

Varianta 092

SUBIECTUL I

- a) $|i^{2007}| = |-i| = 1$. b) $\operatorname{Re}(i^{2007}) = 0$. c) numărul este pozitiv. d) $S = 15\sqrt{2}$.
 e) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. f) $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x \in \{-4, 1\}$. b) $\operatorname{card}(A) = 3$. c) $x = 6$. d) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. e) $\hat{4}^{2007} = (\hat{4}^2)^{1003} \cdot \hat{4} = \hat{4}$.

2.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n} \right)^3 = 1$. b) $f'(x) = 3(x-2)^2, x \in \mathbf{R}$. c) 3. d) $x = 2$ punct de inflexiune. e) $-\frac{1}{10}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = 1$. b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. c) $\det(A) \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$. d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Dacă $U, V \in C(A)$, atunci

$$(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV), \text{ deci } UV \in C(A).$$

- f) Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in C(A)$, atunci $z = 0, t = x$, de unde rezultă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Putem considera $a = x, b = y \in \mathbf{C}$.

g) Dacă $Y \in C(A)$, atunci din f) avem $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, deci

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, Y^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}. \text{ Prin inducție matematică se arată că}$$

$$Y^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*. \text{ Atunci } Y^{2007} = O_2 \Rightarrow a = 0, \text{ deci } Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } Y^2 = O_2.$$

SUBIECTUL IV

- a) $F(x) = 1 + (t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) \Big|_0^x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6, x \in \mathbf{R}$.
 b) Rezultă imediat folosind a).

c) Utilizând a) avem:

$$(x-1)F(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^7 - 1, \forall x \in \mathbf{R}.$$

d) Avem $F(1) \stackrel{a)}{=} 7$, $F(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1}$. Pentru $x > 1 \Rightarrow x^7 > 1 \Rightarrow F(x) > 0$. Pentru

$x < 1 \Rightarrow x^7 < 1 \Rightarrow F(x) > 0$. Așadar $F(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

e) Din a) avem că $F(0) = F(-1) = 1$, deci $a = 0, b = -1$.

f) 6. g) $x = 0$.