Varianta 031

SUBIECTUL I

a) $\left|\sqrt{15}-i\right|=4$.

b) $AC=\sqrt{5}$.

c) $S=-2i$.

d) Condiția ca punctele A, C să fie situate pe dreapta $x+ay+b=0$ implică sistemul $\begin{cases}3+12a+b=0\\4+14a+b=0\end{cases}$ cu soluția $a=-\frac{1}{2}$ şi $b=3$.

e) 4.

f) $a=\frac{1}{2}$ şi $b=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{4}^{2007}=\left(\hat{4}^{2}\right)^{1003}\cdot\hat{4}=\hat{0}$.

b) $C_{11}^{3}-C_{11}^{8}+C_{9}^{9}=1$.

c) $x=1$.

d) $x=2$.

e) Doar numerele 1,2,3 verifică inegalitatea $n^n<30$. Probailitatea este $\frac{3}{5}$.

2.

a) $f'(x)=7x^6+30x^4$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{47}{8}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$.

d) Cum $f'(x)\geq 0$, $x\in\mathbf{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe **R**.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+7}=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=0$ avem $X(0)=0\cdot A+I_2=I_2\in G$.

b) Prin calul direct se obține $A^2=\begin{pmatrix}3&3\\6&6\end{pmatrix}=3\cdot A$.

c) $X(a)\cdot X(0)=X(a)\cdot I_2=X(a)$ şi $X(0)\cdot X(a)=I_2\cdot X(a)=X(a)$

d) $X(a)\cdot X(b)=(a\cdot A+I_2)\cdot(b\cdot A+I_2)=abA^2+(a+b)A+I_2=X(3ab+a+b)$.

e) $\det(A)=0$ şi $\operatorname{rang}(A)=1$.

f) $\det(X(a))=\begin{vmatrix} a+1 & a \\ 2a & 2a+1 \end{vmatrix}=3a+1$.

g) Avem $X(a)\cdot X(b)=X\left(3\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(b+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\right)$ pentru orice $a,b\in\mathbf{R}$, de unde se observă că $X(a)\cdot X\left(-\frac{1}{3}\right)=X\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot X(a)=X\left(-\frac{1}{3}\right)$. Atunci

$$\left[X\left(\frac{-100}{3}\right)\cdot X\left(\frac{-99}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot X\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left[X(0)\cdot X\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{100}{3}\right)\right]=X\left(-\frac{1}{3}\right)$$

deci $t=-\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL IV

a) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, rezultă că dreapta $y=0$ este asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f .

b) $f'(x)=-\dfrac{x^2+2x}{(1+x+x^2)^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

c) $f(-2)=-\frac{1}{3}$, $f(0)=1$, $f'(-2)=0$ şi $f'(0)=0$.

d) *Soluția* 1. Avem tabelul de variație

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f'(x)$	- - - -	- - - -	0	+ + +	0	- - - -	- - -
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Rezultă $-\frac{1}{3}\le f(x)\le 1$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

Soluția 2. Avem $1+x+x^2>0$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$. Inegalitatea $f(x)\le 1$ revine la $0\le x^2$, care are loc pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Inegalitatea $-\frac{1}{3}\le f(x)$ revine la inegalitatea $(x+2)^2\ge 0$ care are loc pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Deci $-\frac{1}{3}\le f(x)\le 1$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

e) Se aplică regula lui l'Hospital şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}=1$.

f)

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{\ln 3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

g) $$\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x f(t)dt-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}-\ln x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$