin{pmatrix}a & a-2c\\ c & c\end{pmatrix}$, $a,c\in\mathbf{C}$.

SUBIECTUL IV

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0.$

b) $f(x)-\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)=f(x)-\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=0, x\in\mathbf{R}\setminus\{1,3\}$.

c) Din b) avem $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}, x\in\mathbf{R}\setminus\{1,3\}$.

d) Din c) rezultă că $f'(x)<0$ pentru $x\in(3,\infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $(3,\infty)$.

e) Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{1,3\}$, și $f_d(1)=\infty, f_d(3)=\infty, f_s(1)=-\infty=f_s(3)$. Dreptele $x=1$ şi $x=3$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției f.

f) $\int_{2007}^{2008} f(x)dx=\int_{2007}^{2008}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)dx=\left(\ln(x-1)+\ln(x-3)\right)\Big|_{2007}^{2008}=\ln\frac{2007\cdot 2005}{2006\cdot 2004}.$

g) Utilizând b) avem

$$a_n=\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-3}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-3}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{n-3}\right)+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+2b_n-\frac{2}{n-2}-\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}.$$

Rezultă $a_n-2b_n=\frac{13}{6}-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}$, $n\ge 4$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=\frac{13}{6}$.