Varianta 82

SUBIECTUL I

a) 5. b) $A_2B_4: \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow 4x+2y-8=0.$ c) $2x+y-2=0$. d) 3. e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. f) 18 .

SUBIECTUL II

1.

a) Din $2a=1+3, 2b=3+5 \Rightarrow a=2, b=4 \Rightarrow a+b=6.$ b) $n+5=10 \Leftrightarrow n=5.$

c) $x=\hat{3}^{-1}\cdot\hat{4}=\hat{5}\cdot\hat{4}=\hat{6}.$ d) Există $2\cdot 3\cdot 3=18$ funcții.

e) Echipa se poate forma în $C_3^1\cdot C_4^2+C_3^2\cdot C_4^1=30$ moduri.

2.

a) $f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}=\frac{-x^2+2x-3}{x^4}, x\in(0,\infty).$

b) $y=0$ este asimptotă orizontală spre ∞, $x=0$ este asimptotă verticală la drepta.

c) Din a) rezultă că $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,\infty)$. Atunci f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. d) Utilizând c), din $0<\sqrt{3}<\sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{3})>f(\sqrt{5}) \Rightarrow a>b$ .e) $\ln 2-\frac{1}{8}$.

SUBIECTUL III

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&7&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}7&-2&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. b) $\det A=-1.$ c) rang(A)=3.

d) Calcul direct.

e) Din d) avem că $A\cdot A=I_3$, deci matricea A este inversabilă și $A=A^{-1}$.

f) Folosind d) avem că $A^{2n}=I_3, A^{2n+1}=A, n\in\mathbf{N}^*, \det(X)=-2007^2.$

g) $(AB)^2=\begin{pmatrix}7&16&0\\24&55&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Prin inducție matematică se demonstrează că

$(AB)^n=\begin{pmatrix}x_n&y_n&0\\z_n&t_n&0\\0&0&1\end{pmatrix}, x_n, y_n, z_n, t_n>0$, deci $(AB)^n\neq I_3.$

SUBIECTUL IV

a) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=f(x), \forall x\in[0,\infty).$

b) $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{-2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2}, \forall x\in[0,\infty).$

c) Utilizând a), limita cerută este 0. d) $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e) Din b) avem că $f'<0$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$.

f) $\ln\frac{4}{3}$.

g) $f(1)\le f(x)\le f(0), \forall x\in[0,1] \Rightarrow f(x)\le\frac{1}{2}, \forall x\in[0,1]$, deci

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)\cdot(x+2)}dx \le \int_0^1 x^3\cdot\frac{1}{2}dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^1 = \frac{1}{8}.$$