Varianta 040

SUBIECTUL I

a) $\sin 1+\sin(-1)=\sin 1-\sin 1=0$.

b) Aria triunghiului este $\frac{AB\cdot AC\cdot \sin\hat{A}}{2}=20\sqrt{3}$.

c) $AB=\sqrt{2}$.

d) Condiția de paralelism implică $\frac{1}{\alpha}=\frac{-2}{4}$. Rezultă $\alpha=-2$.

e) Cum $i+i^5+i^{10}+i^{20}+i^{2007}=i$, partea reală este 0.

f) Avem $2^2+1^2=5$, deci punctul $A(2,1)$ aparține cercului $x^2+y^2=5$.

SUBIECTUL II

1.

a) $f(-1)+g(-1)=1$.

b) Avem $f=g(X-1)+4X+6$. Atunci $c=X-1$.

c) Suma rădăcinilor polinomului f este -1.

d) *Soluția* 1. Folosind relațiile lui Viete obținem
$$g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2(x_1+x_2+x_3)+2=-3.$$

Soluția 2. Rădăcinile lui f sunt $x_1=-1$, $x_2=2i$ și $x_3=-2i$. Prin înlocuire și efectuarea calculelor se obține $g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)=-3$.

e) Rădăcinile polinomului g sunt $x_1=-1+i$ și $x_2=-1-i$.

2.

a) $f'(x)=3x^2-4$, $x\in\mathbf{R}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=f'(2)=8$.

c) Ecuația dreptei tangente la graficul funcției este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$. Se obține $8x-y-16=0$.

d) Funcția f este continuă pe **R**, și avem $f''(x)=6x$, $x\in\mathbf{R}$. Aceasta implică $x=0$ unicul punct de inflexiune.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^3}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^3}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-4}}\right]^{-4}=\frac{1}{e^4}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = -1$ şi $\operatorname{rang}(A) = 2$.

b) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci

$$A^2 + AB + B = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_2.$$

c) *Soluția* 1. Deoarece $\det(A) \neq 0$ şi $A^2 = I_2$, matricea A este inversabilă şi $A^{-1} = A$. Atunci $X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluția 2. Dacă $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, atunci ecuația revine la sistemul $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -y = 1 \end{cases}$, care admite soluția $x = 3$ şi $y = -1$. Deci $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Condiția $AX = XA$ implică $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Se observă că $X = aI_2 + bB$.

e) Cum $A^2 = I_2$, avem $A + A^2 + ... + A^{2007} = 1004A + 1003I_2 = \begin{pmatrix} 2007 & 2008 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f) Avem $A - B + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Folosind principiul inducției matematice se arată că

$$(A - B + I_2)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

g) Dacă $X \in G$, atunci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Ecuația $\det(X) = 2007$ revine la $a(a-b) = 2007$. Pentru $a = 2007$ şi $b = 2006$ se obține $X = \begin{pmatrix} 2007 & 2006 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

b) $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$, $x > 0$.

c) Cum $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, avem că $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$. Deoarece $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$, rezultă că $x=0$ este asimptota verticală la dreapta. Continuitatea funcției f pe $(0,\infty)$, asigură faptul că nu mai există altă asimptotă.

d) Deoarece $f'(x)=-\frac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}<0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

e) Folosind a) obținem $\sum_{k=1}^{n} f(k)=1-\frac{1}{n+1}$ pentru orice $n\geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

f) $\int_1^2 f(x)\,dx=\ln\frac{4}{3}$.

g) Valoarea ariei considerate este $\int_1^2 f(x)\,dx=\ln\frac{4}{3}$.