

Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu

Neculai Stanciu Gabriel Leonard Tica

**DIN TAINELE NUMERELOR
FIBONACCI și LUCAS**

Editura

Craiova, 2013

D.M. Băținețu-Giurgiu, profesor la Colegiul Național ”MATEI BASARAB” din BUCUREȘTI

Neculai Stanciu, profesor la Școala ”GEORGE EMIL PALADE” din BUZĂU

Gabriel Leonard Tica, profesor la Liceul ” MIHAI VITEAZUL ” din BĂILEȘTI, județul DOLJ

*

*

*

INTRODUCERE

*”Matematician nu este cel ce știe matematică,
ci cel ce creează matematică”*

Grigore C. Moisil



Fibonacci

(1175 -1240)

Fibonacci a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu. S-a născut în Italia, în orașul Pisa, faimos pentru turnul său înclinat, care parcă stă să cadă. Tatăl său, *Bonacci Pisano*, a fost ofițer vamal în orașul Bougie din Africa de Nord, astfel că *Fibonacci* a crescut în mijlocul civilizației nord-africane. A cunoscut astfel mulți negustori arabi și indieni (deoarece a făcut multe călătorii pe coastele Mediteranei) de unde a deprins știința lor aritmetică, precum și scrierea cifrelor arabe.

În 1202 revine în Italia unde publică un tratat de aritmetică și algebră intitulat "*Incipit Liber Abacci*" (compositus a *Leonardo filius Bonacci Pisano*). În acest tratat introduce pentru prima dată în Europa sistemul de numerație arab, cifre pe care le folosim și în zilele noastre: 0,1, 2, 3,...,9.

În 1220 publică "*Practica Geometriae*", un compendiu de rezultate din geometrie și trigonometrie, apoi în 1225 "*Liber Quadratorum*" în care studia calculul radicalilor cubici. Cărțile lui *Fibonacci* au cunoscut o largă răspândire așa încât timp de peste două secole au fost considerate sursele cele mai competente în domeniul numerelor.

Pentru a înțelege mai bine situația din acele vremuri trebuie să aruncăm o privire pe matematica în Europa și în Orient.

Matematică arabă

Imperiul arab, odată cu apariția Islamului (sec VII), se extinde foarte repede cuprinzând Orientul Apropiat, o parte din Asia Mică și Centrală, ajungând până la Valea Indului, nordul Africii și Peninsula Iberică. Se ridică importante centre culturale ca: Bagdad, Samarkand, Buhara, Horezm, Damasc, Cordoba, Granada, Sevilla, Toledo, după ce în prealabil fusese distruse Ispahanul, Persepolis și Alexandria.

Matematica arabă este matematica creată sub dominația arabă, nu neaparat aparținând arabilor, deoarece puțini dintre matematicienii arabi erau de origine arabă dar, au asimilat foarte repede cultura Orientului precum și cea Elenă pe care le transmit în diverse părți ale imperiului. Primul mare matematician arab a fost

Al-Horezmi (780 – 850). Din opera sa se detașează "*Algebra*" structurată pe 4 capitole (Soluțiile ecuațiilor, Calculul dobânzilor, Geometria, Algebra testamentară). *Al-Horezmi* a fost primul matematician care a stabilit reguli pentru adunare, scădere, multiplicare și divizare cu noile numere arabe. De la el provine cuvântul *algoritm* (încercați să spuneți numele *Al-Horezmi* repede de câteva ori!). Într-un alt tratat "*Știința transpunerii și a reducerii*", specifică procesul manipulării ecuațiilor algebrice, "*al-jabr*", a ajuns la noi ca algebră.

Abu Kamil (900), născut în Egipt, este continuator a lui *Al-Horezmi*. În "*Cartea rarităților din aritmetică*" se ocupă cu rezolvarea în numere întregi a sistemelor liniare nedeterminate.

Abu Wafa (940 – 997) s-a ocupat cu geometria practică. În lucrarea sa "*Cartea perfectă*" expune bazele trigonometriei, inclusiv teorema sinusurilor. De asemenea rezolvă probleme de trigonometrie sferică, utilizând cu predilecție funcția cotangentă.

Al-Hazem (1000) prin "*Cartea opticii*" este un precursor al acestei științe. Tot el formulează axioma lui *Pasch* și încearcă demonstrarea postulatului V al lui *Euclid*.

Omar Al-Khayyam (1048 – 1123), este primul matematician care expune o teorie generală a ecuațiilor de gradul III. Recent a fost descoperit un memoriu al său asupra operei lui *Euclid*. *Omar Al-Khayyam*, conducătorul observatorului astronomic din

Ispahan, s-a ocupat și cu “*patrulaterul Saccheri*” (care, de drept ar trebui numit *patrulaterul lui Omar*), apoi a dat prima formulare a *axiomei lui Arhimede*. Era vestit și ca poet.

Al-Biruni (973 – 1048), persan de origine, este cel care în 1030 introduce cercul trigonometric. Tot el calculează lungimea meridianului terestru la 41.550 km.

Nassir ed Din al Tusi (1201 – 1274), conducătorul observatorului astronomic din Maraga, s-a ocupat cu teoria paralelelor. În “*Tratatul despre patrulaterul complet*” a făcut o expunere integrală a rezolvării triunghiurilor (plane și sferice).

Al-Kashi (1400), iranian de origine, în “*Cheia aritmeticii*” se ocupă cu formula binomului și cu extragerea de rădăcini. S-a ocupat intens și de calcule aproximative, iar în “*Tratatul despre circumferință*” din 1424, dă valoarea numărului π cu 16 zecimale exacte.

De aici, matematica și în general cultura arabă decade.

Matematica evului mediu.

Cruciadele (campanii pentru recucerirea locurilor sfinte), prilejuiesc stabilirea de legături cu cultura arabă musulmană (mai ales în Spania și Sicilia) precum și cu Bizanțul.

După ce Spania este recucerită de mauri, Toledo devine centru cultural de prestigiu. În acest moment încep traducerea din arabă. Printre primii traducători este englezul *Adelard de Bath* (1100) care, deghizat ca student mahomedan la Cardoba traduce din limba arabă “*Elementele*” lui *Euclid* și “*Algebra*” lui *Al-Horezmi*, iar din limba greacă, opera lui *Ptolemeu*. Din aceeași perioadă se remarcă și alți traducători ca: *Ioannes din Sevilla* și *Gerardo din Cremona* (1114 – 1187) care au tradus circa 80 de lucrări clasice din limba arabă. Ambii au lucrat la Toledo.

Secolele XII – XV reprezintă perioada de asimilare a matematicii antice și a celei orientale.

Leonardo da Pisa, este pe drept considerat **primul mare matematician original al Europei**. În numeroasele sale călătorii (Egipt, Siria, Grecia, Sicilia) ia contact cu cultura elenă și cea arabă.

Liber Abaci – o carte remarcabilă



Povestea numerelor apare în Italia în 1202, o dată cu apariția cărții *Liber Abaci*, scrisă de *Leonardo Pisano*, pe atunci în vârstă de 27 de ani. Cartea, are 15 capitole, și sunt scrise în întregime de mână, tiparul apărând 300 de ani mai târziu. *Leonardo*, a fost inspirat să scrie cartea după o vizită la Burgia, un oraș prosper Algerian, unde tatăl său era consul de Pisa. În acest timp, *Fibonacci* a învățat secretele sistemului de numere indo-arab, pe care arabii l-au introdus în Vest în timpul cruciadelor.

Cartea a atras numeroși adepți în rândul matematicienilor din Italia, precum și din restul Europei. *Liber Abaci*, a dezvăluit oamenilor o cu totul altă lume, unde numerele au înlocuit literele. *Fibonacci* începe cartea cu noțiuni despre identificarea numerelor, de la unități la cifra zecilor, a sutelor, a miilor etc. În ultimile capitole găsim calcule cu numere întregi și fracții, regulile proporțiilor, extrageri de rădăcini pătrate și de ordin superior, apoi se prezintă soluțiile ecuațiilor liniare și pătratice.

Liber Abaci era plină cu exemple practice: calcule de contabilitate financiară, calculul profitului, schimbul de bani, conversia greutateilor, calculul împrumutului cu dobândă (interzis în acel timp în diverse locuri ale lumii).

Deși era cunoscut în anul 1000, și deși *Liber Abaci* a explicat avantajele, sistemul de numărare, indo-arab, nu a prins la scară mare până aproape în 1500 e.n. Motivele au fost, în mare parte două. Primul ține de inerția umană și rezistența la schimbare a omului, pentru că învățarea unui sistem radical nou cere timp și de faptul că biserica catolică din acea perioadă considera cifrele arabe de origine păgână. Al doilea motiv este de natură practică, deoarece era mult mai ușor să se comită fraude. Era tentantă schimbarea lui 0 în 6 sau 9, iar 1 putea fi ușor înlocuit cu 4, 6, 7, sau 9 (de atunci europenii scriu 7 cu codiță!).

Deși noile numere au apărut în Italia, Florența a emis un edict în 1229 prin care interzicea bancherilor folosirea simbolurilor “infidele”. Ca rezultat, mulți dintre cei care voiau să învețe noul sistem se deghizau în musulmani.

Originea sistemului de numere

Putem aprecia succesul lui *Fibonacci* cu *Liber Abaci* doar dacă privim cum a evoluat societatea, din punctul de vedere al numerelor, până la el. Măsurarea și numărarea au apărut cu câteva zeci de mii de ani înaintea lui Hristos. Oamenii au înființat primele așezări pe malurile Tigrului și Eufratului, Nilului, Gangelui, Indului și Amazonului. Fluviile erau folosite pentru comerț și transport, iar aventurierii au descoperit mările și oceanele unde se vărsau apele. Călătoriile pe distanțe lungi cereau măsurarea timpului și calcule precise. Preoții erau de obicei astronomi, iar din astronomie a venit matematica.

În 450 î.e.n. grecii au inventat un sistem numeric alfabetic, care folosea cele 24 de litere ale alfabetului grecesc și alte trei litere, care mai târziu au dispărut. Fiecare număr de la 1 la 9 avea propria literă, la fel și multiplii de 10. Alfa, însemna 1, iar “ro” reprezenta 100. Astfel, 112 se scria “ro-deca-beta”. Acest sistem se putea folosi cu greutate pentru calcule. *Abacul*, era cel mai vechi aparat de numărat din istorie.

Un occidental, matematician din Alexandria, *Diofantus*, prin 250 e.n. a sugerat un sistem de numere comparative cu sistemul de litere. Remarcabilele sale invenții au fost ignorate vreme de 1500 de ani. Până la urmă, lucrarea sa a fost recunoscută cum se

cuvine și a jucat un rol important în algebra secolului al XVII-lea. Ecuațiile algebrice, de forma $ax + by = c$, se numesc “*ecuații diofantice*”.

Piesa centrală a sistemului indo-arab a fost inventarea lui “zero”, “*sunya*” la induși, “*cifr*” în arabă, “*tsfira*” în rusește – ceea ce înseamnă “număr”. Termenul provine de la “*cipher*”, ceea ce înseamnă “gol” și se referă la coloana goală de la *abac*.

Șirul lui *Fibonacci*

Fibonacci a rămas în memoria noastră prin șirul: 0, 1, 1, 2, 3, ... introdus în anul 1202, atunci matematicianul fiind sub numele de *Leonardo Pisano* (*Leonard din Pisa*). Mai târziu, matematicianul însuși și-a spus *Leonardus Filius Bonacii Pisanus* (*Leonard fiul lui Bonaccio Pisanul*). În secolul al XIV-lea șirul prezentat mai sus a fost denumit șirul lui *Fibonacci* prin contracția cuvintelor *filius Bonacii*. Acest șir apare pentru prima dată în cartea menționată mai sus “*Liber Abaci*” (“*Cartea despre abac*”), fiind utilizat în rezolvarea unei probleme de matematică.

Potrivit obiceiului din acea epocă, *Fibonacci* a participat la concursuri matematice (adevărate dispute publice) pentru cea mai bună și mai rapidă soluție a unor probleme grele (ceva în genul Olimpiadelor Naționale). Iscusița de care dădea dovadă în rezolvarea problemelor cu numere uimise pe toată lumea, astfel că reputația lui *Leonardo* a ajuns până la împăratul Germaniei, *Frederik al II-lea*. La un concurs prezidat de acest împărat una din probleme date spre rezolvare a fost: “să se găsească un pătrat perfect, care să rămână pătrat perfect dacă este mărit sau micșorat cu 5”. După un timp scurt de

gândire *Fibonacci* a găsit numărul $\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$. Întradevăr: $\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$ și

$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$. Nu se știe raționamentul lui *Fibonacci* dar, toate încercările,

chiar și cele mai ingenioase, de a rezolva această problemă cu ajutorul algebrei, duc în cel mai bun caz la o ecuație cu 2 necunoscute.

La un alt concurs prezidat de împărat problema propusă concurenților suna astfel: “Plecând de la o singură pereche de iepuri și știind că fiecare pereche de iepuri produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri, care devine productivă la vârsta de o lună, calculați câte perechi de iepuri vor fi după n luni (se consideră că iepurii nu mor în decursul respectivei perioade de n luni)”.

Soluție. Din datele problemei rezultă că numărul perechilor de iepuri din fiecare lună este un termen al șirului lui *Fibonacci*. Într-adevăr, să presupunem că la 1 ianuarie exista o singură pereche fertilă de iepuri. Notăm cu 1 perechea respectivă. Ea corespunde numărului F_2 din șirul lui *Fibonacci*:

$$F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1.$$

La 1 februarie, mai există o pereche pe care o notăm 1.1. Deci în acest moment sunt două perechi, ceea ce corespunde termenului:

$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2.$$

La 1 martie sunt 3 perechi, două care existau în februarie și una nouă care provine de la perechea numărul 1 (se ține seama că o pereche devine fertilă după două luni). Notăm cu 1.2 această nouă pereche. Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3.$$

La 1 aprilie există 5 perechi și anume: trei perechi existente în luna martie, o pereche nouă care provine de la perechea 1 și o pereche nouă care provine de la perechea 1.1 care la 1 martie a devenit fertilă (pereche pe care o notăm cu 1.1.1). Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5.$$

Termenii din această relație se interpretează astfel:

F_4 = numărul perechilor existente în luna precedentă ;

F_3 = numărul perechilor noi (provin de la perechile existente în luna anteprecedentă).

Procedând în continuare în acest fel, vom deduce că la data de 1 decembrie numărul perechilor este dat termenul:

$$F_{13} = F_{11} + F_{12} = 89 + 144 = 233 ,$$

iar la 1 ianuarie anul următor există:

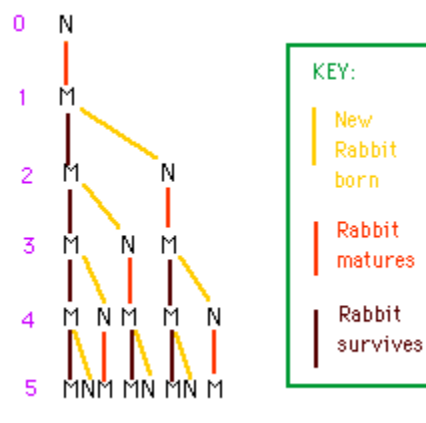
$$F_{14} = F_{12} + F_{13} = 144 + 233 = 377 \text{ perechi de iepuri.}$$

Concluzia este următoarea :

Dacă notăm cu F_n numărul de perechi de iepuri după n luni, numărul de perechi de iepuri după $n+1$ luni, notat cu F_{n+1} , va fi F_n (iepurii nu mor niciodată !), la care se adaugă iepurii nou-născuți. Dar iepurașii se nasc doar din perechi de iepuri care au cel puțin o lună, deci vor fi F_{n-1} perechi de iepuri nou-născuți.

Obținem astfel o relație de recurență:

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, care generează termenii șirului lui *Fibonacci*.



Observație. Acest șir exprimă într-un mod naiv creșterea populației de iepuri. Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de

două luni. De asemenea, puii nu mor niciodată și sunt unul de sex masculin și unul de sex feminin.

***Fibonacci*, numărul de aur, natura și arta**

Raportul de aur este un număr irațional (1.618033...), putând fi definit în diferite moduri dar, cel mai important concept mathematic asociat cu regula de aur fiind șirul lui *Fibonacci*. Împărțind orice număr la predecesorul său, se obține aproximativ numărul de aur. Primii care l-au folosit au fost egipteni, majoritatea piramidelor fiind construite ținând cont de numărul de aur. Grecii au fost însă cei care l-au denumit astfel, folosindu-l atât în arhitectură cât și pictură și sculptură. Dealtfel numărul de aur se notează cu litera grecească “fi” (φ), de la sculptorul grec *Phidias*. El a construit Parthenonul pornind de la acest raport.

Să începem cu o problemă estetică. Să considerăm un segment de dreaptă. Care este cea mai “plăcută” împărțire a unui segment în două părți? Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc “simetrie dinamică”). Dacă părții stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u = 1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v = 0.618...$ Despre un segment partiționat astfel spunem că este împărțit în secțiunea, sau proporția sau diviziunea de aur (divină). Ideea este că lungimea u reprezintă aceeași parte din tot segmentul $(u + v)$ cât reprezintă lungimea v din partea u . Cu alte cuvinte:

$$\frac{u + v}{u} = \frac{u}{v}.$$

Dacă notăm $\varphi = \frac{u}{v}$, observăm că:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{u}{v} = \frac{u + v}{u} = \frac{u}{v} = \varphi,$$

și este rădăcina pozitivă a ecuației

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

adică

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$$

Dacă presupunem $u = 1$, atunci :

$$v = \frac{u}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.6180339887...$$

Afirmăm acum că φ este strâns legat de șirul lui *Fibonacci*. Aceasta este o idee remarcabilă a matematicii.

Mai observăm că :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}},$$

este o fracție infinită.

Dacă privim fracțiile parțiale :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \\
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} &= \frac{3}{2}, \\
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} &= \frac{5}{3}, \\
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} &= \frac{8}{5}, \\
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} &= \frac{13}{8},
 \end{aligned}$$

observăm că toate rezultatele sunt rapoarte de numere *Fibonacci*, fapt ce motivează teorema care spune că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$. În cuvinte putem spune că, pe măsură ce n se

apropie de infinit, raportul termenilor al $n+1$ -lea și al n -lea din șirul lui *Fibonacci* se apropie de φ .

La fel de simplu cum φ este o fracție infinită, tot așa poate fi și un radical infinit:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Altă aplicație a numărului φ apare la pentagonal regulat deoarece :

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \varphi,$$

și,

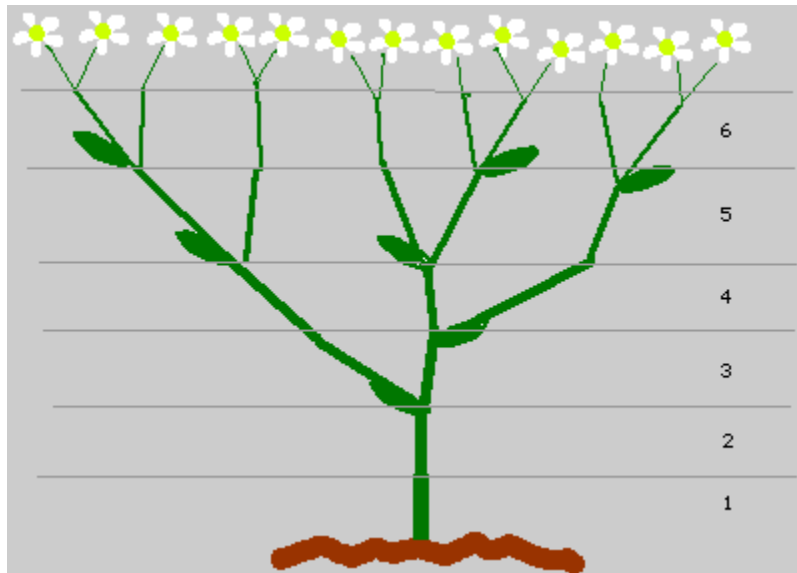
$$2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3 - \varphi}.$$

De asemenea există o legătură între dreptunghiurile de aur și șirul lui *Fibonacci* deoarece lungimea și lățimea celui de-al n -lea dreptunghi pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienții sunt întotdeauna numere *Fibonacci*. Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică. Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des în natură (carcasa unui melc, colții unui elefant sau conurile de pin). Asemenea spirale sunt

echiunghiulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul $(x_0, y_0) = (\frac{1+3\varphi}{5}, \frac{3-\varphi}{5})$ taie spirala sub un unghi constant.

Plantele nu au cum să cunoască numerele lui *Fibonacci*, dar se dezvoltă în cel mai eficient mod.

- a. multe plante au aranjamentul frunzelor dispus într-o secvență *Fibonacci* în jurul tulpinei;



- b. anumite conuri de pin respectă o dispunere dată de numerele lui *Fibonacci* ;

- c. floarea soarelui are semințele dispuse după o secvență *Fibonacci*;



- d. inelele de pe trunchiurile palmierilor respectă numerele lui *Fibonacci*;

e.numărul petalelor florilor este, de cele mai multe ori, un număr al secvenței *Fibonacci*:

e.1.cala are 1 petală;

e.2.euphorbia are 2 petale;

e.3. irisul și crinul au 3 petale;

e.4.viorelele, lalelele, trandafirul sălbatic și majoritatea florilor au 5 petale;

e.5.margaretele pot avea 21 de petale sau 34 de petale și exemplele sunt nenumărate;



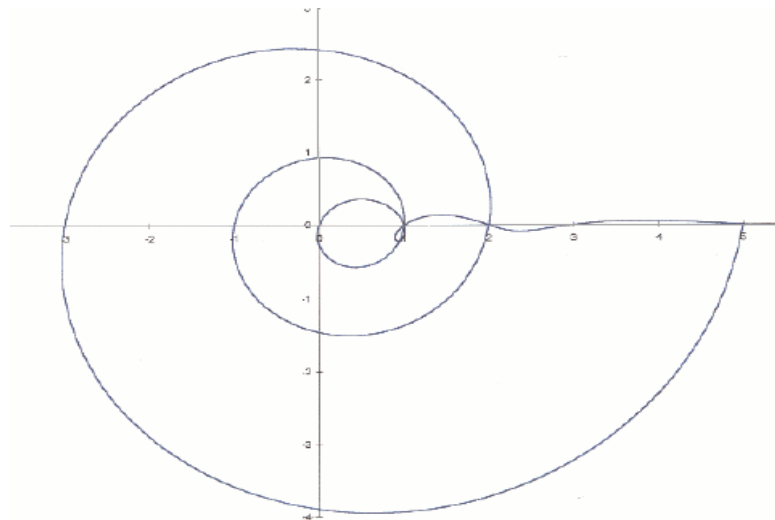
e.6.florile cu un număr de petale care nu sunt în secvența *Fibonacci* sunt rare și considerate speciale.

Concluzia este realizarea unui optim, a unei eficiențe maxime. Dacă se urmează secvența lui *Fibonacci*, frunzele unor plante pot fi dispuse astfel încât să ocupe un cât mai mic spațiu și să obțină cât mai mult soare.

Ideea dispunerii frunzelor în acest sens pleacă de la considerarea unghiului de aur de 222.5 grade; unghi care împărțit la întregul 360 de grade va da ca rezultat numărul irațional 0.61803398..., cunoscut ca rația șirului lui *Fibonacci*.

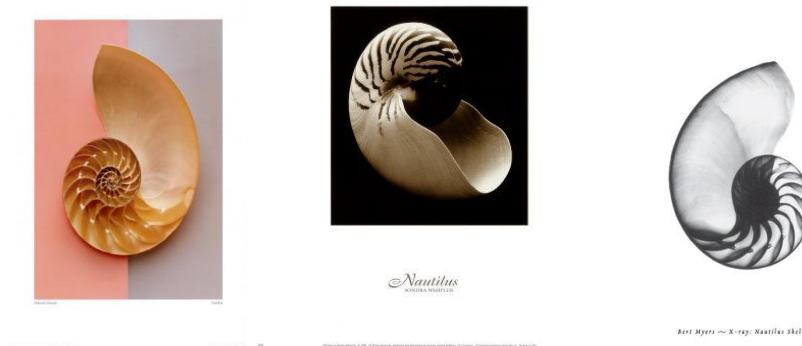
Designul cochiliei melcului urmează o spirală foarte reușită, o spirală greu de realizat cu pixul. Studiată în amănunt s-a ajuns la concluzia că această spirală urmărește dimensiunile date de secvența lui *Fibonacci*:

- pe axa pozitivă: 1, 2, 5, 13, ș.a.m.d
- pe axa negativă: 0, 1, 3, 8, ș.a.m.d.



Se observă că aceste 2 subșiruri combinate dau numerele lui *Fibonacci*.

Și în acest caz rațiunea și motivația pentru această dispunere este simplă : în acest fel cochilia îi crează melcului, în interior un maxim de spațiu și de siguranță.

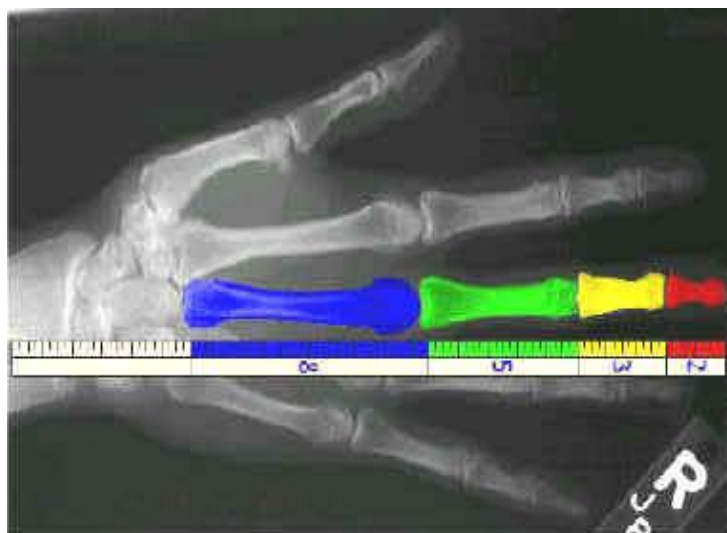


Furnica are corpul împărțit în trei segmente, după diviziunea de aur.

Fața umană este caracterizată, din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanța între ochi, dintre gură și ochi și distanța dintre nas și ochi, dimensiunea gurii. În știința esteticii se apreciază că fața este cu atât considerată mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă secvența lui *Fibonacci* mai bine.

De exemplu raportul dintre distanța de la linia surâsului (unde se unesc buzele) până la vârful nasului și de la vârful nasului până la baza sa este aproximativ raportul de aur.

Mâna umană are 5 degete (număr din șirul *Fibonacci*), fiecare deget având 3 falange separate prin 2 încheieturi (numere din șirul *Fibonacci*). Dimensiunile falangelor sunt: 2 cm, 3 cm, 5 cm. În continuarea lor este un os al palmei care are 8 cm.



Dacă privim lucrările unor mari artiști, fie ei pictori, arhitecți, sculptori sau fotografi, se observă că multe dintre ele au la bază regula de aur. Conform acesteia, “pentru ca un întreg împărțit în părți inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică și cea mare același raport ca între partea mare și întreg” (*Marcus Pollio Vitruvius*, arhitect roman).

Rudolf Arnheim (psiholog, s-a ocupat de psihologia artei) dă o explicație acestui lucru astfel: ”Acest raport este considerat ca deosebit de satisfăcător datorită modului în care îmbină unitatea cu varietatea dinamică. Întregul și părțile sunt perfect proporționate, astfel că întregul predomină fără să fie amenințat de o scindare, iar părțile își păstrează în același timp o anumită autonomie.” (în “*Arta și percepția vizuală*”).

În pictură a fost folosit mai ales în Renaștere, probabil cea mai discutată utilizare a acestuia fiind în tabloul lui *Leonardo da Vinci*, “*Mona Lisa*”. Capul, ca și restul corpului e compus utilizând raportul divin, cum îi spunea *da Vinci*. În prima jumătate a secolului trecut pictorul *Piet Mondrian* utilizează în picturile sale “dreptunghiul de aur”, având raportul laturilor aproximativ 1.618... De fapt, lucrările sale sunt alcătuite numai din asemenea dreptunghiuri. Acest dreptunghi este considerat cea mai armonioasă formă geometrică. Cu toate acestea, rareori este folosit pentru cadre. Dacă se împarte fiecare latură a cadrului fotografic în 8 părți egale (număr din șirul *Fibonacci*) și se unesc punctele de pe laturile opuse corespunzătoare diviziunilor 3 și 5 (numere din șirul *Fibonacci*) se obțin așa numitele linii forte ale cadrului. Punctele aflate la intersecția liniilor se numesc puncte forte. Practic se pot împărți laturile în trei părți egale, rezultatul este aproximativ același. Se presupune că subiectul amplasat pe aceste linii sau în aceste puncte determină o împărțire armonioasă a imaginii astfel încât ea nu este nici simetrică, nici plictisitoare, nici prea dezechilibrată. De exemplu, două fotografii de *Robert Doisneau*, “*L’accordioniste*”, 1951 și “*The cellist*”, 1957 și fotografia “*Poplar Trees*” a lui *Minor White* în care toate liniile converg spre un punct forte. *Ansel Adams* se împotriva regulilor, canoanelor. El spunea “așa zisele reguli de fotocompoziție sunt invalide, irelevante și imateriale; nu există reguli de compoziție în fotografie, există doar fotografii bune. Cei mai mulți fotografi încalcă regulile fotocompoziției”. Cu toate acestea și în imaginile lui se observă diviziunea de aur (vezi fotografia “*Aspens*”, 1958). Asta

înseamnă că deși nu era de accord cu regulile le cunoștea foarte bine. Dacă fotografia are valoare cu subiectul în centru, atunci încălcați regula diviziunii de aur! Subiectul trebuie să fie în armonie cu celelalte elemente din cadru. Dacă astfel se verifică și diviziunea de aur, este perfect! Toate acestea arată importanța acestui număr, astfel că toți marii fotografi au ținut și țin cont de el în conceperea unei fotografii.

Până și în muzică apare acest raport, se presupune că *Bach* sau *Beethoven* au ținut cont de el în compozițiile lor.

Atunci când scrieți, duceți instinctiv linia din mijloc a literii E (la fel și cu A, F, B, R,...) aproximativ la $\frac{2}{3}$ de bază (aproximativ raportul de aur).

Concluzie. Numerele lui *Fibonacci* sunt considerate a fi, de fapt, sistemul de numărare al naturii, un mod de măsurare al Divinității, o legătură între matematică și artă.



François-Édouard-Anatole Lucas

(1842 – 1891)

François Édouard Anatole Lucas s-a născut în orașul Amiens din Franța la data de 4 aprilie 1842 și a trecut în eternitate la Paris la data de 3 octombrie 1891.

A fost educat la vestita École Normale Supérieure din Paris. După terminarea studiilor a lucrat la Observatorul din Paris. A servit țara ca ofițer de artilerie în războiul Franco – Prusac.

A lucrat ca profesor de matematică la renumitul liceu Saint Louis, iar apoi la liceul Charlemagne, ambele din Paris.

În 1857, la vârsta de 15 ani, *Lucas* a început să lucreze la primalitatea numărului $2^{127} - 1$, utilizând șirul *Lucas*. În 1876, după 19 ani de testări a demonstrat faptul că numărul $2^{127} - 1$ este număr prim; iar acest rezultat va rămâne ca cel mai mare număr prim *Mersenne* până în anul 1951, și de asemenea va rămâne pentru totdeauna ca cel mai mare număr prim dovedit fără ajutorul calculatorului. Mai târziu, *Derrick Henry Lehmer* a rafinat testul de primalitate utilizat de *Lucas* și a obținut testul de primalitate *Lucas-Lehmer*.

În 1875, a emis conjectura: arătați că ecuația diofantică

$$\sum_{n=1}^N n^2 = M^2, \text{ unde } N > 1, \text{ are unica soluție } N = 24 \text{ și } M = 70.$$

Conjectura a fost rezolvată abia în 1918, folosind funcțiile hipereliptice, cu utilizări remarcabile în teoria corzilor de dimensiune 26. Demonstrații elementare au fost date recent, în 1985 și respectiv 1990.

Lucas a fost de asemenea interesat de recreațiile matematice. El a găsit soluții elegante la diverse jocuri de puzzle, a inventat jocul de puzzle "Turnul din Hanoi", diverse anagrame și jocuri logice.

Edouard Lucas este cel care a început studiul șirului lui *Fibonacci*, a demonstrat mai multe proprietăți ale acestuia, iar apoi a inventat un șir asemănător denumit postum de către matematicieni șirul lui *Lucas*.

Lucas a murit în circumstanțe neobișnuite. La banchetul anual al Congresului pentru Științe Avansate, un chelner a scăpat jos vesela, iar o bucată dintr-o farfurie l-a taiat pe obraz pe *Lucas*. A murit câteva zile mai târziu din cauza infectării severe a pielii, ceea ce a cauzat probabil septicemia. Avea atunci doar 49 de ani.

*

*

*

*

* *

''Dumnezeu a făcut aritmetica'' C.F. Gauss

Spunem că un șir $(x_n)_{n \geq 0}$, de numere reale, satisface o recurență liniară (reală) omogenă de ordinul al doilea, dacă există $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ și există $k \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq k \quad (*)$$

În funcție de valorile coeficienților $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ și ale condițiilor inițiale $x_k = u \in \mathbf{R}, x_{k+1} = v \in \mathbf{R}$ se obțin diverse șiruri.

De exemplu dacă $a = b = -1, k = 0$, atunci din (*) obținem recurența:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (**)$$

pe care o vom numi recurența *Fibonacci – Lucas*.

Dacă în (*) considerăm $a = -2, b = -1, k = 0$, atunci obținem recurența *Pell*:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (***)$$

Dacă în (*) considerăm $a = -2, b = 1, k = 0$, atunci obținem recurența liniară:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (****)$$

Recurența (****) numită recurența progresiilor aritmetice este echivalentă cu:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = x_1 - x_0 = r \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dacă în (**) considerăm $x_0 = F_0 = 0, x_1 = F_1 = 1$, atunci obținem șirul $(F_n)_{n \geq 0}$ al lui *Fibonacci* care satisface recurența:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{F})$$

Dacă în (**) luăm $x_0 = L_0 = 2, x_1 = L_1 = 1$, atunci obținem șirul $(L_n)_{n \geq 0}$ al lui *Lucas*, șir care satisface recurența:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{L})$$

Dacă în (***) considerăm $x_0 = P_0 = 0, x_1 = P_1 = 1$, atunci obținem șirul $(P_n)_{n \geq 0}$ al lui *Pell* care satisface recurența:

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{P})$$

Dacă în (***) considerăm $x_0 = Q_0 = 1, x_1 = Q_1 = 1$, atunci obținem șirul $(Q_n)_{n \geq 0}$ lui *Pell* asociat, șir care verifică recurența:

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{P.A.})$$

Recurenței:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \Leftrightarrow x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N},$$

i se asociază ecuația caracteristică:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cu rădăcinile distincte:

$$r_1 = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, r_2 = \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Termenul general al unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$, care verifică recurența de tip **Fibonacci-Lucas** este dat de formula:

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde A și B se determină din condițiile inițiale date, $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$.

Dacă $x_0 = 0 = F_0, x_1 = 1 = F_1$, atunci $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ și deci:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \forall n \in \mathbf{N} \text{ (Formula lui Binet, 1843),}$$

adică am obținut șirul lui **Fibonacci** $(F_n)_{n \geq 0}$.

Să demonstrăm formula lui *Binet* prin metoda inducției matematice (I.M.):

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0) = 0, F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Presupunem că:

$$F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k), \forall k \leq n, n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

și demonstrăm că formula este adevărată și pentru $k = n + 1$.

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n + \alpha^{n-1} - \beta^n - \beta^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}(1 + \alpha) + \beta^{n-1}(1 + \beta)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}\alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}), \end{aligned}$$

ceea ce conform principiului inducției matematice încheie demonstrația.

Dacă $x_0 = 2 = L_0, x_1 = 1 = L_1$, atunci $A = B = 1$ și deci obținem șirul lui **Lucas**, $(L_n)_{n \geq 0}$ de termen general:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Să demonstrăm acum prin metoda inducției matematice că $L_n = \alpha^n + \beta^n, \forall n \in \mathbf{N}$.

Avem:

$$L_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2, L_1 = \alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Presupunem că:

$L_k = \alpha^k + \beta^k, \forall k \leq n, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, și să demonstrăm că această formulă este adevărată și pentru $k = n + 1$.

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} = \alpha^n + \beta^n + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha + 1) + \beta^{n-1}(\beta + 1) = \\ &= \alpha^{n-1}\alpha^2 + \beta^{n-1}\beta^2 = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}, \end{aligned}$$

ceea ce conform principiului inducției matematice încheie demonstrația

Observăm că:

$$\alpha + \beta = 1 \text{ și } \alpha\beta = -1,$$

relații utile în demonstrații.

Recurenței (***) i se asociază ecuația caracteristică:

$$s^2 - 2s - 1 = 0,$$

cu rădăcinile reale distincte:

$$s_1 = 1 + \sqrt{2} = \gamma, \quad s_2 = 1 - \sqrt{2} = \delta,$$

iar termenul general este dat de formula:

$$x_n = A \cdot \gamma^n + B \cdot \delta^n, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde A și B se determină din condițiile inițiale date $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$.

Dacă $x_0 = P_0 = 0, x_1 = P_1 = 1$, atunci:

$$A = \frac{1}{\gamma - \delta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, B = -\frac{1}{\gamma - \delta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

și deci:

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^n - \delta^n), \forall n \in \mathbf{N},$$

adică am obținut șirul lui *Pell*, $(P_n)_{n \geq 0}$, $P_0 = 0, P_1 = 1$.

Să demonstrăm formula:

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^n - \delta^n), \forall n \in \mathbf{N},$$

prin metoda (I.M.).

$$P_0 = \frac{\gamma^0 - \delta^0}{2\sqrt{2}} = 0, P_1 = \frac{\gamma - \delta}{2\sqrt{2}} = 1.$$

Presupunem că:

$$P_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^k - \delta^k), \forall k \leq n, n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

și să demonstrăm că formula este adevărată și pentru $k = n + 1$.

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2P_n + P_{n-1} = 2 \cdot \frac{\gamma^n - \delta^n}{2\sqrt{2}} + \frac{\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\gamma^n + \gamma^{n-1} - 2\delta^n - \delta^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{n-1}(2\gamma + 1) - \delta^{n-1}(2\delta + 1)), \end{aligned}$$

de unde dacă ținem seama că:

$$\gamma^2 = 2\gamma + 1 \text{ și } \delta^2 = 2\delta + 1,$$

deducem că:

$$P_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}),$$

ceea ce încheie demonstrația.

Dacă în formula:

$$x_n = A \cdot \gamma^n + B \cdot \delta^n, \forall n \in \mathbf{N},$$

luăm $x_0 = Q_0 = 1, x_1 = Q_1 = 1$, atunci:

$$A = \frac{1-\delta}{\gamma-\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, B = 1 - A = \frac{1}{2},$$

și deci:

$$Q_n = \frac{1}{2}(\gamma^n + \delta^n), \forall n \in \mathbf{N},$$

adică am obținut șirul lui *Pell* asociat.

Să demonstrăm formula:

$$Q_n = \frac{1}{2}(\gamma^n + \delta^n), \forall n \in \mathbf{N},$$

prin metoda (I.M.).

$$Q_0 = \frac{1}{2}(\gamma^0 + \delta^0) = 1, Q_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 1.$$

Presupunem că:

$$Q_k = \frac{1}{2}(\gamma^k + \delta^k), \forall k \leq n, n \in \mathbf{N}^* - \{1\},$$

și să demonstrăm că formula este adevărată și pentru $k = n + 1$.

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= 2Q_n + Q_{n-1} = 2 \cdot \frac{1}{2}(\gamma^n + \delta^n) + \frac{1}{2}(\gamma^{n-1} + \delta^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^{n-1}(2\gamma + 1) + \delta^{n-1}(2\delta + 1)) = \frac{1}{2}(\gamma^{n-1}\gamma^2 + \delta^{n-1}\delta^2) = \frac{1}{2}(\gamma^{n+1} + \delta^{n+1}), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

*

*

*

*

*

*

Capitolul 1

IDENTITĂȚI

”Egalitatea nu există decât în matematică”

Mihai Eminescu

1.1. $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$ (Lucas, 1876).

Demonstrație. $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}, \forall k \in \mathbf{N}^*$ și deci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_k &= \sum_{k=1}^n F_{k+2} - \sum_{k=1}^n F_{k+1} = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} F_{k+1} - \sum_{k=1}^n F_{k+1} = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Se poate demonstra și prin inducție matematică (I.M.).

1.2. $\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Deoarece $L_k = L_{k+2} - L_{k+1}, \forall k \in \mathbf{N}$ rezultă că:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k &= \sum_{k=1}^n L_{k+2} - \sum_{k=1}^n L_{k+1} = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} L_{k+1} - \sum_{k=1}^n L_{k+1} = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

sau I.M.

1.3. $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Avem: $F_k \cdot F_{k+1} = F_k (F_k + F_{k-1}) = F_k^2 + F_k F_{k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=1}^n F_k F_{k+1} &= \sum_{k=1}^n F_k^2 + \sum_{k=1}^n F_{k-1} F_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n F_k^2 = \sum_{k=1}^n F_k F_{k+1} - \sum_{k=1}^n F_{k-1} F_k = \\
&= \sum_{k=1}^n F_k F_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} F_k F_{k+1} = F_n F_{n+1} - F_0 F_1 = F_n F_{n+1}, \text{ sau I.M.}
\end{aligned}$$

1.4. $\sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Avem: $L_k \cdot L_{k+1} = L_k (L_k + L_{k-1}) = L_k^2 + L_k L_{k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=1}^n L_k L_{k+1} &= \sum_{k=1}^n L_k^2 + \sum_{k=1}^n L_{k-1} L_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n L_k^2 = \sum_{k=1}^n L_k L_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} L_k L_{k+1} = \\
&= L_n L_{n+1} - L_0 L_1 = L_n L_{n+1} - 2, \text{ sau I.M.}
\end{aligned}$$

1.5. $\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Lucas, 1876).}$

Demonstrație. Avem: $F_{2k-1} = F_{2k} - F_{2k-2}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=1}^n F_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n F_{2k} - \sum_{k=1}^n F_{2k-2} = \\
&= \sum_{k=1}^n F_{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ sau I.M.}
\end{aligned}$$

1.6. $\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Lucas, 1876).}$

Demonstrație. Avem: $F_{2k} = F_{2k+1} - F_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=1}^n F_{2k} &= \sum_{k=1}^n F_{2k+1} - \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = \\
&= F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ sau I.M.}
\end{aligned}$$

1.7. $\sum_{k=1}^n L_{2k-1} = L_{2n} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Avem: $L_{2k-1} = L_{2k} - L_{2k-2}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=1}^n L_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n L_{2k} - \sum_{k=1}^n L_{2(k-1)} = \\
&= \sum_{k=1}^n L_{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} L_{2k} = L_{2n} - L_0 = L_{2n} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ sau I.M.}
\end{aligned}$$

1.8. $\sum_{k=1}^n L_{2k} = L_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Avem: $L_{2k} = L_{2k+1} - L_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^n L_{2k} &= \sum_{k=1}^n L_{2k+1} - \sum_{k=1}^n L_{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n L_{2k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} L_{2k+1} = L_{2n+1} - L_1 = L_{2n} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ sau I.M.} \end{aligned}$$

1.9. $\sum_{k=0}^n F_{k+i} = F_{n+i+2} - F_{i+1}, \forall n, i \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. Avem: $F_{k+i+1} = F_{k+i+2} - F_{k+i}, \forall k, i \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n F_{k+i} = \sum_{k=0}^n F_{k+i+2} - \sum_{k=0}^n F_{k+i+1} = F_{n+i+2} - F_{i+1}, \text{ sau I.M.}$$

1.10. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)^2 + \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 = \frac{1}{5}(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n) +$
 $+\frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1}) = \frac{1}{5}(\alpha^{2n} + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n} + \beta^{2n+2}) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{2n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \cdot \alpha^{2n+1} + \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \cdot \beta^{2n+1}\right) =$
 $= \frac{1}{5}(\sqrt{5} \cdot \alpha^{2n+1} - \sqrt{5} \cdot \beta^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = F_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

1.11. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N} \text{ (Lucas, 1876).}$

Demonstrație. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = \frac{1}{5}\left((\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2\right) =$
 $= \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2} - 2(\alpha\beta)^{n+1} + 2(\alpha\beta)^{n-1}) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha^{2n} + \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{n-1}(1 - (\alpha\beta)^2)\right) =$
 $= \frac{1}{5}\left(\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{2n} + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\beta^{2n}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left(\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \alpha^{2n} + \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \beta^{2n} \right) = \frac{1}{5} (\sqrt{5} \alpha^{2n} - \sqrt{5} \beta^{2n}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.
\end{aligned}$$

1.12. $\alpha^{n+1} = \alpha \cdot F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $\alpha \cdot F_{n+1} + F_n = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+2} + \alpha^n) - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n (1 + \alpha\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \alpha^{n+1} = \\
&= \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \right) = \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = \alpha^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

1.13. $\beta^{n+1} = \beta \cdot F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $\beta \cdot F_{n+1} + F_n = \frac{\beta}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} \beta - \beta^{n+2} + \alpha^n - \beta^n) = -\frac{1}{\sqrt{5}} (\beta^{n+2} + \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^n \cdot (1 + \alpha\beta) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^n \cdot (\beta^2 + 1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \beta^{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^{n+1} \cdot \left(\frac{\beta^2 + 1}{\beta} \right) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^{n+1} \cdot (-\sqrt{5}) = \beta^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

1.14. $L_n F_n = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) (\alpha^n + \beta^n) = F_n L_n, \forall n \in \mathbf{N}.$

1.15. $F_n + F_{n+2} = L_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $F_n + F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n + \alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n+1} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \beta^{n+1} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{5} \alpha^{n+1} - (-\sqrt{5}) \beta^{n+1}) = \\
&= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = L_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

1.16. $F_{n+4} - F_n = L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. $F_{n+4} - F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+4} - \beta^{n+4} - \alpha^n + \beta^n) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n(\alpha^4 - 1) - \beta^n(\beta^4 - 1)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) - \beta^n(\beta^2 - 1)(\beta^2 + 1)) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \beta^{n+2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}\alpha^{n+2} + \sqrt{5}\beta^{n+2}) = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = L_{n+2}.$

1.17. $L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. $L_n + L_{n+2} = \alpha^n + \beta^n + \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = \alpha^{n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) =$
 $= \sqrt{5}\alpha^{n+1} - \sqrt{5}\beta^{n+1} = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = 5F_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$

1.18. $F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, k \leq n$ (**Catalan**, 1879).

Demonstrație. $F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = \frac{1}{5}(\alpha^{n+k} - \beta^{n+k})(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) - \frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)^2 =$
 $= \frac{1}{5}(\alpha^{2n} - \alpha^{n-k}\beta^{n+k} - \alpha^{n+k}\beta^{n-k} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n) =$
 $= \frac{1}{5}(-(\alpha\beta)^n\alpha^{-k}\beta^k - (\alpha\beta)^n\alpha^k\beta^{-k} + 2(\alpha\beta)^n) =$
 $= \frac{1}{5}(-(\alpha\beta)^n(\alpha\beta)^{-k}\beta^{2k} - (\alpha\beta)^n\alpha^{2k}(\alpha\beta)^{-k} + (-1)^n 2) =$
 $= \frac{1}{5}((-1)^{n+1}(-1)^k\beta^{2k} + (-1)^{n+1}(-1)^k + 2(-1)^n) =$
 $= \frac{1}{5}((-1)^{n+k+1}(\alpha^{2k} + \beta^{2k}) + 2(-1)^n), \text{ dar,}$
 $F_k^2 = \frac{1}{5}(\alpha^k - \beta^k)^2 = \frac{1}{5}(\alpha^{2k} + \beta^{2k} - 2(\alpha\beta)^k) = \frac{1}{5}(\alpha^{2k} + \beta^{2k}) - \frac{2}{5}(-1)^k \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha^{2k} + \beta^{2k} = 5F_k^2 - 2(-1)^{k+1} = 5F_k^2 + 2(-1)^k \Leftrightarrow \frac{\alpha^{2k} + \beta^{2k}}{5} = \frac{5F_k^2 + 2(-1)^k}{5}.$

Deci,

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2 + \frac{2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1}}{5} =$$

$$= (-1)^{n+k+1}F_k^2 + \frac{2}{5}((-1)^n + (-1)^{n+1}) = (-1)^{n+k+1}F_k^2.$$

1.19. $\alpha^m F_{n-m+1} + \alpha^{m-1} F_{n-m} = \alpha^n, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m.$

Demonstrație. $\alpha^m F_{n-m+1} + \alpha^{m-1} F_{n-m} = \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m+1} - \beta^{n-m+1}) + \frac{\alpha^{m-1}}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}) =$

$$= \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^m \beta^{n-m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{m-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{m-1} \beta^{n-m}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\alpha^n (\alpha + \alpha^{-1})}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{m-1} \beta^{n-m}}{\sqrt{5}} (\alpha \beta + 1) = \alpha^n \cdot \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{\sqrt{5}} = \alpha^n.$$

1.20. $\beta^m \cdot F_{n-m+1} + \beta^{m-1} \cdot F_{n-m} = \beta^n, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m.$

Demonstrație. $\beta^m \cdot F_{n-m+1} + \beta^{m-1} \cdot F_{n-m} = \beta^m \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m+1} - \beta^{n-m+1}) +$

$$+ \frac{\beta^{m-1}}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}) = \frac{\beta^m \alpha^{n-m+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^{m-1} \alpha^{n-m}}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\beta^{m-1} \alpha^{n-m}}{\sqrt{5}} (\alpha \beta + 1) = -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) = -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \right) =$$

$$= -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})^2 + 4}{2(1-\sqrt{5})} = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10-2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{5}-1)} = \beta^n.$$

1.21. $\alpha^{-n} = (-1)^{n+1} \cdot (\alpha F_n - F_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $(-1)^{n+1} \cdot (\alpha F_n - F_{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (\alpha(\alpha^n - \beta^n) - \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) =$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \alpha \beta^n - \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \beta^n (\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \beta^n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \beta^n (-\sqrt{5}) = (-1)^{n+2} \beta^n =$$

$$= (-1)^n \beta^n = (\alpha \beta)^n \beta^n = \alpha^n \beta^{2n} = \alpha^n \cdot \left(\frac{-1}{\alpha} \right)^{2n} = \alpha^{-n}.$$

1.22. $L_{2m} L_{2n} = L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$ (Wall, 1964).

Demonstrație. $L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2 = (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n})^2 + (\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})^2 =$

$$= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + 2(\alpha \beta)^{m+n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} - 2(\alpha \beta)^{m-n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}}{\alpha^{2n}} + \frac{\beta^{2m}}{\beta^{2n}} + 2(\alpha\beta)^{m-n}((\alpha\beta)^{2n} - 1) = \\
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}}{(\alpha\beta)^{2n}} = \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m} = \\
&= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = L_{2m}L_{2n}.
\end{aligned}$$

1.23. $L_{2m}L_{2n} = 5F_{m+n}^2 + L_{m-n}^2$, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$. (Wall, 1964).

Demonstrație. $5F_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 = (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n})^2 + (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})^2 =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} - 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} + 2(\alpha\beta)^{m-n} = \\
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} + 2(\alpha\beta)^{m-n}(1 - (\alpha\beta)^{2n}) = \\
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}}{\alpha^{2n}} + \frac{\beta^{2m}}{\beta^{2n}} = \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \frac{\alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}}{(\alpha\beta)^{2n}} = \\
&= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m} = \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = \\
&= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = L_{2m}L_{2n}.
\end{aligned}$$

1.24. $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (Lucas, 1876).

Demonstrație. $5F_{2n}^2 + 2 = (\alpha^{2n} - \beta^{2n})^2 + 2 = \alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2(\alpha\beta)^{2n} + 2 =$

$$= L_{4n} + 2 - 2(-1)^{2n} = L_{4n}.$$

1.25. $L_{4n+2} = 5F_{2n+1}^2 - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Lucas, 1876).

Demonstrație. $5F_{2n+1}^2 - 2 = (\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})^2 - 2 = \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2(\alpha\beta)^{2n+1} - 2 =$

$$= L_{4n+2} - 2 - 2(-1)^{2n+1} = L_{4n+2}.$$

1.26. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n} + L_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Koshy, 1999).

Demonstrație. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n +$

$$+ \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{n+1} = L_{2n} + L_{2n+2} + 2(\alpha\beta)^n(\alpha\beta + 1) = L_{2n} + L_{2n+2}.$$

1.27. $F_m \cdot L_n + F_n \cdot L_m = 2F_{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ (Blazej, 1975).

Demonstrație. $F_m \cdot L_n + F_n \cdot L_m = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^m + \beta^m) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \alpha^n\beta^m + \alpha^m\beta^n - \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m - \beta^{m+n}) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = 2F_{m+n}.$$

1.28. $L_m L_n + 5F_m F_n = 2L_{m+n}, \forall m, n \in \mathbf{N}$ (Ferns, 1967).

Demonstrație. $L_m L_n + 5F_m F_n = (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n) =$
 $= \alpha^{m+n} + \alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n} =$
 $= 2(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) = 2L_{m+n}.$

1.29. $F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = (F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1}) = F_n F_{n+3}.$

1.30. $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5F_{2m} F_{2n}, \forall m, n \in \mathbf{N}, m \geq n$ (Koshy, 1998).

Demonstrație. $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n})^2 - (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})^2 =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + 2(\alpha\beta)^{m+n} - \alpha^{2m-2n} - \beta^{2m-2n} - 2(\alpha\beta)^{m-n} =$
 $= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} - \alpha^{-2n}) + \beta^{2m}(\beta^{2n} - \beta^{-2n}) + 2(\alpha\beta)^{m-n}((\alpha\beta)^{2n} - 1) =$
 $= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} - \alpha^{-2n}) + \beta^{2m}(\beta^{2n} - \beta^{-2n}) = 5F_{2m} F_{2n}.$

1.31. $L_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 = L_{2m} L_{2n} + 4(-1)^{m+n}, \forall m, n \in \mathbf{N}, m \geq n$ (Koshy, 1998).

Demonstrație. $L_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 = (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n})^2 - (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})^2 =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} + 2(\alpha\beta)^{m-n} =$
 $= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \alpha^{-2n}) + \beta^{2m}(\beta^{2n} + \beta^{-2n}) + 2(\alpha\beta)^{m-n}((\alpha\beta)^{-2n} + 1) =$
 $= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + 4(\alpha\beta)^{m+n} = L_{2m} L_{2n} + 4(-1)^{m+n}.$

1.32. $5(F_{m+n}^2 + F_{m-n}^2) = L_{2m} L_{2n} - 4(-1)^{m+n}, \forall m, n \in \mathbf{N}, m \geq n$ (Koshy, 1999).

Demonstrație. $5(F_{m+n}^2 + F_{m-n}^2) = 5\left(\frac{1}{5}(\alpha^{n+m} + \beta^{n+m})^2 + \frac{1}{5}(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})^2\right) =$
 $= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} - 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2m-2n} + \beta^{2m-2n} - 2(\alpha\beta)^{m-n} =$
 $= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \alpha^{-2n}) + \beta^{2m}(\beta^{2n} + \beta^{-2n}) - 2(\alpha\beta)^{m+n}(1 + (\alpha\beta)^{-2n}) =$
 $= \alpha^{2m}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{2m}(\beta^{2n} + \alpha^{2n}) - 4(\alpha\beta)^{m+n} =$
 $= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - 4(-1)^{m+n} = L_{2m} L_{2n} - 4(-1)^{m+n}.$

1.33. $1 + F_{2n} F_{2n+2} = F_{2n+1}^2, \forall n \in \mathbf{N}$ (Cassini).

Demonstrație. $1 + F_{2n}F_{2n+2} = 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{2n} - \beta^{2n})(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) =$

$$= 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{4n+2} - \alpha^{2n}\beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2}\beta^{2n} + \beta^{4n+2}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n+1} - \alpha^{2n}\beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2}\beta^{2n}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})^2 + \frac{1}{5}(2(\alpha\beta)^{2n+1} - (\alpha\beta)^{2n}(\alpha^2 + \beta^2)) =$$

$$= F_{2n+1}^2 + 1 + \frac{1}{5}(-2 - \alpha^2 - \beta^2) = F_{2n+1}^2 + 1 - \frac{1}{5}(2 + 3) = F_{2n+1}^2.$$

1.34. $F_{2n+1}F_{2n+3} - 1 = F_{2n+2}^2, \forall n \in \mathbf{N}$ (Cassini).

Demonstrație. $F_{2n+1}F_{2n+3} - 1 = -1 + \frac{1}{5}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})(\alpha^{2n+3} - \beta^{2n+3}) =$

$$= -1 + \frac{1}{5}(\alpha^{4n+4} + \beta^{4n+4} - 2(\alpha\beta)^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} - \alpha^{2n+1}\beta^{2n+3} - \alpha^{2n+3}\beta^{2n+1}) =$$

$$= -1 + \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2})^2 + 2 - (\alpha\beta)^{2n+1}(\alpha^2 + \beta^2) =$$

$$= F_{2n+2}^2 - 1 + \frac{1}{5}(2 + \alpha^2 + \beta^2) = F_{2n+2}^2 - 1 + \frac{1}{5}\left(2 + \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) =$$

$$= F_{2n+2}^2 - 1 + \frac{1}{5}(2 + 3) = F_{2n+2}^2 - 1 + 1 = F_{2n+2}^2.$$

1.35. $1 + F_{2n+2}F_{2n+4} = F_{2n+3}^2, \forall n \in \mathbf{N}$ (Cassini).

Demonstrație. $1 + F_{2n+2}F_{2n+4} = 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2})(\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4}) =$

$$= 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} - 2(\alpha\beta)^{2n+3} + 2(\alpha\beta)^{2n+3} - \alpha^{2n+2}\beta^{2n+4} - \alpha^{2n+4}\beta^{2n+2}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}(\alpha^{2n+3} - \beta^{2n+3})^2 + \frac{1}{5}(2(-1)^{2n+3} - (-1)^{2n+2}\beta^2 - (-1)^{2n+2}\alpha^2) =$$

$$= F_{2n+3}^2 + 1 - \frac{1}{5}(2 + \alpha^2 + \beta^2) = F_{2n+3}^2 + 1 - 1 = F_{2n+3}^2.$$

1.36. $4F_{2n}F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+1}F_{2n+2} - 1)^2, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $4F_{2n}F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3} + 1 = 1 + 4(F_{2n}F_{2n+2})(F_{2n+1}F_{2n+3}) \stackrel{\text{Cassini}}{=}$

$$= 1 + 4(F_{2n+1}^2 - 1)(F_{2n+2}^2 + 1) = 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4(F_{2n+2}^2 - F_{2n+1}^2) - 3 =$$

$$= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2 - 4(F_{2n+2} - F_{2n+1})(F_{2n+2} + F_{2n+1}) - 3 =$$

$$\begin{aligned}
&= 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n} F_{2n+3} - 3 = 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+3} (F_{2n+2} - F_{2n+1}) - 3 = \\
&= 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+2} F_{2n+3} + 4F_{2n+1} F_{2n+3} - 3 = \\
&= 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+2} F_{2n+3} + 4(F_{2n+2}^2 + 1) - 3 = \\
&= 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+2} (F_{2n+3} - F_{2n+2}) + 1 = \\
&= 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+1} F_{2n+2} + 1 = (2F_{2n+1} F_{2n+2} - 1)^2.
\end{aligned}$$

1.37. $4F_{2n+1} F_{2n+2}^2 F_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+2}^2 + 1)^2, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $4F_{2n+1} F_{2n+2}^2 F_{2n+3} + 1 = 1 + 4F_{2n+2}^2 (F_{2n+1} F_{2n+3}) \stackrel{\text{Cassini}}{=} \\ = 1 + 4F_{2n+2}^2 (F_{2n+2}^2 + 1) = 4F_{2n+2}^4 + 4F_{2n+2}^2 + 1 = (2F_{2n+2}^2 + 1)^2.$

1.38. $F_{n+2}^2 - F_n^2 = F_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $F_{n+2}^2 - F_n^2 = \frac{1}{5}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})^2 - \frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)^2 = \\ = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+4} + \beta^{2n+4} - 2(\alpha\beta)^{n+2} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n) = \\ = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{2n+2}(\beta^2 - \beta^{-2}) + 2(\alpha\beta)^n(1 - (\alpha\beta)^2)) = \\ = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^{2n+2}(\beta^2 - \alpha^2)) = \frac{1}{5}(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = \\ = \frac{1}{5}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 \cdot (\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = F_{2n+2}.$

1.39. $F_m \cdot L_n + F_n \cdot L_m = 2F_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ (Ferns, 1967).

Demonstrație. $F_m \cdot L_n + F_n \cdot L_m = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^m + \beta^m) = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \alpha^n \beta^m + \alpha^m \beta^n - \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m - \beta^{m+n}) = \\ = \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = 2F_{m+n}.$

1.40. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2 = \\ = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{n+1} = \alpha^{2n+1}(\alpha^{-1} + \alpha) +$

$$\begin{aligned}
& + \beta^{2n+1}(\beta + \beta^{-1}) + 2(\alpha\beta)^{n+1}(1 + \alpha\beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = \\
& = \sqrt{5}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = 5F_{2n+1}.
\end{aligned}$$

1.41. $L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2 = 5(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2 = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2 =$
 $= \alpha^{2n+2} + \alpha^{n+2} \beta^n + \alpha^n \beta^{n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1} =$
 $= (\alpha\beta)^n(\alpha^2 + \beta^2) - 2(\alpha\beta)^{n+1} = (\alpha\beta)^n(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) =$
 $= (-1)^n(\alpha - \beta)^2 = (-1)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = (-1)^n (\sqrt{5})^2 = 5(-1)^n.$

1.42. $5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $5F_n^2 = 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \right)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n =$
 $= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(\alpha\beta)^n = L_n^2 - 4(-1)^n.$

1.43. $L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. $L_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = L_{2n} + 2(-1)^n.$

1.44. $L_{n+4} - L_n = 5F_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $L_{n+4} - L_n = \alpha^{n+4} + \beta^{n+4} - \alpha^n - \beta^n =$
 $= \alpha^{n+2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{n+2}(\beta^2 - \beta^{-2}) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) =$
 $= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) = \sqrt{5}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) = 5F_{n+2}.$

1.45. $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. $L_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = (\alpha^n - \beta^n)^2 + 2(\alpha\beta)^n = 5 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \right)^2 +$
 $+ 2(-1)^n = 5F_n^2 + 2(-1)^n.$

1.46. $L_{2m+n} - (-1)^m L_n = 5F_m F_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $L_{2m+n} - (-1)^m L_n = \alpha^{2m+n} + \beta^{2m+n} - (-1)^m (\alpha^n + \beta^n)$

$$\begin{aligned} 5F_m F_{m+n} &= 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^m - \beta^m) \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = \alpha^{2m+n} - \alpha^m \beta^{m+n} - \alpha^{m+n} \beta^m + \beta^{2m+n} = \\ &= \alpha^{2m+n} + \beta^{2m+n} - (\alpha\beta)^m (\alpha^n + \beta^n) = L_{2m+n} - (-1)^m L_n. \end{aligned}$$

1.47. $F_{2m+n} - (-1)^m F_n = F_m L_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

$$\begin{aligned} \textbf{Demonstrație. } F_m L_{m+n} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^m - \beta^m) (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2m+n} - \alpha^{m+n} \beta^m + \alpha^m \beta^{m+n} - \beta^{2m+n}) = F_{2m+n} - \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha\beta)^m (\alpha^n - \beta^n) = \\ &= F_{2m+n} - (-1)^m F_n. \end{aligned}$$

1.48. $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$$\begin{aligned} \textbf{Demonstrație. } F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n &= F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) = \frac{1}{5} (\alpha^n - \beta^n) (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} - \\ &- \beta^{n-1}) = \frac{1}{5} (\alpha^n - \beta^n) (\alpha^n (\alpha^2 + \alpha^{-2}) - \beta^n (\beta^2 - \beta^{-2})) = \\ &= \frac{1}{5} (\alpha^n - \beta^n) (\alpha^n (\alpha^2 - \beta^2) - \beta^n (\beta^2 - \alpha^2)) = \\ &= \frac{1}{5} (\alpha - \beta) (\alpha + \beta) (\alpha^n - \beta^n) (\alpha^n + \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = F_{2n}. \end{aligned}$$

1.49. $F_{2m+n} + (-1)^m F_n = F_{m+n} L_n, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

$$\begin{aligned} \textbf{Demonstrație. } F_{m+n} L_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) (\alpha^m + \beta^m) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2m+n} - \alpha^m \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} \beta^m - \beta^{2m+n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2m+n} - \beta^{2m+n}) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha\beta)^m (\alpha^n - \beta^n) = F_{2m} + (-1)^m F_n. \end{aligned}$$

1.50. $F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2} = F_{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (Lucas, 1876).

$$\begin{aligned} \textbf{Demonstrație. } F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2} &= \frac{1}{5} (\alpha^n - \beta^n) (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \\ &- \frac{1}{5} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) = \frac{1}{5} (\alpha^{2n+1} - \alpha^{n+1} \beta^n - \alpha^n \beta^{n+1} + \beta^{2n+1} - \alpha^{2n-3} + \\ &- \beta^{2n-3} + \alpha^{n-1} \beta^{n-2} - \beta^{n-1} \alpha^{n-2}) = F_{2n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha^{n-2} \beta^{n-1} + \alpha^{n-1} \beta^{n-2} - \beta^{2n-3}) = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - \alpha^{2n-3} - \beta^{2n-3} - (\alpha\beta)^n \alpha - \\
& - (\alpha\beta)^{n-2} \beta + (\alpha\beta)^{n-2} \alpha) = \frac{1}{5}(\alpha^{2n-1}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{2n-1}(\beta^2 - \beta^{-2}) - (-1)^n \alpha - \\
& - (-1)^n \beta + (-1)^{n-2} \alpha) = \frac{1}{5}(\alpha^{2n-1}(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^{2n-1}(\beta^2 - \alpha^2)) = \\
& = \frac{1}{5}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}) = F_{2n-1}.
\end{aligned}$$

1.51. $\sqrt[n]{\alpha F_n + F_{n-1}} + \sqrt[n]{F_{n+1} - \alpha F_n} = 1, \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$

Demonstrație. $\alpha F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \alpha\beta^n + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) =$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^n(\alpha + \alpha^{-1}) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^n(\alpha - \beta) = \alpha^n.
\end{aligned}$$

$F_{n+1} - \alpha F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} + \beta^n \alpha) =$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^n(\alpha - \beta) = \beta^n, \text{ apoi se ține seama că } \alpha + \beta = 1.
\end{aligned}$$

1.52. $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k L_k = 5^n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Avem:

$$5^n = (2\alpha - 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (2\alpha)^k (-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (2\alpha)^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2\alpha)^k \quad (1)$$

Analog:

$$5^n = (1 - 2\beta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2\beta)^k \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2) membru cu membru obținem:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} (\alpha^k + \beta^k) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} L_k, \text{ de unde concluzia.}$$

1.53. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{4mk} = F_{2mn} L_{2m}^n, \forall m, n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $\sqrt{5} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{4mk} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{4mk} - \beta^{4mk}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{4mk} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^{4mk} =$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \alpha^{4m})^n - (1 + \beta^{4m})^n = \alpha^{2mn}(\alpha^{2m} + \alpha^{-2m})^n - \beta^{2mn}(\beta^{2m} + \beta^{-2m})^n = \\
&= \alpha^{2mn}(\alpha^{2m} + \beta^{2m})^n - \beta^{2mn}(\alpha^{2m} + \beta^{2m})^n = (\alpha^{2m} + \beta^{2m})^n(\alpha^{2mn} - \beta^{2mn}) = \\
&= \sqrt{5}L_{2m}^n F_{2mn}, \text{ de unde rezultă concluzia.}
\end{aligned}$$

1.54. $L_{2m+n} - (-1)^m L_n = 5F_m F_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $L_{2m+n} - (-1)^m L_n = \alpha^{2m+n} + \beta^{2m+n} - \alpha^m \beta^m (\alpha^n + \beta^n) =$
 $= \alpha^{m+n}(\alpha^m - \beta^m) - \beta^{m+n}(\alpha^m - \beta^m) = (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n})(\alpha^m - \beta^m) = 5F_m F_{m+n}.$

1.55. $L_{3n} = L_n L_{2n} - (-1)^n L_n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $L_{3n} = \alpha^{3n} + \beta^{3n} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{2n} - (\alpha\beta)^n + \beta^{2n}) = L_n(L_{2n} - (-1)^n).$

1.56. $L_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. $L_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = (1 + \alpha)^n + (1 + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k =$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k.$

1.57. $F_{2n+i} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+i}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+i} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{k+i} - \beta^{k+i}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{k+i} -$
 $-\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^{k+i} = \frac{\alpha^i}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k - \frac{\beta^i}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^i (1 + \alpha)^n - \beta^i (1 + \beta)^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^i \alpha^{2n} - \beta^i \beta^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n+i} - \beta^{2n+i}) = F_{2n+i}.$

1.58. $\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} \right)^m = \frac{L_{mn} + \sqrt{5}F_{mn}}{2}, \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ (Fisk, 1963).}$

Demonstrație. Pe de o parte avem $\frac{L_{mn} + \sqrt{5}F_{mn}}{2} = \frac{\alpha^{mn} + \beta^{mn} + \alpha^{mn} - \beta^{mn}}{2} = \alpha^{mn}$, iar pe de altă parte avem: $\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^m = \left(\frac{\alpha^n + \beta^n + \alpha^n - \beta^n}{2}\right)^m = (\alpha^n)^m = \alpha^{mn}$, de unde urmează concluzia.

1.59. $L_{2n+1}F_{2n} = F_{4n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}$ (Hoggatt, 1967).

Demonstrație.
$$\begin{aligned} L_{2n+1}F_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1} + \alpha^{2n}\beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1}\beta^{2n}) = F_{4n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha\beta)^{2n}\beta - (\alpha\beta)^{2n}\alpha) = \\ &= F_{4n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta - \alpha) = F_{4n+1} - 1. \end{aligned}$$

1.60. $L_{2n+1}F_{2n+2} = F_{4n+3} - 1, \forall n \in \mathbf{N}$ (Hoggatt, 1967).

Demonstrație.
$$\begin{aligned} L_{2n+1}F_{2n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+3} - \beta^{4n+3} - \alpha^{2n+1}\beta^{2n+2} + \alpha^{2n+2}\beta^{2n+1}) = F_{4n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha\beta)^{2n+1}\beta - (\alpha\beta)^{2n+1}\alpha) = \\ &= F_{4n+3} + \frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha + \beta) = F_{4n+3} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = F_{4n+3} - 1. \end{aligned}$$

1.61. $F_{m+n} = F_m L_n - (-1)^n F_{m-n}, \forall m, n \in \mathbf{N}, m \geq n$ (Ruggles, 1970).

Demonstrație.
$$\begin{aligned} F_m L_n - (-1)^n F_{m-n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) - (\alpha\beta)^n(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} + \alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m - \beta^{m+n} - \alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = F_{m+n}. \end{aligned}$$

1.62. $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}$ (Hoggatt, 1965).

Demonstrație.
$$\begin{aligned} L_n L_{n+1} &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta = \\ &= L_{2n+1} + (\alpha\beta)^n(\alpha + \beta) = L_{2n+1} + (\alpha\beta)^n = L_{2n+1} + (-1)^n. \end{aligned}$$

1.63. $5(F_n^2 + F_{n-2}^2) = 3L_{2n-2} - 4(-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $5(F_n^2 + F_{n-2}^2) = 5\left(\frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)^2 + \frac{1}{5}(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})^2\right) =$
 $= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \alpha^{2n-4} + \beta^{2n-4} - 2(\alpha\beta)^{n-2} = \alpha^{2n-2}(\alpha^2 + \alpha^{-2}) +$
 $+ \beta^{2n-2}(\beta^2 + \beta^{-2}) - 4(\alpha\beta)^n = \alpha^{2n-2}(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^{2n-2}(\alpha^2 + \beta^2) - 4(-1)^n =$
 $= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) - 4(-1)^n = (\alpha^2 + \beta^2)L_{2n-2} - 4(-1)^n =$
 $= 3L_{2n-2} - 4(-1)^n.$

1.64. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k - \beta^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} (1 + \alpha)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (1 + \beta)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = F_{2n}.$

1.65. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k = L_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k =$
 $= (1 + \alpha)^n + (1 + \beta)^n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = L_{2n}.$

1.66. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k F_k = -F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha^k - \beta^k) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha)^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^k \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - \alpha)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - \beta)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\beta^n - \alpha^n) =$
 $= -\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) = -F_n.$

1.67. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k L_k = L_n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k L_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha^k + \beta^k) =$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^k \right) = (1-\alpha)^n + (1-\beta)^n = \alpha^n + \beta^n = L_n.$$

1.68. $F_{4n} - 1 = F_{2n+1} L_{2n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ (Dudley și Tucker, 1971).

Demonstrație. $F_{2n+1} L_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) (\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{4n} - \alpha^{2n-1} \beta^{2n-1} +$
 $+ \alpha^{2n+1} \beta^{2n-1} - \beta^{4n}) = F_{4n} - \left((\alpha\beta)^{2n} \frac{\beta}{\alpha} - (\alpha\beta)^{2n} \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = F_{4n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right) =$
 $= F_{4n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = F_{4n} - 1.$

1.69. $F_{4n+1} - 1 = F_{2n} L_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. $F_{2n} L_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{4n+1} - \alpha^{2n+1} \beta^{2n} +$
 $+ \alpha^{2n} \beta^{2n+1} - \beta^{4n+1}) = F_{4n+1} - \left((\alpha\beta)^{2n} \alpha - (\alpha\beta)^{2n} \beta \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = F_{4n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha - \beta) = F_{4n+1} - 1.$

1.70. $F_{4n} + 1 = F_{2n-1} L_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. $F_{2n-1} L_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}) (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{4n} - \alpha^{2n+1} \beta^{2n-1} +$
 $+ \alpha^{2n-1} \beta^{2n+1} - \beta^{4n}) = F_{4n} - \left((\alpha\beta)^{2n-1} \alpha^2 - (\alpha\beta)^{2n-1} \beta^2 \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = F_{4n} + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^2 - \beta^2) =$
 $= F_{4n} + 1.$

1.71. $F_{4n+1} + 1 = F_{2n+1} L_{2n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. $F_{2n+1} L_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{4n+1} - \alpha^{2n} \beta^{2n+1} +$
 $+ \alpha^{2n+1} \beta^{2n} - \beta^{4n+1}) = F_{4n+1} + \left((\alpha\beta)^{2n} \alpha - (\alpha\beta)^{2n} \beta \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = F_{4n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha - \beta) =$
 $= F_{4n+1} + 1.$

1.72. $F_{4n+2} + 1 = F_{2n+2} L_{2n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. $F_{2n+2} L_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{4n+2} + \alpha^{2n+2} \beta^{2n} -$

$$\begin{aligned}
-\alpha^{2n}\beta^{2n+2}-\beta^{4n+2}) &= F_{4n+2} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n}(\alpha^2-\beta^2) = F_{4n+2} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \\
&= F_{4n+2} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta) = F_{4n+2} + 1.
\end{aligned}$$

1.73. $F_{4n+2} - 1 = F_{2n}L_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație.
$$\begin{aligned}
F_{2n}L_{2n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})(\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+2}-\alpha^{2n+2}\beta^{2n}+ \\
&+ \alpha^{2n}\beta^{2n+2}-\beta^{4n+2}) = F_{4n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n}(\alpha^2-\beta^2) = F_{4n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \\
&= F_{4n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta) = F_{4n+2} - 1.
\end{aligned}$$

1.74. $F_{4n+3} + 1 = F_{2n+1}L_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}L_{2n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})(\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+3}+\alpha^{2n+1}\beta^{2n+2}- \\
&- \alpha^{2n+2}\beta^{2n+1}-\beta^{4n+3}) = F_{4n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n+1}(\alpha-\beta) = F_{4n+3} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta) = \\
&= F_{4n+3} + 1.
\end{aligned}$$

1.75. $F_{4n+3} - 1 = F_{2n+2}L_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
F_{2n+2}L_{2n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})(\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{4n+3}+\alpha^{2n+2}\beta^{2n+1}- \\
&- \alpha^{2n+1}\beta^{2n+2}-\beta^{4n+3}) = F_{4n+3} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^{2n+1}(\alpha-\beta) = F_{4n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta) = \\
&= F_{4n+3} - 1.
\end{aligned}$$

1.76. $F_mL_n + F_{m-1}L_{n-1} = L_{m+n-1}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ (Hansen, 1972).

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
F_mL_n + F_{m-1}L_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha^m-\beta^m)(\alpha^n+\beta^n) + (\alpha^{m-1}-\beta^{m-1})(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n}-\alpha^n\beta^m + \alpha^m\beta^n - \beta^{m+n} + \alpha^{m+n-2}-\alpha^{n-1}\beta^{m-1} + \alpha^{m-1}\beta^{n-1} - \beta^{m+n-2}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n-1} (\alpha + \alpha^{-1}) - \beta^{m+n-1} (\beta + \beta^{-1}) - \alpha^{n-1} \beta^{m-1} (1 + \alpha\beta) + \alpha^{m-1} \beta^{n-1} (1 + \alpha\beta)) = \\
&= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1}) = \alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1} = L_{m+n-1}.
\end{aligned}$$

1.77. $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} ((\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n) + (\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})) = \\
&= \frac{1}{5} (\alpha^{m+n} - \alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n-2} - \alpha^{n-1} \beta^{m-1} - \alpha^{m-1} \beta^{n-1} + \beta^{m+n-2}) = \\
&= \frac{1}{5} (\alpha^{m+n-1} (\alpha + \alpha^{-1}) + \beta^{m+n-1} (\beta + \beta^{-1}) - \alpha^{n-1} \beta^{m-1} (1 + \alpha\beta) - \alpha^{m-1} \beta^{n-1} (1 + \alpha\beta)) = \\
&= \frac{1}{5} (\alpha^{m+n-1} (\alpha - \beta) + \beta^{m+n-1} (\beta - \alpha)) = \\
&= \frac{\alpha - \beta}{5} (\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = F_{m+n-1}.
\end{aligned}$$

1.78. $L_m L_n + L_{m-1} L_{n-1} = 5F_{m+n-1}, \forall m, n \in \mathbf{N}^* \text{ (Hansen, 1972).}$

Demonstrație. $L_m L_n + L_{m-1} L_{n-1} = (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{m+n} + \alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n-2} + \alpha^{m-1} \beta^{n-1} + \alpha^{n-1} \beta^{m-1} + \beta^{m+n-2} = \\
&= \alpha^{m+n-1} (\alpha + \alpha^{-1}) + \beta^{m+n-1} (\beta + \beta^{-1}) + \alpha^{m-1} \beta^{n-1} (\alpha\beta + 1) + \alpha^{n-1} \beta^{m-1} (\alpha\beta + 1) = \\
&= (\alpha - \beta) \alpha^{m+n-1} + (\beta - \alpha) \beta^{m+n-1} = (\alpha - \beta) (\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = \\
&= \sqrt{5} (\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n-1} - \beta^{m+n-1}) = 5F_{m+n-1}.
\end{aligned}$$

1.79. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k - \beta^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (1 + \alpha)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (1 + \beta)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = F_{2n}.$$

1.80. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_{mk} L_{mn-mk} = 2^n L_{mn} + 2L_m^n, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_{mk} L_{mn-mk} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mk} + \beta^{mk})(\alpha^{mn-mk} + \beta^{mn-mk}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mn} + \alpha^{mk} \beta^{mn-mk} + \alpha^{mn-mk} \beta^{mk} + \beta^{mn}) = (\alpha^{mn} + \beta^{mn}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((\alpha^m)^k (\beta^m)^{n-k} + (\alpha^m)^{n-k} (\beta^m)^k) = 2^n L_{mn} + 2(\alpha^m + \beta^m)^n = \\ &= 2^n L_{mn} + 2(\alpha^m + \beta^m)^n = 2^n L_{mn} + 2I_m^n. \end{aligned}$$

1.81.
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{mk} F_{mn-mk} = \frac{1}{5} (2^n L_{mn} - 2I_m^n), \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{mk} F_{mn-mk} &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mk} - \beta^{mk})(\alpha^{mn-mk} - \beta^{mn-mk}) = \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mn} - \alpha^{mk} \beta^{mn-mk} - \alpha^{mn-mk} \beta^{mk} + \beta^{mn}) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot L_{mn} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} - \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((\alpha^m)^k (\beta^m)^{n-k} - (\alpha^m)^{n-k} (\beta^m)^k) = \\ &= \frac{2^n}{5} L_{mn} - \frac{2}{5} (\alpha^m + \beta^m)^n = \frac{2^n L_{mn} - 2I_m^n}{5}. \end{aligned}$$

1.82.
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{mk} L_{mn-mk} = 2^n F_{mn}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{mk} L_{mn-mk} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mk} - \beta^{mk})(\alpha^{mn-mk} + \beta^{mn-mk}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mn} - \beta^{mn}) + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{mk} \beta^{mn-mk} - \alpha^{mn-mk} \beta^{mk}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\alpha^{mn} - \beta^{mn}) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \frac{1}{\sqrt{5}} ((\alpha^m + \beta^m)^n - (\alpha^m - \beta^m)^n) = 2^n F_{mn}. \end{aligned}$$

1.83.
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k L_{n-k} = 2^n L_n + 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k L_{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k)(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^n + \beta^n) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k \beta^{n-k} + \alpha^{n-k} \beta^k) = L_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + 2(\alpha + \beta)^n = \end{aligned}$$

$$= 2^n L_n + 2.$$

$$\mathbf{1.84.} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k F_{n-k} = \frac{1}{5} (2^n L_n - 2), \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k F_{n-k} &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}) = \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^n + \beta^n) - \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k \beta^{n-k} + \alpha^{n-k} \beta^k) = \frac{L_n}{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \frac{2}{5} (\alpha + \beta)^n = \\ &= \frac{2^n L_n}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2^n L_n - 2}{5}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.85.} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k L_{n-k} = 2^n F_n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k L_{n-k} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k \beta^{n-k} - \alpha^{n-k} \beta^k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n F_n. \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.86.} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_k = (-1)^{n-1} F_n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_k &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (\alpha^k - \beta^k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \beta^k = \frac{1}{\sqrt{5}} (-1 + \alpha)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (-1 + \beta)^n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (-\beta)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (-\alpha)^n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) = (-1)^{n-1} F_n. \end{aligned}$$

1.87. $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_{2k} = F_n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_{2k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (\alpha^{2k} - \beta^{2k}) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \alpha^{2k} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \beta^{2k} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-1 + \alpha^2)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (-1 + \beta^2)^n =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) = F_n.$

1.88. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k} = F_{m+2n}, \forall m \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{m+k} - \beta^{m+k}) =$
 $= \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k = \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} (1 + \alpha)^n - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} (1 + \beta)^n =$
 $= \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^{2n} - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} \cdot \beta^{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+2n} - \beta^{m+2n}) = F_{m+2n}.$

1.89. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k = L_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k =$
 $= (1 + \alpha)^n + (1 + \beta)^n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = L_{2n}.$

1.90. $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} L_k = (-1)^n L_n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} L_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \alpha^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \beta^k = \\ &= (-1 + \alpha)^n + (-1 + \beta)^n = (\alpha\beta + \alpha)^n + (\alpha\beta + \beta)^{2n} = \alpha^n (\beta + 1)^n + \beta^n (\alpha + 1)^n = \\ &= \alpha^n \beta^{2n} + \beta^n \alpha^{2n} = (\alpha\beta)^n (\alpha^n + \beta^n) = (-1)^n L_n. \end{aligned}$$

1.91. $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} L_{2k} = L_n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} L_{2k} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (\alpha^{2k} + \beta^{2k}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \alpha^{2k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \beta^{2k} = \\ &= (-1 + \alpha^2)^n + (-1 + \beta^2)^n = \alpha^n + \beta^n = L_n.\end{aligned}$$

1.92. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{4m(k+p)} = L_{2m}^n F_{2m+4mp}, \forall m, n, p \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{4m(k+p)} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{4m(k+p)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^{4m(k+p)} = \\ &= \frac{\alpha^{4mp}}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^{4m})^k - \frac{\beta^{4mp}}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\beta^{4m})^k = \\ &= \frac{\alpha^{4mp}}{\sqrt{5}} (1 + \alpha^{4m})^n - \frac{\beta^{4mp}}{\sqrt{5}} (1 + \beta^{4m})^n = \\ &= \frac{\alpha^{4mp}}{\sqrt{5}} \alpha^{2mn} (\alpha^{-2m} + \alpha^{2m})^n - \frac{\beta^{4mp}}{\sqrt{5}} \beta^{2mn} (\beta^{-2m} + \beta^{2m})^n = \\ &= \frac{\alpha^{4mp+2mn}}{\sqrt{5}} (\alpha^{2m} + \beta^{2m})^n - \frac{\beta^{4mp+2mn}}{\sqrt{5}} (\alpha^{2m} + \beta^{2m})^n = \\ &= (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\alpha^{2mn+4mp} - \beta^{2mn+4mp}) = L_{2m}^n F_{2mn+4mp}.\end{aligned}$$

1.93. $\sum_{k=1}^n k F_k = n F_{n+2} - F_{n+3} + 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Fie $a_n = \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n k F_k = F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \dots +$

$$\begin{aligned}+ n F_n &= \sum_{k=1}^n F_k + \sum_{k=2}^n F_k + \sum_{k=3}^n F_k + \dots + \sum_{k=n}^n F_k = a_n + (a_n - a_1) + (a_n - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = \\ &= n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = n(F_{n+2} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (F_{k+2} - 1) = n F_{n+2} - n - \sum_{k=1}^{n-1} F_{k+2} + (n-1) = \\ &= n F_{n+2} - 1 - \sum_{k=1}^n F_{k+2} = n F_{n+2} - 1 - \sum_{k=3}^{n+1} F_k = n F_{n+2} - 1 - \sum_{k=1}^{n+1} F_k + F_1 + F_2 = \\ &= n F_{n+2} - 1 - (F_{n+3} - 1) + 2 = n F_{n+2} - (F_{n+4} - F_{n+2}) + 2 = (n+1) F_{n+2} - F_{n+4} + 2.\end{aligned}$$

1.94. $\sum_{k=1}^n k L_k = n L_{n+2} - L_{n+3} + 4, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Fie $c_n = \sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \sum_{k=1}^n kL_k = L_1 + 2L_2 + 3L_3 + \dots +$
 $+ nL_n = c_n + (c_n - c_1) + (c_n - c_2) + \dots + (c_n - c_{n-1}) =$
 $= nc_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k = n(L_{n+2} - 3) - \sum_{k=1}^{n-1} (L_{k+2} - 3) = nL_{n+2} - 3n - \sum_{k=1}^{n-1} L_{k+2} + 3(n-1) =$
 $= nL_{n+2} - \sum_{k=3}^{n+1} L_k + L_1 + L_2 - 3 = nL_{n+2} - L_{n+4} + L_{n+2} + 4 = (n+1)L_{n+2} - L_{n+4} + 4.$

1.95. $\sum_{k=1}^n (n-k+1)F_k = F_{n+4} - n - 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. Fie $b_n^* = \sum_{k=1}^n (n-k+1)F_k$ și $b_n = \sum_{k=1}^n kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2, \forall n \in \mathbb{N}$,

atunci: $b_n + b_n^* = \sum_{k=1}^n (k+n-k+1)F_k = (n+1) \sum_{k=1}^n F_k = (n+1)(F_{n+2} - 1)$ și deci

$$b_n^* = (n+1)(F_{n+2} - 1) - b_n = (n+1)F_{n+2} - n - 1 - nF_{n+2} + F_{n+3} - 2 =$$

$$= F_{n+3} + F_{n+2} - n - 3 = F_{n+4} - n - 3.$$

1.96. $\sum_{k=1}^n (n-k+1)L_k = L_{n+4} - 3n - 7, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (n-k+1)L_k = (n+1) \sum_{k=1}^n L_k - \sum_{k=1}^n kL_k = (n+1)(L_{n+2} - 3) -$
 $- nL_{n+2} + L_{n+3} - 4 = L_{n+3} + L_{n+2} - 3n - 7.$

1.97. $\sum_{k=1}^n (2k-1)F_{2k-1} = (2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstrație. Fie $u_n = \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)F_{2k-1} =$
 $= F_1 + 3F_3 + 5F_5 + \dots + (2n-1)F_{2n-1} = \sum_{k=1}^n F_{2k-1} + 2 \sum_{k=2}^n F_{2k-1} + 2 \sum_{k=3}^n F_{2k-1} + \dots +$
 $+ 2 \sum_{k=n}^n F_{2k-1} = u_n + 2(u_n - u_1) + 2(u_n - u_2) + \dots + 2(u_n - u_{n-1}) =$
 $= (2n-1)u_n - 2 \sum_{k=1}^{n-1} u_k = (2n-1)F_{2n} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k} = (2n-1)F_{2n} - 2(F_{2n-1} - 1) =$
 $= (2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2.$

$$1.98. \sum_{k=1}^n (2n-2k+1)F_{2k-1} = F_{2n} + 2F_{2n-1} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (2n-2k+1)F_{2k-1} = 2n \sum_{k=1}^n F_{2k-1} - \sum_{k=1}^n (2k-1)F_{2k-1} =$
 $= 2nF_{2n} - (2n-1)F_{2n} + 2F_{2n-1} - 2 = F_{2n} + 2F_{2n-1} - 2.$

$$1.99. \sum_{k=1}^n kF_{2k} = nF_{2n+1} - F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. Fie $v_n = \sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$, și $b_n = \sum_{k=1}^n kF_{2k} = F_2 + 2F_4 + 3F_6 +$
 $+ \dots + nF_{2n} = \sum_{k=1}^n F_{2k} + \sum_{k=2}^n F_{2k} + \dots + \sum_{k=n}^n F_{2k} = v_n + (v_n - v_1) + (v_n - v_2) + \dots + (v_n - v_{n-1}) =$
 $= nv_n - \sum_{k=1}^{n-1} v_k = n(F_{n+1} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (F_{k+1} - 1) = nF_{2n+1} - n - \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k+1} + (n-1) =$
 $= nF_{2n+1} - 1 - \sum_{k=2}^n F_{2k-1} = nF_{2n+1} - \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = nF_{2n+1} - F_{2n}.$

$$1.100. \sum_{k=1}^n (n-k+1)F_{2k} = F_{2n+2} - n - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (n-k+1)F_{2k} = (n+1) \sum_{k=1}^n F_{2k} - \sum_{k=1}^n kF_{2k} = (n+1)(F_{2n+1} - 1) -$
 $- nF_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+1} + F_{2n} - n - 1 = F_{2n+2} - n - 1.$

$$1.101. \sum_{k=1}^n (a-c+ck)F_k = (a-c+nc)F_{n+2} - cF_{n+3} + 2c, \forall a, c \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (a-c+ck)F_k = (a-c) \sum_{k=1}^n F_k + c \sum_{k=1}^n kF_k = (a-c)(F_{n+2} - 1) +$
 $+ c(nF_{n+2} - F_{n+3} + 2) = (a-c+nc)F_{n+2} - cF_{n+3} + 2c.$

$$1.102. \sum_{k=1}^n (a-d+dk)L_k = (a-d+nd)L_{n+2} - dL_{n+3} + 7d - 3a, \forall a, d \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (a-d+dk)L_k = (a-d) \sum_{k=1}^n L_k + d \sum_{k=1}^n kL_k = (a-d)(L_{n+2} - 3) +$
 $+ d(nL_{n+2} - L_{n+3} + 4) = (a-d+nd)L_{n+2} - dL_{n+3} + 4d - 3(a-d) =$

$$= (a - d + nd)L_{n+2} - dL_{n+3} + 7d - 3a.$$

1.103. $\sum_{k=1}^n (a + (n-k)c)F_k = aF_{n+2} + cF_{n+3} - a - (n+2)c, \forall a, c \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (a + (n-k)c)F_k = (a + nc)\sum_{k=1}^n F_k - c\sum_{k=1}^n kF_k = (a + nc)(F_{n+2} - 1) -$
 $-c(nF_{n+2} - F_{n+3} + 2) = (a + nc - nc)F_{n+2} + cF_{n+3} - a - nc - 2c =$
 $= aF_{n+2} + cF_{n+3} - a - (n+2)c.$

1.104. $\sum_{k=1}^n (a + (n-k)c)L_k = aL_{n+2} + cL_{n+3} - 3a - 3nc + 4c, \forall a, c \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (a + (n-k)c)L_k = (a + nc)\sum_{k=1}^n L_k - c\sum_{k=1}^n kL_k = (a + nc)(L_{n+2} - 3) -$
 $-c(nL_{n+2} - L_{n+3} + 4) = aL_{n+2} + cL_{n+3} - 3a - 3nc + 4c.$

1.105. $\sum_{k=1}^n kL_{2k} = nL_{2n+1} - L_{2n} + 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Fie $w_n = \sum_{k=1}^n L_{2k} = L_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ atunci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kL_{2k} &= L_2 + 2L_4 + 3L_6 + \dots + nL_{2n} = \sum_{k=1}^n L_{2k} + \sum_{k=2}^n L_{2k} + \sum_{k=3}^n L_{2k} + \dots + \sum_{k=n}^n L_{2k} = \\ &= w_n + (w_n - w_1) + (w_n - w_2) + \dots + (w_n - w_{n-1}) = nw_n - \sum_{k=1}^{n-1} w_k = \\ &= n(L_{2n+1} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (L_{2k+1} - 1) = nL_{2n+1} - n + (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} L_{2k+1} = \\ &= nL_{2n+1} - 1 - \sum_{k=1}^n L_{2k-1} + L_1 = nL_{2n+1} - L_{2n} + 2. \end{aligned}$$

1.106. $\sum_{k=1}^n (n-k+1)L_{2k} = L_{2n+2} - n - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=1}^n (n-k+1)L_{2k} = (n+1)\sum_{k=1}^n L_{2k} - \sum_{k=1}^n kL_{2k} =$
 $= (n+1)(L_{2n+1} - 1) - nL_{2n+1} + L_{2n} - 2 = nL_{2n+1} - n + L_{2n+1} - 1 - nL_{2n+1} + L_{2n} - 2 =$
 $= L_{2n+2} - n - 3.$

$$\mathbf{1.107.} \sum_{k=1}^n (2k-1)L_{2k-1} = (2n-1)L_{2n} - 2L_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. Fie $u_n = \sum_{k=1}^n L_{2k-1} = L_{2n} - 2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1)L_{2k-1} &= L_1 + 3L_3 + 5L_5 + \dots + (2n-1)L_{2n-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n L_{2k-1} + 2 \sum_{k=2}^n L_{2k-1} + 2 \sum_{k=3}^n L_{2k-1} + \dots + 2 \sum_{k=n}^n L_{2k-1} = \\ &= u_n + 2(u_n - u_1) + 2(u_n - u_2) + \dots + 2(u_n - u_{n-1}) = (2n-1)u_n - 2 \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \\ &= (2n-1)(L_{2n} - 2) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} (L_k - 2) = (2n-1)L_{2n} - 4n + 2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} L_{2k} + 4(n-1) = \\ &= (2n-1)L_{2n} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} L_{2k} - 2 = (2n-1)L_{2n} - 2(L_{2n-1} - 1) - 2 = 2nL_{2n} - L_{2n} - 2L_{2n-1} = \\ &= (2n-1)L_{2n} - 2L_{2n-1}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.108.} \sum_{k=1}^n (2n-2k+1)L_{2k-1} = L_{2n+1} + L_{2n-1} - 4n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Demonstrație.} \quad \sum_{k=1}^n (2n-2k+1)L_{2k-1} &= 2n \sum_{k=1}^n L_{2k-1} - \sum_{k=1}^n (2k-1)L_{2k-1} = \\ &= 2n(L_{2n} - 2) - (2n-1)L_{2n} + 2L_{2n-1} = 2nL_{2n} - 4n - 2nL_{2n} + L_{2n} + 2L_{2n-1} = \\ &= L_{2n} + L_{2n-1} + L_{2n-1} - 4n = L_{2n+1} + L_{2n-1} - 4n. \end{aligned}$$

*

*

*

*

*

*

UN ALT MOD DE STABILIRE A UNOR FORMULE

”Matematicianul este împlânzitorul ce a domesticit infinitul”

Lucian Blaga

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} - 1$, cu

$$f'(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, & x \in (-\infty, +\infty) - \{1\} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$$xf'(x) = \sum_{k=1}^n kx^k, \forall x \in \mathbf{R} - \{1\}.$$

1.1 bis. $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$ (**Lucas**, 1876).

Demonstrație. $\frac{1}{\sqrt{5}} f(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{5}} f(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^n \alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^n \beta^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^n (\alpha^k - \beta^k) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - 1 - \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{\beta} - \frac{1-\beta^{n+1}}{\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha - \alpha^{n+2} - \beta + \beta^{n+2}}{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) - \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha - \beta) = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1.$$

1.2 bis. $\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $f(\alpha) + f(\beta) = \sum_{k=1}^n \alpha^k + \sum_{k=1}^n \beta^k = \sum_{k=1}^n L_k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - 1 + \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} - 1 =$
 $= \frac{1-\alpha^{n+1}}{\beta} + \frac{1-\beta^{n+1}}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha + \beta - \alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha\beta} - 2 = L_{n+2} - 3.$

1.93 bis. $\sum_{k=1}^n kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $xf'(x) - yf'(y) = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - y \sum_{k=1}^n ky^{k-1} = \sum_{k=1}^n kx^k - \sum_{k=1}^n ky^k =$
 $= \sum_{k=1}^n k(x^k - y^k)$ și deci $\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^n k(x^k - y^k) = \frac{x}{\sqrt{5}} f'(x) - \frac{y}{\sqrt{5}} f'(y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n kF_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha f'(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta f'(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha - (n+1)\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2} -$
 $-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\beta - (n+1)\beta^{n+1} + n\beta^{n+2}}{(1-\beta)^2} = \frac{\alpha - (n+1)\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{\sqrt{5}\beta^2} - \frac{\beta - (n+1)\beta^{n+1} + n\beta^{n+2}}{\sqrt{5}\alpha^2} =$
 $= \frac{\alpha^3 - (n+1)\alpha^{n+3} + n\alpha^{n+4} - \beta^3 + (n+1)\beta^{n+3} - n\beta^{n+4}}{\sqrt{5}(\alpha\beta)^2} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^3 - \beta^3) - \frac{n+1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}) + \frac{n}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+4} - \beta^{n+4}) =$
 $= F_3 - (n+1)F_{n+3} + nF_{n+4} = n(F_{n+4} - F_{n+3}) - F_{n+3} + F_3 =$
 $= nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 = nF_{n+2} - (F_{n+4} - F_{n+2}) + 2 = (n+1)F_{n+2} - F_{n+4} + 2.$

1.94 bis. $\sum_{k=1}^n kL_k = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $xf'(x) + yf'(y) = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} + y \sum_{k=1}^n ky^{k-1} = \sum_{k=1}^n kx^k + \sum_{k=1}^n ky^k =$
 $= \sum_{k=1}^n k(x^k + y^k)$ și deci $\alpha f'(\alpha) + \beta f'(\beta) = \sum_{k=1}^n k(\alpha^k + \beta^k) = \sum_{k=1}^n kL_k \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n kL_k = \alpha f'(\alpha) + \beta f'(\beta) = \alpha \cdot \frac{1 - (n+1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2} +$
 $+ \beta \cdot \frac{1 - (n+1)\beta^n + n\beta^{n+1}}{(1-\beta)^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - (n+1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}) + \frac{\beta}{\alpha^2} (1 - (n+1)\beta^n + n\beta^{n+1}) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^3 - (n+1)\alpha^{n+3} + n\alpha^{n+4} + \beta^3 - (n+1)\beta^{n+3} + n\beta^{n+4}}{(\alpha\beta)^2} = \\
&= \alpha^3 + \beta^3 - (n+1)(\alpha^{n+3} + \beta^{n+3}) + n(\alpha^{n+4} + \beta^{n+4}) = \\
&= L_3 - (n+1)L_{n+3} + nL_{n+4} = 4 - L_{n+3} + n(L_{n+4} - L_{n+3}) = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
* & *
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
*
\end{array}$$

*

*

*

MATRICE FIBONACCI

”Oriunde avem numere există frumusețe”

Proclus Diadochus

$$\text{Fie, } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, Q^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teoremă. $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Prin inducție verificarea este imediată.

$$Q^{n+1} = Q^n \cdot Q = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

ceea ce demonstrează afirmația.

Teoremă. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

.

Demonstrație. $\det Q = -1 \Rightarrow \det Q^n = (-1)^n$. Pe de altă parte:

$$\det Q^n = \det \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2, \text{ de unde rezultă imediat concluzia.}$$

Teoremă. $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n, \forall m, n \in \mathbf{N}^* \quad (\text{i})$

$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \forall m, n \in \mathbf{N}^* \quad (\text{ii})$

$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \forall m, n \in \mathbf{N}^* \quad (\text{j})$

$F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}, \forall m, n \in \mathbf{N}^* \quad (\text{jj})$

Demonstrație. Avem:

$$Q^{m+n} = Q^m \cdot Q^n = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă enunțul.}$$

- Dacă în (i) luăm $m = n$, atunci obținem:

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Dacă în (ii) și (j) luăm $m = n$, atunci obținem:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dacă în (jj) luăm $m = n$, atunci obținem:

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\mathbf{1.109.} \quad F_{m+1}L_{n+1} + F_mL_n = L_{m+n+1}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. În (i) luăm $n+1$ în loc de n și deducem:

$$F_{m+n+2} = F_{m+1}F_{n+2} + F_mF_{n+1}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (ii)$$

Adunând (1) cu (ii) avem:

$F_{m+n} + F_{m+n+2} = F_{m+1}(F_n + F_{n+2}) + F_m(F_{n-1} + F_{n+1}), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$, de unde dacă ținem seama de relația **1.15** rezultă că:

$$L_{m+n+1} = F_{m+1}L_{n+1} + F_mL_n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\mathbf{1.110.} \quad F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1} = L_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. În relația **1.109** luăm $n-1$ în loc de n și obținem rezultatul.

$$\mathbf{1.111.} \quad F_mL_n + F_nL_m = 2F_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. Adunând (ii) cu (j) obținem:

$2F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} + F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n = F_m(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m-1})$, apoi ținem seama de **1.15** și obținem concluzia.

$$\mathbf{1.112.} \quad L_mL_n + 5F_mF_n = 2L_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. $L_mL_n + 5F_mF_n = (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n) =$

$$\begin{aligned} &= \alpha^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n} = \\ &= 2(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) = 2L_{m+n}. \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică a matricei Q^n este:

$$\begin{aligned}
\det(Q^n - xI_2) &= \begin{vmatrix} F_{n+1} - x & F_n \\ F_n & F_{n-1} - x \end{vmatrix} = (F_{n+1} - x)(F_{n-1} - x) - F_n^2 = \\
&= x^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})x + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = x^2 - \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} + \alpha^{n-1} - \beta^{n+1} - \beta^{n-1})x + \\
&\quad + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = x^2 - L_n x + (-1)^n = 0, \text{ cu rădăcinile:} \\
x_1 &= \frac{L_n + \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}, \quad x_2 = \frac{L_n - \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}, \quad x_1 = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} = \alpha^n, \\
x_2 &= \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = \beta^n. \text{ Deci ecuația caracteristică a matricei } Q \text{ este:}
\end{aligned}$$

$$x^2 - L_1 x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ și atunci } Q^2 - Q - I_2 = 0 \Leftrightarrow Q(Q - I_2) = I_2.$$

Deci matricea $Q - I_2$ este inversabilă cu inversa $(Q - I_2)^{-1} = Q$.

Avem:

$$\begin{aligned}
&(I_2 + Q + Q^2 + \dots + Q^n)(Q - I_2) = \\
&= Q + Q^2 + Q^3 + \dots + Q^n + Q^{n+1} - I_2 - Q - Q^2 - \dots - Q^n = Q^{n+1} - I_2 \\
&(I_2 + Q + Q^2 + \dots + Q^n)(Q - I_2)Q = (Q^{n+1} - I_2)Q \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow I_2 + Q + Q^2 + \dots + Q^n = Q^{n+2} - Q.
\end{aligned}$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n+1} & F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ F_1 + F_2 + \dots + F_n & 1 + F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+3} - 1 & F_{n+2} - 1 \\ F_{n+2} - 1 & F_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ de unde:}
\end{aligned}$$

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n+1} = F_{n+3} - 1, F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1,$$

relații demonstrate anterior.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-1}} Q^n &= \begin{pmatrix} \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} & \frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \frac{F_n}{F_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n-1}} & \frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \frac{F_n}{F_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{F_{n-1}} Q^n \right) &= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n-1}} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$1.113. F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2, \forall n \geq 3.$$

$$\begin{aligned}
\textbf{Demonstrație. } F_n^2 &= (F_{n-1} + F_{n-2})^2 = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} = \\
&= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - (F_{n-1} - F_{n-2})^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2.
\end{aligned}$$

*

*

*

POLINOAME CATALAN – FIBONACCI

”Dumnezeu a făcut numerele întregi, toate celelalte sunt create de om”

Leopold Kronecker

$$f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, f_0(x) = 0, \\ f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2 + 1, f_4(x) = x^3 + 2x, f_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1, f_6(x) = 0.$$

Avem ecuația caracteristică:

$$t^2 - xt - 1 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$t_1 = \alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, t_2 = \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ și atunci } f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}.$$

Teoremă. $x \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. Avem $f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$ și deci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f_{k+2}(x) &= x \sum_{k=0}^n f_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^n f_k(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n f_{k+2}(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) = x \sum_{k=0}^n f_{k+1}(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n xf_{k+1}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) - f_1(x) - f_0(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \sum_{k=0}^n f_{k+1}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Fie $Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(x) & f_1(x) \\ f_1(x) & f_0(x) \end{pmatrix}$. Prin inducție matematică se arată că:

$$Q^n(x) = \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\det Q(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ și deci } \det Q^n(x) = (\det Q(x))^n = (-1)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{vmatrix} = (-1)^n \Leftrightarrow f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2(x) = (-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Pentru $x = 1$ obținem $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

$$Q^{m+n}(x) = Q^m(x)Q^n(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_{m+n+1}(x) & f_{m+n}(x) \\ f_{m+n}(x) & f_{m+n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+1}(x) & f_m(x) \\ f_m(x) & f_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m+1}(x)f_{n+1}(x) + f_m(x)f_n(x) & f_{m+1}(x)f_n(x) + f_m(x)f_{n-1}(x) \\ f_m(x)f_{n+1}(x) + f_{m-1}(x)f_n(x) & f_m(x)f_n(x) + f_{m-1}(x)f_{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

de unde se deduce că:

$$f_{m+n+1}(x) = f_{m+1}(x)f_{n+1}(x) + f_m(x)f_n(x), \forall m, n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R} \quad (*)$$

$$f_{m+n}(x) = f_{m+1}(x)f_n(x) + f_m(x)f_{n-1}(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R} \quad (**)$$

$$f_{m+n}(x) = f_m(x)f_{n+1}(x) + f_{m-1}(x)f_n(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R} \quad (***)$$

$$f_{m+n-1}(x) = f_m(x)f_n(x) + f_{m-1}(x)f_{n-1}(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R} \quad (****)$$

Pentru $x = 1$ se obțin relații caracteristice șirului *Fibonacci*.

Teoremă. $f_{m+n+1}(x) = f_{m+1}(x)f_{n+1}(x) + f_m(x)f_n(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. $f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$ unde $\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}.$

De fapt relația teoremei este demonstrată mai sus cu ajutorul identității

$$Q^{m+n}(x) = Q^m(x)Q^n(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Vom încerca deci o demonstrație altfel.

$$f_{m+n+1}(x) = f_{m+1}(x)f_{n+1}(x) + f_m(x)f_n(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^{m+n+1}(x) - \beta^{m+n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{\alpha^{m+1}(x) - \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \cdot \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} +$$

$$+ \frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \cdot \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \Leftrightarrow (\alpha(x) - \beta(x))(\alpha^{m+n+1}(x) - \beta^{m+n+1}(x)) =$$

$$= \alpha^{m+n+2}(x) - \alpha^{m+1}(x)\beta^{n+1}(x) - \alpha^{n+1}(x)\beta^{m+1}(x) + \beta^{m+n+2}(x) + \alpha^{m+n}(x) -$$

$$- \alpha^m(x)\beta^n(x) - \alpha^n(x)\beta^m(x) + \beta^{m+n}(x) =$$

$$= \alpha^{m+n+1}(x)(\alpha(x) + (\alpha(x))^{-1}) + \beta^{m+n+1}(x)(\beta(x) + (\beta(x))^{-1}).$$

Observăm că:

$$\alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{x^2 + 4}, \alpha(x)\beta(x) = -1, \alpha(x) + \beta(x) = x,$$

$$\begin{aligned}\alpha(x) + (\alpha(x))^{-1} &= \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{2(x - \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - x^2 - 4} = \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} - \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \sqrt{x^2 + 4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(x) + (\beta(x))^{-1} &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{2}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{2(x + \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - x^2 - 4} = \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} - \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} = -\sqrt{x^2 + 4}, \forall x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Cu acestea putem arăta că:

$$\begin{aligned}f_{m+n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^{m+n+1}(x)(\alpha(x) + (\alpha(x))^{-1}) + \beta^{m+n+1}(x)(\beta(x) + (\beta(x))^{-1}) \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f_{m+n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^{m+n+1}(x)\sqrt{x^2 + 4} - \beta^{m+n+1}(x)\sqrt{x^2 + 4} \right) = \\ &= \alpha^{m+n+1}(x) - \beta^{m+n+1}(x), \text{ și astfel teorema este demonstrată.}\end{aligned}$$

*

*

*

*

*

*

POLINOAMELE LUI LUCAS

”Ecuatia $x^n + y^n = z^n$ este imposibilă pentru orice număr natural $n \geq 3$, și am găsit și o dovadă admirabilă, dar marginea cărții lui Diofant, Aritmetica, este prea îngustă pentru această demonstrație.”

Pierre de Fermat

$$\begin{aligned} l_{n+2}(x) &= xl_{n+1}(x) + l_n(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R} \\ l_0(x) &= 2, l_1(x) = x, l_2(x) = x^2 + 2, l_3(x) = x^3 + 3x, l_4(x) = x^4 + 4x + 2, \\ l_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x, l_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2. \end{aligned}$$

Ecuatia caracteristică a acestei recurențe este:

$$t^2 - xt - 1 = 0,$$

cu rădăcinile

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

Observăm că $\alpha(1) = \alpha, \beta(1) = \beta, \alpha(2) = 1 + \sqrt{2}, \beta(2) = 1 - \sqrt{2}$ și atunci avem:

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x).$$

1.114. $l_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație.
$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^n(x)(\alpha(x) + (\alpha(x))^{-1}) - \beta^n(x)(\beta(x) + (\beta(x))^{-1}) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} (\alpha^n(x)\sqrt{x^2 + 4} + \beta^n(x)\sqrt{x^2 + 4}) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) = l_n(x).
\end{aligned}$$

1.115. $l_n(x) = xf_n(x) + 2f_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. $xf_n(x) + 2f_{n-1}(x) = x \cdot \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + 2 \cdot \frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} (x\alpha^n(x) - x\beta^n(x) + 2\alpha^{n-1}(x) - 2\beta^{n-1}(x)) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^n(x)(x + 2(\alpha(x))^{-1}) - \beta^n(x)(x + 2(\beta(x))^{-1}) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^n(x) \left(x + \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \right) - \beta^n(x) \left(x + \frac{4}{x - \sqrt{x^2 + 4}} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^n(x) \left(x + \frac{4(x - \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - x^2 - 4} \right) - \beta^n(x) \left(x + \frac{4(x + \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - x^2 - 4} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(\alpha^n(x)(x - x + \sqrt{x^2 + 4}) - \beta^n(x)(x - x - \sqrt{x^2 + 4}) \right) = \\
&= \alpha^n(x) + \beta^n(x) = l_n(x).
\end{aligned}$$

1.116. $xl_n(x) = f_{n+2}(x) - f_{n-2}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. $f_{n+2}(x) - f_{n-2}(x) = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^{n+2}(x) - \beta^{n+2}(x) - \alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x)) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^n(x)(\alpha^2(x) - \alpha^{-2}(x)) - \beta^n(x)(\beta^2(x) - \beta^{-2}(x))) = \\
&= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^n(x)(\alpha^2(x) - \beta^2(x)) - \beta^n(x)(\beta^2(x) - \alpha^2(x))) = \\
&= (\alpha(x) + \beta(x))(\alpha^n(x) + \beta^n(x)) = xl_n(x).
\end{aligned}$$

*

*

*

*

*

*

ALTE POLINOAME RECURENTE

”Matematica nu are culoare politică”

Zoia Ceașescu

$$g_n(x) = xg_{n-1}(x) - g_{n-2}(x), \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$g_0(x) = 0, g_1(x) = 1.$$

$$h_n(x) = xh_{n-1}(x) - h_{n-2}(x), \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$h_0(x) = 2, h_1(x) = x.$$

Polinoamele $g_n(x), h_n(x), n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$ au ecuația caracteristică:

$$t^2 - xt + 1 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$\gamma(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \delta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2},$$

unde se observă că:

$$\gamma(\sqrt{5}) = \alpha, \delta(\sqrt{5}) = -\beta.$$

Prin urmare avem:

$$g_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)}, h_n(x) = \gamma^n(x) + \delta^n(x).$$

1.117. $h_n^2(x) - (x^2 - 4)g_n^2(x) = 4, \forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație.
$$\begin{aligned} h_n^2(x) - (x^2 - 4)g_n^2(x) &= (\gamma^n(x) + \delta^n(x))^2 - (x^2 - 4) \frac{(\gamma^n(x) - \delta^n(x))^2}{(\gamma(x) - \delta(x))^2} = \\ &= \gamma^{2n}(x) + \delta^{2n}(x) + 2(\gamma(x)\delta(x))^n - (x^2 - 4) \cdot \frac{\gamma^2(x) + \delta^2(x) - 2(\gamma(x)\delta(x))^n}{(\sqrt{x^2 - 4})^2} = \\ &= \gamma^{2n}(x) + \delta^{2n}(x) + 2 - \gamma^{2n}(x) - \delta^{2n}(x) + 2 = 4. \end{aligned}$$

1.118. $l_n^2(x) - (x^2 + 4)f_n^2(x) = 4(-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație.
$$\begin{aligned} l_n^2(x) - (x^2 + 4)f_n^2(x) &= (\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2 - \\ &- \frac{x^2 + 4}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} (\alpha^n(x) - \beta^n(x))^2 = \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + 2(\alpha(x)\beta(x))^n - \\ &- \frac{x^2 + 4}{x^2 + 4} (\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n) = 4(\alpha(x)\beta(x))^n = 4(-1)^n. \end{aligned}$$

1.119. $f_n^2(x) + f_{n+1}^2(x) = f_{2n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*$ (Koshy, 1999).

Demonstrație.

$$\begin{aligned} f_n^2(x) + f_{n+1}^2(x) &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} \left((\alpha^n(x) - \beta^n(x))^2 + (\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x))^2 \right) = \\ &= \frac{1}{x^2 + 4} \left(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n + \alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2n+2}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{x^2 + 4} \left(\alpha^{2n+1}(x)((\alpha(x))^{-1} + \alpha(x)) + \beta^{2n+1}(x)((\beta(x))^{-1} + \beta(x)) \right) - \\ &- \frac{2}{x^2 + 4} (\alpha(x)\beta(x))^n (1 + \alpha(x)\beta(x)) = \frac{1}{x^2 + 4} (\alpha^{2n+1}(x)(\alpha(x) - \beta(x)) + \\ &+ \beta^{2n+1}(x)(-\alpha(x) + \beta(x))) = \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{x^2 + 4} (\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} (\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)) = \frac{\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = f_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

1.120. $f_m(x)l_n(x) + f_n(x)l_m(x) = 2f_{m+n}(x), \forall m, n \in \mathbf{N}$ (Koshy, 1999).

Demonstrație.

$$f_m(x)l_n(x) + f_n(x)l_m(x) = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^m(x) - \beta^m(x))(\alpha^n(x) + \beta^n(x)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^n(x) - \beta^n(x)) (\alpha^m(x) + \beta^m(x)) = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^{m+n}(x) - \\
& - \alpha^n(x) \beta^m(x) + \alpha^m(x) \beta^n(x) - \beta^{m+n}(x) + \alpha^{m+n}(x) + \alpha^n(x) \beta^m(x) - \alpha^m(x) \beta^n(x) - \\
& - \beta^{m+n}(x)) = \frac{2}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^{m+n}(x) - \beta^{m+n}(x)) = 2f_{m+n}(x).
\end{aligned}$$

1.121. $l_n(x) + \sqrt{x^2 + 4} \cdot f_n(x) = 2\alpha^n(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
l_n(x) + \sqrt{x^2 + 4} f_n(x) &= \alpha^n(x) + \beta^n(x) + \sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^n(x) - \beta^n(x)) = \\
&= \alpha^n(x) + \beta^n(x) + \alpha^n(x) - \beta^n(x) = 2\alpha^n(x).
\end{aligned}$$

1.122. $l_n(x) - \sqrt{x^2 + 4} \cdot f_n(x) = 2\beta^n(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
l_n(x) - \sqrt{x^2 + 4} f_n(x) &= \alpha^n(x) + \beta^n(x) - \sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^n(x) - \beta^n(x)) = \\
&= \alpha^n(x) + \beta^n(x) - \alpha^n(x) + \beta^n(x) = 2\beta^n(x).
\end{aligned}$$

1.123. $l_{n+1}(x)l_{n-1}(x) - l_n^2(x) = (-1)^{n-1}(x^2 + 4), \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Koshy, 1999).}$

Demonstrație. $l_{n+1}(x)l_{n-1}(x) - l_n^2(x) = (\alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x))(\alpha^{n-1}(x) + \beta^{n-1}(x)) -$
 $-(\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2 = \alpha^{2n}(x) + \alpha^{n+1}(x)\beta^{n-1}(x) + \alpha^{n-1}(x)\beta^{n+1}(x) + \beta^{2n}(x) - \alpha^{2n}(x) -$
 $-\beta^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n = (\alpha(x)\beta(x))^{n-1}(\alpha^2(x) + \beta^2(x) - 2\alpha(x)\beta(x)) =$
 $= (-1)^{n-1}(\alpha^2(x) + \beta^2(x) - 2\alpha(x)\beta(x)) = (-1)^{n-1}(\alpha(x) - \beta(x))^2 =$
 $= (-1)^{n-1} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} - \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^2 = (-1)^{n-1}(x^2 + 4).$

1.124. $l_{n+1}^2(x) + l_n^2(x) = (x^2 + 4)f_{2n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N} \text{ (Koshy, 1999).}$

Demonstrație. $l_{n+1}^2(x) + l_n^2(x) = (\alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x))^2 + (\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2 =$
 $= \alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2n+2}(x) + 2(\alpha(x)\beta(x))^{n+1} + \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + 2(\alpha(x)\beta(x))^n =$
 $= \alpha^{2n+1}(x)(\alpha(x) + (\alpha(x))^{-1}) + \beta^{2n+1}(x)(\beta(x) + (\beta(x))^{-1}) =$
 $= (\alpha(x) - \beta(x))(\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)) =$
 $= (\alpha(x) - \beta(x))^2 \cdot \frac{\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = (x^2 + 4)f_{2n+1}(x).$

1.125. $h_n(x) = g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație.
$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x) &= \frac{1}{\gamma(x) - \delta(x)} (\gamma^{n+1}(x) - \delta^{n+1}(x) - \gamma^{n-1}(x) + \delta^{n-1}(x)) = \\ &= \frac{1}{\gamma(x) - \delta(x)} (\gamma^n(x)(\gamma(x) - (\gamma(x))^{-1}) - \delta^n(x)(\delta(x) - (\delta(x))^{-1})) = \\ &= \frac{1}{\gamma(x) - \delta(x)} (\gamma^n(x)(\gamma(x) - \delta(x)) - \delta^n(x)(\delta(x) - \gamma(x))) = \\ &= \gamma^n(x) + \delta^n(x) = h_n(x). \end{aligned}$$

1.126. $\alpha(l_{2n+1}(x)) = \frac{l_{2n+1}(x) + \sqrt{x^2 + 4} \cdot f_{2n+1}(x)}{2} = \alpha^{2n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \alpha(l_{2n+1}(x)) &= \frac{l_{2n+1}(x) + \sqrt{l_{2n+1}^2(x) + 4}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) + \sqrt{(\alpha^{2n+1}(x) + \beta^{2n+1}(x))^2 + 4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha^{2n+1}(x) + \beta^{2n+1}(x) + \sqrt{\alpha^{4n+2}(x) + \beta^{4n+2}(x) + 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n+1} + 4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha^{2n+1}(x) + \beta^{2n+1}(x) + \sqrt{\alpha^{4n+2}(x) + \beta^{4n+2}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha^{2n+1}(x) + \beta^{2n+1}(x) + \sqrt{(\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x))^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha^{2n+1}(x) + \beta^{2n+1}(x) + \alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x) \right) = \alpha^{2n+1}(x). \end{aligned}$$

De asemenea avem:

$$\begin{aligned} \alpha(l_{2n+1}(x)) &= \frac{1}{2} (l_{2n+1}(x) + \alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) + (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot \frac{\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) + \sqrt{x^2 + 4} f_{2n+1}(x) \right). \end{aligned}$$

1.127. $\beta(l_{2n+1}(x)) = \frac{l_{2n+1}(x) - \sqrt{x^2 + 4} \cdot f_{2n+1}(x)}{2} = \beta^{2n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație.
$$\begin{aligned} \beta(l_{2n+1}(x)) &= \frac{l_{2n+1}(x) - \sqrt{l_{2n+1}^2(x) + 4}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) - \sqrt{(\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x))^2 + 4} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) - \sqrt{\alpha^{4n+2}(x) + \beta^{4n+2}(x) + 2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) - \sqrt{\alpha^{4n+2}(x) + \beta^{4n+2}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n+1}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) - (\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)) \right) = \beta^{2n+1}(x).
\end{aligned}$$

De asemenea avem:

$$\begin{aligned}
\beta(l_{2n+1}(x)) &= \frac{1}{2} (l_{2n+1}(x) - (\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x))) = \\
&= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) - (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot \frac{\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(l_{2n+1}(x) - \sqrt{x^2 + 4} f_{2n+1}(x) \right).
\end{aligned}$$

1.128. $f_n(l_{2m+1}(x)) = \frac{f_{(2m+1)n}(x)}{f_{2m+1}(x)}, \forall m \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $f_n(l_{2m+1}(x)) = \frac{\alpha^n(l_{2m+1}(x)) - \beta^n(l_{2m+1}(x))}{\alpha(l_{2m+1}(x)) - \beta(l_{2m+1}(x))} =$
 $= \frac{\alpha^{(2m+1)n}(x) - \beta^{(2m+1)n}(x)}{\alpha^{2m+1}(x) - \beta^{2m+1}(x)} = \frac{f_{(2m+1)n}(x)}{f_{2m+1}(x)}.$

1.129. $l_{2n}^2(x) - 4 = (x^2 + 4)f_{2n}^2(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
l_{2n}^2(x) - 4 &= (\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x))^2 - 4 = \alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) + 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n} - 4 = \\
&= \alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2 = \alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n} = (\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x))^2 = \\
&= (\alpha(x) - \beta(x))^2 \cdot \left(\frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^2 = (x^2 + 4)f_{2n}^2(x).
\end{aligned}$$

1.130. $\gamma(l_{2n}(x)) = \frac{l_{2n}(x) + \sqrt{x^2 + 4} \cdot f_{2n}(x)}{2} = \alpha^{2n}(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $\gamma(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$, deci $\gamma(l_{2n}(x)) = \frac{1}{2} \left(l_{2n}(x) + \sqrt{l_{2n}^2(x) - 4} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \left(l_{2n}(x) + \sqrt{(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x))^2 - 4} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \left(l_{2n}(x) + \sqrt{\alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n}} \right) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)) = \alpha^{2n}(x) = \\
&= \frac{1}{2}(l_{2n}(x) + \sqrt{(\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x))^2}) = \\
&= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) + \sqrt{x^2 + 4}f_{2n}(x)\right).
\end{aligned}$$

1.131. $\delta(l_{2n}(x)) = \frac{l_{2n}(x) - \sqrt{x^2 + 4} \cdot f_{2n}(x)}{2} = \beta^{2n}(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $\delta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$, deci $\delta(l_{2n}(x)) = \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{l_{2n}^2(x) - 4}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x))^2 - 4}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{\alpha^{4n}(x) + \beta^{4n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^{2n}}\right) = \\
&= \frac{1}{2}(l_{2n}(x) - \sqrt{(\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x))^2}) = \\
&= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(l_{2n}(x) - \sqrt{x^2 + 4}f_{2n}(x)\right) = \\
&= \frac{1}{2}(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x)) = \beta^{2n}(x).
\end{aligned}$$

1.132. $g_n(l_{2m}(x)) = \frac{f_{2mn}(x)}{f_{2m}(x)}, \forall m \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. $g_n(l_{2m}(x)) = \frac{\gamma^n(l_{2m}(x)) - \delta^n(l_{2m}(x))}{\gamma(l_{2m}(x)) - \delta(l_{2m}(x))} = \frac{\alpha^{2mn}(x) - \beta^{2mn}(x)}{\alpha^{2m}(x) - \beta^{2m}(x)} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha^{2m}(x) - \beta^{2m}(x)} \cdot \frac{\alpha^{2mn}(x) - \beta^{2mn}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{f_{2mn}(x)}{f_{2m}(x)}. \\
&\quad \quad \quad * \quad \quad *
\end{aligned}$$

*

*

*

*

POLINOAME JACOBSTHAL

”Singura cale să înveți matematică este să faci matematică”

Paul Halmos

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + xJ_{n-2}(x), \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$J_0(x) = 0, J_1(x) = J_2(x) = 1, J_3(x) = x + 1, J_4(x) = 2x + 1, J_5(x) = x^2 + 3x + 1,$$

$$J_6(x) = 3x^2 + 4x + 1, J_7(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + 1, J_8(x) = 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1,$$

$$J_9(x) = x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1, J_{10}(x) = 5x^4 + 20x^3 + 21x^2 + 8x + 1.$$

Ecuția caracteristică este:

$$t^2 - t - x = 0,$$

cu rădăcinile:

$$r(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}, s(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}, r + s = 1, rs = -x, r - s = \sqrt{1 + 4x}.$$

$$J_n(x) = \frac{r^n - s^n}{r - s} = \frac{r^n - s^n}{\sqrt{1 + 4x}}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$K_n(x) = K_{n-1}(x) + xK_{n-2}(x), \forall n \geq 2, \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$K_1(x) = 1, K_2(x) = x, K_3(x) = 2x, K_4(x) = x^2 + 2x, K_5(x) = 3x^2 + 2x,$$

$$K_6(x) = x^3 + 5x^2 + 2x, K_7(x) = 4x^3 + 7x^2 + 2x, K_8(x) = x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2x,$$

$$K_9(x) = 5x^4 + 16x^3 + 11x^2 + 2x, K_{10}(x) = x^5 + 14x^4 + 25x^3 + 13x^2 + 2x.$$

$$K_n(x) = Ar^n + Bs^n, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\begin{cases} Ar + Bs = K_1(x) = 1 \\ Ar^2 + Bs^2 = K_2(x) = x \end{cases}, \text{ de unde } A = \frac{x-s}{r\sqrt{1+4x}}, B = \frac{r-x}{s\sqrt{1+4x}}, \text{ și atunci:}$$

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{x-s}{r\sqrt{1+4x}} r^n + \frac{r-x}{s\sqrt{1+4x}} s^n = \frac{(x-s)r^{n+1} + (r-x)s^{n+1}}{\sqrt{1+4x}} = \\ &= \frac{x(r^{n+1} - s^{n+1}) - rs(r^{n+2} - s^{n+2})}{\sqrt{1+4x}} = x(J_{n+1}(x) + J_{n+2}(x)). \end{aligned}$$

*

*

*

*

*

*

ALTE POLINOAME DE TIP JACOBSTHAL

”Matematica nu este încă pregătită pentru astfel de probleme”
Paul Erdős

$$k_n(x) = k_{n-1}(x) + xk_{n-2}(x), \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$
$$k_0(x) = 2, k_1(x) = 1.$$

$$Q_n(x) = xQ_{n-1}(x) + xQ_{n-2}(x), \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}$$
$$Q_0(x) = 0, Q_1(x) = 1, Q_2(x) = x.$$

Ecuția caracteristică a polinomului k_n este:

$$t^2 - t - x = 0,$$

cu rădăcinile:

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2}, t_2 = \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{2},$$

iar a polinomului Q_n este $y^2 - xy - x = 0$ cu rădăcinile:

$$y_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}, y_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}.$$

Prin urmare:

$$k_n(x) = At_1^n + Bt_2^n, \forall n \in \mathbf{N},$$
$$Q_n(x) = Cy_1^n + Dy_2^n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Deci,

$$\begin{cases} k_0(x) = A + B = 2 \\ k_1(x) = At_1 + Bt_2 = 1 \end{cases}$$

de unde deducem că: $A = 1, B = 1$ adică:

$$k_n(x) = \left(\frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{4x+1}}{2} \right)^n = t_1^n + t_2^n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
k_0(x) &= 2, k_1(x) = 1, k_2(x) = 2x + 1, k_3(x) = 3x + 1, k_4(x) = 2x^2 + 4x + 1, \\
k_5(x) &= 5x^2 + 5x + 1, k_6(x) = 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1, k_7(x) = 2x^4 + 11x^3 + 15x^2 + 7x + 1, \\
k_8(x) &= 4x^4 + 20x^3 + 21x^2 + 8x + 1.
\end{aligned}$$

De asemenea avem:

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ Cy_1 + Dy_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C = -D, C = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}, D = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$$

Aşadar,

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \left(\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right)^n - \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right)^n \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} (y_1^n - y_2^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Deci,

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= 0, Q_1(x) = 1, Q_2(x) = x, Q_3(x) = x^2 + x, Q_4(x) = x^3 + 2x^2, \\
Q_5(x) &= x^4 + x^3 + 3x^2, Q_6(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3, \\
Q_7(x) &= x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 3x^3, Q_8(x) = x^7 + 4x^6 + 8x^5 + 8x^4.
\end{aligned}$$

*

*

*

*

*

*

POLINOAMELE LUI MORGAN

”Matematică este o limbă și o știință”

Lucian Blaga

$$(C_n(x))_{n \geq 0}, (B_n(x))_{n \geq 0}, C_0(x) = B_0(x) = 1,$$

$$(i) \quad C_n(x) = xB_{n-1}(x) + C_{n-1}(x)$$

$$(j) \quad B_n(x) = (x+1)B_{n-1}(x) + C_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$C_0(x) = 1, C_1(x) = x + 1, C_2(x) = x^2 + 3x + 1, C_3(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 1,$$

$$C_4(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 10x + 1.$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} x^k, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

.

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x + 2, B_2(x) = x^2 + 4x + 3, B_3(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 4,$$

$$B_4(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5.$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{n-k} x^k, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Din (i) și (j) obținem:

$$C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și } xB_n(x) = C_{n+1}(x) - C_n(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Din relațiile precedente obținem:

$$B_n(x) = (x+2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

cu $B_0(x) = 1, B_1(x) = x + 2$. De asemenea avem:

$$C_n(x) = (x+2)C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

cu $C_0(x) = 1, C_1(x) = x + 1$. Avem determinantul circulant:

$$B_n(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x+2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x+2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}$$

și dezvoltând după prima linie obținem:

$$B_n(x) = (x+2)B_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+2)B_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x).$$

Din (j) deducem că:

$$C_{n-1}(x) = B_n(x) - (x+1)B_{n-1}(x)$$

și atunci relația (i) devine:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) - (x+1)B_n(x) &= xB_{n-1}(x) + B_n(x) - (x+1)B_{n-1}(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B_{n+1}(x) = (x+2)B_n(x) - B_{n-1}(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

De asemenea din (i) deducem că:

$$xB_{n-1}(x) = C_n(x) - C_{n-1}(x),$$

și atunci (j) ne conduce la:

$$xB_n(x) = (x+1)xB_{n-1}(x) + xC_{n-1}(x) \Leftrightarrow C_{n+1}(x) - C_n(x) = (x+1)(C_n(x) - C_{n-1}(x)) + xC_{n-1}(x) \Leftrightarrow C_{n+1}x = (x+2)C_n(x) - C_{n-1}(x).$$

$$\mathbf{1.133.} \quad x \sum_{k=0}^n B_k(x) = C_{n+1}(x) - 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstrație. Avem: $xB_k(x) = C_{k+1}(x) - C_k(x), \forall k \in N$ și atunci:

$$x \sum_{k=0}^n B_k(x) = \sum_{k=0}^n C_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^n C_k(x) = C_{n+1}(x) - C_0(x) = C_{n+1}(x) - 1.$$

$$\mathbf{1.134.} \quad \sum_{k=0}^n C_k(x) = B_n(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Demonstrație. Avem: $C_k(x) = B_k(x) - B_{k-1}(x), \quad \forall k \in \mathbf{N}^*$ și deci

$$\sum_{k=0}^n C_k(x) = \sum_{k=0}^n B_k(x) - \sum_{k=0}^n B_{k-1}(x) = B_n(x) - B_{-1}(x) = B_n(x),$$

deoarece $B_{-1}(x) = 0$.

Ecuția caracteristică pentru polinoamele $B_n(x)$ și $C_n(x)$ este:

$$t^2 - (x+2)t + 1 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$r(x) = \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}, s(x) = \frac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{2},$$

și atunci:

$$B_n(x) = Ur^n + Vs^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Din:

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 = U + V \\ B_1(x) = x + 2 = Ur + Vs \end{cases},$$

obținem:

$$U = \frac{r}{\sqrt{x^2+4x}}, V = -\frac{s}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

Astfel am obținut formula lui *Binet* pentru $B_n(x)$:

$$B_n(x) = \frac{r^{n+1}}{\sqrt{x^2+4x}} - \frac{s^{n+1}}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{\sqrt{x^2+4x}} =$$

$$= \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s} = \frac{(r(x))^{n+1} - (s(x))^{n+1}}{r(x) - s(x)}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

1.135. $f_{2n}(x) = xB_{n-1}(x^2), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Știm că $f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, \forall n \in \mathbf{N}$ unde $\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$,
 $\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \alpha^2(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 + 4} + 2}{2}, \beta^2(x) = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 + 4} + 2}{2}$, și atunci

$$f_{2n}(x) = \frac{\alpha^{2n}(x) - \beta^{2n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{(\alpha^2(x))^n - (\beta^2(x))^n}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{(r(x^2))^n - (s(x^2))^n}{\sqrt{x^2 + 4}x} =$$

$$= \frac{(r(x^2))^n - (s(x^2))^n}{\sqrt{x^4 + 4x^2}} \cdot x = x \cdot \frac{(r(x^2))^n - (s(x^2))^n}{r(x^2) - s(x^2)} = xB_{n-1}(x^2).$$

1.136. $C_n(x^2) = f_{2n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}.$

Demonstrație. Am arătat că $C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x)$ și deci:

$$xC_n(x^2) = xB_n(x^2) - xB_{n-1}(x^2) = xf_{2n+2}(x) - xf_{2n}(x) =$$

$$= x(f_{2n+2}(x) - f_{2n}(x)) = xf_{2n+1}(x),$$

de unde deducem că:

$$C_n(x^2) = f_{2n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}.$$

Fie matricea:

$$S = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(x) & -B_0(x) \\ B_0(x) & B_1(x) \end{pmatrix}.$$

Avem:

$$S^2 = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 4x + 3 & -(x+2) \\ x+2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_2(x) & -B_1(x) \\ B_1(x) & -B_0(x) \end{pmatrix},$$

și atunci prin inducție matematică deducem că:

$$S^n = \begin{pmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem:

$$\det S = \begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \text{ și atunci:}$$

$$1 = \det S^n = \begin{vmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{vmatrix} = -B_n(x)B_{n-2}(x) + B_{n-1}^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n^2(x) - B_{n+1}(x)B_{n-1}(x) = 1 \Rightarrow B_{n+1}(x)B_{n-1}(x) - B_n^2(x) = -1.$$

Deoarece:

$$\begin{pmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n(x) - B_{n-1}(x) & -(B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)) \\ B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) & -(B_{n-2}(x) - B_{n-3}(x)) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \\ B_{n-2}(x) & -B_{n-3}(x) \end{pmatrix} = S^n - S^{n-1} = S^{n-1}(S - I_2).$$

Rezultă că:

$$\det \begin{pmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{vmatrix} = \det(S^{n-1}(S - I_2)) = \det(S - I_2).$$

1.137. $C_{n+1}(x)C_{n-1}(x) - C_n^2(x) = x, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{vmatrix} C_n(x) & -C_{n-1}(x) \\ C_{n-1}(x) & -C_{n-2}(x) \end{vmatrix} = \det(S - I_2) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - 1 + 1 = -x, \text{ adică} \\ -C_n(x)C_{n-2}(x) + C_{n-1}^2(x) = -x \Leftrightarrow C_n(x)C_{n-2}(x) - C_{n-1}^2(x) = x \Rightarrow \\ \Rightarrow C_{n+1}(x)C_{n-1}(x) - C_n^2(x) = x.$$

1.138. $B_{2n-1}(x) = (B_n(x) - B_{n-2}(x))B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. Deoarece:

$$B_{m+n}(x) = B_m(x)B_n(x) - B_{m-1}(x)B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}, \text{ luând } m = n - 1 \text{ obținem:} \\ B_{2n-1}(x) = B_n(x)B_{n-1}(x) - B_{n-1}(x)B_{n-2}(x) = (B_n(x) - B_{n-2}(x))B_{n-1}(x).$$

1.139. $(x+2)B_{2n-1}(x) = B_n^2(x) - B_{n-2}^2(x), \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$

Demonstrație. Conform 1.138 avem:

$$(x+2)B_{2n-1}(x) = (B_n(x) - B_{n-2}(x))(x+2)B_{n-1}(x), \text{ unde folosim faptul că:} \\ (x+2)B_{2n-1}(x) = B_n(x) + B_{n-2}(x), \text{ și obținem:} \\ (x+2)B_{2n-1}(x) = (B_n(x) - B_{n-2}(x))(B_n(x) + B_{n-2}(x)) = B_n^2(x) - B_{n-2}^2(x).$$

1.140. $C_{m+n}(x) = B_m(x)C_n(x) - B_{m-1}(x)C_{n-1}(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $C_{m+n}(x) = B_{m+n}(x) - B_{m+n-1}(x) = B_m(x)B_n(x) - B_{m-1}(x)B_{n-1}(x) - \\ - B_m(x)B_{n-1}(x) + B_{m-1}(x)B_{n-2}(x) = B_m(x)(B_n(x) - B_{n-1}(x)) - \\ - B_{m-1}(x)(B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)) = B_m(x)C_n(x) - B_{m-1}(x)C_{n-1}(x).$

1.141. $C_{2n}(x) = B_n(x)C_n(x) - B_{n-1}(x)C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. În 1.140 facem $m = n$ și rezultă enunțul.

1.142. $B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x) = C_{n+1}(x) + C_n(x), \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. Am demonstrat mai înainte că:

$$C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ deci}$$

$$C_{n+1}(x) + C_n(x) = B_{n+1}(x) - B_n(x) + B_n(x) - B_{n-1}(x) = B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x).$$

1.143. $xB_n(x) - xB_{n-1}(x) = C_{n+1}(x) - C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (Swamy, 1966).}$

Demonstrație. Am arătat mai înainte că $xB_{n-1}(x) = C_n(x) - C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Deci:

$$xB_n(x) - xB_{n-1}(x) = C_{n+1}(x) - C_n(x) - C_n(x) + C_{n-1}(x) = C_{n+1}(x) - C_n(x).$$

1.144. $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $F_{n+2}^2 - F_n^2 = \frac{(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})^2 - (\alpha^n - \beta^n)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+4} + \beta^{2n+4} -$

$$- 2(\alpha\beta)^{n+2} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n) = \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{2n+2}(\beta^2 - \beta^{-2})) =$$

$$= \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2}(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^{2n+2}(\beta^2 - \alpha^2)) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}) = F_{2n+2}.$$

1.145. $F_{2n+2}^2 - F_{2n-2}^2 = 3F_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. $F_{2n+2}^2 - F_{2n-2}^2 = \frac{(\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2})^2 - (\alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2})^2}{(\alpha - \beta)^2} =$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^{4n+4} + \beta^{4n+4} - 2(\alpha\beta)^{n+4} - \alpha^{4n-4} - \beta^{4n-4} + 2(\alpha\beta)^{n-4}) =$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^{2n}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{2n}(\beta^2 - \beta^{-2})) =$$

$$= \frac{(\alpha^4 - \beta^4)}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)F_{2n} = 3F_{2n}.$$

1.146. $F_{m+n} = F_{m+2}F_n - F_mF_{n-2}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$

Demonstrație. $F_{m+n} = F_{m+2}F_n - F_mF_{n-2} =$

$$\begin{aligned}
F_{m+n} &= F_{m+2}F_n - F_mF_{n-2} = \frac{(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{(\alpha - \beta)^2} = \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{m+n+2} - \alpha^n \beta^{m+2} - \alpha^{m+2} \beta^n + \beta^{m+n+2} - \alpha^{m+n-2} - \\
&- \alpha^m \beta^{n-2} - \alpha^{n-2} \beta^m - \beta^{m+n-2}) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{m+n}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{m+n}(\beta^2 - \beta^{-2}) - \\
&- \alpha^n \beta^m(\alpha^2 - \beta^{-2}) - \alpha^m \beta^n(\alpha^2 - \beta^{-2})) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n})}{(\alpha - \beta)^2} = \\
&= \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = F_{m+n}.
\end{aligned}$$

1.147. $F_{2n} = (F_{n+2} - F_{n-2})F_n, \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$

Demonstrație. $(F_{n+2} - F_{n-2})F_n = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} - \alpha^{n-2} + \beta^{n-2})(\alpha^n - \beta^n) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{2n+2} - \alpha^n \beta^{n+2} - \alpha^{2n-2} + \alpha^n \beta^{n-2} - \alpha^{n+2} \beta^n + \beta^{2n+2} + \alpha^{n-2} \beta^n - \beta^{2n-2}) = \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{2n}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{2n}(\beta^2 - \beta^{-2}) - \alpha^n \beta^n(\beta^2 - \beta^{-2} + \alpha^2 - \alpha^{-2})) = \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) - \frac{\alpha^n \beta^n}{(\alpha - \beta)^2} (\beta^2 - \alpha^2 + \alpha^2 - \beta^2) = \\
&= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = F_{2n}.
\end{aligned}$$

1.148. $(L_{n+2} - L_{n-2})L_n = 5F_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $(L_{n+2} - L_{n-2})L_n = (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} - \alpha^{n-2} - \beta^{n-2})(\alpha^n + \beta^n) =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{2n+2} + (\alpha\beta)^n \beta^2 - (\alpha\beta)^n \beta^{-2} - \alpha^{2n-2} + (\alpha\beta)^n \alpha^2 + \beta^{2n+2} - (\alpha\beta)^n \alpha^{-2} - \beta^{2n-2} = \\
&= \alpha^{2n+2} - \alpha^{2n-2} + \beta^{2n+2} - \beta^{2n-2} + (\alpha\beta)^n (\beta^2 - \beta^{-2} + \alpha^2 - \alpha^{-2}) = \\
&= \alpha^{2n}(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + \beta^{2n}(\beta^2 - \beta^{-2}) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = \\
&= (\alpha - \beta)(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = (\alpha - \beta)^2 \cdot \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = 5F_{2n}.
\end{aligned}$$

1.149. $\sum_{k=0}^n C_{2k}(x) = B_n(x)C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Swamy, 1966).}$

Demonstrație. Conform 1.141 avem $C_{2k}(x) = B_k(x)C_k(x) - B_{k-1}(x)C_{k-1}(x), \forall k \in \mathbf{N}^*.$

Deci:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n C_{2k}(x) &= \sum_{k=0}^n B_k(x)C_k(x) - \sum_{k=0}^n B_{k-1}(x)C_{k-1}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n B_k(x)C_k(x) - \sum_{k=-1}^{n-1} B_k(x)C_k(x) = B_n(x)C_n(x) - B_{-1}(x)C_{-1}(x), \text{ dar}\end{aligned}$$

$B_{-1}(x) = 0$ și $C_{-1}(x) = 1$ și rezultă enunțul.

1.150. $(x+2)B_{2n-1}(x) = B_n^2(x) - B_{n-1}^2(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $B_n^2(x) - B_{n-1}^2(x) = \frac{(r^n(x) - s^n(x))^2 - (r^{n-1}(x) - s^{n-1}(x))^2}{(r(x) - s(x))^2} =$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(r(x) - s(x))^2} (r^{2n}(x) + s^{2n}(x) - 2(r(x)s(x))^n - r^{2n-2}(x) - s^{2n-2}(x) + 2(r(x)s(x))^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{(r(x) - s(x))^2} (r^{2n-1}(x)(r(x) - (r(x))^{-1}) + s^{2n-1}(x)(s(x) - (s(x))^{-1})) = \\ &= \frac{r^{2n-1}(x) - s^{2n-1}(x)}{r(x) - s(x)} = B_{2n-1}(x).\end{aligned}$$

1.151. $xB_n(x) = (x+1)C_n(x) - C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $xB_n(x) = C_{n+1}(x) - C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}$

dar

$$C_{n+1}(x) = (x+2)C_n(x) - C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*$$

, de unde deducem că:

$$xB_n(x) = (x+2)C_n(x) - C_{n-1}(x) - C_n(x) = (x+1)C_n(x) - C_{n-1}(x).$$

1.152. $C_{2n+1}(x) = B_n(x)C_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. În 1.140 am demonstrat că:

$$C_{m+n}(x) = B_m(x)C_n(x) - B_{m-1}(x)C_{n-1}(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

și deci considerând aici $m = n+1$ rezultă că:

$$C_{2n+1}(x) = B_n(x)C_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)C_n(x).$$

1.153. $\sum_{k=0}^n B_{2k}(x) = B_n^2(x), \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ (Swamy, 1966).}$

Demonstrație. $B_{m+n}(x) = B_m(x)B_n(x) - B_{m-1}(x)B_{n-1}(x), \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$ rezultă că:

$$B_{2k}(x) = B_k^2(x) - B_{k-1}^2(x), \forall k \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow B_{2k+2}(x) = B_{k+1}^2(x) - B_k^2(x), \forall k \in \mathbf{N},$$

și deci:

$$\sum_{k=0}^n B_{2k}(x) = \sum_{k=0}^n B_k^2(x) - \sum_{k=0}^n B_{k-1}^2(x) = B_n^2(x) - B_{-1}^2(x),$$

și deoarece $B_{-1}(x) = 0$, deducem că $\sum_{k=0}^n B_{2k}(x) = B_n^2(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

1.154. $\sum_{k=1}^n B_{2k-1}(x) = B_n(x)B_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ (Swamy, 1966).

Demonstrație. Am demonstrat anterior că:

$$B_{2k-1}(x) = B_k(x)B_{k-1}(x) - B_{k-1}(x)B_{k-2}(x), \forall k \in \mathbf{N}^* \text{ și deci:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n B_{2k-1}(x) &= \sum_{k=1}^n B_k(x)B_{k-1}(x) - \sum_{k=1}^n B_{k-1}(x)B_{k-2}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n B_k(x)B_{k-1}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} B_k(x)B_{k-1}(x) = B_n(x)B_{n-1}(x) - B_0(x)B_{-1}(x), \end{aligned}$$

și deoarece $B_{-1}(x) = 0$ obținem că $\sum_{k=1}^n B_{2k-1}(x) = B_n(x)B_{n-1}(x)$.

1.155. $\sum_{k=1}^n C_{2k-1}(x) = B_{n-1}(x)C_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ (Swamy, 1966).

Demonstrație. Din 1.152 obținem: $C_{2k-1}(x) = B_{k-1}(x)C_k(x) - B_{k-2}(x)C_{k-1}(x)$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$ și deci :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n C_{2k-1}(x) &= \sum_{k=1}^n B_{k-1}(x)C_k(x) - \sum_{k=1}^n B_{k-2}(x)C_{k-1}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n B_{k-1}(x)C_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{k-1}(x)C_k(x) = B_{n-1}(x)C_n(x) - B_{-1}(x)C_0(x), \end{aligned}$$

și deoarece $B_{-1}(x) = 0$ rezultă $\sum_{k=1}^n C_{2k-1}(x) = B_{n-1}(x)C_n(x)$.

1.156. $C_{2n}(x) - C_{2n-1}(x) = C_n^2(x) - C_{n-1}^2(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație. Conform 1.141 avem:

$$C_{2n}(x) = B_n(x)C_n(x) - B_{n-1}(x)C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

iar conform 1.152 avem

$$C_{2n-1}(x) = B_{n-1}(x)C_n(x) - B_{n-2}(x)C_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și deci:

$$C_{2n}(x) - C_{2n-1}(x) = (B_n(x) - B_{n-1}(x))C_n(x) - (B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x))C_{n-1}(x).$$

Conform 1.136 avem;

$$C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și atunci relația precedentă devine:

$$C_{2n}(x) - C_{2n-1}(x) = C_n^2(x) - C_{n-1}^2(x).$$

1.157. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_k(x) = C_n^2(x), \forall n \in \mathbf{N}^*$ (Swamy, 1966).

Demonstrație. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_k(x) = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots - C_{2n-1} + C_{2n} =$

$$= \sum_{k=0}^n C_{2k}(x) - \sum_{k=1}^n C_{2k-1}(x).$$

Conform **1.149** avem

$$\sum_{k=0}^n C_{2k}(x) = B_n(x)C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

iar conform **1.155** avem:

$$\sum_{k=1}^n C_{2k-1}(x) = B_{n-1}(x)C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și atunci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_k(x) &= \sum_{k=0}^n C_{2k}(x) - \sum_{k=1}^n C_{2k-1}(x) = B_n(x)C_n(x) - B_{n-1}(x)C_n(x) = \\ &= (B_n(x) - B_{n-1}(x))C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și deoarece } C_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

rezultă că:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_k(x) = C_n^2(x).$$

Sau se mai poate demonstra așa:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_k(x) = C_{2n}(x) - C_{2n-1}(x) + C_{2n-2}(x) - C_{2n-3}(x) + \dots + C_2 - C_1,$$

dar în **1.156** am demonstrat că:

$$C_{2k} - C_{2k-1} = C_k^2 - C_{k-1}^2, \forall k \in \mathbf{N}^*,$$

și atunci relația precedentă devine:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_k(x) &= C_n^2(x) - C_{n-1}^2(x) + C_{n-1}^2(x) - C_{n-2}^2(x) + \dots + C_3^2(x) - C_2^2(x) + C_2^2(x) - \\ &\quad - C_1^2(x) + C_1^2(x) - C_0^2(x) = C_n^2(x) - C_0^2(x) = C_n^2(x). \end{aligned}$$

1.158. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k B_k(x) = B_n(x)C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Demonstrație. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k B_k(x) = \sum_{k=1}^n B_{2k}(x) - \sum_{k=1}^n B_{2k-1}(x) = B_n^2(x) - B_n(x)B_{n-1}(x) =$

$$= B_n(x)(B_n(x) - B_{n-1}(x)),$$

de unde ținând seama că:

$$B_n(x) - B_{n-1}(x) = C_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

deducem relația enunțului.

1.159. Dacă șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n \geq 0}$ are proprietatea că $x_0 = L_0 = 2$,

$$x_1 = L_1 = 1 \text{ și } \sqrt{F_n^2 + F_{2n}^2} + \sqrt{1 + x_n^2} = \sqrt{(x_n + F_{2n})^2 + (1 + F_n)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este șirul lui Lucas.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Relația din enunț este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} (x_n + F_{2n})^2 + (1 + F_n)^2 &= 1 + x_n^2 + F_n^2 + F_{2n}^2 + 2\sqrt{1 + x_n^2} \cdot \sqrt{F_n^2 + F_{2n}^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + F_n^2 + x_n^2 + F_{2n}^2 + 2F_n + 2x_n F_{2n} &= 1 + x_n^2 + F_n^2 + F_{2n}^2 + 2\sqrt{(1 + x_n^2)(F_n^2 + F_{2n}^2)} \\ \Leftrightarrow F_n + x_n F_{2n} &= \sqrt{(1 + x_n^2)(F_n^2 + F_{2n}^2)} \\ \Leftrightarrow F_n^2 + 2F_n F_{2n} x_n + x_n^2 F_{2n}^2 &= F_n^2 + F_{2n}^2 + x_n^2 F_n^2 + x_n^2 F_{2n}^2 \\ \Leftrightarrow x_n^2 F_n^2 + F_{2n}^2 - 2F_n F_{2n} x_n &= 0 \Leftrightarrow (x_n F_n - F_{2n})^2 = 0 \Leftrightarrow (1) \quad x_n = \frac{F_{2n}}{F_n}, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Se mai știe că:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \text{ și } L_n = \alpha^n + \beta^n, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și deci din (1) obținem că:

$$x_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^n - \beta^n} = \alpha^n + \beta^n = L_n, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și deoarece $x_0 = L_0$ rezultă că $x_n = L_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

1.160. Dacă șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n \geq 0}$ are proprietatea că $x_0 = 0$,

$$x_1 = 1 \text{ și } \sqrt{L_n^2 + F_{2n}^2} + \sqrt{1 + x_n^2} = \sqrt{(x_n + F_{2n})^2 + (1 + L_n)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este șirul lui Fibonacci.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Relația din enunț este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} (x_n + F_{2n})^2 + (1 + L_n)^2 &= 1 + x_n^2 + L_n^2 + F_{2n}^2 + 2\sqrt{1 + x_n^2} \cdot \sqrt{L_n^2 + F_{2n}^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_n^2 + 2x_n F_{2n} + F_{2n}^2 + 1 + L_n^2 + 2L_n &= 1 + x_n^2 + L_n^2 + F_{2n}^2 + 2\sqrt{(1 + x_n^2)(L_n^2 + F_{2n}^2)} \\ \Leftrightarrow L_n + x_n F_{2n} &= \sqrt{(1 + x_n^2)(L_n^2 + F_{2n}^2)} \Leftrightarrow L_n^2 + 2L_n F_{2n} x_n + x_n^2 F_{2n}^2 = L_n^2 + F_{2n}^2 + x_n^2 L_n^2 + x_n^2 F_{2n}^2 \\ \Leftrightarrow x_n^2 L_n^2 + F_{2n}^2 - 2L_n F_{2n} x_n &= 0 \Leftrightarrow (x_n L_n - F_{2n})^2 = 0 \Leftrightarrow x_n = \frac{F_{2n}}{L_n} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^n + \beta^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) = F_n, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și } \text{deoarece } x_0 = F_0 \text{ rezultă că}$$

$$x_n = F_n, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\mathbf{1.161.} \quad 5^m L_{2m+1} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} F_k = 5^n L_{2n+1} \cdot \sum_{p=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} F_k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Relația enunțului este echivalentă cu:

$$L_{2m+1} \cdot \frac{1}{5^n} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} F_k = L_{2n+1} \cdot \frac{1}{5^m} \cdot \sum_{p=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} F_k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

Vom demonstra că:

$$\frac{1}{5^n} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} F_k = L_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Într-adevăr,

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^k - \beta^k) \text{ iar } L_k = \alpha^k + \beta^k, \forall k \in \mathbf{N}, \text{ și atunci:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^n} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} F_k &= \frac{1}{5^n \sqrt{5}} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \sum_{k=0}^p \binom{2n+1}{p} \binom{p}{k} (\alpha^k - \beta^k) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{5})^{2n+1}} \sum_{p=0}^{2n+1} ((\alpha+1)^p - (\beta+1)^p) \binom{2n+1}{p} = \frac{1}{(\sqrt{5})^{2n+1}} ((\alpha+2)^{2n+1} - (\beta+2)^{2n+1}), \forall n \in \mathbf{N}^* \end{aligned}$$

Deoarece:

$$\alpha + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \alpha \sqrt{5},$$

$$\beta + 2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = -\beta \sqrt{5}, \text{ deducem că:}$$

$$\begin{aligned} (\alpha+2)^{2n+1} - (\beta+2)^{2n+1} &= (\sqrt{5})^{2n+1} (\alpha^{2n+1} - (-\beta)^{2n+1}) = (\sqrt{5})^{2n+1} (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) = \\ &= (\sqrt{5})^{2n+1} L_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ și urmează concluzia.} \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.162.} \quad 5^m F_{2m+1} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} L_k = 5^n F_{2n+1} \cdot \sum_{p=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} L_k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem: $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$ iar $L_k = \alpha^k + \beta^k$, $\forall n \in \mathbf{N}$, și atunci:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} L_k &= \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (\alpha^k + \beta^k) = \\ &= \sum_{p=0}^{2n+1} ((\alpha+1)^p + (\beta+1)^p) \binom{2n+1}{p} = \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} (\alpha+1)^p + \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} (\beta+1)^p = \\ &= (\alpha+2)^{2n+1} + (\beta+2)^{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Deoarece, $\alpha+2 = \sqrt{5}$, $\beta+2 = -\beta\sqrt{5}$, deducem că:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} L_k &= (\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})(\sqrt{5})^{2n+1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})(\sqrt{5})^{2(n+1)} = 5^{n+1} F_{2n+1}. \end{aligned}$$

Așadar,

$$F_{2m+1} \cdot \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} L_k = 5^{n+1} F_{2m+1} F_{2n+1}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ și respectiv}$$

$$F_{2n+1} \cdot \sum_{p=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} L_k = 5^{m+1} F_{2m+1} F_{2n+1}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

și urmează concluzia.

1.163. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive are proprietatea că există $r \in \mathbf{R}^*$ astfel încât: $\sum_{k=1}^n a_k L_k = a_n L_{n+2} - r(L_{n+3} - 7) - 3a_1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r .

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Facem demonstrația prin inducție matematică:

$$n=1 \Rightarrow a_1 L_1 = a_1 L_3 - r(L_4 - 7) - 3a_1,$$

de unde dacă ținem seama că: $L_1 = 1, L_3 = 4, L_4 = 7$, obținem:

$$a_1 = 4a_1 - r(7 - 7) - 3a_1 \Leftrightarrow a_1 = a_1, \text{ adevărat.}$$

Presupunem proprietatea adevărată pentru $k = \overline{1, n}$ și o demonstrăm pentru $k = n+1$.

Deci, $a_k = a_1 + (k-1)r, \forall k = \overline{1, n}$ și demonstrăm că în condițiile enunțului avem:

$a_{n+1} = a_1 + nr$. Într-adevăr, avem:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k L_k = a_{n+1} L_{n+3} - r(L_{n+4} - 7) - 3a_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k L_k + a_{n+1} L_{n+1} = a_{n+1} L_{n+3} - r(L_{n+4} - 7) - 3a_1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a_n L_{n+2} - r(L_{n+3} - 7) - 3a_1 + a_{n+1} L_{n+1} = a_{n+1} L_{n+3} - r(L_{n+4} - 7) - 3a_1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a_{n+1}(L_{n+3} - L_{n+1}) = a_n L_{n+2} + r(L_{n+4} - L_{n+3}) \Leftrightarrow a_{n+1} L_{n+2} = a_n L_{n+2} + r L_{n+2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a_{n+1} L_{n+2} = (a_n + r) L_{n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r = a_1 + nr, \forall n \in \mathbf{N}^*,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

1.164. Dacă $(u_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație $r > 0$ cu $u_1 \in \mathbf{R}_+^*$ și $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir cu proprietatea că $x_0 = 0, x_1 = x_2 = 1$, și:

$$\sum_{k=1}^n u_k x_k = u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - x_2 u_1, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este șirul lui *Fibonacci*.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Observăm că $x_2 = x_1 + x_0$ și demonstrăm enunțul prin inducție matematică, arătând că: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

Pentru $n = 0$, condiția enunțului ne arată că $x_2 = x_1 + x_0$, adevărat.

Pentru $n = 1$, relația enunțului devine:

$$u_1 x_1 = u_1 x_3 + r(x_4 - x_4) - x_2 u_1 \Leftrightarrow u_1(x_3 - x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_2 + x_1, \text{ adevărat.}$$

Presupunem că relația $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, este îndeplinită pentru orice $k = \overline{0, n}$ și vom arăta că ea este adevărată și pentru $k = n + 1$, adică vom arăta că $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}$.

Evident aici $n \geq 2$ și atunci conform enunțului avem:

$$\sum_{k=1}^n u_k x_k = u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - x_2 u_1, \text{ și } \sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k = u_{n-1} x_{n+1} + r(x_4 - x_{n+2}) - x_2 u_1,$$

de unde obținem că:

$$\begin{aligned}
&u_n x_n = u_n x_{n+2} - u_{n-1} x_{n+1} + r(x_{n+2} - x_{n+3}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow r(x_{n+3} - x_{n+2}) = u_n(x_{n+2} - x_n) - (u_n - r)x_{n+1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow r(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}) = u_n(x_{n+2} - x_{n+1} - x_n) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow r(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}) = u_n(x_{n+2} - x_{n+1} - x_n),
\end{aligned}$$

iar conform cu $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, deducem:

$r(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}) = 0, \forall n \in \mathbf{N}$, și deoarece $r > 0$, rezultă că:

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1},$$

și demonstrația este încheiată.

1.165. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ sunt șiruri de numere reale astfel încât

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, y_{n+2} = -y_{n+1} + y_n, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ atunci:}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x_k + (-1)^k y_k) = x_{2n} + y_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, 1985)

Demonstrație. Ecuațiile caracteristice ale celor două șiruri liniar recurente sunt:

$$r^2 - r - 1 = 0, t^2 + t - 1 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha, r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \beta, t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = -\beta, t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\alpha.$$

Prin urmare:

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n, y_n = (C\alpha^n + D\beta^n)(-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Rezultă că:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x_k + (-1)^k y_k) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (A\alpha^k + B\beta^k + C\alpha^k + D\beta^k) = \\ &= (A+C) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k + (B+D) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k = (A+C)(\alpha+1)^n + (B+D)(\beta+1)^n = \\ &= (A+C)\alpha^{2n} + (B+D)\beta^{2n} = A\alpha^{2n} + B\beta^{2n} + (C\alpha^{2n} + D\beta^{2n})(-1)^{2n} = x_{2n} + y_{2n}, \end{aligned}$$

și demonstrația este încheiată.

Observație. Identitatea din enunț a fost dată ca problemă la concursul Taberei Naționale de Matematică, Câmpulung Moldovenesc, 1985.

1.166. Dacă $a, b \in \mathbf{R}^*$ atunci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ de numere reale care verifică recurențele reale $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, y_{n+2} = -ay_{n+1} + by_n, \forall n \in \mathbf{N}$, verifică și relația:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (x_k + (-1)^k y_k) = x_{2n} + y_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, 1991)

Demonstrație. Deosebim două cazuri, după cum urmează:

a) $a^2 + 4b \in \mathbf{R}^*$. Atunci ecuațiile caracteristice:

$$r^2 - ar - b = 0 \text{ și } t^2 + at - b = 0,$$

admit rădăcinile $r_1, r_2 \in \mathbf{C}^*, r_1 \neq r_2$, respectiv $t_1 = -r_2, t_2 = -r_1$.

Prin urmare:

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n, y_n = (-1)^n (Cr_1^n + Dr_2^n), \forall n \in \mathbf{N},$$

unde $A, B, C, D \in \mathbf{C}$. Avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (x_k + (-1)^k y_k) &= A \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} r_1^k + B \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} r_2^k + \\ &+ C \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (-1)^{2k} r_1^k + D \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (-1)^{2k} r_2^k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(ar_1 + b)^n + B(ar_2 + b)^n + C(ar_1 + b)^n + D(ar_2 + b)^n = \\
&= (A + C)r_1^{2n} + (B + D)r_2^{2n} = x_{2n} + Cr_1^n + Dr_2^n = x_{2n} + (-1)^{2n}(Cr_1^{2n} + Dr_2^{2n}) = \\
&= x_{2n} + y_{2n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

b) $a^2 + 4b = 0 \Rightarrow b = -\left(\frac{a}{2}\right)^2$ și atunci $r_1 = r_2 = \frac{a}{2}, t_1 = t_2 = -\frac{a}{2}$.

În acest caz:

$$x_n = \frac{(A + Bn)a^n}{2^n}, y_n = \frac{(C + Dn)a^n(-1)^n}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

și :

$$x_{2n} = \frac{(A + 2Bn)a^{2n}}{2^{2n}}, y_{2n} = \frac{(C + 2Dn)a^{2n}}{2^{2n}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Așadar avem:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (x_k + (-1)^k y_k) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} \cdot \frac{a^{2n-2k}}{2^{2n-2k}} (x_k + (-1)^k y_k) = \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot \frac{a^{2n-k}}{a^{2n-2k}} \cdot \frac{(A + Bk)a^k}{2^k} + \\
&+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot \frac{a^{2n-k}}{a^{2n-2k}} \cdot \frac{(C + Dk)a^k}{2^k} = \\
&= (A + C) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot \frac{a^{2n}}{a^{2n-k}} + (B + D) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot \frac{ka^{2n}}{2^{2n-k}} = \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} (A + C) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^k + \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} (B + D) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k \cdot 2^k = \\
&= (A + C) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} (2 - 1)^n + (B + D) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k \cdot 2^k (-1)^{n-k} = \\
&= (A + C) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + (B + D) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \cdot 2n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot 2^{k-1} \cdot (-1)^{n-k} = \\
&= (A + C) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + 2n(B + D) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (2)^{j-1} (-1)^{n-1-j} = \\
&= (A + C) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + 2n(B + D) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} (2 - 1)^{n-1} = \\
&= (A + C) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + 2n(B + D) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} = \frac{(A + 2nB)a^{2n}}{2^{2n}} + \frac{(C + 2nD)a^{2n}}{2^{2n}} = \\
&= x_{2n} + y_{2n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \text{ și demonstrația este completă.}
\end{aligned}$$

Observație. Identitatea din enunț a fost publicată ca problema C:1181, în Gazeta Matematică – seria B, Nr. 9 / 1991.

1.167. Dacă $a, b \in \mathbf{R}^*$, atunci orice şir de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ care verifică relaţia $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \forall n \in \mathbf{N}$, verifică şi relaţia:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} x_k = x_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băţineţu-Giurgiu, 1987)

Demonstraţie. Deosebim două cazuri:

a) Ecuaţia caracteristică a recurenţei $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, admite rădăcinile:

$$r_1, r_2 \in \mathbf{C}^*, r_1 \neq r_2.$$

Atunci:

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n, \forall n \in \mathbf{N} \text{ cu } A, B \in \mathbf{C},$$

şi deci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} x_k &= A \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} r_1^k + B \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} r_2^k = \\ &= A(ar_1 + b)^n + B(ar_2 + b)^n = Ar_1^{2n} + Br_2^{2n} = x_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

b) Ecuaţia caracteristică admite rădăcina dublă $r_1 = r_2 = -\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Atunci:

$$x_n = \frac{(A + Bn)a^n}{2^n}, x_{2n} = \frac{(A + 2Bn)a^{2n}}{2^{2n}},$$

şi avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} x_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k} a^{2n-2k}}{2^{2n-2k}} x_k = A \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^{2n-k} (-1)^{n-k}}{2^{2n-2k}} \cdot \frac{a^k}{2^k} + \\ &+ B \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^{2n-k} (-1)^{n-k}}{2^{2n-2k}} \cdot k \cdot \frac{a^k}{2^k} = A \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^{2n} (-1)^{n-k}}{2^{2n-k}} + B \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^{2n} (-1)^{n-k}}{2^{2n-k}} \cdot k = \\ &= A \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^k + B \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k \cdot 2^k = \\ &= A \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + B \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \cdot 2n \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k}{n} \cdot 2^{k-1} = \\ &= A \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + B \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \cdot 2n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} (-1)^{n-k} 2^{k-1} = \\ &= A \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + B \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \cdot 2n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^{n-j-1} \cdot 2^j = \\ &= A \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} + B \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \cdot 2n \cdot (2-1)^{n-1} = (A + 2nB) \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} = x_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Observație. Identitatea din enunț a fost publicată ca problema **O:535**, în Gazeta Matematică – seria B, Nr. 11-12 / 1987.

1.168. Dacă $a, b \in \mathbf{R}^*$, $4a^3 + 27b \in \mathbf{R}^*$, și $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir de numere reale astfel încât $x_{n+3} = ax_{n+2} + bx_n, \forall n \in \mathbf{N}$, atunci:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} x_{2k} = x_{3n}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, 1986)

Demonstrație. Ecuația caracteristică a acestei recurențe este $r^3 - ar^2 - b = 0$, ecuație care nu admite rădăcini multiple datorită condiției $4a^3 + 27b \in \mathbf{R}^*$.

Fie deci $u, v, w \in \mathbf{C}$ rădăcinile distincte ale ecuației caracteristice. Avem:

$x_n = Au^n + Bv^n + Cw^n, \forall n \in \mathbf{N}$, și deci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} x_{2k} &= A \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} u^{2k} + B \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} v^{2k} + C \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} w^{2k} = \\ &= A(au^2 + b)^n + B(av^2 + b)^n + C(aw^2 + b)^n = Au^{3n} + Bv^{3n} + Cw^{3n} = x_{3n}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Observație. Identitatea din enunț a fost publicată ca problema **O:486**, în Gazeta Matematică – seria B, Nr. 7 / 1986.

1.169. Șirul $(2^{2n} L_{2n})_{n \geq 2}$ nu conține pătrate perfecte.

HSFQ 2026 (D.M. Bătinețu-Giurgiu, 1980)

Demonstrație. Avem:

$$(1) L_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = L_{2n} + (-1)^n \cdot 2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Mai observăm că $L_4 = 7$, deci $L_4 \equiv 7 \pmod{10}$. Presupunem că $L_{2^n} \equiv 7 \pmod{10}, \forall n \geq 2$ și demonstrăm că $L_{2^{n+1}} \equiv 7 \pmod{10}$. Într-adevăr, conform (1) avem:

$$(2) L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - 2(-1)^{2^n} = L_{2^n}^2 - 2, \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Deoarece:

$$L_{2^n} \equiv 7 \pmod{10}, \text{ rezultă că } L_{2^n}^2 \equiv 49 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10},$$

și atunci din (2) deducem că:

$$L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - 2 \equiv (9 - 2) \pmod{10} \equiv 7 \pmod{10}.$$

Prin urmare L_{2^n} se termină cu cifra 7, $\forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$. Dacă ținem seama că orice pătrat perfect se termină cu una din cifrele 0, 4, 5, 6, 9 și că L_{2^n} se termină cu cifra 7, iar 2^{2n} se termină cu una din cifrele 4 sau 6 rezultă că numărul $2^{2n} L_{2^n}$ se termină cu una din cifrele

2 sau 8. Deoarece $\{2,8\} \cap \{0,1,4,5,6,9\} = \emptyset$ rezultă că $2^{2^n} L_{2^n}$ nu este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

Observație. Rezultatul din enunț a fost publicat ca problema **O:130**, în Gazeta Matematică – seria B, Nr. 4 / 1980.

1.170. Dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir de numere naturale astfel încât a_n nu se divide cu 5, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci șirul $(b_n)_{n \geq 2}$, $b_n = a_n^2 L_{2^n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ este un șir liber de pătrate, adică b_n nu este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Fie $u: \mathbf{N} \rightarrow \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $u(n)$ este ultima cifră a numărului n scris în sistemul de numerație cu baza 10. Deoarece a_n nu se divide cu 5, $\forall n \in \mathbf{N}$ rezultă că:

$$(1) \quad u(a_n^2) \in \{1,4,6,9\}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece, $L_n = \alpha^n + \beta^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, rezultă că:

$$(2) \quad L_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = L_{2n} + (-1)^n \cdot 2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece, $u(L_4) = u(7) = 7$, vom demonstra că:

$$(3) \quad u(L_{2^n}) = 7, \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Într-adevăr, presupunem că:

$$(4) \quad u(L_{2^k}) = 7, \forall k = \overline{1, n},$$

și demonstrăm că:

$$(5) \quad u(L_{2^{n+1}}) = 7.$$

Conform cu (2) avem:

$$(6) \quad L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - (-1)^{2^n} \cdot 2 = L_{2^n}^2 - 2.$$

Deoarece, $u(L_{2^n}) = 7$, rezultă că: $u(L_{2^n}^2) = 9$, și atunci din (6) deducem că:

$$u(L_{2^{n+1}}) = u(L_{2^n}^2 - 2) = u(9 - 2) = 7.$$

Conform principiului inducției complete rezultă că: $u(L_{2^n}) = 7, \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

Dacă ținem seama de relațiile (1) și (3) rezultă că:

$$(7) \quad u(a_n^2 \cdot L_{2^n}) \in \{u(1 \cdot 7), u(4 \cdot 7), u(6 \cdot 7), u(9 \cdot 7)\} = \{2,3,7,8\}, \forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

Pe de altă parte orice pătrat de numere naturale se termină în $\{0,1,4,5,6,9\}$, și atunci deoarece $\{2,3,7,8\} \cap \{0,1,4,5,6,9\} = \emptyset$ rezultă că șirul $(a_n^2 L_{2^n})_{n \geq 2}$ este un șir liber de pătrate.

1.171. Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este șirul lui *Fermat*, adică $\varphi_{n+2} - 3\varphi_{n+1} + 2\varphi_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, atunci $\varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. Considerăm matricele $F_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}$, și vom determina matricea

$A \in M_2(\mathbf{R}_+)$ astfel încât $F_{n+1} = AF_n, \forall n \in \mathbf{N}$, iar apoi vom exprima $A^n, n \in \mathbf{N}^*$ în funcție de termenii șirului lui *Fermat*. Avem:

$$F_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ și fie } A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Din $F_1 = AF_0$ și $F_2 = AF_1 = A^2F_0$, obținem:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},$$

de unde deducem $x = 3$ și $z = 1$. Deci $A = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 1 & t \end{pmatrix}$ și din

$$F_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = AF_1 = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+y \\ 3+t \end{pmatrix}, \text{ avem că } y = -2, t = 0.$$

Prin urmare $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Fie $A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ w_n & p_n \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}$. Deoarece, $F_n = A^n F_0$ rezultă că:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ w_n & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}, \text{ de unde deducem că } u_n = \varphi_{n+1}, w_n = \varphi_n, \text{ adică:}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} & v_n \\ \varphi_n & p_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem:

$$F_{n+1} = A^{n+1}F_0 = A^n F_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} & v_n \\ \varphi_n & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\varphi_{n+1} + v_n \\ 3\varphi_n + p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{n+2} \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ deci:}$$

$\varphi_{n+2} = 3\varphi_{n+1} + v_n = 3\varphi_{n+1} - 2\varphi_n$, și obținem că $v_n = -2\varphi_n, p_n = -2\varphi_{n-1}$, adică:

$$A^n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} & -2\varphi_n \\ \varphi_n & -2\varphi_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Mai departe avem:

$$\det A^n = 2\varphi_n^2 - 2\varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = (\det A)^n = 2^n,$$

de unde rezultă că:

$$\varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbf{N},$$

și demonstrația este completă.

Observație. Rezultatul din enunț a fost publicat ca problema **C:335**, în Gazeta Matematică – seria B, Nr. 8 / 1983.

1.172. Dacă $p > 5$ este un număr prim, atunci p divide $F_p^2 - 1$.

Demonstrație. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \Rightarrow 5F_n^2 = (\alpha^n - \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n =$
 $= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $p > 5$ este un număr prim, atunci este impar și deci
 $5F_p^2 = (\alpha^2)^p + (\beta^2)^p + 2$, de unde deducem că: $5(F_p^2 - 1) = u^p + v^p - 3$, unde:
 $u = \alpha^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, v = \beta^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, și unde u, v sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 1 = 0$, de
unde rezultă că $u^n + v^n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$. Avem însă:

$$u^p + v^p = (u + v)^p - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} u^{p-k} v^k = 3^p - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} (uv)^k (u^{p-2k} + v^{p-2k}),$$

unde p divide $\binom{p}{k}, \forall k = 1, \frac{p-1}{2}$, și atunci rezultă că: $u^p + v^p \equiv 3^p \pmod{p}$.

Pentru $p > 5$, avem $u^p + v^p - 3 = 3^p - 3 \equiv 0 \pmod{p}$ și deci p divide $5(F_p^2 - 1)$.

Deoarece $(5, p) = 1$, rezultă că p divide $F_p^2 - 1$.

1.173. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ satisface recurența $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ în care $x_0 = c \in \mathbb{R}_+$,
 $x_1 = d \in \mathbb{R}_+^*$, iar $(u_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r , atunci:

$$\sum_{k=1}^n u_k x_k = u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu, 2003)

Demonstrație. Vom face demonstrația prin metoda (I.M.).

Pentru $n = 1$ relația enunțului devine:

$$u_1 x_1 = u_1 x_3 + r(x_4 - x_4) - u_1 x_2 \Rightarrow x_2 u_1 = u_1 (x_3 - x_1) = u_1 x_2,$$

ceea ce arată că pentru $n = 1$ enunțul este adevărat.

Pentru $n = 2$ relația enunțului devine:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 = u_2 x_4 + r(x_4 - x_5) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_2 (x_4 - x_2) = u_1 (x_1 + x_2) + r(x_5 - x_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_2 x_3 = (u_1 + r)x_3 = u_2 x_3, \text{ deci enunțul este adevărat și pentru } n = 2.$$

Presupunem enunțul adevărat pentru $k = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și să demonstrăm că este adevărat și pentru $k = n + 1$, adică:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n+1} u_k x_k = u_{n+1} x_{n+3} + r(x_4 - x_{n+4}) - u_1 x_2.$$

Relația (1) este echivalentă cu:

$$\sum_{k=1}^n u_k x_k + u_{n+1} x_{n+1} = u_{n+1} x_{n+3} + r(x_4 - x_{n+4}) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2 +$$

$$+ u_{n+1} x_{n+1} = u_{n+1} x_{n+3} + r(x_4 - x_{n+4}) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_{n+1} (x_{n+3} - x_{n+1}) = u_n x_{n+2} + r(x_{n+4} - x_{n+3}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow u_{n+1}x_{n+2} = u_n x_{n+2} + r x_{n+2} = (u_n + r)x_{n+2} = u_{n+1}x_{n+2}$, de unde dacă ținem seama că $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deducem că relația (1) este adevărată și deci conform principiului inducției matematice rezultă că enunțul este adevărat $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Observații. 1) Această problemă este *propoziția 1* din [2];

2) Dacă $x_0 = 0 = F_0$, $x_1 = 1 = F_1$ iar $(u_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație $r \in \mathbf{R}$, atunci din relația enunțului deducem că:

$$\sum_{k=1}^n u_k F_k = u_n F_{n+2} + r(F_4 - F_{n+3}) - u_1,$$

adică am obținut Problema **C: 2310** propusă de *Florin Rotaru* în G.M.-B, nr. 9/2000.

Dacă aici luăm $r = 0$ și $u_n = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, atunci deducem că șirul lui *Fibonacci* verifică relația:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

1.174. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir de numere reale strict pozitive care satisface recurența $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, iar șirul $(u_n)_{n \geq 1}$, are proprietatea că există $r \in \mathbf{R}^*$ astfel încât

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n u_k x_k = u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r .

(D.M. Băținețu-Giurgiu, 2003)

Demonstrație. Aplicăm și aici metoda (I.M.).

Pentru $n = 2$ relația enunțului devine:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 = u_2 x_4 + r(x_4 - x_5) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_2(x_4 - x_2) = u_1(x_1 + x_2) + r(x_4 + x_3 - x_4) + u_1 x_2 \Leftrightarrow u_1(x_1 + x_2) + r x_3 = u_2 x_3 \Leftrightarrow u_1 x_3 + r x_3 = u_2 x_3 \Leftrightarrow (u_1 + r)x_3 = u_2 x_3,$$

de unde dacă ținem seama că $x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deducem că $u_2 = u_1 + r$.

Presupunem că $u_n = u_{n-1} + r$, $\forall n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și să demonstrăm că $u_{n+1} = u_n + r$.

Într-adevăr, pentru $n+1$ relația (1) se scrie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} u_k x_k &= u_{n+1} x_{n+3} + r(x_4 - x_{n+4}) - u_1 x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} x_{n+1} + \sum_{k=1}^n u_k x_k = u_{n+1} x_{n+3} + r(x_4 - x_{n+4}) - u_1 x_2, \text{ în care dacă ținem cont de} \end{aligned}$$

relația (1) obținem:

$$\begin{aligned} x_n u_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2 + u_{n+1} x_{n+1} &= u_{n+1} x_{n+3} + r(x_4 - x_{n+4}) - u_1 x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_{n+1}(x_{n+3} - x_{n+1}) = u_n x_{n+2} + r(x_{n+4} - x_{n+3}) \Leftrightarrow u_{n+1} x_{n+2} = u_n x_{n+2} + r x_{n+2}, \end{aligned}$$

de unde prin simplificare cu $x_{n+2} > 0$ rezultă că $u_{n+1} = u_n + r$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce arată că $(u_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r .

Observație. Această problemă este *propoziția 2* din [2].

1.175. Dacă $(u_n)_{n \geq 0}$ este o progresie aritmetică de rație $r \in \mathbf{R}_+^*$ cu $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$ iar $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale astfel încât $x_0 \in \mathbf{R}_+$, $x_1 \in \mathbf{R}_+^*$, $x_2 = x_1 + x_0$ și

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n u_k x_k = u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

(D.M. Băținețu-Giurgiu, 2003)

Demonstrație. Aplicăm tot metoda (I.M.). Pentru $n = 0$ avem $x_2 = x_1 + x_0$.

Pentru $n = 1$, relația (1) devine:

$u_1 x_1 = u_1 x_3 + r(x_4 - x_4) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_1(x_1 + x_2) = u_1 x_3$, de unde prin simplificare cu $u_1 \in \mathbf{R}_+^*$ obținem că $x_3 = x_2 + x_1$.

Presupunem că $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \forall k = \overline{0, n}, n \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}$ și demonstrăm că:

$$(2) \quad x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}.$$

Dacă în (1) înlocuim n cu $n-1$ obținem că:

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k = u_{n-1} x_{n+1} + r(x_4 - x_{n+2}) - u_1 x_2, \quad \forall n \geq 2.$$

Dacă în (1) ținem seama de (3) deducem că:

$$\begin{aligned} u_n x_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k &= u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_n x_n + u_{n-1} x_{n+1} + r(x_4 - x_{n+2}) - u_1 x_2 = \\ &= u_n x_{n+2} + r(x_4 - x_{n+3}) - u_1 x_2 \Leftrightarrow u_n(x_n + x_{n+1} - x_{n+2}) + r(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Deoarece $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, în baza ipotezei de inducție, din relația precedentă deducem că: $r(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}) = 0 \Rightarrow x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}$, și cu aceasta problema este rezolvată.

Observație. Această problemă este *propoziția 3* din [2].

1.176. Dacă $x, y \in \mathbf{N}$, $x < y$ sunt doi termeni consecutivi ai șirului lui *Fibonacci*, atunci avem una din relațiile:

$$y^2 - xy = x^2 - 1 \quad (*)$$

$$y^2 - xy = x^2 + 1 \quad (**)$$

(Wasteels, G.M. XIII, 1907-1908, pag. 138)

Demonstrație. Să observăm că dacă x, y, z sunt termeni consecutivi ($x < y < z$) ai șirului lui *Fibonacci*, atunci:

- dacă x, y verifică relația (*), atunci y, z verifică relația (**);
- dacă x, y verifică relația (**), atunci y, z verifică relația (*).

Într-adevăr, este evident că $x + y = z$ și atunci:

$$(1) \quad z^2 - yz - y^2 = (x + y)^2 - y(x + y) - y^2 = x^2 + xy - y^2 = -(y^2 - xy - x^2)$$

Din (1) se observă că dacă x, y verifică relația (*), atunci y, z verifică relația (**) iar dacă x, y verifică relația (**), atunci y, z verifică relația (*).

Deoarece F_0 și F_1 verifică relația (**) rezultă că F_1 și F_2 verifică relația (*) și atunci F_2, F_3 verifică relația (**) iar F_3, F_4 verifică relația (*), ș.a.m.d., F_{2k}, F_{2k+1} verifică relația (**) iar F_{2k+1}, F_{2k+2} verifică relația (*), $\forall k \in \mathbf{N}$.

1.177. Dacă $x \in \mathbf{N}$ este un termen al șirului lui *Fibonacci*, atunci numărul $u = 5x^2 + 4$ sau $v = 5x^2 - 4$ este un pătrat perfect

(Wasteels, G.M. XIII, 1907-1908, pag. 138 - 139)

Demonstrație. Fie $x \in \mathbf{N}$ un termen al șirului lui *Fibonacci*, iar $y \in \mathbf{N}^*$ termenul următor din șir ($x < y$). Conform cu **1.176** avem $y^2 - xy - x^2 \pm 1 = 0$ de unde deducem că:

$$y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4(x^2 \pm 1)}}{2} = \frac{x + \sqrt{5x^2 \pm 4}}{2} \in \mathbf{N}^* \quad \text{și atunci există } z \in \mathbf{N}^* \text{ astfel încât}$$

$$5x^2 \pm 4 = z^2 \text{ adică } 5x^2 \pm 4 \text{ este pătrat perfect și } y = x + z.$$

1.178. $l_{n+1}(x) = f_{n+2}(x) + f_n(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) + f_n(x) &= \frac{\alpha^{n+2}(x) - \beta^{n+2}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \\ &= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^{n+1}(x)(\alpha(x) + \alpha^{-1}(x)) - \beta^{n+1}(x)(\beta(x) + \beta^{-1}(x))) = \\ &= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^{n+1}(x)(\alpha(x) - \beta(x)) - \beta^{n+1}(x)(\beta(x) - \alpha(x))) = \\ &= \alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x) = l_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Observație. Pentru $x = 1$ obținem rezultatul **1.15**.

1.179. $2f_{n+k}(x) = f_n(x) \cdot l_k(x) + f_k(x) \cdot l_n(x), \forall k, n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Avem:

$$f_n(x) \cdot l_k(x) + f_k(x) \cdot l_n(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \left((\alpha^n(x) - \beta^n(x))(\alpha^k(x) + \beta^k(x)) + (\alpha^k(x) - \beta^k(x))(\alpha^n(x) + \beta^n(x)) \right) = \\
&= \frac{2}{\alpha(x) - \beta(x)} (\alpha^{n+k}(x) - \beta^{n+k}(x)) = 2f_{n+k}(x).
\end{aligned}$$

1.180. $xf_n(x) + l_n(x) = 2f_{n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. Dacă în **1.179** luăm $k = 1$, atunci obținem:

$$2f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot l_1(x) + f_1(x) \cdot l_n(x),$$

și deoarece $l_1(x) = x, f_1(x) = 1$ obținem $xf_n(x) + l_n(x) = 2f_{n+1}(x).$

1.181. $(x^2 + 4) \cdot f_n(x) + x \cdot l_n(x) = 2l_{n+1}(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned}
2l_{n+1}(x) - xl_n(x) &= 2(\alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x)) - x(\alpha^n(x) + \beta^n(x)) = \alpha^n(x)(2\alpha(x) - x) + \\
&+ 2\beta^n(x)(2\beta(x) - x) = \alpha^n(x)(x + \sqrt{x^2 + 4} - x) + 2\beta^n(x)(x - \sqrt{x^2 + 4} - x) = \\
&= \sqrt{x^2 + 4}(\alpha^n(x) - \beta^n(x)) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}(\alpha^n(x) - \beta^n(x)) = \\
&= \frac{x^2 + 4}{\alpha(x) - \beta(x)}(\alpha^n(x) - \beta^n(x)) = (x^2 + 4)f_n(x).
\end{aligned}$$

1.182.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 + 4 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n(x) \\ l_n(x) \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 + 4 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n(x) \\ l_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xf_{n+1}(x) + l_n(x) \\ (x^2 + 4)f_n(x) + xl_n(x) \end{pmatrix},$$

de unde dacă ținem seama de **1.180** și **1.181** obținem relația enunțului.

1.183. $2 \cdot l_{n+k}(x) = (x^2 + 4)f_n(x)f_k(x) + l_n(x)l_k(x), \forall k, n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. $(x^2 + 4)f_n(x)f_k(x) + l_n(x)l_k(x) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 + 4}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} (\alpha^n(x) - \beta^n(x))(\alpha^k(x) - \beta^k(x)) + (\alpha^n(x) + \beta^n(x))(\alpha^k(x) + \beta^k(x)) = \\
&= \alpha^{n+k}(x) + \beta^{n+k}(x) - \alpha^n(x)\beta^k(x) - \alpha^k(x)\beta^n(x) + \alpha^{n+k}(x) + \beta^{n+k}(x) + \\
&\quad + \alpha^n(x)\beta^k(x) + \alpha^k(x)\beta^n(x) = 2(\alpha^{n+k}(x) + \beta^{n+k}(x)) = 2l_{n+k}(x).
\end{aligned}$$

1.184.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} f_{n+k}(x) \\ l_{n+k}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_k(x) & f_k(x) \\ (x^2 + 4)f_k(x) & l_k(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n(x) \\ l_n(x) \end{pmatrix}, \forall k, n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{pmatrix} l_k(x) & f_k(x) \\ (x^2 + 4)f_k(x) & l_k(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n(x) \\ l_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x)l_k(x) + f_k(x)l_n(x) \\ (x^2 + 4)f_n(x)f_k(x) + l_k(x)l_n(x) \end{pmatrix},$$

de unde dacă ținem seama de **1.179** și **1.183** obținem relația enunțului.

1.185. $f_n^2(x) = \frac{1}{x^2 + 4}(l_n^2(x) - 4(-1)^n), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} f_n^2(x) &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2}(\alpha^n(x) - \beta^n(x))^2 = \frac{1}{x^2 + 4}(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n) = \\ &= \frac{1}{x^2 + 4}(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + 2(\alpha(x)\beta(x))^n - 4(\alpha(x)\beta(x))^n) = \\ &= \frac{1}{x^2 + 4}(((\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2 - 4(-1)^n)) = \frac{1}{x^2 + 4}(l_n^2(x) - 4(-1)^n). \end{aligned}$$

1.186. $f_n^2(x) = \frac{1}{x^2 + 4}(l_{2n}(x) - 2(-1)^n), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$

Demonstrație. Ca mai sus obținem:

$$\begin{aligned} f_n^2(x) &= \frac{1}{x^2 + 4}(\alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) - 2(\alpha(x)\beta(x))^n) = \\ &= \frac{1}{x^2 + 4}(l_{2n}(x) - 2(-1)^n). \end{aligned}$$

1.187. $\sum_{k=0}^m F_{n+k} = F_n F_{m+1} + F_{n+1} F_{m+2} - F_{n+1}.$

(Cezar Popovici, 1911)

Demonstrație.

$$(1) \quad \sum_{k=0}^m F_{n+k} = \sum_{i=0}^{n+m} F_i - \sum_{i=0}^{n+m} F_i = (F_{n+m+2} - 1) - (F_{n+1} - 1) = F_{n+m+2} - F_{n+1}.$$

Avem însă:

$$\begin{aligned} (2) \quad F_n F_{m+1} + F_{n+1} F_{m+2} &= \frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}) + \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2}) = \\ &= \frac{1}{5}(\alpha^{m+n+1} - \alpha^n \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \beta^n + \beta^{m+n+1} + \alpha^{m+n+3} - \alpha^{n+1} \beta^{m+2} - \alpha^{m+2} \beta^{n+1} + \beta^{m+n+3}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}(\alpha^{m+n+2}(\alpha^{-1} + \alpha) + \beta^{m+n+2}(\beta^{-1} + \beta) - \alpha^n \beta^{m+1}(1 + \alpha\beta) - \alpha^{m+1} \beta^n(1 + \alpha\beta)) = \\
&= \frac{1}{5}(\alpha - \beta)(\alpha^{m+n+2} - \beta^{m+n+2}) = \frac{\alpha - \beta}{5}(\alpha^{m+n+2} - \beta^{m+n+2}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m+n+2} - \beta^{m+n+2}) = F_{m+n+2}.
\end{aligned}$$

Din relațiile (1) și (2) deducem că:

$$\sum_{k=0}^m F_{n+k} = F_n F_{m+1} + F_{n+1} F_{m+2} - F_{n+1},$$

adică ceea ce era de demonstrat.

Observație. Identitatea **1.187.** este problema 1678 din G.M., Vol. XVI, 1911-1912, p. 280.

$$\mathbf{1.188.} \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{F_m}{F_{m+2}} \right)^k = \left(\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \right)^{2n}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Este evident că:

$$(*) \quad \left(\frac{x}{x+y} \right)^{2n} = \left(1 - \frac{y}{x+y} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{y}{x+y} \right)^k, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm:

$$x = F_{m+1}, y = F_m,$$

rezultă:

$$x + y = F_m + F_{m+1} = F_{m+2},$$

și atunci relația (*) ne conduce la:

$$\left(\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{F_m}{F_{m+2}} \right)^k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce era de demonstrat.

$$\mathbf{1.189.} \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \right)^k = \left(\frac{F_m}{F_{m+2}} \right)^{2n}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

(N. Stanciu, și G. Tica 2013)

Demonstrație. Este evident că:

$$(*) \quad \left(\frac{x}{x+y} \right)^{2n} = \left(1 - \frac{y}{x+y} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{y}{x+y} \right)^k, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm:

$$x = F_m, y = F_{m+1},$$

rezultă:

$$x + y = F_m + F_{m+1} = F_{m+2},$$

și atunci relația (*) ne conduce la:

$$\left(\frac{F_m}{F_{m+2}} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \right)^k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce era de demonstrat.

$$\mathbf{1.190.} \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{L_m}{L_{m+2}} \right)^k = \left(\frac{L_{m+1}}{L_{m+2}} \right)^{2n}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Este evident că:

$$(*) \quad \left(\frac{x}{x+y} \right)^{2n} = \left(1 - \frac{y}{x+y} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{y}{x+y} \right)^k, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm:

$$x = L_{m+1}, y = L_m,$$

rezultă:

$$x + y = L_{m+1} + L_m = L_{m+2},$$

și atunci relația (*) ne conduce la:

$$\left(\frac{L_{m+1}}{L_{m+2}} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{L_m}{L_{m+2}} \right)^k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce era de demonstrat.

$$\mathbf{1.191.} \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{L_{m+1}}{L_{m+2}} \right)^k = \left(\frac{L_m}{L_{m+2}} \right)^{2n}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, 2013)

Demonstrație. Este evident că:

$$(*) \quad \left(\frac{x}{x+y}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{y}{x+y}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{y}{x+y}\right)^k, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm:

$$x = L_m, y = L_{m+1},$$

rezultă:

$$x + y = L_m + L_{m+1} = L_{m+2},$$

și atunci relația (*) ne conduce la:

$$\left(\frac{L_m}{L_{m+2}}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \left(\frac{L_{m+1}}{L_{m+2}}\right)^k, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce era de demonstrat.

*

*

*

*

*

*

Capitolul 2

INEGALITĂȚI

“Orice număr natural este un prieten al lui Ramanujan”

J. E. Littlewood

$$\mathbf{2.1.} \quad \arctan \sqrt{\frac{F_n^2 + F_{n+1}^2}{2}} + \arctan \sqrt{\frac{L_n^2 + L_{n+1}^2}{2}} \geq \arctan \frac{F_{n+2}}{2} + \arctan \frac{L_{n+2}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan x$, cu $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ este crescătoare pe $\mathbf{R}$. Deoarece,

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in \mathbf{R},$$

rezultă că:

$$\sqrt{\frac{F_n^2 + F_{n+1}^2}{2}} \geq \frac{F_n + F_{n+1}}{2} = \frac{F_{n+2}}{2} \text{ și } \sqrt{\frac{L_n^2 + L_{n+1}^2}{2}} \geq \frac{L_n + L_{n+1}}{2} = \frac{L_{n+2}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare:

$$f\left(\sqrt{\frac{F_n^2 + F_{n+1}^2}{2}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{L_n^2 + L_{n+1}^2}{2}}\right) \geq f\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right) + f\left(\frac{L_{n+2}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arctan \sqrt{\frac{F_n^2 + F_{n+1}^2}{2}} + \arctan \sqrt{\frac{L_n^2 + L_{n+1}^2}{2}} \geq \arctan \frac{F_{n+2}}{2} + \arctan \frac{L_{n+2}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Observație. Inegalitatea din enunț a fost publicată ca problemă **B-1101** în The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr.1, p. 82, 2012.

2.2. Dacă, T_k este numărul triunghiular de ordin k , i.e. $T_k = \binom{k+1}{2}, \forall k \geq 1$, atunci:

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^{2m+2}}{T_k^m} \geq \frac{3^m (F_n F_{n+1})^{m+1}}{n^m T_{n+1}^m}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall m \in \mathbf{R}_+^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Avem:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^{2m+2}}{T_k^m} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^{m+1}}{T_k^m},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *J. Radon*, i.e:

”Dacă $x_k \in \mathbf{R}_+^*, y_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k = \overline{1, n}, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}, m \in \mathbf{R}_+$, atunci

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^{m+1}}{y_k^m} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^m}, ”.$$

Deducem că:

$$U_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n T_k \right)^m},$$

unde utilizăm identitățile:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1} \text{ și } \sum_{k=1}^n T_k = \frac{n}{3} T_{n+1},$$

și obținem inegalitatea din enunț.

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **B-1108** în The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr.2, p. 181, 2012.

$$\mathbf{2.3.} \quad 2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) > 9(F_n F_{n+1} F_{n+2})^{\frac{4}{3}} \quad (1)$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 > \sqrt{6}(F_n F_{n+1} F_{n+2})^{\frac{2}{3}} \quad (2)$$

$$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 \left(\frac{1}{F_n^4} + \frac{1}{F_{n+1}^4} + \frac{1}{F_{n+2}^4} \right) > 18 \quad (3)$$

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) \left(\frac{1}{F_n^4} + \frac{1}{F_{n+1}^4} + \frac{1}{F_{n+2}^4} \right)^2 > 81 \quad (4)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Identitatea lui *Giacomo Candido* (1871-1941) este:

$$(x^2 + y^2 + (x+y)^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + (x+y)^4), \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Înlocuind în identitatea lui *Giacomo Candido* pe x cu F_n și pe y cu F_{n+1} ținând cont că:

$$x + y = F_n + F_{n+1} = F_{n+2},$$

obținem:

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2.$$

Aplicăm mai departe inegalitatea mediilor aritmetică - geometrică și deducem că:

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) > \left(3\sqrt[3]{F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}^2} \right)^2 = 9(F_n F_{n+1} F_{n+2})^{\frac{4}{3}},$$

adică (1).

În relația:

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2,$$

aplicăm inegalitatea M.A. – M.G. și obținem:

$$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 > 6\sqrt[3]{F_n^4 F_{n+1}^4 F_{n+2}^4} \Leftrightarrow (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) > \sqrt{6}(F_n F_{n+1} F_{n+2})^{\frac{2}{3}},$$

adică am demonstrat relația (2).

Înmulțim relația:

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2,$$

cu

$$\left(\frac{1}{F_n^4} + \frac{1}{F_{n+1}^4} + \frac{1}{F_{n+2}^4} \right) > 0,$$

și ținem seama de inegalitatea M.A. – M.H. Obținem:

$$\begin{aligned} (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 \left(\frac{1}{F_n^4} + \frac{1}{F_{n+1}^4} + \frac{1}{F_{n+2}^4} \right) &= \\ &= 2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) \cdot \left(\frac{1}{F_n^4} + \frac{1}{F_{n+1}^4} + \frac{1}{F_{n+2}^4} \right) > 2 \cdot 9 = 18, \end{aligned}$$

adică am demonstrat inegalitatea (3).

Înmulțim relația:

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2,$$

cu

$$\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+2}^2} \right)^2 > 0,$$

și ținem seama de inegalitatea M.A. – M.H. Obținem:

$$\begin{aligned} & 2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) \cdot \left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+2}^2} \right)^2 = \\ & = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 \left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+2}^2} \right)^2 > 9^2 = 81, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **B-1109** în The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr.2, p. 181, 2012.

$$2.4. \frac{F_m^2}{(F_q F_n + F_{q+1} F_p)^2} + \frac{F_n^2}{(F_q F_p + F_{q+1} F_m)^2} + \frac{F_p^2}{(F_q F_m + F_{q+1} F_n)^2} \geq \frac{3}{F_{q+2}^2}, \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Folosim inegalitatea lui *H. Bergström*, i.e.:

$$''\text{Dacă } x_k \in \mathbb{R}, y_k \in \mathbb{R}_+^* \forall k = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \text{ atunci } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n y_k} ''.$$

Obținem:

$$\begin{aligned} (1) \quad U &= \frac{F_m^2}{(F_q F_n + F_{q+1} F_p)^2} + \frac{F_n^2}{(F_q F_p + F_{q+1} F_m)^2} + \frac{F_p^2}{(F_q F_m + F_{q+1} F_n)^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{F_m}{F_q F_n + F_{q+1} F_p} + \frac{F_n}{F_q F_p + F_{q+1} F_m} + \frac{F_p}{F_q F_m + F_{q+1} F_n} \right)^2, \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Totodată avem:

$$\begin{aligned} V &= \frac{F_m}{F_q F_n + F_{q+1} F_p} + \frac{F_n}{F_q F_p + F_{q+1} F_m} + \frac{F_p}{F_q F_m + F_{q+1} F_n} = \\ &= \frac{F_m^2}{F_q F_m F_n + F_{q+1} F_m F_p} + \frac{F_n^2}{F_q F_n F_p + F_{q+1} F_n F_m} + \frac{F_p^2}{F_q F_p F_m + F_{q+1} F_p F_n} \end{aligned}$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström* și deducem că:

$$(2) \quad V \geq \frac{(F_m + F_n + F_p)^2}{(F_q + F_{q+1})(F_m F_n + F_n F_p + F_p F_m)} = \frac{(F_m + F_n + F_p)^2}{F_{q+2}(F_m F_n + F_n F_p + F_p F_m)}$$

Dacă ținem seama de inegalitatea

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx), \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+,$$

atunci din (2) deducem că:

$$(3) \quad V \geq \frac{3}{F_{q+2}}$$

Din relațiile (1) și (3) obținem:

$$U \geq \frac{3}{F_{q+2}^2}, \quad \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}.$$

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **B-1113** în The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr. 3, p.273, 2012.

2.5. Dacă $f : R_+^* \rightarrow R_+^*$, astfel încât $f(x) > x$, $\forall x \in R_+^*$, atunci:

$$\sum_{k=1}^n f((1 + F_k^2)^2) > 4F_n F_{n+1}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Din $f(x) > x$, avem că $f((1 + F_k^2)^2) > (1 + F_k^2)^2$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$,

și din $(1 + x)^2 \geq 4x$, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, deducem că $f((1 + F_k^2)^2) > (1 + F_k^2)^2 \geq 4F_k^2$.

Rezultă: $\sum_{k=1}^n f((1 + F_k^2)^2) > \sum_{k=1}^n (1 + F_k^2)^2 \geq 4 \sum_{k=1}^n F_k^2 = 4F_n F_{n+1}$.

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **B-1114**, în The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr. 3, p.273, 2012.

2.6.

$$\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{F_k^4 - F_k^2 + 1} + \frac{F_k^2 - 1}{F_k^4 + 1} \right) < F_n F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{L_k^4 - L_k^2 + 1} + \frac{L_k^2 - 1}{L_k^4 + 1} \right) < L_n L_{n+1} - 2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (2)$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Avem:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Într-adevăr,

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1) \leq x^6 + 2x^3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x \Leftrightarrow 0 \leq x(x-1)^4, \text{ adevărat,}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = 1$.

Deci:

$$(*) \quad \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{x-1}{x^2 + 1} \leq \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} + \frac{x-1}{x^2 + 1} = x.$$

Luăm în (*) $x = F_k^2$, și ținem cont de faptul că $F_k^2 > 1, \forall k \neq 1$, și deducem că:

$$\sqrt{F_k^4 - F_k^2 + 1} + \frac{F_k^2 - 1}{F_k^4 + 1} < F_k^2, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Astfel că:

$$\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{F_k^4 - F_k^2 + 1} + \frac{F_k^2 - 1}{F_k^4 + 1} \right) < \sum_{k=1}^n F_k^2,$$

și dacă ținem seama că:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

obținem (1).

Folosim (*) $\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{x-1}{x^2 + 1} \leq x$, unde punem $x = L_k^2, \forall k \in \mathbf{N}^*$, și ținem cont că

$L_k^2 > 1, \forall k \neq 1$. Obținem:

$$\sqrt{L_k^4 - L_k^2 + 1} + \frac{L_k^2 - 1}{L_k^4 + 1} < L_k^2, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare,

$$\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{L_k^4 - L_k^2 + 1} + \frac{L_k^2 - 1}{L_k^4 + 1} \right) < \sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **B-1117** în The Fibonacci Quartely, Vol. 50, Nr.4, p.367, 2012.

$$2.7. \quad \sum_{k=1}^n \frac{\tan^2 \frac{x}{2^k}}{2^k F_k^2} \geq \frac{\left(\cot \frac{x}{2^n} - 2^{n+1} \cot 2x \right)^2}{2^{2n} F_n F_{n+1}}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right).$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Avem:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\tan^2 \frac{x}{2^k}}{2^k F_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2^k}} \tan \frac{x}{2^k} \right)^2}{F_k^2},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *H. Bergström* și deducem că:

$$(*) \quad U_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2^k}} \tan \frac{x}{2^k} \right)^2}{\sum_{k=1}^n F_k^2}$$

Deoarece:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2^k}} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - 2 \cot 2x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \text{ și}$$

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

atunci din (*) rezultă enunțul.

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **B-1119** în The Fibonacci Quarterly, Vol. 50, Nr. 4, p.367, 2012.

2.8. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $a + b + c \leq 24$, atunci:

$$\frac{F_n}{\sqrt{F_n^2 + aF_{n+1}F_{n+2}}} + \frac{F_{n+1}}{\sqrt{F_{n+1}^2 + bF_{n+2}F_n}} + \frac{F_{n+2}}{\sqrt{F_{n+2}^2 + cF_nF_{n+1}}} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Avem:

$$U_n = \frac{F_n}{\sqrt{F_n^2 + aF_{n+1}F_{n+2}}} + \frac{F_{n+1}}{\sqrt{F_{n+1}^2 + bF_{n+2}F_n}} + \frac{F_{n+2}}{\sqrt{F_{n+2}^2 + cF_nF_{n+1}}}.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad U_n &= \sum \frac{F_n}{\sqrt{F_n^2 + aF_{n+1}F_{n+2}}} = \sum \frac{F_n^2}{\sqrt{F_n} \cdot \sqrt{F_n^3 + aF_nF_{n+1}F_{n+2}}} = \\ &= \sum \frac{F_n^2}{\sqrt{F_n} \cdot \sqrt{F_n^3 + ap_n}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

unde:

$$p_n = F_n F_{n+1} F_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Notăm

$$v_n = \sqrt{F_n} \cdot \sqrt{F_n^3 + ap_n}, \text{ și}$$

$$V_n = v_n + v_{n+1} + v_{n+2} = \sqrt{F_n} \cdot \sqrt{F_n^3 + ap_n} + \sqrt{F_n} \cdot \sqrt{F_n^3 + bp_n} + \sqrt{F_n} \cdot \sqrt{F_n^3 + cp_n}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Avem:

$$V_n^2 = \left(\sum \sqrt{F_n} \sqrt{F_n^3 + ap_n} \right)^2 \stackrel{C-B-S}{\leq} s_n (F_n^3 + F_{n+1}^3 + F_{n+2}^3 + (a+b+c)p_n), \forall n \in \mathbf{N},$$

unde:

$$s_n = F_n + F_{n+1} + F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece :

$$(x+y+z)^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*, \text{ și } \\ V_n^2 \leq s_n (F_n^3 + F_{n+1}^3 + F_{n+2}^3 + (a+b+c)p_n) \leq s_n (F_n^3 + F_{n+1}^3 + F_{n+2}^3 + 24F_n F_{n+1} F_{n+2}),$$

Atunci:

$$(2) \quad V_n^2 \leq s_n \cdot s_n^3 = s_n^4, \forall n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow v_n \leq s_n^2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Aplicăm inegalitatea *H. Bergström*, și din (1) și (2) deducem că

$$U_n \geq \frac{(s_n)^2}{V_n} \geq \frac{s_n^2}{s_n^2} = 1, \forall n \in \mathbf{N},$$

adică am obținut inegalitatea din enunț.

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **H-728** în *The Fibonacci Quartrely*, Vol. 50, Nr. 4, p. 375, 2012.

2.9. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $abc = 1$, atunci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^{3m+3}(F_n b + F_{n+1} c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(F_n c + F_{n+1} a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(F_n a + F_{n+1} b)^{m+1}} \geq \frac{3}{F_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Conform inegalității lui *J. Radon* avem:

$$(1) \quad A_n = \frac{1}{a^{3m+3}(F_n b + F_{n+1} c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(F_n c + F_{n+1} a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(F_n a + F_{n+1} b)^{m+1}} \geq \\ \geq \frac{1}{3^m} \left(\frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} \right)^{m+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Avem:

$$B_n = \frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} = \\ = \frac{\frac{1}{a^2}}{F_n ab + F_{n+1} ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{F_n bc + F_{n+1} ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{F_n ac + F_{n+1} bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *H. Bergström*, și deducem că

$$(2) B_n \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(F_n + F_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{F_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq} \\ \geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Din (1) și (2) rezultă că:

$$A_n \geq \frac{1}{3^m} \left(\frac{3}{F_{n+2}} \right)^{m+1} = \frac{3}{F_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ i.e. enunțul.}$$

Remarcă. Pentru $n = m = 0$, se obține $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2$, iar relația enunțului devine

Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $abc = 1$, atunci

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

adică problema dată la OIM, **Canada**, 1995, propusă de **Rusia**.

Observație. Inegalitatea a fost publicată ca problema **H-728** în The Fibonacci Quartely,, Vol. 50, Nr. 4, p. 375, 2012.

2.10. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $m \geq 0$, atunci:

$$\frac{\sin^{m+2} t}{(F_n \sin t + F_{n+1} \cos t)^m} + \frac{\cos^{m+2} t}{(F_n \cos t + F_{n+1} \sin t)^m} \geq \frac{1}{F_{n+2}^m}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

$$\frac{1}{(L_n + L_{n+1} \tan t)^m} + \frac{\tan^{m+2} t}{(L_n \tan t + L_{n+1})^m} \geq \frac{1}{L_{n+2}^m \cos^2 t}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (2)$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2012)

Demonstrație. Avem:

$$(*) \quad \frac{x^{m+2}}{(ux + vy)^m} + \frac{y^{m+2}}{(uy + vx)^m} \geq \frac{x^2 + y^2}{(u + v)^m}, \forall x, y, u, v \in \mathbf{R}_+^*.$$

Într-adevăr:

$$U = \frac{x^{m+2}}{(ux + vy)^m} + \frac{y^{m+2}}{(uy + vx)^m} = \frac{x^{2(m+1)}}{(ux^2 + vxy)^m} + \frac{y^{2(m+1)}}{(uy^2 + vxy)^m} \geq \\ \geq \frac{(x^2)^{m+1}}{\left(ux^2 + \frac{v(x^2 + y^2)}{2}\right)^m} + \frac{(y^2)^{m+1}}{\left(uy^2 + \frac{v(x^2 + y^2)}{2}\right)^m},$$

și din inegalitatea lui *J. Radon* deducem că:

$$U \geq \frac{(x^2 + y^2)^{m+1}}{(u(x^2 + y^2) + v(x^2 + y^2))^m} = \frac{x^2 + y^2}{(u + v)^m}.$$

- Luăm $u = F_n$, $v = F_{n+1}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, și din (*) rezultă că:

$$\frac{\sin^{m+2} t}{(F_n \sin t + F_{n+1} \cos t)^m} + \frac{\cos^{m+2} t}{(F_n \cos t + F_{n+1} \sin t)^m} \geq \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{(F_n + F_{n+1})^m} = \frac{1}{F_{n+2}^m}, \text{ i.e. (1).}$$

- Luăm $u = L_n$, $v = L_{n+1}$, $x = 1$, $y = \tan t$, și din (*) obținem că:

$$\frac{1}{L_n + L_{n+1} \tan t} + \frac{\tan^3 t}{L_n \tan t + L_{n+1}} \geq \frac{1 + \tan^2 t}{L_n + L_{n+1}} = \frac{1}{L_{n+2} \cos^2 t}, \text{ i.e. (2).}$$

Observație. Inegalitatea a fost dată la Concursul Internațional **József Wildt**, 2012 ca problema **W1**, și publicată în Octagon Mathematical Magazine, Vol. 20, Nr. 1, April, 2012, p. 252.

2.11. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci:

$$\frac{\sin^3 t}{F_n \sin t + F_{n+1} \cos t} + \frac{\cos^3 t}{F_n \cos t + F_{n+1} \sin t} \geq \frac{1}{F_{n+2}}, \text{ oricare ar fi } n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{L_n + L_{n+1} \tan t} + \frac{\tan^3 t}{L_n \tan t + L_{n+1}} \geq \frac{1}{L_{n+2} \cos^2 t}, \text{ oricare ar fi } n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (2)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$(*) \quad \frac{x^3}{ux + vy} + \frac{y^3}{uy + vx} \geq \frac{x^2 + y^2}{u + v}, \quad \forall x, y, u, v \in \mathbf{R}_+^*.$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} U &= \frac{x^3}{ux + vy} + \frac{y^3}{uy + vx} = \frac{(x^2)^2}{ux^2 + vxy} + \frac{(y^2)^2}{uy^2 + vxy} \geq \\ &\geq \frac{(x^2)^2}{ux^2 + \frac{v(x^2 + y^2)}{2}} + \frac{(y^2)^2}{uy^2 + \frac{v(x^2 + y^2)}{2}} = 2 \left(\frac{(x^2)^2}{2ux^2 + v(x^2 + y^2)} + \frac{(y^2)^2}{2uy^2 + v(x^2 + y^2)} \right), \end{aligned}$$

și din inegalitatea lui *H. Bergström* obținem că:

$$U \geq \frac{2(x^2 + y^2)^2}{2u(x^2 + y^2) + 2v(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{u + v}.$$

- Dacă luăm $u = F_n$, $v = F_{n+1}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, atunci din (*) deducem că:

$$\frac{\sin^3 t}{F_n \sin t + F_{n+1} \cos t} + \frac{\cos^3 t}{F_n \cos t + F_{n+1} \sin t} \geq \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{F_n + F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n+2}},$$

astfel că (1) este demonstrată.

- Dacă luăm $u = L_n$, $v = L_{n+1}$, $x = 1$, $y = \tan t$, atunci din (*) obținem că:

$$\frac{1}{L_n + L_{n+1} \tan t} + \frac{\tan^3 t}{L_n \tan t + L_{n+1}} \geq \frac{1 + \tan^2 t}{L_n + L_{n+1}} = \frac{1}{L_{n+2} \cos^2 t},$$

deci și (2) este demonstrată.

2.12. Dacă $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{T_k} \geq \frac{3F_n^2 F_{n+1}^2}{nT_{n+1}}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu, și Gabriel Tica 2013)

Demonstrație. Avem:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{T_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^2}{T_k},$$

iar din inegalitatea lui *H. Bergström* rezultă că:

$$U_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^2}{\sum_{k=1}^n T_k}$$

unde folosim relațiile cunoscute

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \text{ și } \sum_{k=1}^n T_k = \frac{n}{3} T_{n+1},$$

și urmează concluzia. .

2.13. Dacă $x_k = L_k, k = \overline{1, m}, x_{m+1} = x_1$ și $y_k = F_k, k = \overline{1, m}, y_{m+1} = y_1$, atunci:

$$\frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{x_k^3}{F_{n+1}x_k + F_n x_{k+1}} \geq \frac{L_m L_{m+1}}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{y_k^3}{L_m y_k + L_{m+1} y_{k+1}} \geq \frac{F_m F_{m+1}}{L_{m+2}}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (2)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$U_n = \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{x_k^3}{F_{n+1}x_k + F_n x_{k+1}} = \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{F_{n+1}x_k^2 + F_n x_k x_{k+1}} \geq$$

$$\geq \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{F_{n+1}x_k^2 + \frac{F_n}{2}(x_k^2 + x_{k+1}^2)} = \frac{2}{F_{n+2}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{(2F_{n+1} + F_n)x_k^2 + F_n x_{k+1}^2},$$

unde aplicând inegalitatea lui *H. Bergström* obținem că:

$$\begin{aligned} U_n &\geq \frac{2}{F_{n+2}} + 2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^2}{(2F_{n+1} + F_n)\sum_{k=1}^m x_k^2 + F_n \sum_{k=1}^n x_{k+1}^2} = \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_n + F_{n+1}} \sum_{k=1}^n x_k^2 = \\ &= \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} \sum_{k=1}^m L_k^2, \end{aligned}$$

iar dacă ținem cont că:

$$\sum_{k=1}^m L_k^2 = L_m L_{m+1} - 2,$$

deducem inegalitatea (1).

De asemenea avem:

$$\begin{aligned} V_m &= \sum_{k=1}^m \frac{y_k^3}{L_m y_k + L_{m+1} y_{k+1}} = \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{L_m y_k^2 + L_{m+1} y_k y_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{L_m y_k^2 + \frac{L_{m+1}}{2}(y_k^2 + y_{k+1}^2)} = \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{(2L_m + L_{m+1})y_k^2 + L_{m+1} y_{k+1}^2}, \end{aligned}$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström* și deducem:

$$V_n \geq 2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^m y_k^2\right)^2}{(2L_m + L_{m+1})\sum_{k=1}^m y_k^2 + L_{m+1} \sum_{k=1}^m y_{k+1}^2} = \frac{1}{L_m + L_{m+1}} \sum_{k=1}^m y_k^2 = \frac{1}{L_{m+2}} \sum_{k=1}^m F_k^2,$$

unde dacă ținem seama de:

$$\sum_{k=1}^m F_k^2 = F_m F_{m+1},$$

obținem (2), și urmează concluzia.

2.14. Oricare ar fi numărul natural $n > 1$ și numărul real $p \geq 0$, avem inegalitățile:

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{F_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p} \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{L_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p} \quad (2)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Dacă $x_k, y_k \in \mathbf{R}_+^*, k = \overline{0, n}, p \in \mathbf{R}_+$, atunci din inegalitatea lui *J. Radon* avem:

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k^{p+1}}{y_k^p} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n x_k \right)^{p+1}}{\left(\sum_{k=0}^n y_k \right)^p},$$

unde luăm $x_k = \binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k$, și $y_k = 1, k = \overline{0, n}$.

Așadar, avem:

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k \right)^{p+1}}{(n+1)^p} = \frac{(F_m + F_{m+1})^{n(p+1)}}{(n+1)^p} = \frac{F_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p},$$

adică (1) este adevărată.

Dacă punem $x_k = \binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k$, și $y_k = 1, k = \overline{0, n}$ în inegalitatea lui *J. Radon* de mai sus, rezultă că:

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k \right)^{p+1}}{(n+1)^p} = \frac{(L_m + L_{m+1})^{n(p+1)}}{(n+1)^p} = \frac{L_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p},$$

deci (2) este adevărată și demonstrația este completă.

2.15. Oricare ar fi numărul real $p \geq 0$, și numerele naturale nenule n și m , avem:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\left(F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n \right)}{F_m} \right)^{p+1} + \\ & + \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1} \right)}{F_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1}. \end{aligned}$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Notăm membrul stâng al inegalității cu U_n , și avem că:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} (((F_{m+1}(F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n))^{p+1} + \\ &+ (F_m (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1} + F_m^{2n}))^{p+1}) = \\ &= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} ((F_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n+1} F_m^n)^{p+1} + \\ &+ (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} + F_m^{2n+1})^{p+1}), \end{aligned}$$

unde din inegalitatea lui *J. Radon* deducem că:

$$\begin{aligned} U_n &\geq \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{m+1}^{2n+1-k} F_m^k \right)^{p+1} = \\ &= \frac{1}{2^p (F_m F_{m+1})^{p+1}} (F_m + F_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1}, \end{aligned}$$

adică inegalitatea din enunț.

2.16. Oricare ar fi numărul real $p \geq 0$, și numerele naturale nenule n și m , avem:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\left(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n \right)}{L_m} \right)^{p+1} + \\ &+ \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} \right)}{L_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1}. \end{aligned}$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Notând membrul stâng al inegalității cu V_n , avem:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} (((L_{m+1}(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n))^{p+1} + \\ &+ (L_m (\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} + L_m^{2n}))^{p+1}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \left((L_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^{n+1} L_m^n)^{p+1} + \right. \\ \left. + \left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n} + L_m^{2n+1} \right)^{p+1} \right)$$

și folosind inegalitatea lui *J. Radon* obținem că:

$$V_n \geq \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} L_{m+1}^{2n+1-k} L_m^k \right)^{p+1} = \\ = \frac{1}{2^p (L_m L_{m+1})^{p+1}} (L_m + L_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1},$$

și demonstrația este completă.

2.17. Oricare ar fi numărul real $p \geq 0$, și numerele naturale nenule n și m , avem:

$$\left(\frac{\left(F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n \right)}{F_m} \right)^{p+1} + \\ + \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1} \right)}{F_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\left(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n \right)}{L_m} \right)^{p+1} + \\ + \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} \right)}{L_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1} \quad (2)$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Notând membrul stâng al inegalității (1) cu U_n , avem că:

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \left((F_{m+1} (F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n) \right)^{p+1} + \\
&\quad + (F_m (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1} + F_m^{2n}))^{p+1} \Big) = \\
&= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \left((F_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n+1} F_m^n) \right)^{p+1} + \\
&\quad + \left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} + F_m^{2n+1} \right)^{p+1} \Big),
\end{aligned}$$

iar din inegalitatea lui *J. Radon* obținem că:

$$\begin{aligned}
U_n &\geq \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{m+1}^{2n+1-k} F_m^k \right)^{p+1} = \\
&= \frac{1}{2^p (F_m F_{m+1})^{p+1}} (F_m + F_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1},
\end{aligned}$$

adică inegalitatea (1).

Notând membrul stâng al inegalității (2) cu V_n , avem:

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \left((L_{m+1} (L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n) \right)^{p+1} + \\
&\quad + (L_m (\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} + L_m^{2n}))^{p+1} \Big) = \\
&= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \left((L_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^{n+1} L_m^n) \right)^{p+1} + \\
&\quad + \left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n} + L_m^{2n+1} \right)^{p+1} \Big)
\end{aligned}$$

și de asemenea din inegalitatea lui *J. Radon* deducem că:

$$\begin{aligned}
V_n &\geq \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} L_{m+1}^{2n+1-k} L_m^k \right)^{p+1} = \\
&= \frac{1}{2^p (L_m L_{m+1})^{p+1}} (L_m + L_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1},
\end{aligned}$$

și demonstrația este încheiată.

2.18. Oricare ar fi numărul natural nenul n , avem următoarele inegalități:

$$e^{n+3-L_{n+2}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^n \quad (1)$$

$$e^{n+2-L_n L_{n+1}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right)^n \quad (2)$$

$$e^{n+1-F_{n+2}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right)^n \quad (3)$$

$$e^{n-F_n F_{n+1}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^n \quad (4)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. În binecunoscuta inegalitate $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbf{R}$, luăm $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k - 1$, și obținem că:

$$(*) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k \right)^n.$$

Deoarece, din inegalitatea M.A. – M.H. avem:

$$\left(\sum_{k=1}^n L_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^{-1}$$

astfel că din (*) obținem:

$$e^{\sum_{k=1}^n L_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^n \geq e^{-\sum_{k=1}^n L_k} = e^{n+3-L_{n+2}},$$

unde folosim faptul că

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3,$$

și inegalitatea (1) este dovedită.

Luând $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 - 1$, în inegalitatea $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbf{R}$ se obține că:

$$(**) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 \right)^n.$$

De asemenea din M.A. – M.H. avem că:

$$\left(\sum_{k=1}^n L_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right)^{-1},$$

și din (**) rezultă că:

$$e^{\sum_{k=1}^n L_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k^2 - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right)^n \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right)^n \geq e^{n - \sum_{k=1}^n L_k^2} = e^{n+2-L_n L_{n+1}},$$

unde utilizăm identitatea

$$\sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2,$$

și (2) este demonstrată

Luăm $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k - 1$, în $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ și avem că:

$$(***) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k \right)^n.$$

Din inegalitatea mediilor M.A. – M.H. avem:

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right)^{-1},$$

și atunci din (***) urmează că:

$$e^{\sum_{k=1}^n F_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right)^n \geq e^{-\sum_{k=1}^n F_k} = e^{n+1-F_{n+2}},$$

unde ținem seama de:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

și obținem inegalitatea (3).

Punând $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 - 1$, în relația $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ deducem că:

$$(***) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^n.$$

Astfel, din inegalitatea mediilor M.A. – M.H. se obține că:

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1},$$

apoi din (****) deducem:

$$e^{\sum_{k=1}^n F_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k^2 - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^n \geq e^{-\sum_{k=1}^n F_k^2} = e^{n-F_n F_{n+1}},$$

unde folosim identitatea:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

și demonstrația este încheiată.

2.19. Dacă m este un număr rela pozitiv nenul și n este un număr natural nenul, iar dacă ABC , este un triunghi cu aria S și notațiile uzuale, atunci:

$$\frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2)^m} + \frac{b^{2(m+1)}}{(F_n m_b^2 + F_{n+1} m_c^2)^m} + \frac{c^{2(m+1)}}{(F_n m_c^2 + F_{n+1} m_a^2)^m} \geq \frac{4^{m+1} \sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S \quad (1)$$

$$\frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2)^m} + \frac{m_b^{2(m+1)}}{(F_n c^2 + F_{n+1} a^2)^m} + \frac{m_c^{2(m+1)}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2)^m} \geq \frac{3^{m+1} \sqrt{3}}{4^m F_{n+2}^m} S \quad (2)$$

$$\frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2)^m} + \frac{b^{2(m+1)}}{(F_n m_b^2 + F_{n+1} m_c^2 + F_{n+2} m_a^2)^m} + \frac{c^{2(m+1)}}{(F_n m_c^2 + F_{n+1} m_a^2 + F_{n+2} m_b^2)^m} \geq \frac{2^{m+2} \sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S \quad (3)$$

$$\frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2)^m} + \frac{m_b^{2(m+1)}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2 + F_{n+2} a^2)^m} + \frac{m_c^{2(m+1)}}{(F_n c^2 + F_{n+1} a^2 + F_{n+2} b^2)^m} \geq \frac{3^{m+1} \sqrt{3}}{8^m F_{n+2}^m} S \quad (4)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Folosim inegalitatea lui *J. Radon*, formula bine-cunoscută

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

și inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck*, adică:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Avem:

$$I_n = \sum \frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2)^m},$$

iar din inegalitatea lui *J. Radon* deducem că:

$$\begin{aligned} I_n &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2))^m} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1})^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{F_{n+2}^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m}. \end{aligned}$$

Dar,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

deci,

$$I_n \geq \frac{4^m}{3^m F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck*, i.e.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

obținem că:

$$I_n \geq \frac{4^{m+1} \sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S,$$

astfel că (1) este demonstrată.

Avem:

$$Y_n = \sum \frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2)^m} = \sum \frac{(m_a^2)^{m+1}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2)^m},$$

Unde cu ajutorul inegalității lui *J. Radon* deducem că:

$$\begin{aligned} Y_n &\geq \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n b^2 + F_{n+1} c^2))^m} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1})^m (a^2 + b^2 + c^2)^m} = \\ &= \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{F_{n+2}^m (a^2 + b^2 + c^2)^m}. \end{aligned}$$

Deoarece,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

rezultă:

$$Y_n \geq \frac{3^{m+1}}{4^{m+1} F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck*, i.e.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

deducem:

$$Y_n \geq \frac{3^{m+1} \sqrt{3}}{4^m F_{n+2}^m} S,$$

asa că (2) este dovedită.

De asemenea avem:

$$Z_n = \sum \frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2)^m},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *J. Radon* și obținem că:

$$\begin{aligned} Z_n &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2))^m} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{2^m F_{n+2}^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m}. \end{aligned}$$

Deoarece,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

avem:

$$Z_n \geq \frac{2^m}{3^m F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Aplicăm inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck*, i.e. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, și rezultă că:

$$Z_n \geq \frac{2^{m+2}\sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S,$$

deci (3) este demonstrată.

Avem:

$$X_n = \sum \frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2)^m} = \sum \frac{(m_a^2)^{m+1}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2)^m},$$

unde aplicând inegalitatea lui *J. Radon* obținem:

$$\begin{aligned} X_n &\geq \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2))^m} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^m (a^2 + b^2 + c^2)^m} = \\ &= \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{2^m F_{n+2}^m (a^2 + b^2 + c^2)^m}. \end{aligned}$$

Din:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

deducem:

$$X_n \geq \frac{3^{m+1}}{2^{3m+2} F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Apoi din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck*, i.e.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

rezultă că:

$$X_n \geq \frac{3^{m+1}\sqrt{3}}{2^{3m} F_{n+2}^m} S,$$

și demonstrația este completă.

2.20. Dacă ABC este un triunghi dreptunghic cu $\angle A = 90^\circ$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{F_m^2}{(bF_n + cF_p)^2} + \frac{F_n^2}{(bF_p + cF_m)^2} + \frac{F_p^2}{(bF_m + cF_n)^2} \geq \frac{3}{2a^2},$$

oricare ar fi numerele naturale nenule m, n, p .

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Din inegalitatea lui *H. Bergström* avem că:

$$(1) \quad U = \frac{F_m^2}{(bF_n + cF_p)^2} + \frac{F_n^2}{(bF_p + cF_m)^2} + \frac{F_p^2}{(bF_m + cF_n)^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3} \left(\frac{F_m}{bF_n + cF_p} + \frac{F_n}{bF_p + cF_m} + \frac{F_p}{bF_m + cF_n} \right)^2$$

De asemenea avem:

$$\begin{aligned} V &= \frac{F_m}{bF_n + cF_p} + \frac{F_n}{bF_p + cF_m} + \frac{F_p}{bF_m + cF_n} = \\ &= \frac{F_m^2}{bF_m F_n + cF_m F_p} + \frac{F_n^2}{bF_n F_p + cF_n F_m} + \frac{F_p^2}{bF_p F_m + cF_p F_n} \end{aligned}$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström* și obținem că:

$$(2) V \geq \frac{(F_m + F_n + F_p)^2}{(b+c)(F_m F_n + F_n F_p + F_p F_m)}$$

iar dacă ținem seama de inegalitatea:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx),$$

adevărată pentru orice numere reale pozitive x, y, z , atunci din (2) deducem:

$$(3) V \geq \frac{3}{b+c}$$

Din (1), (3) și ipoteza că triunghiul ABC este dreptunghic cu $\angle A = 90^\circ$, adică are loc teorema lui *Pitagora*:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

rezultă că:

$$U \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{(b+c)^2} \geq \frac{3}{2(b^2 + c^2)} = \frac{3}{2a^2},$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.21. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $a + b + c \leq 24$, atunci:

$$\frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + aL_{n+1}L_{n+2}}} + \frac{L_{n+1}}{\sqrt{L_{n+1}^2 + bL_{n+2}L_n}} + \frac{L_{n+2}}{\sqrt{L_{n+2}^2 + cL_nL_{n+1}}} \geq 1, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + aL_{n+1}L_{n+2}}} + \frac{L_{n+1}}{\sqrt{L_{n+1}^2 + bL_{n+2}L_n}} + \frac{L_{n+2}}{\sqrt{L_{n+2}^2 + cL_nL_{n+1}}} . \\ (1) \quad U_n &= \sum \frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + aL_{n+1}L_{n+2}}} = \sum \frac{L_n^2}{\sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + aL_nL_{n+1}L_{n+2}}} = \end{aligned}$$

$$= \sum \frac{L_n^2}{\sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + ap_n}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

unde:

$$p_n = L_n L_{n+1} L_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Notăm:

$$v_n = \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + ap_n}, \text{ și}$$

$$V_n = v_n + v_{n+1} + v_{n+2} = \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + ap_n} + \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + bp_n} + \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + cp_n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Avem:

$$V_n^2 = \left(\sum \sqrt{L_n} \sqrt{L_n^3 + ap_n} \right)^2 \stackrel{C-B-S}{\leq} s_n (L_n^3 + L_{n+1}^3 + L_{n+2}^3 + (a+b+c)p_n), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

unde:

$$s_n = L_n + L_{n+1} + L_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Deoarece:

$$(x+y+z)^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*, \text{ și}$$

$$V_n^2 \leq s_n (L_n^3 + L_{n+1}^3 + L_{n+2}^3 + (a+b+c)p_n) \leq s_n (L_n^3 + L_{n+1}^3 + L_{n+2}^3 + 24L_n L_{n+1} L_{n+2}),$$

atunci:

$$(2) \quad V_n^2 \leq s_n \cdot s_n^3 = s_n^4, \quad \forall n \in N \Leftrightarrow v_n \leq s_n^2, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Aplicăm inegalitatea *H. Bergström*, și din (1) și (2) deducem că:

$$U_n \geq \frac{(s_n)^2}{V_n} \geq \frac{s_n^2}{s_n^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

adică am obținut inegalitatea din enunț.

2.22. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $abc = 1$, atunci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^{3m+3}(L_n b + L_{n+1} c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(L_n c + L_{n+1} a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(L_n a + L_{n+1} b)^{m+1}} \geq \frac{3}{L_{n+2}^{m+1}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Conform inegalității lui *J. Radon* avem:

$$(1) \quad A_n = \frac{1}{a^{3m+3}(L_n b + L_{n+1} c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(L_n c + L_{n+1} a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(L_n a + L_{n+1} b)^{m+1}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3^m} \left(\frac{1}{a^3(L_n b + L_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(L_n c + L_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(L_n a + L_{n+1} b)} \right)^{m+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

De asemenea avem:

$$B_n = \frac{1}{a^3(L_n b + L_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(L_n c + L_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(L_n a + L_{n+1} b)} =$$

$$= \frac{1}{L_n ab + L_{n+1} ac} + \frac{1}{L_n bc + L_{n+1} ab} + \frac{1}{L_n ac + L_{n+1} bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *H. Bergström*, și deducem că

$$(2) \quad B_n = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(L_n + L_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{L_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{L_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq} \\ \geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{L_{n+2}} = \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}$$

Din (1) și (2) rezultă că:

$$A_n \geq \frac{1}{3^m} \left(\frac{3}{L_{n+2}} \right)^{m+1} = \frac{3}{L_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N},$$

adică ceea ce era de demonstrat.

2.23. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $abc = 1$, atunci:

$$\frac{1}{a^6(F_n b + F_{n+1} c)^2} + \frac{1}{b^6(F_n c + F_{n+1} a)^2} + \frac{1}{c^6(F_n a + F_{n+1} b)^2} \geq \frac{3}{F_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Conform inegalității lui *H. Bergström* avem

$$(1) \quad A_n = \frac{1}{a^6(F_n b + F_{n+1} c)^2} + \frac{1}{b^6(F_n c + F_{n+1} a)^2} + \frac{1}{c^{3m+3}(F_n a + F_{n+1} b)^2} \geq \\ \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} \right)^2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Avem:

$$B_n = \frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} = \\ = \frac{1}{F_n ab + F_{n+1} ac} + \frac{1}{F_n bc + F_{n+1} ab} + \frac{1}{F_n ac + F_{n+1} bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström*, și deducem că:

$$(2) \quad B_n = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(F_n + F_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{F_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq} \\ \geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Din (1) și (2) rezultă că:

$$A_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{F_{n+2}} \right)^2 = \frac{3}{F_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N},$$

ceea ce era de demonstrat.

Observație. Pentru $n = 0$, se obține $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2$, iar relația enunțului devine

$$\frac{1}{a^6(b+c)^2} + \frac{1}{b^6(c+a)^2} + \frac{1}{c^6(a+b)^2} \geq \frac{3}{4}, \text{ cu } abc = 1.$$

2.24. Dacă $a, b, c \in R_+^*$, astfel încât $abc = 1$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} \geq \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. $B_n = \frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} =$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{F_n ab + F_{n+1} ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{F_n bc + F_{n+1} ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{F_n ac + F_{n+1} bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde aplicăm inegalitatea lui H. Bergström, și deducem că:

$$B_n = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{(F_n + F_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{F_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq}$$

$$\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N},$$

adică inegalitatea din enunț.

Observație. Pentru $n = 0$, se obține $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2$, iar relația enunțului devine

Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $abc = 1$, atunci:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

adică problema dată la OIM, **Canada**, 1995, propusă de **Rusia**.

2.25. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $abc = 1$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^6(L_n b + L_{n+1} c)^2} + \frac{1}{b^6(L_n c + L_{n+1} a)^2} + \frac{1}{c^6(L_n a + L_{n+1} b)^2} \geq \frac{3}{L_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Conform inegalității lui *H. Bergström* avem

$$(1) A_n = \frac{1}{a^6(L_nb + L_{n+1}c)^2} + \frac{1}{b^6(L_nc + L_{n+1}a)^2} + \frac{1}{c^{3m+3}(L_na + L_{n+1}b)^2} \geq \\ \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^3(L_nb + L_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(L_nc + L_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(L_na + L_{n+1}b)} \right)^2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

De asemenea avem:

$$B_n = \frac{1}{a^3(L_nb + L_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(L_nc + L_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(L_na + L_{n+1}b)} = \\ = \frac{\frac{1}{a^2}}{L_nab + L_{n+1}ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{L_nbc + L_{n+1}ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{L_nac + L_{n+1}bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström*, și deducem că

$$(2) B_n \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(L_n + L_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{L_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{L_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq} \\ \stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{L_{n+2}} = \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Din (1) și (2) rezultă că:

$$A_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{L_{n+2}} \right)^2 = \frac{3}{L_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N},$$

ceea ce era de demonstrat.

2.26. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $abc = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a^3(L_nb + L_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(L_nc + L_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(L_na + L_{n+1}b)} \geq \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$B_n = \frac{1}{a^3(L_nb + L_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(L_nc + L_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(L_na + L_{n+1}b)} = \\ = \frac{\frac{1}{a^2}}{L_nab + L_{n+1}ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{L_nbc + L_{n+1}ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{L_nac + L_{n+1}bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *H. Bergström*, și deducem că

$$B_n = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(L_n + L_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{L_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{L_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq}$$

$$\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{L_{n+2}} = \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N},$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.27. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$, sunt șiruri de numere reale strict pozitive astfel încât:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ atunci:}$$

$$\frac{x_m^2}{(y_q x_n + y_{q+1} x_p)^2} + \frac{x_n^2}{(y_q x_p + y_{q+1} x_m)^2} + \frac{x_p^2}{(y_q x_m + y_{q+1} x_n)^2} \geq \frac{3}{y_{q+2}^2}, \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, și Gabriel Tica, 2013)

Demonstrație. Conform inegalității lui *H. Bergström* avem:

$$\begin{aligned} (1) \quad U &= \frac{x_m^2}{(y_q x_n + y_{q+1} x_p)^2} + \frac{x_n^2}{(y_q x_p + y_{q+1} x_m)^2} + \frac{x_p^2}{(y_q x_m + y_{q+1} x_n)^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{x_m}{y_q x_n + y_{q+1} x_p} + \frac{x_n}{y_q x_p + y_{q+1} x_m} + \frac{x_p}{y_q x_m + y_{q+1} x_n} \right)^2, \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Totodată avem:

$$\begin{aligned} V &= \frac{x_m}{y_q x_n + y_{q+1} x_p} + \frac{x_n}{y_q x_p + y_{q+1} x_m} + \frac{x_p}{y_q x_m + y_{q+1} x_n} = \\ &= \frac{x_m^2}{y_q x_m x_n + y_{q+1} x_m x_p} + \frac{x_n^2}{y_q x_n x_p + y_{q+1} x_n x_m} + \frac{x_p^2}{y_q x_p x_m + y_{q+1} x_p x_n} \end{aligned}$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström* și deducem că:

$$(2) \quad V \geq \frac{(x_m + x_n + x_p)^2}{(y_q + y_{q+1})(x_m x_n + x_n x_p + x_p x_m)} = \frac{(x_m + x_n + x_p)^2}{y_{q+2}(x_m x_n + x_n x_p + x_p x_m)}$$

Dacă ținem seama de inegalitatea:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx), \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+,$$

atunci din (2) deducem că:

$$(3) \quad V \geq \frac{3}{y_{q+2}}$$

Din relațiile (1) și (3) obținem

$$U \geq \frac{3}{y_{q+2}^2}, \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}.$$

Observație. Șirurile *Fibonacci*, respectiv *Lucas*, verifică enunțul.

2.28.

$$\frac{L_m}{L_{m+1} \left(L_{m+1}^{2n-1} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-2} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^{n-1} L_m^n \right)} +$$

$$+ \frac{L_{m+1}}{L_m \left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n-1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-2} + L_m^{2n-1} \right)} \geq \frac{4L_m L_{m+1}}{L_{m+2}^{2n+1}},$$

oricare ar fi numerele naturale n și m .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Notăm membrul stâng al inegalității cu V_n , și avem că:

$$V_n = L_m L_{m+1} \left(\frac{1}{\left(L_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^{n+1} L_m^n \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n} + L_m^{2n+1} \right)} \right),$$

unde aplicăm inegalitatea lui H. Bergström și deducem că:

$$V_n \geq \frac{4L_m L_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} L_{m+1}^k L_m^{2n-k+1}} = \frac{4L_m L_{m+1}}{(L_m + L_{m+1})^{2n+1}} = \frac{4L_m L_{m+1}}{L_{m+2}^{2n+1}},$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.29. Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $aF_n F_{n+1} > bF_k^2$, atunci:

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^2}{aF_n F_{n+1} - bF_k^2} \geq \frac{n}{an - b}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$R_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^2}{aF_n F_{n+1} - bF_k^2} \Leftrightarrow bR_n = \sum_{k=1}^n \frac{bF_k^2}{aF_n F_{n+1} - bF_k^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bR_n + n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{bF_k^2}{aF_n F_{n+1} - bF_k^2} + 1 \right) = aF_n F_{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{aF_n F_{n+1} - bF_k^2} \stackrel{(Bergstrom)}{\geq}$$

$$\stackrel{(Bergstrom)}{\geq} aF_n F_{n+1} \cdot \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n (aF_n F_{n+1} - bF_k^2)} = aF_n F_{n+1} \cdot \frac{n^2}{anF_n F_{n+1} - b \sum_{k=1}^n F_k^2}.$$

Deoarece, $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$, obținem:

$$bR_n + n \geq aF_n F_{n+1} \cdot \frac{n^2}{(an-b)F_n F_{n+1}} = \frac{an^2}{an-b} \Leftrightarrow bR_n \geq \frac{an^2}{an-b} - n = \frac{bn}{an-b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_n \geq \frac{n}{an-b}, \text{ ceea ce demonstrează enunțul.}$$

2.30. Au loc următoarele inegalități:

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{k^2} \geq \frac{6F_n^2 F_{n+1}^2}{n(n+1)(2n+1)} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^6}{k^2} \geq \frac{4F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^6}{k^4} \geq \frac{36F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^8}{k^3} \geq \frac{4F_n^4 F_{n+1}^4}{n^2(n+1)^2} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{k^3} \geq \frac{4F_n^2 F_{n+1}^2}{n^2(n+1)^2} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k}{k} \right)^6 \geq \frac{16F_n^3 F_{n+1}^3}{n^4(n+1)^4} \quad (6)$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ și } \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aplicând inegalitatea lui *H. Bergström* deducem:

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^2}{k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^2}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{6F_n^2 F_{n+1}^2}{n(n+1)(2n+1)},$$

deci (1) este demonstrată.

Conform inegalității lui *J. Radon* avem:

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^6}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^3}{k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^3}{\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2} = \frac{4F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2},$$

aşa că (2) este demonstrată.

Folosim din nou inegalitatea lui *J. Radon* rezultă:

$$C_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^6}{k^4} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^3}{(k^2)^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^3}{\left(\sum_{k=1}^n k^2 \right)^2} = \frac{36F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2 (n+1)^2 (2n+1)^2},$$

astfel (3) este demonstrată.

Cu inegalitatea lui *J. Radon* obținem:

$$D_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^8}{k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^4}{k^3} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^4}{\left(\sum_{k=1}^n k \right)^3} = \frac{4F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2 (n+1)^2},$$

deci și (4) este dovedită.

Cu inegalitatea lui *H. Bergström* obținem:

$$E_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^2}{k^3} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^2}{\sum_{k=1}^n k^3} = \frac{4F_n^2 F_{n+1}^2}{n^2 (n+1)^2},$$

și (5) este demonstrată.

Utilizăm inegalitatea lui *J. Radon* și avem:

$$G_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k}{k} \right)^6 = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^3}{(k^3)^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^3}{\left(\sum_{k=1}^n k^3 \right)^2} = \frac{16F_n^3 F_{n+1}^3}{n^4 (n+1)^4},$$

deci (6) este dovedită, și demonstrația este completă.

2.31. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in \mathbf{R}$, atunci:

$$2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n F_k \cdot \sin x_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n F_k \cdot \cos x_k \right) \leq n \cdot F_n \cdot F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

HSFQ2026(D.M. Bătinețu-Giurgiu, 2007)

Demonstrație. Conform *C-B-S*, avem:

$$(1) \quad \left| \sum_{k=1}^n F_k \sin x_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sin^2 x_k \right) = F_n F_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \sin^2 x_k,$$

$$(2) \quad \left| \sum_{k=1}^n F_k \cos x_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos^2 x_k \right) = F_n F_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \cos^2 x_k.$$

Prin urmare:

$$\left| \sum_{k=1}^n F_k \sin x_k \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^n F_k \cos x_k \right| \leq F_n F_{n+1} \cdot \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \sin^2 x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos^2 x_k \right)} \stackrel{MG \leq MA}{\leq} \\ \leq \frac{F_n F_{n+1}}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (\sin^2 x_k + \cos^2 x_k) = \frac{n \cdot F_n \cdot F_{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și deci:

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k \sin x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n F_k \cos x_k \right) \leq \left| \sum_{k=1}^n F_k \sin x_k \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^n F_k \cos x_k \right| \leq \frac{n \cdot F_n \cdot F_{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Observație. Proprietatea de mai sus a fost publicată în RMT, nr. 1/2007, pag. 55, ca Problema **O.X.138**, autor *D.M. Bătinețu-Giurgiu*.

2.32. Dacă $m \in [1, \infty)$, atunci:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (1 + F_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} F_{2n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Conform cu propoziția 1.5 avem: $\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = F_{2n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Fie funcția $f: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = m^m (x+1)^{m+1} - (m+1)^{m+1} x$, atunci:

$$f'(x) = m^m (m+1)(x+1)^m - (m+1)^{m+1}, \quad f''(x) = m^{m+1} (m+1)(x+1)^{m-1}.$$

Avem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{m}.$$

Prin urmare:

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \text{ și } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

ceea ce arată că f este convexă pe $\mathbf{R}_+^*$, și că $x_0 = \frac{1}{m}$ este un punct de minim absolut

pentru funcția f pe $\mathbf{R}_+^*$. Deci:

$$f(x) \geq f(x_0) = f\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Leftrightarrow m^m (x+1)^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} x, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

de unde deducem că:

$$m^m (1 + F_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} F_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^*,$$

și atunci:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (1 + F_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = (m+1)^{m+1} \cdot F_{2n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

2.33. Inegalitățile următoare:

$$n + 4 + 4F_n F_{n+1} > 4F_{n+2} \quad (1)$$

$$n + 4 + 4L_n L_{n+1} > 4L_{n+2} \quad (2)$$

au loc oricare ar fi numărul natural n .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$n + 4 + 4F_n F_{n+1} > 4F_{n+2} \Leftrightarrow \frac{n}{4} + F_n F_{n+1} > F_{n+2} - 1,$$

și deoarece

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

deducem că:

$$\frac{n}{4} + F_n F_{n+1} = \frac{n}{4} + \sum_{k=1}^n F_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(F_k^2 + \frac{1}{4} \right) > \sum_{k=1}^n 2\sqrt{F_k^2 \cdot \frac{1}{4}} = \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

și inegalitatea (1) este demonstrată.

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{n}{4} + L_n L_{n+1} &= \frac{n}{4} + \left(2 + \sum_{k=1}^n L_k^2 \right) > 2 + \sum_{k=1}^n 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot L_k^2} = 2 + \sum_{k=1}^n L_k = 2 + L_{n+2} - 3 = L_{n+2} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n + 4L_n L_{n+1} + 4 > 4L_{n+2}, \end{aligned}$$

și astfel (2) este dovedită, iar demonstrația este completă.

Observație. Inegalitățile de mai sus au apărut în numărul din februarie, 2013 al revistei internaționale, The Fibonacci Quarterly.

2.34. Următoarele inegalități:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k}{F_{k+3}} + \frac{F_{k+1}}{2F_k + F_{k+1}} \right) > \frac{n}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{L_k}{L_{k+3}} + \frac{L_{k+1}}{2L_k + L_{k+1}} \right) > \frac{n}{2} \quad (2)$$

sunt adevărate, oricare ar fi numărul natural n .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Din inegalitatea lui Nesbitt rezultă că:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2},$$

pentru orice numere reale pozitive x, y și z , cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$.

Punem $x = F_k, y = F_{k+1}, z = F_{k+2}$, și deoarece $F_k \neq F_{k+1} \neq F_{k+2}$, pentru orice număr natural k , deducem că:

$$\frac{F_k}{F_{k+1} + F_{k+2}} + \frac{F_{k+1}}{F_k + F_{k+2}} + \frac{F_{k+2}}{F_k + F_{k+1}} > \frac{3}{2},$$

pentru orice număr natural k .

Aşadar,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k}{F_{k+3}} + \frac{F_{k+1}}{2F_k + F_{k+1}} \right) > \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n}{2},$$

pentru orice număr natural n , deci (1) este demonstrată.

Procedând exact ca mai sus obținem, inegalitatea (2), și demonstrația este completă.

Observație. Inegalitățile de mai sus au apărut în numărul din februarie, 2013 al revistei internaționale, The Fibonacci Quarterly.

2.35. Inegalitatea următoare:

$$\begin{aligned} & \frac{(F_1^2+1)(F_2^2+1)}{F_1F_2+1} + \frac{(F_2^2+1)(F_3^2+1)}{F_2F_3+1} + \dots + \frac{(F_{n-1}^2+1)(F_n^2+1)}{F_{n-1}F_n+1} + \frac{(F_n^2+1)(F_1^2+1)}{F_nF_1+1} \geq \\ & \geq 2F_{n+2} - 2, \end{aligned}$$

este adevărată, pentru orice număr natural n .

(D.M. Băținețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Folosim inegalitatea $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$, unde punem $a = x + y$,

$b = xy + 1$, și deducem că:

$$(x+y)(xy+1) \leq \frac{(x+y+xy+1)^2}{4} = \frac{(x+1)^2(y+1)^2}{4}, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*,$$

dar,

$$(x+1)^2 \leq 2(x^2+1) \Leftrightarrow x^2+2x+1 \leq 2x^2+2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0,$$

este adevărată.

Aşa că,

$$(x+y)(xy+1) \leq (x^2+1)(y^2+1) \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)(y^2+1)}{xy+1} \geq x+y, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*.$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} \frac{(F_1^2 + 1)(F_2^2 + 1)}{F_1 F_2 + 1} &\geq F_1 + F_2; \\ \frac{(F_2^2 + 1)(F_3^2 + 1)}{F_2 F_3 + 1} &\geq F_2 + F_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{(F_{n-1}^2 + 1)(F_n^2 + 1)}{F_{n-1} F_n + 1} &\geq F_{n-1} + F_n; \end{aligned}$$

$$\frac{(F_n^2 + 1)(F_1^2 + 1)}{F_n F_1 + 1} \geq F_n + F_1.$$

Adunând relațiile precedente obținem că:

$$\begin{aligned} \frac{(F_1^2 + 1)(F_2^2 + 1)}{F_1 F_2 + 1} + \frac{(F_2^2 + 1)(F_3^2 + 1)}{F_2 F_3 + 1} + \dots + \frac{(F_{n-1}^2 + 1)(F_n^2 + 1)}{F_{n-1} F_n + 1} + \frac{(F_n^2 + 1)(F_1^2 + 1)}{F_n F_1 + 1} \geq \\ \geq 2(F_1 + F_2 + \dots + F_n). \end{aligned}$$

Deoarece,

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

din cele de mai sus obținem inegalitatea din enunț.

2.36. Inegalitatea următoare:

$$\frac{(L_1^2 + 1)(L_2^2 + 1)}{L_1 L_2 + 1} + \frac{(L_2^2 + 1)(L_3^2 + 1)}{L_2 L_3 + 1} + \dots + \frac{(L_{n-1}^2 + 1)(L_n^2 + 1)}{L_{n-1} L_n + 1} + \frac{(L_n^2 + 1)(L_1^2 + 1)}{L_n L_1 + 1} \geq 2L_{n+2} - 6,$$

este adevărată, oricare ar fi numărul natural n .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Procedăm ca în 2.35 și obținem inegalitățile:

$$\begin{aligned} \frac{(L_1^2 + 1)(L_2^2 + 1)}{L_1 L_2 + 1} &\geq L_1 + L_2; \\ \frac{(L_2^2 + 1)(L_3^2 + 1)}{L_2 L_3 + 1} &\geq L_2 + L_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{(L_{n-1}^2 + 1)(L_n^2 + 1)}{L_{n-1} L_n + 1} &\geq L_{n-1} + L_n; \\ \frac{(L_n^2 + 1)(L_1^2 + 1)}{L_n L_1 + 1} &\geq L_n + L_1, \end{aligned}$$

care adunate mebru cu membru conduc la inegalitatea:

$$\begin{aligned} \frac{(L_1^2 + 1)(L_2^2 + 1)}{L_1 L_2 + 1} + \frac{(L_2^2 + 1)(L_3^2 + 1)}{L_2 L_3 + 1} + \dots + \frac{(L_{n-1}^2 + 1)(L_n^2 + 1)}{L_{n-1} L_n + 1} + \frac{(L_n^2 + 1)(L_1^2 + 1)}{L_n L_1 + 1} \geq \\ \geq 2(L_1 + L_2 + \dots + L_n). \end{aligned}$$

Deoarece,

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3,$$

din cele de mai sus obținem inegalitatea din enunț.

Observație. Inegalitatea de mai sus a apărut în numărul din februarie, 2013 al revistei internaționale, The Fibonacci Quarterly.

2.37. Dacă , $x_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n L_k \cdot \sin x_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n L_k \cdot \cos x_k \right) \leq n \cdot (L_n \cdot L_{n+1} - 2), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* ;$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Din C-B-S și binecunoscuta identitate

$$\sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

avem:

$$(1) \quad \left| \sum_{k=1}^n L_k \sin x_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n L_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sin^2 x_k \right) = (L_n L_{n+1} - 2) \cdot \sum_{k=1}^n \sin^2 x_k ,$$

$$(2) \quad \left| \sum_{k=1}^n L_k \cos x_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n L_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos^2 x_k \right) = (L_n L_{n+1} - 2) \cdot \sum_{k=1}^n \cos^2 x_k .$$

Așadar:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n L_k \sin x_k \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^n L_k \cos x_k \right| &\leq (L_n L_{n+1} - 2) \cdot \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \sin^2 x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos^2 x_k \right)} \stackrel{GM \leq AM}{\leq} \\ &\stackrel{GM \leq AM}{\leq} \frac{L_n L_{n+1} - 2}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (\sin^2 x_k + \cos^2 x_k) = \frac{n \cdot (L_n \cdot L_{n+1} - 2)}{2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

și:

$$\left(\sum_{k=1}^n L_k \sin x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n L_k \cos x_k \right) \leq \left| \sum_{k=1}^n L_k \sin x_k \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^n L_k \cos x_k \right| \leq \frac{n \cdot (L_n \cdot L_{n+1} - 2)}{2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* .$$

2.38. Dacă $m \in [1, \infty)$, atunci:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^n (1 + L_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} \cdot (L_{2n+2} - 2), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* .$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație.

Considerăm funcția

$$f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*, \quad f(x) = m^m (x+1)^{m+1} - (m+1)^{m+1} x,$$

atunci:

$$f'(x) = m^m (m+1)(x+1)^m - (m+1)^{m+1}, \quad f''(x) = m^{m+1} (m+1)(x+1)^{m-1}.$$

Avem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{m}.$$

Deci:

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \text{ și } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

asa că f este convexă pe $\mathbf{R}_+^*$, și $x_0 = \frac{1}{m}$ este punct de minim absolut pentru funcția f pe $\mathbf{R}_+^*$. Rezultă că:

$$f(x) \geq f(x_0) = f\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Leftrightarrow m^m(x+1)^{m+1} \geq (m+1)^{m+1}x, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

de unde deducem că:

$$m^m(1+L_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1}L_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Aplicăm identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{2k-1} = L_{2n+2} - 2, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

și obținem că:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (1+L_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} L_{2k-1} = (m+1)^{m+1} \cdot (L_{2n+2} - 2), \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\mathbf{2.39.} \quad \frac{L_n F_{n+2}^2}{L_{n+3}} + \frac{L_{n+1} F_{n+3}^2}{L_n + L_{n+2}} + (F_n + F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Folosim inegalitatea lui *G. Tsintsifas*, i.e.: Dacă $m, p, q \in \mathbf{R}_+^*$, și a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S , atunci:

$$(1) \quad \frac{ma^2}{p+q} + \frac{pb^2}{q+m} + \frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Folosim de asemenea că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$, avem un triunghi ABC cu:

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x,$$

semiperimetrul

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z,$$

și aria

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Deci din (1) avem că:

$$(2) \quad \frac{m(x+y)^2}{p+q} + \frac{p(y+z)^2}{q+m} + \frac{q(z+x)^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*, .$$

Dacă luăm în (2): $x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2}, m = L_n, p = L_{n+1}, q = L_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$\frac{L_n(F_n + F_{n+1})^2}{L_{n+1} + L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2})^2}{L_{n+2} + L_n} + \frac{L_{n+2}(F_{n+2} + F_n)^2}{L_n + L_{n+1}} \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2} (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2F_n F_{n+1} F_{n+2}^2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2} \\ \Leftrightarrow &\frac{L_n F_{n+2}^2}{L_{n+3}} + \frac{L_{n+1} F_{n+3}^2}{L_n + L_{n+2}} + (F_n + F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

2.40.

$$\begin{aligned} &\frac{F_m}{F_{m+1} \left(F_{m+1}^{2n-2} + \binom{2n}{1} F_{m+1}^{2n-3} F_m + \dots + \binom{2n}{n-1} F_{m+1}^{n-1} F_m^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} F_{m+1}^{n-2} F_m^n \right)} + \\ &+ \frac{F_{m+1}}{F_m \left(\frac{1}{2} \binom{2n}{n} F_{m+1}^n F_m^{n-2} + \binom{2n}{n+1} F_{m+1}^{n+1} F_m^{n-1} + \dots + \binom{2n}{2n-1} F_{m+1} F_m^{2n-3} + F_m^{2n-2} \right)} \geq \frac{4F_m F_{m+1}}{F_{m+2}^{2n}}, \end{aligned}$$

pentru orice numere naturale pozitive n și m .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Notăm membrul stâng cu U_n , și avem:

$$\begin{aligned} U_n = F_m F_{m+1} &\left(\frac{1}{\left(F_{m+1}^{2n} + \binom{2n}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n}{n-1} F_{m+1}^{n+1} F_m^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} F_{m+1}^n F_m^n \right)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \binom{2n}{n} F_{m+1}^n F_m^n + \binom{2n}{n+1} F_{m+1}^{n+1} F_m^{n-1} + \dots + \binom{2n}{2n-1} F_{m+1} F_m^{2n-3} + F_m^{2n-2} \right)} \right), \end{aligned}$$

de unde prin aplicarea inegalității lui *Bergström* rezultă că:

$$U_n \geq \frac{4F_m F_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_{m+1}^k F_m^{2n-k}} = \frac{4F_m F_{m+1}}{(F_m + F_{m+1})^{2n}} = \frac{4F_m F_{m+1}}{F_{m+2}^{2n}},$$

adică ceea ce era de demonstrat.

2.41.

$$\begin{aligned} &\frac{L_m}{L_{m+1} \left(L_{m+1}^{2n-2} + \binom{2n}{1} L_{m+1}^{2n-3} L_m + \dots + \binom{2n}{n-1} L_{m+1}^{n-1} L_m^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} L_{m+1}^{n-2} L_m^n \right)} + \\ &+ \frac{L_{m+1}}{L_m \left(\frac{1}{2} \binom{2n}{n} L_{m+1}^n L_m^{n-2} + \binom{2n}{n+1} L_{m+1}^{n+1} L_m^{n-1} + \dots + \binom{2n}{2n-1} L_{m+1} L_m^{2n-3} + L_m^{2n-2} \right)} \geq \frac{4L_m L_{m+1}}{L_{m+2}^{2n}}, \end{aligned}$$

pentru orice numere naturale pozitive n și m .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Notăm membrul stâng cu V_n , și avem:

$$V_n = L_m L_{m+1} \left(\frac{1}{\left(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n}{n-1} L_{m+1}^{n+1} L_m^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} L_{m+1}^n L_m^n \right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \binom{2n}{n} L_{m+1}^n L_m^n + \binom{2n}{n+1} L_{m+1}^{n+1} L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n}{2n-1} L_{m+1} L_m^{2n-1} + L_m^{2n} \right)} \right),$$

de unde prin aplicarea inegalității lui *Bergström* rezultă că:

$$V_n \geq \frac{4L_m L_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} L_{m+1}^k L_m^{2n-k}} = \frac{4L_m L_{m+1}}{(L_m + L_{m+1})^{2n}} = \frac{4L_m L_{m+1}}{L_{m+2}^{2n}},$$

și demonstrația este completă.

2.42.

$$\frac{F_m}{F_{m+1} \left(F_{m+1}^{2n-1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-2} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n-1} F_m^n \right)} + \\ + \frac{F_{m+1}}{F_m \left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n-1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-2} + F_m^{2n+1} \right)} \geq \frac{4F_m F_{m+1}}{F_{m+2}^{2n+1}},$$

pentru orice numere naturale pozitive n și m .

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Notăm membrul stâng cu U_n , și avem:

$$U_n = F_m F_{m+1} \left(\frac{1}{\left(F_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n+1} F_m^n \right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} + F_m^{2n+1} \right)} \right),$$

de unde prin aplicarea inegalității lui *Bergström* rezultă că:

$$U_n \geq \frac{4F_m F_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{m+1}^k F_m^{2n+1-k}} = \frac{4F_m F_{m+1}}{(F_m + F_{m+1})^{2n+1}} = \frac{4F_m F_{m+1}}{F_{m+2}^{2n+1}},$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.43.

$$\frac{F_n L_{n+2}^2}{F_{n+3}} + \frac{F_{n+1} L_{n+3}^2}{F_n + F_{n+2}} + (L_n + L_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Cu inegalitatea lui *G. Tsintsifas* avem: ”Dacă m, p, q sunt numere reale pozitive și a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S , atunci:

$$(1) \quad \frac{ma^2}{p+q} + \frac{pb^2}{q+m} + \frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Mai departe ținem cont că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ avem triunghiul ABC cu:

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x,$$

de semiperimetru

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z,$$

și arie

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din (1) urmează că:

$$(2) \quad \frac{m(x+y)^2}{p+q} + \frac{p(y+z)^2}{q+m} + \frac{q(z+x)^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

Dacă în (2) luăm:

$$x = L_n, y = L_{n+1}, z = L_{n+2}, m = F_n, p = F_{n+1}, q = F_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci obținem că:

$$\begin{aligned} & \frac{F_n (L_n + L_{n+1})^2}{F_{n+1} + F_{n+2}} + \frac{F_{n+1} (L_{n+1} + L_{n+2})^2}{F_{n+2} + F_n} + \frac{F_{n+2} (L_{n+2} + L_n)^2}{F_n + F_{n+1}} \geq \\ & \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1} L_{n+2} (L_n + L_{n+1} + L_{n+2})} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2L_n L_{n+1} L_{n+2}^2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2} \\ \Leftrightarrow & \frac{F_n L_{n+2}^2}{F_{n+3}} + \frac{F_{n+1} L_{n+3}^2}{F_n + F_{n+2}} + (L_n + L_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

2.44.

$$\frac{F_n F_{n+2}^2}{F_{n+3}} + \frac{F_{n+1} F_{n+3}^2}{F_n + F_{n+2}} + (F_n + F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Cu inegalitatea lui *G. Tsintsifas* avem: ”Dacă m, p, q sunt numere reale pozitive și a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S , atunci:

$$(1) \quad \frac{ma^2}{p+q} + \frac{pb^2}{q+m} + \frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Mai departe ținem cont că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ avem triunghiul ABC cu:

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x,$$

de semiperimetru

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z,$$

și arie

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din (1) urmează că:

$$(2) \quad \frac{m(x+y)^2}{p+q} + \frac{p(y+z)^2}{q+m} + \frac{q(z+x)^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

Dacă în (2) luăm:

$$x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2}, m = F_n, p = F_{n+1}, q = F_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci obținem că :

$$\begin{aligned} & \frac{F_n(F_n + F_{n+1})^2}{F_{n+1} + F_{n+2}} + \frac{F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2})^2}{F_{n+2} + F_n} + \frac{F_{n+2}(F_{n+2} + F_n)^2}{F_n + F_{n+1}} \geq \\ & \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2} (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2F_n F_{n+1} F_{n+2}^2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2} \\ \Leftrightarrow & \frac{F_n F_{n+2}^2}{F_{n+3}} + \frac{F_{n+1} F_{n+3}^2}{F_n + F_{n+2}} + (F_n + F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

2.45.

$$\frac{L_n L_{n+2}^2}{L_{n+3}} + \frac{L_{n+1} L_{n+3}^2}{L_n + L_{n+2}} + (L_n + L_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Cu inegalitatea lui *G. Tsintsifas* avem: ”Dacă m, p, q sunt numere reale pozitive și a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S , atunci:

$$(1) \quad \frac{ma^2}{p+q} + \frac{pb^2}{q+m} + \frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Mai departe ținem cont că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ avem triunghiul ABC cu:

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x,$$

de semiperimetru

$$s = \frac{a + b + c}{2} = x + y + z,$$

și arie

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din (1) urmează că:

$$(2) \quad \frac{m(x+y)^2}{p+q} + \frac{p(y+z)^2}{q+m} + \frac{q(z+x)^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

Dacă în (2) luăm:

$$x = L_n, y = L_{n+1}, z = L_{n+2}, m = L_n, p = L_{n+1}, q = L_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci obținem că:

$$\begin{aligned} & \frac{L_n(L_n + L_{n+1})^2}{L_{n+1} + L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}(L_{n+1} + L_{n+2})^2}{L_{n+2} + L_n} + \frac{L_{n+2}(L_{n+2} + L_n)^2}{L_n + L_{n+1}} \geq \\ & \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1} L_{n+2} (L_n + L_{n+1} + L_{n+2})} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2L_n L_{n+1} L_{n+2}^2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2} \\ \Leftrightarrow & \frac{L_n L_{n+2}^2}{L_{n+3}} + \frac{L_{n+1} L_{n+3}^2}{L_n + L_{n+2}} + (L_n + L_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

2.46.

$$\frac{F_{n+1}^2}{F_n^3(F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2)} + \frac{F_{n+2}^2}{F_{n+1}^3(F_{n+1} F_{n+2} + F_n^2)} + \frac{F_n^2}{F_{n+2}^3(F_n F_{n+2} + F_{n+1}^2)} > \frac{3}{2F_n F_{n+1} F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(N. Stanciu și G. Tica, 2013)

Demonstrație.

(IMO) ” Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, cu $abc = 1$, atunci: $\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$, cu egalitate dacă și

numai dacă $a = b = c$ ”, i.e. problema propusă la IMO, **Canada**, 1995.

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} &= \sum_{cyc} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{ab+ac} \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(abc)^2(ab+bc+ca)} = \\ &= \frac{ab+bc+ca}{2} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dacă luăm:

$$a = \frac{F_n}{F_{n+1}}, b = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}, c = \frac{F_{n+2}}{F_n},$$

atunci

$$abc = 1,$$

și din (IMO) rezultă că:

$$\frac{F_{n+1}^3}{F_n^3 \left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + \frac{F_{n+2}}{F_n} \right)} + \frac{F_{n+2}^3}{F_{n+1}^3 \left(\frac{F_{n+2}}{F_n} + \frac{F_n}{F_{n+1}} \right)} + \frac{F_n^3}{F_{n+2}^3 \left(\frac{F_n}{F_{n+1}} + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \right)} \geq \frac{3}{2},$$

ceea ce era de demonstrat.

Inegalitatea este strictă deoarece:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} \neq \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \neq \frac{F_{n+2}}{F_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

și demonstrația este completă.

2.47.

$$\frac{L_{n+1}^2}{L_n^3 (L_n L_{n+1} + L_{n+2}^2)} + \frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}^3 (L_{n+1} L_{n+2} + L_n^2)} + \frac{L_n^2}{L_{n+2}^3 (L_n L_{n+2} + L_{n+1}^2)} > \frac{3}{2L_n L_{n+1} L_{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(N. Stanciu și G. Tica, 2013)

Demonstrație.

(IMO) ”Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, cu $abc = 1$, atunci: $\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$, cu egalitate dacă și

numai dacă $a = b = c$ ”, i.e. problema propusă la IMO, **Canada**, 1995.

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} &= \sum_{cyc} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{ab+ac} \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(abc)^2(ab+bc+ca)} = \\ &= \frac{ab+bc+ca}{2} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dacă luăm:

$$a = \frac{L_n}{L_{n+1}}, b = \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}, c = \frac{L_{n+2}}{L_n},$$

atunci

$$abc = 1,$$

și din (IMO) rezultă că:

$$\frac{L_{n+1}^3}{L_n^3 \left(\frac{L_{n+1}}{L_{n+2}} + \frac{L_{n+2}}{L_n} \right)} + \frac{L_{n+2}^3}{L_{n+1}^3 \left(\frac{L_{n+2}}{L_n} + \frac{L_n}{L_{n+1}} \right)} + \frac{L_n^3}{L_{n+2}^3 \left(\frac{L_n}{L_{n+1}} + \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}} \right)} \geq \frac{3}{2},$$

adică inegalitatea de demonstrat.

Inegalitatea este strictă deoarece:

$$\frac{L_n}{L_{n+1}} \neq \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}} \neq \frac{L_{n+2}}{L_n}, \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

Demonstrația este completă.

2.48.

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + 5F_{n+2}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ există un triunghi ABC cu lungimile laturilor

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x$$

semiperimetrul

$$s = \frac{a + b + c}{2} = x + y + z,$$

și aria

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck* avem că:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$$

Therefore:

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow (2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm în (2):

$$x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2},$$

atunci obținem că:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2} (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})}, \forall n \in \mathbf{N}^+$$

$$\Leftrightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + 4F_{n+2}^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2} \cdot 2F_{n+2}}$$

$$\Leftrightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 + 5F_{n+2}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \text{și inegalitatea este}$$

demonstrată.

Observație. Egalitatea nu are loc deoarece $F_n \neq F_{n+1} \neq F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+.$

2.49.

$$L_n^2 + L_{n+1}^2 + 5L_{n+2}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație.

Dacă în relația (2) din **2.48.** luăm:

$$x = L_n, y = L_{n+1}, z = L_{n+2},$$

procedând exact ca în **2.48.** obținem relația de demonstrat.

Observație. Egalitatea nu are loc deoarece $L_n \neq L_{n+1} \neq L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+$.

2.50.

$$F_{n+2}^2 + (F_n + F_{n+2})^2 + F_{n+3}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație. Pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ există un triunghi ABC cu lungimile laturilor

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x$$

semiperimetrul

$$s = \frac{a + b + c}{2} = x + y + z,$$

și aria

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck* avem că:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$$

Therefore:

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow (2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm în (2):

$$x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2},$$

atunci obținem că:

$$(F_n + F_{n+1})^2 + (F_n + F_{n+2})^2 + (F_{n+1} + F_{n+2})^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2} (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})},$$

$$\Leftrightarrow F_{n+2}^2 + (F_n + F_{n+2})^2 + F_{n+3}^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2}} \cdot 2F_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow F_{n+2}^2 + (F_n + F_{n+2})^2 + F_{n+3}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+,$$

și relația este demonstrată.

Observație. Egalitatea nu are loc deoarece $F_n \neq F_{n+1} \neq F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+$.

2.51.

$$L_{n+2}^2 + (L_n + L_{n+2})^2 + L_{n+3}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, și N. Stanciu, 2013)

Demonstrație.

Dacă în relația (2) din **2.50.** punem:

$$x = L_n, y = L_{n+1}, z = L_{n+2},$$

și procedăm ca în **2.50.** deducem inegalitatea din enunț.

Observație. Egalitatea nu are loc deoarece $L_n \neq L_{n+1} \neq L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^+$.

2.52.

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^{2m+2}}{k^{3m}} \geq \frac{4^m F_n^{m+1} F_{n+1}^{m+1}}{n^{2m} (n+1)^{2m}}, \quad \forall m \in \mathbf{R}_+.$$

(G. Tica, 2013)

Demonstrație. Aplicăm bine-cunoscutele formule:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

și

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

Folosim inegalitatea lui *J. Radon* și obținem:

$$W_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^{2m+2}}{k^{3m}} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^{m+1}}{(k^3)^m} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n k^3 \right)^m} = \frac{4^m F_n^{m+1} F_{n+1}^{m+1}}{n^{2m} (n+1)^{2m}},$$

și demonstrația este încheiată .

2.53 Pentru orice $m > 0$, avem inegalitățile:

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k^{2m+4} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^{2m}} \right) \geq F_n^2 F_{n+1}^2 \quad (1)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n L_k^{2m+4} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^{2m}} \right) \geq (L_n L_{n+1} - 1)^2 \quad (2)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k^{m+2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^m} \right) \geq (F_{n+2} - 1)^2 \quad (3)$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Din inegalitatea lui *J. Radon* deducem că:

$$\sum_{k=1}^n F_k^{2m+4} = \sum_{k=1}^n (F_k^2)^{m+2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2\right)^{m+2}}{n^{m+1}},$$

și

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^{2m}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(F_k^2)^m} \geq \frac{n^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2\right)^m}.$$

Așadar:

$$U_n = \left(\sum_{k=1}^n F_k^{2m+4}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^{2m}}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n F_k^2\right)^2,$$

și deoarece

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

obținem că:

$$U_n \geq F_n^2 F_{n+1}^2,$$

deci (1) este demonstrată.

Tot din inegalitatea lui *J.Radon* deducem că:

$$\sum_{k=1}^n L_k^{2m+4} = \sum_{k=1}^n (L_k^2)^{m+2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n L_k^2\right)^{m+2}}{n^{m+1}},$$

și

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^{2m}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(L_k^2)^m} \geq \frac{n^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n L_k^2\right)^m}.$$

Deci:

$$V_n = \left(\sum_{k=1}^n L_k^{2m+4}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^{2m}}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n L_k^2\right)^2,$$

și deoarece

$$\sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2,$$

obținem că:

$$V_n \geq (L_n L_{n+1} - 2)^2,$$

și prin urmare (2) este demonstrată.

De asemenea din inegalitatea lui *J.Radon* deducem că:

$$\sum_{k=1}^n F_k^{m+2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k\right)^{m+2}}{n^{m+1}},$$

și

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^m} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(F_k)^m} \geq \frac{n^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n F_k\right)^m}.$$

Urmează că:

$$W_n = \left(\sum_{k=1}^n F_k^{m+2}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^m}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n F_k\right)^2,$$

și pentru că avem:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

rezultă că:

$$W_n \geq (F_{n+2} - 1)^2,$$

i.e., (3) este dovedită.

2.54. Oricare ar fi $m > 0$, sunt adevărate inegalitățile:

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{F_k^{m+1}}{F_{n-k+1}^m} \geq F_{n+2} \quad (1)$$

$$3 + \sum_{k=1}^n \frac{L_k^{m+1}}{L_{n-k+1}^m} \geq L_{n+2} \quad (2)$$

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Din inegalitatea lui *J.Radon* deducem că:

$$U_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{F_k^{m+1}}{F_{n-k+1}^m} \geq 1 + \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n F_{n-k+1}\right)^m},$$

unde folosim bine-cunoscuta identitate:

$$\sum_{k=1}^n F_{n-k+1} = \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

și rezultă (1).

De asemenea din inegalitatea lui *J.Radon* deducem că:

$$V_n = 3 + \sum_{k=1}^n \frac{L_k^{m+1}}{L_{n-k+1}^m} \geq 3 + \frac{\left(\sum_{k=1}^n L_k\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^n L_{n-k+1}\right)^m},$$

iar mai departe utilizăm identitatea:

$$\sum_{k=1}^n L_{n-k+1} = \sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3,$$

și rezultă (2).

2.55. Oricare ar fi numărul natural, $n > 0$ este adevărată inegalitatea:

$$\begin{aligned} & \frac{F_1^6}{(F_1^4 + F_1^2 F_2^2 + F_2^4)(\sqrt{2}F_1 + F_2)} + \frac{F_2^6}{(F_2^4 + F_2^2 F_3^2 + F_3^4)(\sqrt{2}F_2 + F_3)} + \dots + \\ & + \frac{F_{n-1}^6}{(F_{n-1}^4 + F_{n-1}^2 F_n^2 + F_n^4)(\sqrt{2}F_{n-1} + F_n)} + \frac{F_n^6}{(F_n^4 + F_n^2 F_1^2 + F_1^4)(\sqrt{2}F_n + F_1)} \geq \\ & \geq \frac{\sqrt{2}-1}{3}(F_{n+2} - 1). \end{aligned}$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Pentru început arătăm că:

$$\begin{aligned} (*) \quad & \frac{x^3}{(x^2 + xy + y^2)(\sqrt{2}x + \sqrt{y})} \geq \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{y}}{3}, \forall x, y \in \mathbf{R}_+^* \\ \Leftrightarrow & 3x^3 \geq (x^2 + xy + y^2)(2x - y) \\ \Leftrightarrow & 3x^3 \geq 2x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq xy(x+y) \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0, \text{ adevărată.} \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y$.

Din (*), deducem că:

$$\begin{aligned} & \frac{F_1^6}{(F_1^4 + F_1^2 F_2^2 + F_2^4)(\sqrt{2}F_1 + F_2)} + \frac{F_2^6}{(F_2^4 + F_2^2 F_3^2 + F_3^4)(\sqrt{2}F_2 + F_3)} + \dots + \\ & + \frac{F_{n-1}^6}{(F_{n-1}^4 + F_{n-1}^2 F_n^2 + F_n^4)(\sqrt{2}F_{n-1} + F_n)} + \frac{F_n^6}{(F_n^4 + F_n^2 F_1^2 + F_1^4)(\sqrt{2}F_n + F_1)} \geq \\ & \geq \frac{1}{3}(\sqrt{2}F_1 - F_2 + \sqrt{2}F_2 - F_3 + \dots + \sqrt{2}F_{n-1} - F_n + \sqrt{2}F_n - F_1) = \frac{\sqrt{2}-1}{3} \sum_{k=1}^n F_k = \\ & = \frac{\sqrt{2}-1}{3}(F_{n+2} - 1), \end{aligned}$$

și demonstrația este completă.

2.56. Oricare ar fi numărul natural, $n > 0$ este adevărată inegalitatea::

$$\frac{2F_1^4 + F_2^4 + F_3^4}{F_1^2 + F_3^2} + \frac{2F_2^4 + F_3^4 + F_4^4}{F_2^2 + F_4^2} + \dots + \frac{2F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_1^4}{F_{n-1}^2 + F_1^2} + \frac{2F_n^4 + F_1^4 + F_2^4}{F_n^2 + F_2^2} > 2F_n F_{n+1}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Să arătăm că:

$$(*) \quad \frac{2x^2 + y^2 + z^2}{x + z} \geq x + y, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + xy + xz + yz$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \text{ inegalitate bine-cunoscută.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Din (*) rezultă că:

$$\frac{2F_1^4 + F_2^4 + F_3^4}{F_1^2 + F_3^2} > F_1^2 + F_2^2, \quad \frac{2F_2^4 + F_3^4 + F_4^4}{F_2^2 + F_4^2} > F_2^2 + F_3^2, \dots,$$

$$\frac{2F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_1^4}{F_{n-1}^2 + F_1^2} > F_{n-1}^2 + F_n^2, \quad \frac{2F_n^4 + F_1^4 + F_2^4}{F_n^2 + F_2^2} > F_n^2 + F_1^2,$$

care adunate dau:

$$\frac{2F_1^4 + F_2^4 + F_3^4}{F_1^2 + F_3^2} + \frac{2F_2^4 + F_3^4 + F_4^4}{F_2^2 + F_4^2} + \dots + \frac{2F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_1^4}{F_{n-1}^2 + F_1^2} + \frac{2F_n^4 + F_1^4 + F_2^4}{F_n^2 + F_2^2} > 2 \sum_{k=1}^n F_k^2,$$

unde ținem cont de:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

și demonstrația este terminată.

2.57. Dacă $x_k = L_k, k = \overline{1, m}, x_{m+1} = x_1$ și $y_k = F_k, k = \overline{1, m}, y_{m+1} = y_1$, atunci:

$$\frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{x_k^3}{F_{n+1}x_k + F_n x_{k+1}} \geq \frac{L_m L_{m+1}}{F_{n+2}} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{y_k^3}{L_m y_k + L_{m+1} y_{k+1}} \geq \frac{F_m F_{m+1}}{L_{m+2}} \quad (2)$$

oricare ar fi numărul natural, $n > 0$.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, și G. Tica, 2013)

Demonstrație. Avem:

$$U_n = \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{x_k^3}{F_{n+1}x_k + F_n x_{k+1}} = \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{F_{n+1}x_k^2 + F_n x_k x_{k+1}} \geq$$

$$\geq \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{F_{n+1}x_k^2 + \frac{F_n}{2}(x_k^2 + x_{k+1}^2)} = \frac{2}{F_{n+2}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{(2F_{n+1} + F_n)x_k^2 + F_n x_{k+1}^2},$$

unde aplicăm inegalitatea lui *Bergström* și deducem:

$$\begin{aligned}
U_n &\geq \frac{2}{F_{n+2}} + 2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^2}{(2F_{n+1} + F_n) \sum_{k=1}^m x_k^2 + F_n \sum_{k=1}^n x_{k+1}^2} = \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_n + F_{n+1}} \sum_{k=1}^n x_k^2 = \\
&= \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} \sum_{k=1}^m L_k^2,
\end{aligned}$$

și ținând seama de:

$$\sum_{k=1}^m L_k^2 = L_m L_{m+1} - 2,$$

obținem inegalitatea (1).

Avem:

$$\begin{aligned}
V_m &= \sum_{k=1}^m \frac{y_k^3}{L_m y_k + L_{m+1} y_{k+1}} = \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{L_m y_k^2 + L_{m+1} y_k y_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{L_m y_k^2 + \frac{L_{m+1}}{2} (y_k^2 + y_{k+1}^2)} = \\
&= 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{(2L_m + L_{m+1}) y_k^2 + L_{m+1} y_{k+1}^2},
\end{aligned}$$

iar aplicând inegalitatea lui *Bergström* deducem că:

$$V_n \geq 2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^m y_k^2\right)^2}{(2L_m + L_{m+1}) \sum_{k=1}^m y_k^2 + L_{m+1} \sum_{k=1}^m y_{k+1}^2} = \frac{1}{L_m + L_{m+1}} \sum_{k=1}^m y_k^2 = \frac{1}{L_{m+2}} \sum_{k=1}^m F_k^2,$$

unde folosim:

$$\sum_{k=1}^m F_k^2 = F_m F_{m+1},$$

și obținem inegalitatea (2), ceea ce încheie demonstrația.

*

*

*

*

*

*

BIBLIOGRAFIE

”Inima matematicii o constituie problemele sale”

Paul Halmos

- [1]. **Dumitru M. Bătinețu – Giurgiu**, *Șiruri*, Editura Albatros, București, 1979.
- [2]. **Dumitru M. Bătinețu – Giurgiu**, *Asupra unor perechi de șiruri liniar recurente*, revista *Recreații Matematice* din Iași, nr. 1/2003, pag. 25-28.
- [3]. **Dumitru M. Bătinețu – Giurgiu și Mihály Bencze**, *Concerning a couple of liniar recurrences*, *Octogon Mathematical Magazine*, Vol. 10, No.1, 2002, pag. 336-340.
- [4]. **Nicolaie Ciorănescu**, *Triunghiuri aritmetice în scară și șiruri recurente*, *Gazeta Matematică LI*, pag. 78-81.
- [5]. **Thomas Koshy**, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, New York, Wiley-Interscience, 2001.
- [6]. **Alexandru Lupaș**, *A guide of Fibonacci and Lucas Polinomials*, *Octogon Mathematical Magazine*, Vol. 7, No. 1, 1999, pag. 3-12.
- [7]. **A. I. Marcușevici**, *Șiruri recurente*, Editura Tehnică, 1953.
- [8]. **Miron Nicolescu**, *Despre șirul lui Fibonacci*, *Gazeta Matematică*, XXXIX, pag. 259-302.
- [9]. **Neculai Stanciu**, *Despre șirul lui Fibonacci*, *Gazeta Matematică – seria A*, Nr. 3, 2008, pag. 265-278.
- [10]. **Neculai Stanciu**, *Din nou despre șirul lui Fibonacci*, *MateInfo.Ro*, Mai, 2010.
- [11]. **N. N. Vorobiev**, *Numerele lui Fibonacci*, Editura Tehnică, 1953.
- *** Colecția **Gazeta Matematică**, 1895 - 2013.
- *** Colecția **Octogon Mathematical Magazine**, 1993 - 2013.
- *** Colecția **The Fibonacci Quarterly**, 1963 - 2013.

*

*

*

*

*

*

CUPRINS

Introducere

Capitolul 1. Identități

Un alt mod de stabilire a unor formule

Matrice Fibonacci

Polinoame Catalan – Fibonacci

Polinoamele lui Lucas

Alte polinoame recurente

Polinoame Jacobsthal

Alte polinoame de tip Jacobsthal

Polinoamele lui Morgan

Capitolul 2. Inegalități

Bibliografie

*

*

*