

Varianta 063

SUBIECTUL I

- a) $|\vec{v}| = \sqrt{5}$. b) $9\sqrt{2}$. c) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. d) $B'(2, -1)$. e) Raza este 1.
f) Egalitatea devine $i = a + bi \Rightarrow a = 0, b = 1$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = 4$. b) 0. c) 2. d) $x = 1$ este soluția ecuației. e) $\frac{2}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = \cos x - 1$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} - \cos 1$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \cos 1 - 1$.
d) Deoarece $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$, avem $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict descrescătoare. e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (am aplicat regula lui l'Hospital).

SUBIECTUL III

- a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$.

c) Calcul direct.

d) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă. Din c) $\Rightarrow A^{-1} = A$.

e) Din c) $\Rightarrow A^{2k} = I_3$ și $A^{2k+1} = A, \forall k = \overline{1, 1003}$.

$$X = 1003 \cdot I_3 + 1004 \cdot A = \begin{pmatrix} 2007 & 0 & 0 \\ 1004 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2007 \end{pmatrix}, \det X = -2007^2.$$

f) Deoarece matricea A este inversabilă și inversa ei este unică, din ecuație, prin înmulțire la stânga cu A rezultă $Y = A^{-1}C = AC$, unică.

- g) $A \cdot B = I_3 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 \cdot D = D \cdot I_3 = D$.

$$(A \cdot B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k D^k \cdot I_3^{n-k} = I_3 + C_n^1 D + C_n^2 D^2 + \dots + C_n^n D^n \text{ și } D^n \text{ are elemente}$$

nenegative, mai mult $D^n \neq O_3, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Deci $(A \cdot B)^n \neq I_3, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 2008 \cdot [(x+4)^{2007} - x^{2007}]$. b) Calcul direct.

c) $x < x+4, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^{2007} < (x+4)^{2007}, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow (x+4)^{2007} - x^{2007} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$
deci $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, adică f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

d) Cum $f(-2) = 0$ și f strict crescătoare $\Rightarrow x = -2$ soluție unică.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2005}} = 2008 \cdot 4$. f) $\int_{-4}^0 f(x) dx = 0$.

g) Pentru $x \leq -2 \Rightarrow |x| \geq |x+4| \Rightarrow x^{2006} \geq (x+4)^{2006}$, adică

$$(x+4)^{2006} - x^{2006} \leq 0, \forall x \leq -2.$$

Pentru $x \geq -2 \Rightarrow |x| \leq |x+4| \Rightarrow (x+4)^{2006} - x^{2006} \geq 0, \forall x \geq -2$

și atunci f este concavă pe $(-\infty, -2]$, respectiv f este convexă pe $[-2, \infty)$.