

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT

22 iulie 2020

**Probă scrisă
MATEMATICĂ**

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.
- 7p a) Arătați că $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4$, pentru orice număr real nenul x .
- 8p b) Demonstrați că orice dreaptă paralelă cu axa Ox intersectează graficul funcției f în exact două puncte.
2. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu măsura unghiului ACB de 50° . Punctele M și N sunt situate pe latura AB astfel încât unghiurile ACM și NCB au măsura de 10° .
- 7p a) Arătați că $MB = MC$.
- 8p b) Demonstrați că $BN = 2AM$.
3. Se consideră x_1 , x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - (a+1)X - a$, unde a este număr real.
- 7p a) Arătați că, pentru orice număr real a , polinomul f se divide cu polinomul $X + 1$.
- 8p b) Știind că x_1 , x_2 și x_3 sunt numere întregi, demonstrați că numărul a este produsul a două numere naturale consecutive.
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.
- 7p a) Arătați că $\sqrt{x^2 + 9} \cdot f'(x) = f(x)$, pentru orice număr real x .
- 8p b) Arătați că $\int_0^4 \ln(f(x)) dx = 8 \ln 3 - 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VI-a
1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi <ul style="list-style-type: none">- Recunoașterea unor triunghiuri isoscele/echilaterale/ascuțitunghice/dreptunghice/obtusunghice în configurații geometrice date- Recunoașterea elementelor caracteristice triunghiurilor în desene, machete, mediul înconjurător etc.- Descrierea unor caracteristici ale configurațiilor geometrice date referitoare la triunghi (prin observare, prin utilizarea instrumentelor geometrice)- Recunoașterea unor triunghiuri congruente într-o configurație geometrică dată
2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului <ul style="list-style-type: none">- Stabilirea tipului de triunghi prin efectuarea de calcule numerice cu lungimi de segmente și măsuri de unghiuri- Efectuarea de calcule numerice pentru formularea de răspunsuri privind liniile importante în triunghi- Efectuarea de măsurători cu raportorul și rigla pentru formularea de răspunsuri privind unghiurile exterioare ale unui triunghi, inegalități între laturi/unghiuri ale unui triunghi
3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice <ul style="list-style-type: none">- Stabilirea congruenței unor triunghiuri identificând criteriul de congruență potrivit- Utilizarea relației de congruență a triunghiurilor pentru stabilirea congruenței unor segmente sau unghiuri

- Utilizarea proprietăților triunghiurilor isoscele/echilaterale/dreptunghice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri, proprietăți ale punctelor de pe mediatoare, bisectoare
4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi
<ul style="list-style-type: none"> - Transcrierea în limbaj simbolic a caracteristicilor triunghiurilor conținute în figuri geometrice date - Transcrierea, din figuri geometrice date, în limbaj simbolic a caracteristicilor liniilor importante în triunghi - Redactarea datelor cunoscute (ipoteze) și a celor necunoscute (concluzii), în raport cu o situație dată referitoare la triunghi - Evidențierea unor relații și proprietăți: unghi exterior unui triunghi, inegalități între laturi și relații între laturi și unghiuri ale unui triunghi etc.
5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor
<ul style="list-style-type: none"> - Construcția unei configurații geometrice cu triunghiuri având proprietăți date, cu ajutorul instrumentelor geometrice sau al softurilor matematice - Analizarea setului de ipoteze ale unei probleme și elaborarea unei strategii de rezolvare prin raportarea adecvată la proprietățile studiate ale triunghiurilor - Analizarea și validarea veridicității unei afirmații folosind raționamente simple referitoare la triunghi - Analizarea validității unor enunțuri referitoare la triunghiuri rezultate prin modificarea unei ipoteze (necesar/suficient) sau prin interschimbarea unor informații din ipoteză și din concluzie
6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului
<ul style="list-style-type: none"> - Modelarea geometrică a unei situații concrete, asociind acesteia un desen, implicând și estimări (de exemplu, un traseu acasă – școală – teren de sport, reprezentat printr-un triunghi) - Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie - Realizarea de conexiuni interdisciplinare sau practic-aplicative (de exemplu: planul înclinat, traseul de lungime minimă, reflexia)

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>6. TRIUNGHIUL</p> <ul style="list-style-type: none"> • Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru; suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior • Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL; inegalități între elementele triunghiului (observate din cazurile de construcție) • Liniile importante în triunghi: bisectoarele unghiurilor unui triunghi: concurența (fără demonstrație), cercul înscris în triunghi; mediatoarele laturilor unui triunghi: concurență (fără demonstrație), cercul circumscris unui triunghi; înălțimile unui triunghi: definiție, construcție, concurența (fără demonstrație); medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurența (fără demonstrație) • Congruența triunghiurilor oarecare: criteriile de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL; criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU • Metoda triunghiurilor congruente, aplicații: proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi/mediatoarea unui segment • Proprietăți ale triunghiului isoscel; proprietăți ale triunghiului echilateral • Proprietăți ale triunghiului dreptunghic (cateta opusă unghiului de 30°, mediana corespunzătoare ipotenuzei – teoreme directe și reciproce); teorema lui Pitagora (fără demonstrație, verificări de triplete de numere pitagoreice, determinarea de lungimi folosind pătratele unor numere naturale)

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru evaluarea la finalul unității de învățare „Linii importante în triunghi”, a trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate și a activității de învățare selectate;
- respectarea formatului fiecărui item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT

22 iulie 2020

Probă scrisă

MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x}$, pentru orice număr real nenul x	4p
	$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} + \frac{-x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{4x}{x} = 4$, pentru orice număr real nenul x	3p
b)	Dreapta $y = a$, unde a este număr real, intersectează graficul funcției f în exact două puncte \Leftrightarrow ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale nenule și distincte	3p
	$f(x) = a \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = ax \Leftrightarrow x^2 + (2 - a)x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}^*$	2p
	Cum $\Delta = (2 - a)^2 + 4 > 0$, ecuația $x^2 + (2 - a)x - 1 = 0$ are două soluții reale distincte și, cum 0 nu este soluție a ecuației $x^2 + (2 - a)x - 1 = 0$, obținem că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale nenule și distincte	3p
2.	a) Triunghiul ABC este dreptunghic în A , deci $\sphericalangle MBC = 90^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACM = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$, deci $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle MBC$ Triunghiul MCB este isoscel cu vârful în M , deci $MB = MC$	2p 3p 2p
	b) Dacă punctul P este simetricul punctului M față de punctul A , cum $AC \perp AB$, obținem că $\triangle PCM$ este isoscel, deci $PC = MC$ $\sphericalangle PNC = 50^\circ$, $\sphericalangle ACN = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$ și, cum $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACP$, obținem $\sphericalangle PCN = 50^\circ$, deci $\triangle PCN$ este isoscel $\Rightarrow PC = PN$ $MB = MC$, deci $PN = MB \Rightarrow MN + PM = BN + MN$, de unde obținem $PM = BN$, deci $BN = 2AM$	2p 3p 3p
	3.	a) $f(-1) = (-1)^3 - (a+1) \cdot (-1) - a = -1 + a + 1 - a = 0$, pentru orice număr real a , deci polinomul f se divide cu polinomul $X + 1$, pentru orice număr real a
b)	x_1, x_2 și x_3 sunt numere întregi și $x_1 x_2 x_3 = a$, deci a este număr întreg	2p
	$f = (X + 1)(X^2 - X - a)$, deci polinomul $X^2 - X - a$ are rădăcini întregi	3p
	Cum $\Delta = 1 + 4a$, obținem că $1 + 4a = (2k + 1)^2$, unde $k \in \mathbb{N}$, adică $1 + 4a = 4k^2 + 4k + 1$, deci $a = k(k + 1), k \in \mathbb{N}$	3p
4.	a) $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, deci $\sqrt{x^2 + 9} \cdot f'(x) = \sqrt{x^2 + 9} + x = f(x)$, pentru orice număr real x	4p 3p

$\mathbf{b)} \int_0^4 \ln(f(x)) dx = \int_0^4 x' \cdot \ln(f(x)) dx =$	2p
$= x \ln(f(x)) \Big _0^4 - \int_0^4 x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx = x \ln(f(x)) \Big _0^4 - \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx =$	3p
$= 4 \ln(f(4)) - \sqrt{x^2+9} \Big _0^4 = 4 \ln 9 - 5 + 3 = 8 \ln 3 - 2$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>