Varianta 067

SUBIECTUL I

a) 0. b) $\overline{z} = -i + 2$. c) $y = -x + 2$. d) $A(0,2), B\left(-1, \sqrt{3}\right)$. e) $a = b = 1$. f) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\det A = 6 - a$. b) $a = 1$. c) $\dfrac{3}{4}$. d) $a = 2$. e) $2a = 6 - a \Leftrightarrow a = 2$.

2.

a) $f'(x) = \cos x - 1$. b) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. c) 0. d) 1. e) $\dfrac{3}{2} - \cos 1$.

SUBIECTUL III

a) Verificare directă. b) $r = 2$.

c) Ecuațiile $h + g = (x-1)(x-2)^2$ şi $h - g = (x-1)(x-2)(x-4)$, admit rădăcinile comune $x_1 = 1, x_2 = 2$.

d) Dacă α este rădăcina comună, atunci $q_1(\alpha) = q_2(\alpha) = 0$ implică $(q_1 + q_2)(\alpha) = 0$, adică $q_1 + q_2$ are cel puțin rădăcina $\alpha, \alpha \in \mathbf{Z}$.

e) $g(a) = (a-1)(a-2), a \in \mathbf{Z}$. Cum $a-1, a-2$ sunt numere întregi consecutive, atunci unul dintre ele este număr întreg par, ceea ce implică $g(a)$ este număr par, $\forall a \in \mathbf{Z}$.

f) $P_3 = g \cdot (x - \alpha)$, adică $X^3 - a_3 \cdot X - b_3 = (X-1)(X-2)(X-\alpha)$. Punem valorile 1 şi 2 şi obținem $a_3 = 7$ şi $b_3 = -6$.

g) Dacă P_n divizibil cu g , există $\beta \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $X^n - a_n X - b_n = (X-1)(X-2) \cdot \beta$. Pentru valorile 1, respectiv 2 obținem sistemul de ecuații: $\begin{cases} 1 - a_n - b_n = 0 \\ 2^n - 2a_n - b_n = 0 \end{cases}$, care are soluție unică pentru orice $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ şi anume $a_n = 2^n - 1, b_n = 2 - 2^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

a) $f_1'(x) = 1 + \ln x$.

b) $x = \dfrac{1}{e}$ este punct de extrem local.

c) $f_1''(x)=\frac{1}{x}>0, \forall x\in(0,\infty)$, adică f_1 este convexă pe $(0,\infty)$. d) $\frac{2e^3+1}{9}$.

e) Deoarece $x^2\cdot\ln x\geq x\cdot\ln x, \forall x\in[1,e]$ avem $\int_1^e x^2\cdot\ln x dx\geq\int_1^e x\cdot\ln x dx$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-1}{n}}=1$, unde x_n este rădăcina strict pozitivă a ecuației

$x^{n-1}\cdot(n\ln x+1)=0$ şi anume $x_n=e^{-\frac{1}{n}}$.

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{n-1}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0$.