

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
24 iulie 2019

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră x_1 și x_2 , soluțiile ecuației $x^2 - mx + 1 = 0$, unde m este număr real.
- 7p a) Determinați numerele reale m pentru care $x_1 = x_2$.
- 8p b) Determinați numerele reale m pentru care numerele $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ și $x_1^3 + x_2^3$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.
2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ astfel încât triunghiul ABD este ascuțitunghic. Punctul H este ortocentrul triunghiului ABD , $BP \perp AD$, $P \in AD$ și $DQ \perp AB$, $Q \in AB$.
- 7p a) Demonstrați că unghiurile DHB și DAB sunt suplementare.
- 8p b) Pe semidreapta $(HB$ se consideră punctul E astfel încât $HE = BC$ și pe semidreapta $(HD$ se consideră punctul F astfel încât $HF = AB$. Dreptele AC și EF se intersectează în punctul M . Demonstrați că patrulaterul $AQMF$ este inscriptibil.
3. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = 3xy + 4x + 4y + 4$.
- 7p a) Arătați că $e = -1$ este elementul neutru al legii „ \circ ”.
- 8p b) Demonstrați că -1 este singurul element simetrizabil în raport cu legea „ \circ ”.
4. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.
- 7p a) Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0, +\infty)$.
- 8p b) Demonstrați că $\int_1^e \left(f(x) + \frac{\ln x}{x+1} \right) dx = \ln(e+1)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (4 ore).

Competențe specifice	Conținuturi
<ol style="list-style-type: none">1. Diferențierea, prin exemple, a variației liniare de cea pătratică2. Completarea unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea3. Aplicarea unor algoritmi pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea (prin puncte semnificative)4. Exprimarea proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice5. Utilizarea relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații6. Utilizarea funcțiilor în rezolvarea unor probleme și în modelarea unor procese	<p>Funcția de gradul al II-lea</p> <ul style="list-style-type: none">• Reprezentarea grafică a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, simetria față de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$• Relațiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$, cu $s, p \in \mathbb{R}$

(Programa școlară de matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

În vederea evaluării formării/dezvoltării a trei competențe specifice din secvența dată, elaborați 3 itemi de următoarele tipuri: *un item de tip alegere multiplă, un item de completare și un item de tip întrebare structurată*, menționând pentru fiecare item competența/competențele evaluate.

Notă. Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței/competențelor evaluate, respectarea formatului itemului, elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT

24 iulie 2019

**Probă scrisă
MATEMATICĂ**

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ Cum $\Delta = m^2 - 4$, obținem $m^2 = 4$ $m = -2$ sau $m = 2$	3p 2p 2p
	b) $x_1 + x_2 = m$, $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 - 2$ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = m^3 - 3m$ $(x_1 + x_2) + (x_1^3 + x_2^3) = 2(x_1^2 + x_2^2) \Leftrightarrow m^3 - 2m = 2(m^2 - 2) \Leftrightarrow (m^2 - 2)(m - 2) = 0$, de unde obținem $m = -\sqrt{2}$, $m = \sqrt{2}$ sau $m = 2$	3p 1p 4p
2.	a) $BP \perp AD$, deci $\sphericalangle APH$ are măsura de 90° și $DQ \perp AB$, deci $\sphericalangle AQH$ are măsura de 90° Suma măsurilor unghiurilor APH și AQH este de 180° , deci suma măsurilor unghiurilor PAQ și PHQ este de 180° $\sphericalangle DHB$ și $\sphericalangle PHQ$ sunt opuse la vârf, deci au aceeași măsură, de unde obținem că suma măsurilor unghiurilor DAB și DHB este de 180° , deci $\sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle DHB$ sunt suplementare	2p 2p 3p
	b) $\sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle ABC$ sunt suplementare, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FHE$ Cum $BC = HE$ și $AB = FH$, obținem că $\triangle ABC \equiv \triangle FHE$ $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle HFE$, deci $\sphericalangle QAM \equiv \sphericalangle QFM$, de unde obținem că patrulaterul $AQMF$ este inscriptibil	2p 3p 3p
	3.	a) $x \circ (-1) = 3x \cdot (-1) + 4x + 4 \cdot (-1) + 4 = -3x + 4x - 4 + 4 = x$, pentru orice număr întreg x $(-1) \circ x = 3 \cdot (-1) \cdot x + 4 \cdot (-1) + 4x + 4 = -3x - 4 + 4x + 4 = x$, pentru orice număr întreg x , deci $e = -1$ este elementul neutru al legii „ \circ ”
	b) $x \in \mathbb{Z}$ simetrizabil în raport cu legea „ \circ ” \Rightarrow există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = -1$, deci $3xx' + 4x + 4x' + 4 = -1$ $(3x + 4)(3x' + 4) = 1$ și, cum $x, x' \in \mathbb{Z}$, obținem $3x + 4 = -1$ sau $3x + 4 = 1$ $x = -\frac{5}{3}$, care nu convine; $x = -1$, care convine	2p 3p 3p
4.	a) $f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ Dacă $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, atunci $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2} \leq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ g este descrescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $g(0) = 0$, obținem $\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \leq 0$, deci $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $(0, +\infty)$	2p 2p 3p

$\mathbf{b)} \int_1^e \left(f(x) + \frac{\ln x}{x+1} \right) dx = \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx =$	2p
$= \int_1^e (\ln x)' \ln(x+1) dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx =$	3p
$= \ln x \ln(x+1) \Big _1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx = \ln e \ln(e+1) = \ln(e+1)$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de completare</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>