

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
24 iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 2

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (a-2)x - a + 2$, unde a este număr real.
- 7p a) Determinați numerele reale a pentru care axa Ox este tangentă la graficul funcției f .
- 8p b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt numere reale distincte și strict mai mici decât zero.
2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $AB = AC$. Punctele D și E sunt mijloacele laturilor BC , respectiv AB . Dreptele AD și CE se intersectează în punctul G , iar punctul F aparține dreptei AC astfel încât dreptele CE și DF sunt perpendiculare.
- 7p a) Arătați că raportul ariilor triunghiurilor ADE și ABC este egal cu $\frac{1}{4}$.
- 8p b) Demonstrați că dreptele EF și BG sunt paralele.
3. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + a$, unde a este număr real.
- 7p a) Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$, pentru orice număr real a .
- 8p b) Determinați numerele reale a pentru care $x_1^{2024} + x_2^{2024} + x_3^{2024} = 3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.
- 7p a) Arătați că $|f(x)| \leq 2$, pentru orice $x \in [-3, 1]$.
- 8p b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a

1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

- Identificarea și numirea corpurilor geometrice (cub; paralelipiped dreptunghic; prisma dreaptă cu baza: triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat; cilindru circular drept; con circular drept) dintr-un set de corpuri date sau în cotidian
- Identificarea înălțimii în corpurile geometrice studiate
- Identificarea elementelor corpurilor geometrice în configurații spațiale și pe desfășurări (diagonale, vârfuri, muchii, fețe)

- <i>Construirea, din diferite materiale, a corpurilor geometrice studiate</i>
2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora - <i>Desfășurarea în plan a piramidei/prisme și caracterizarea figurilor plane obținute</i> - <i>Alegerea celei mai potrivite unități de măsură pentru un anumit context</i> - <i>Determinarea lungimii unui segment sau a măsurii unui unghi într-o situație practică</i>
3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice - <i>Calcularea ariei laterale și a ariei totale ale unor corpuri geometrice (paralelipiped dreptunghic, cub, prismă triunghiulară regulată, prismă patrulateră regulată, piramidă triunghiulară regulată, piramidă patrulateră regulată, cilindru circular drept, con circular drept), utilizând desfășurarea lor</i> - <i>Calcularea ariilor și volumelor folosind decupări, descompuneri, pavaje, rețele</i> - <i>Determinarea ariei laterale, a ariei totale și a volumului corpurilor geometrice studiate prin aplicarea directă a formulelor de calcul</i>
4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice - <i>Precizarea proiecțiilor pe un plan a unor puncte, drepte și segmente, în corpurile geometrice studiate</i> - <i>Calcularea, în corpurile geometrice studiate, a distanței de la un punct la o dreaptă/un plan</i> - <i>Calcularea, în corpurile geometrice studiate, a lungimii proiecției unui segment pe un plan</i>
5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date - <i>Calcularea măsurii unghiului a două plane în diverse configurații spațiale, inclusiv în corpurile geometrice studiate</i> - <i>Calcularea unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor: distanța de la un vârf la o muchie sau la o diagonală a bazei, distanța de la un vârf al bazei la o față laterală, distanța de la centrul bazei la o muchie sau o față laterală, unghiul unei muchii cu o față laterală sau bază, unghiul a două fețe ale unei piramide, unghiul a două muchii ale unui corp studiat</i> - <i>Determinarea unor elemente ale corpurilor geometrice când se cunosc aria laterală, aria totală, volumul sau alte elemente ale acestora</i>
6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian - <i>Estimarea rezultatelor unor calcule referitoare la distanțe, măsuri de unghiuri, arii și volume</i> - <i>Rezolvarea unor probleme având conținut practic legate de proiecții de puncte, drepte, segmente în corpurile geometrice studiate și în cotidian</i> - <i>Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu</i>

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Geometrie	5. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE <ul style="list-style-type: none"> Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul) Arii și volume ale unor corpuri geometrice: piramidă regulată (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), prismă dreaptă (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), paralelipiped dreptunghic, cub, cilindru circular drept, con circular drept, trunchi de piramidă regulată, trunchi de con circular drept Sfera: arie, volum

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Arii și volume ale unor corpuri geometrice**”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
24 iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $\Delta = 0$, deci $a^2 - 4 = 0$ $a = 2$ sau $a = -2$	3p 4p
	b) $\Delta > 0$, $x_1 + x_2 < 0$, $x_1 x_2 > 0$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ $a^2 - 4 > 0$; $a - 2 < 0$; $-a + 2 > 0$ $a \in (-\infty, -2)$	3p 3p 2p
2.	a) AD este mediană în ΔABC , deci $\mathcal{A}_{\Delta ADB} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{2}$ DE este mediană în ΔADB , deci $\mathcal{A}_{\Delta ADE} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta ADB}}{2} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{4}$, de unde obținem $\frac{\mathcal{A}_{\Delta ADE}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$	3p 4p
	b) $DN \parallel CE$, $N \in AB$, deci DN este linie mijlocie în ΔBEC , de unde obținem că punctul N este mijlocul segmentului BE $DF \perp CE$, deci $DF \perp DN$ și, cum $AD \perp BC$, obținem $\sphericalangle FDA = \sphericalangle NDB$; cum $\sphericalangle FAD = \sphericalangle NBD$ și $AD = DB$, obținem $\Delta ADF \equiv \Delta BDN$, deci $AF = BN = \frac{AB}{4} = \frac{AC}{4}$ Cum punctul G este centrul de greutate a ΔABC , rezultă că punctul M este mijlocul segmentului AC , unde $BG \cap AC = \{M\}$; punctul F este mijlocul segmentului AM , deci EF este linie mijlocie în ΔABM , de unde obținem $EF \parallel BG$	2p 3p 3p
3.	a) $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + a \cdot (-1) + a =$ $= -1 + 1 - a + a = 0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$, pentru orice număr real a	3p 4p
	b) $x_1 = -1$ și $f = (X + 1)(X^2 + a)$, pentru orice număr real a $x_2^2 = x_3^2 = -a$, deci $x_1^{2024} + x_2^{2024} + x_3^{2024} = (-1)^{2024} + (-a)^{1012} + (-a)^{1012} = 1 + 2a^{1012}$ $a^{1012} = 1$ și, cum a este număr real, obținem $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p 3p
4.	a) $f'(x) = 3x^2 + 6x$, $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 0$; pentru $x \in [-3, -2]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-3, -2]$; pentru $x \in [-2, 0]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-2, 0]$; pentru $x \in [0, 1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[0, 1]$ $f(-3) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(0) = -2$ și $f(1) = 2$, deci $-2 \leq f(x) \leq 2$, pentru orice $x \in [-3, 1]$, de unde obținem $ f(x) \leq 2$, pentru orice $x \in [-3, 1]$	3p 4p

<p>b) $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, 2]$, deci $\mathcal{A} = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x^2+2x-2)} dx =$</p>	3p
<p>$= -\frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x-2} dx =$</p>	2p
<p>$= -\frac{1}{3} \ln(x+1) \Big _1^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2+2x-2) \Big _1^2 = -\frac{1}{3} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \ln 6 = \frac{1}{6} \ln \frac{8}{3}$</p>	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de tip completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p 1p 2p 3p 3p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p 1p 2p 3p 3p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p 1p 2p 3p 3p</p>