

SCLIPAREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ .PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XVII, NR XXXIV, 2024

SM

34

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM



Societatea de Științe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEORETIC DE INFORMATICĂ "ALEXANDRU MARGHILOMAN", BUZĂU

NOIEMBRIE 2024

“ Valoarea omului se măsoară după greutățile pe care el le învinge .”

(Voltaire)
(1694 - 11778)



1. Istoria matematicii

Aniversări ale unor matematicieni români

de Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu, Adrian Stan, Buzău

În anul 2024, sunt aniversați o serie de matematicieni români care au contribuit la dezvoltarea unor domenii ale matematicii. În acest număr vom prezenta date biografice și aspecte din activitatea științifică a profesorilor români Petrache Poenaru, Mihail Ghermănescu și Gabriel Sudan.

În 2024 la 10 ianuarie, s-au împlinit 225 de ani de la nașterea în 1799 , a lui **Petrache Poenaru** (10.01.1799-2.10.1875), personalitate multilaterală (pedagog, inginer, inventator) remarcabilă în viața socio-culturală din Țara Românească, în perioada premergătoare Revoluției de la 1848 , dar și după aceea.

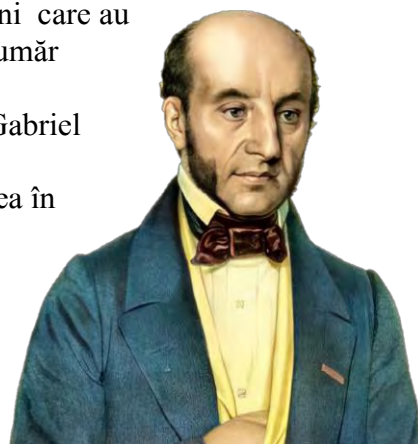
S-a născut în localitatea Bănești(Vâlcea) într-o familie înstărită, cu origini în marile familii de boieri din timpul lui Matei Basarab(1580-1654), domn al Țării Românești în perioada 1632-1654.

A fost nepotul vornicului Iordache Oteteleşanu și de mic copil a fost instruit acasă de către cei mai buni dascăli , apoi a învățat la Școala de la Biserica Obedeanu din Craiova. În 1819 este primit la Mitropolie de către mitropolitul Dionisie Lupu(1769-1831), ocrotitor al școlii lui Gheorghe Lazăr (1779-1823).

În 1820 , după plecarea lui Eufrosin Poteca(1786-1859), la studii în Italia, Petrache Poenaru îl înlocuiește predând la Mitropolie, limba greacă , până în 1821.Aici îl cunoaște pe Gheorghe Lazăr, întemeietorul învățământului în limba română în Țara Românească, căruia i-a și frecventat cursurile. Tot în această perioadă este atras de lumea haiducilor și se alătură acesteia. L-a impresionat chiar și pe Tudor Vladimirescu (1770-1821), conducătorul revoluției de la 1821. Devine omul de încredere și secretarul personal al acestuia și în această calitate mijlocește legătura lui Gheorghe Lazăr cu conducătorul revoluției. A tipărit la București primul ziar românesc „Foaie de Propagandă” în care se prezentau năzuințele revoluționarilor români. Acesta a reprezentat unul dintre primele exemple din istoria presei scrise în România.

După uciderea lui Tudor Vladimirescu în 1821, Petrache Poenaru se retrage la Sibiu. În 1824 este trimis de Eforia Școlilor din București la Universitatea din Viena unde studiază greaca, latina, istoria universală, logica, matematica, fizica și chimia. În 1826, ajunge la Paris și urmează „Școala de aplicațiuni a inginerilor geografi”, condusă de colonelul Ludovic Puissant, membru al Academiei de Științe din Paris. Aici studiază trigonometria, topografia și geografia, participând la realizarea unei hărți a Franței.

În 1828 primește certificatul de absolvire și este elogiat pentru studiile și lucrările făcute în Franța. În această perioadă, fiind la Paris, devine primul inventator român , la 28 mai 1827 brevetându-și celebrul stilou („stilograf”), primul toc rezervor din lume, cu titlul „Condeiu portăreț fără sfârșit alimentându-se însuși cu cerneală”. Invenția lui Poenaru nu a fost produsă în serie iar



titlul de inventator al stiloului a fost atribuit americanului Lewis Edson Waterman (1836-1901) în 1834, care avea mai multe brevete de stilouri.

În 1832, Petrache Poenaru se întoarce în țară și contribuie la construcția și modernizarea statului român, implicându-se în politică și militând pentru îmbunătățirea sistemului de învățământ. Între 1834-1836 a insistat pentru introducerea Sistemului Metric Zecimal în Muntenia.

La recomandarea eforului școlilor Barbu Știrbei(1799-1869), viitor domn în Țara Românească(1849-1853,1854-1856), Poenaru este numit la 20 octombrie 1850, membru în comisia de redactare a regulamentului privind educațiunea publică sub Regulamentul Organic.

Devine profesor de matematică , fizică și chimie , apoi și director la Colegiul „Sf. Sava” din București. În perioada 1834-1847 a funcționat și ca director general al școlilor din Țara Românească. A înființat sute de școli primare sub domnia lui Alexandru Ghica (domn între 1834-1842).

De asemenea fondează la Craiova, Colegiul Național Carol I. În 1835, împreună cu alți oameni de seamă a contribuit la înființarea la Pantelimon a primei Școli de Agricultură din Țara Românească. Este și co-fondator al Școlii de Poduri și Șosele (actuala Universitate Tehnică de Construcții din București). În 1847 se desființează Colegiul Sf.Sava (în locul lui se introduce învățământul francez) iar Petrache Poenaru este scos din învățământ.

Poenaru a participat la Revoluția de la 1848 făcând parte din Comisia pentru eliberarea robilor, semnând la 12.07.1848 alături de Cezar Bolliac și Iosafat Snagoveanu, primul comunicat al comisiei.

Devine director în Ministerul de Externe (1850-1855), membru în Comisia documentelor (1857), membru în Comisia de Stat(1864) și Președinte al „ Societății pentru învățătura poporului român”, calitate în care a reușit ca școlile normale să nu fie desființate așa cum dorea ministrul învățământului de atunci Cristian Tell. Din 1856, Petrache Poenaru este membru al unei loji masonice bucureștene și devine un apropiat al domnitorului Alexandru Ioan Cuza (20.03.1820-15.05.1873).

Petrache Poenaru are marele merit de a fi contribuit la predarea matematicii în școlile românești. În 1837 a publicat primul curs de geometrie în românește în țările române (înainte de apariția celui din 1838 publicat în Moldova de Gheorghe Asachi (1788-1869). Acest curs s-a numit „Elemente de geometrie după Legendre” și era o traducere a unei părți din cartea celebrului matematician francez, tipărită la tipografia lui Ion Heliade Rădulescu(1802-1872). Titlul traducerii a fost: „Elemente de geometrie după Legendre. Tipărită cu cheltuială din cartea Schoalelor naționale pentru scholarii ce urmează acest curs în colegiul Sf.Sava București în tipografia lui Eliade,1837”. În curs erau inserate și o parte din studiile făcute de Poenaru la Viena și Paris, folosind și terminologia lui Gheorghe Lazăr. Dar Poenaru a introdus și termeni noi: axiomă, demonstrație, ipoteză, simetrie, propoziție, proprietate.

De asemenea descria figurile geometrice introducând termeni care s-au păstrat până acum: unghiuri adiacente, opuse la vârf, corespondente, alterne interne ,alterne externe, denumirile poligoanelor, expresiile centru, concentrice, circumscris, semicerc, segment, tangent, etc.

Petrache Poenaru a mai publicat și primul curs de algebră din Țara Românească în 1841, în românește cu titlul „Elemente de algebră după Appeltauer. Tradusă din latinește cu oarecare modifi cații de P.Poenaru. Directorul Școlii Naționale, București, în Tipografia Kolegiului Sf.Sava, 1841”.

În semn de apreciere a îndelungatei sale activități, Petrache Poenaru, a fost acceptat în 1870, ca membru al Academiei Române. Alături de Gheorghe Lazăr și Ion Heliade Rădulescu, rămâne o personalitate proeminentă în dezvoltarea învățământului românesc. S-a stins din viață la 2 octombrie 1875, iar între descendenți mai cunoscuți a fost scriitoarea Alice Voinescu (1885-1961).

Anul acesta s-au împlinit 125 de ani de la nașterea matematicianului român **Ghermănescu Mihail** (20.05.1899-1962).



S-a născut la București (într-o familie de muzicieni) unde urmează cursurile primare la o școală germană apoi primele trei clase de liceu la „Matei Basarab”. Următoarele trei clase de liceu le-a făcut ca bursier la Liceul Militar „Mănăstirea Dealu” unde l-a avut ca profesor pe Valeriu Alaci (1884-1955), profesor de analiză matematică la Politehnica din Timișoara și un colaborator activ al Gazetei Matematice.

În 1916, **Ghermănescu** este admis la Școala de Artilerie, fiind înaintat la gradul de sublocotenent de artilerie în 1917. În particular a absolvit și clasele a VII-a și a VIII-a de liceu. În 1919 demisionează din armată și devine student la Facultatea de Științe a Universității din București, unde și-a luat licența în 1921.

Între 1921-1934 este profesor la mai multe licee bucureștene: „Cantemir Vodă”, „Gheorghe Șincai”, „Spiru Haret” și „Gheorghe Lazăr”. În perioada 1928-1936 a fost profesor la Școala de Ofițeri de Geniu din București iar în 1933 își ia doctoratul în matematici la Universitatea din Cluj, cu teza „Asupra integralei lui Poisson” într-o comisie prezidată de Dimitrie Pompeiu (1873-1954) și având ca membri pe Theodor Angheluță (1882-1964) și Simion Stoilow (1887-1929).

În 1934, **Mihail Ghermănescu** este conferențiar la catedra de matematici generale la Politehnica din Timișoara, în perioada 1940-1948 este profesor la catedra de mecanică rațională, apoi până în 1952 devine profesor șef de catedră la Academia Militară (1951-1955), Institutul de Căi Ferate (1952-1953) și Institutul de Construcții (1953-1962). În perioada 1948-1952 a avut și funcția de rector la Institutul Pedagogic din Timișoara.

Mihail Ghermănescu a fost un om de cultură, un foarte bun pedagog cu prelegeri riguroase și atractive, apreciate de elevi și studenți. A fost membru al Gazetei Matematice din 1922 iar din 1948, Președinte al Societății Române de Matematică și Fizică a filialei Timișoara și din 1931 membru al Societății de Matematică din Franța. Ghermănescu a fost și primul președinte al Asociației Filateliștilor din România.

Opera științifică a lui **Mihail Ghermănescu** a cuprins 210 articole, comunicări, lucrări didactice. A avut contribuții mai ales în analiza matematică, dar are rezultate și în teoria numerelor, algebră, geometrie, mecanică generală și balistică. În analiză s-a ocupat de serii trigonometrice, derivata areolară (fiind primul român după creatorul ei, Dimitrie Pompeiu, care a studiat acest concept).

Mihail Ghermănescu a introdus noțiunile de derivată parțial areolară și diferențială totală areolară (1928), ecuații diferențiale ordinare (cu demonstrația pentru ecuația lui Riccati în 1937). Ghermănescu a dat metode noi de integrare a sistemelor de ecuații diferențiale în 1953 și a introdus ecuația de ordinul al patrulea cu patru variabile, ulterior denumită „**ecuația Ghermănescu**”.

De asemenea a obținut rezultate interesante în studiul ecuațiilor integrale, domeniul matematicii în care marele nostru matematician Traian Lalescu a publicat primul tratat din lume.

În 1956, Ghermănescu a dat integrarea sistemelor de ecuații funcționale întâlnită în teoria lanțurilor Markov (rezultat în domeniul probabilităților căutat, dar negăsit și de matematicianul francez Maurice Fréchet). În teoria funcțiilor a dezvoltat și extins unele rezultate ale lui Émile Picard sau unele rezultate ale lui Nicolae Abramescu (1884-1947) despre funcțiile și polinoamele ortogonale.

În domeniul geometriei a descoperit o clasă de conice atașate unui triunghi (1941) și un complex cubic de drepte (1945). Într-o lucrare principală a sa, „Ecuatii funcționale” apărută în 1960, sunt reliefate și contribuțiile matematicienilor români în acest domeniu.

În matematica liceală este cunoscut „șirul lui Ghermănescu” $(G_n)_{n \geq 2}$ cu termenul general $G_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} - \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$. Folosind scrierea $G_n = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, se

arată că șirul lui Ghermănescu este convergent cu limita $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = e$. Acest șir a făcut obiectul problemei 4600 din Gazeta Matematică vol. XLI (1935-1936).

În nota „În legătură cu șirul lui Mihail Ghermănescu”, din revista ieșeană Recreații Matematice nr.2/2005, profesorul D.M.Bătinețu –Giurgiu a dat o generalizare a șirului Ghermănescu : pentru un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$ și pentru un polinom $P \in \mathbb{R}_+[X]$ se numește șir Ghermănescu generat de șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ și polinomul P , șirul cu termenul general $g_n = P(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}) \cdot \frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - P(\sqrt[n]{a_n}) \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$. Acest șir este convergent cu $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = P(a) \cdot e$.

Pentru $P=1$, șirul $(g_n)_{n \geq 1}$, devine șirul lui Ghermănescu $(G_n)_{n \geq 1}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = e$.

În 2024, la 14 aprilie s-au împlinit 125 de ani de la nașterea lui **Gabriel Sudan** (14.04.1899 – 22.06.1977), matematician român născut la București, cu strămoși francezi din Elveția.



A urmat studiile primare și liceale (liceul la Mihai Viteazul) în București. În 1920 își ia licența în matematici la Universitatea din București iar în 1922 a plecat la Göttingen, unde i-a audiat pe David Hilbert(1862-1943), Landau(1877-1938), Courant (1888-1972) și Weyl (1885-1955).

În anul 1925 devine doctor în matematici, cu teza „Asupra mulțimilor ordonate”, în comisia având ca președinte pe Hilbert și ca membri pe Felix Bernstein(1880-1968) și Leopold Ammbsonn (astronom german, 1854-1930).

Calitățile lui Sudan de cercetător l-au impus în fața lui Hilbert care l-a numit asistentul său la Göttingen. La întoarcerea în țară, în 1925, Sudan își începe cariera universitară mai întâi la Universitatea București, ca asistentul lui Ermil Pangrati (1864-1931) la geometrie descriptivă, Aurel Angelescu(1886-1938) la algebră și teoria numerelor și Dimitrie Pompeiu(1873-1954) la catedra de teoria funcțiilor.

Este numit conferențiar de matematici generale la Facultatea de Arhitectură din București, unde devine profesor titular în perioada 1934-1969. A funcționat și ca șef de sector la teoria numerelor și algebră în cadrul Institutului de Matematică al Academiei Române.

Activitatea științifică a lui **Gabriel Sudan** este legată de numerele cardinale sau ordinale transfinite și de teoria numerelor privind aproximările diofantice.

Unele din rezultatele și metodele sale au fost cuprinse în lucrarea „Geometrizarea fracțiilor continue” (1959).

Remarcăm faptul că răspunsul la una din teoremele care pot conduce la rezolvarea problemei continuului, așa cum a fost pusă de Hilbert, a fost dat pentru prima dată în lume, de Gabriel Sudan, în 1927, înaintea logicianului german Wilhelm Ackermann (1896-1962), în 1928. Societatea de Științe Matematice din România (S.S.M.R.), a publicat în anul 1969, la Editura Tehnică București, lucrarea lui **Gabriel Sudan** „Câteva probleme matematice interesante”. Gabriel Sudan rămâne o personalitate aparte în matematica românească, admirabil profesor, iubitor de știință și de oameni, despre care academicianul Octav Onicescu (1892-1983) spunea că a fost „unul dintre cei mai învățați și originali matematicieni de la noi”.

Bibliografie

1. Adrian Stan și colab. - *O scurtă istorie a matematicii*, Editgraph Buzău, 2015
2. George Șt. Andonie. - *Istoria matematicii în România*. Editura Științifică. București. 1967
3. Ion Purcaru, Octavian Bâscă - *Pagini din istoria matematicii: oameni, idei și fapte de referință*, Editura Universitară, București, 2017
4. Wikipedia

„ Dacă știi ce vrei e imposibil să nu găsești ceea ce cauți.”

Mihai Drumeș
(1901- 1982)



2. Articole și note matematice

În legătură cu o problemă din Pentagon

de Titu Zvonaru, Comănești

În revista Pentagon, numărul de primăvară 2023, a apărut următoarea problemă ([1]):
Demonstrați că în orice triunghi ABC (cu notațiile uzuale) este adevărată inegalitatea:

$$2(m_a + m_b + m_c) \leq 3\sqrt{\frac{R(s^2 + r^2 + 4Rr)}{2r}}, \quad (1).$$

Vom prezenta câteva metode de rezolvare.

I. Fie F aria triunghiului ABC . Avem:

$$(\sum x)^2 \leq 3\sum x^2; \sum m_a^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}; ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr.$$

Este suficient să demonstrăm că:

$$\frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{4} \leq \frac{9}{4} \cdot \frac{R}{2r}(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{abc}{4F} \cdot \frac{s}{2F}(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow 16F^2(a^2 + b^2 + c^2) \leq abc(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)(a^2 + b^2 + c^2) \leq abc(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow \sum a^6 + \sum a^3b^2c + \sum a^3bc^2 \geq 3a^2b^2c^2 + \sum a^4b^2 + \sum a^2b^4, (*)$$

Cu inegalitatea lui Schur $\sum a^6 + 3a^2b^2c^2 \geq \sum a^4b^2 + \sum a^2b^4$, iar din inegalitatea MA-MG obținem $\sum a^3b^2c \geq 3a^2b^2c^2$, $\sum a^3bc^2 \geq 3a^2b^2c^2$, care adunate conduc la inegalitatea (*).

II. După ridicare la pătrat, avem de demonstrat că

$$8r(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R(s^2 + r^2 + 4Rr).$$

Folosind majorarea $m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$ (itemul 8.2 din [2]) și minorarea $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (Gerretsen – itemul 5.8 din [2]) trebuie să arătăm că

$$8r(4R + r)^2 \leq 9R(20Rr - 4r^2) \Leftrightarrow 2(4R + r)^2 \leq 9R(5R - r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13R^2 - 17Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(13R + r) \geq 0.$$

Folosind inegalitatea $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ și formula

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}, \text{ este suficient să arătăm că}$$

$$12(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \leq \frac{9R(s^2 + r^2 + 4Rr)}{2r} \Leftrightarrow 2r(a^2 + b^2 + c^2) \leq R(s^2 + r^2 + 4Rr).$$

Deoarece $s^2 + r^2 + 4Rr = ab + bc + ca$, rămâne de demonstrat că $\frac{R}{2r} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$, (2).

$$\begin{aligned}
\text{Avem } \frac{R}{2r} - 1 &= \frac{abc s}{8F^2} - 1 = \frac{abc(a+b+c) - 16F^2}{16F^2} = \\
&= \frac{abc(a+b+c) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)}{16F^2} = \\
&= \frac{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 - c^2(a-b)^2 - a^2(b-c)^2 - b^2(c-a)^2}{32s(s-a)(s-b)(s-c)} = \\
&= \frac{(a-b)^2((a+b)^2 - c^2) + (b-c)^2((b+c)^2 - a^2) + (c-a)^2((c+a)^2 - b^2)}{32s(s-a)(s-b)(s-c)} = \\
&= \frac{(a-b)^2}{8(s-a)(s-b)} + \frac{(b-c)^2}{8(s-b)(s-c)} + \frac{(c-a)^2}{8(s-c)(s-a)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Avem de arătat că } \frac{R}{2r} - 1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-b)^2}{8(s-a)(s-b)} + \frac{(b-c)^2}{8(s-b)(s-c)} + \frac{(c-a)^2}{8(s-c)(s-a)} \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}, \quad (3).$$

$$\text{Deoarece } \frac{1}{4(s-a)(s-b)} \geq \frac{1}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 + c(a+b-c) \geq 0, \text{ inegalitatea (3) este adevărată.}$$

III. Folosind substituțiile Ravi ($a = y + z, b = z + x, c = x + y$) inegalitatea (2) se scrie succesiv

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} \geq \frac{2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx)}, \quad (4)$$

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} - 1 \geq \frac{2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx)} - 1,$$

$$\frac{(x-y)^2}{8xy} + \frac{(y-z)^2}{8yz} + \frac{(z-x)^2}{8zx} \geq \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx))}, \quad (5).$$

$$\text{Deoarece } x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx) \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 + 3(yz + zx) \geq 0,$$

Inegalitatea (5) este adevărată.

IV. Inegalitatea (4) este simetrică și omogenă de gradul 5. Este suficient să o demonstrăm pentru $y = z$. După efectuarea calculelor, obținem $(x-y)^2(x^2 + 2xy + 5y^2) \geq 0$.

Bibliografie

1. N. Stanciu, *Problema 925*, The Pentagon, Spring 2023, 23.
2. O. Bottema et al, *Geometric Inequalities*, Groningen 1969.

ȘTIATI CĂ...?

..... în anul 1591, matematicianul englez **Thomas Harriot** este primul care a observat că toți fulgii de nea au șase brațe, deși acest lucru îl observaseră și chinezii cu 17 secole mai înainte.

..... se spune că denumirea de milion provine de la **Marco Polo**, inventându-l pentru a descrie mulțimea minunățiilor văzute de el în China.

Noi inegalități în triunghi

de Mihaly Bencze

Teoremă. Dacă $a, b > 0, a \neq b$, atunci $\sqrt[3]{\frac{a^3 - b^3}{\ln a - \ln b}} \leq \frac{(a+b)\sqrt[3]{3}}{2}$.

Demonstrație. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8(x-1)}{(\sqrt[3]{x}+1)^3} - \ln x$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} \right)^4 < 0, \text{ deci } f \text{ este descrescătoare.}$$

Dacă $x > 1$, atunci $f(x) < f(1) = 0$.

Dacă $0 < x < 1$, atunci $f(x) > f(1) = 0$.

Deci, $\frac{x-1}{\ln x} \leq \left(\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2} \right)^3$, (1), unde punem $x = \left(\frac{a}{b} \right)^3$ și rezultă inegalitatea din teoremă.

Consecințe:

Dacă $a, b > 0, a \neq b$, atunci $L(a, b) \leq M_{\frac{1}{3}}(a, b)$ (rezultă din (1) pentru $x = \frac{a}{b}$).

Dacă $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$), atunci $\sum_{ciclic} \sqrt[3]{\frac{a_1^3 - a_2^3}{\ln a_1 - \ln a_2}} \leq \sqrt[3]{3} \sum_{k=1}^n a_k$.

Dacă $a, b, c > 0, a \neq b \neq c$, atunci $\sum_{ciclic} \sqrt[3]{\frac{a^3 - b^3}{\ln a - \ln b}} \leq \sqrt[3]{3}(a+b+c)$.

Consecințe în triunghiul ABC (cu notațiile uzuale):

$$\sum_{ciclic} \sqrt[3]{\frac{a^3 - b^3}{\ln a - \ln b}} \leq 2p\sqrt[3]{3};$$

$$\sum_{ciclic} \sqrt[3]{\frac{(p-a)^3 - (p-b)^3}{\ln(p-a) - \ln(p-b)}} \leq p\sqrt[3]{3};$$

$$\sum_{ciclic} \sqrt[3]{\frac{r_a^3 - r_b^3}{\ln r_a - \ln r_b}} \leq (4R+r)\sqrt[3]{3};$$

$$\sum_{ciclic} \sqrt[3]{\frac{\cos^3 A - \cos^3 B}{\ln(\cos A) - \ln(\cos B)}} \leq \left(1 + \frac{r}{R}\right)\sqrt[3]{3}.$$

Bibliografie.

1. Sclipirea Minții (2017-2024).
2. Octagon Mathematical Magazine (1993-2024).

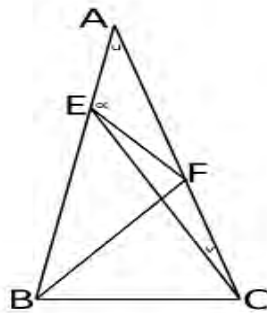
O generalizare a problemei lui Langley

de Marius Drăgan

În această notă vom prezenta: **O generalizare a problemei Langley**. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $AB = AC$, iar $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $\angle ABF = \angle FAB = u$ și

$$\angle ACE = v, \text{ atunci: } \angle AEF = \arcsin \left(\frac{\sin u \sin(u+v)}{\sqrt{4 \cos^2 u \sin^2 v - 4 \cos^2 u \sin v \sin(u+v) + \sin^2(u+v)}} \right), (*)$$

Demonstrație. $AB = AC = y$, $BF = AF = x$, $\angle AEF = \alpha$.



Cu teorema sinusurilor în $\triangle AEC$ avem: $\frac{y}{\sin(u+v)} = \frac{AE}{\sin v} \Leftrightarrow AE = \frac{y \sin v}{\sin(u+v)}$.

Cu teorema cosinusului în $\triangle AEF$ avem:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos u \Leftrightarrow EF^2 = \frac{y^2 \sin^2 v}{\sin^2(u+v)} + x^2 - \frac{2xy \sin v \cos u}{\sin(u+v)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{EF^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{\sin^2 v}{\sin^2(u+v)} + 1 - \frac{2y}{x} \cdot \frac{\sin v \cos u}{\sin(u+v)}. \text{ Cu teorema sinusurilor în } \triangle ABF \text{ avem:}$$

$$\frac{y}{\sin 2u} = \frac{x}{\sin u} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2 \cos u. \text{ Deci,}$$

$$\frac{EF^2}{x^2} = \frac{4 \cos^2 u \sin^2 v}{\sin^2(u+v)} + 1 - \frac{4 \sin v \cos^2 u}{\sin(u+v)} = \frac{4 \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2(u+v) - 4 \sin v \cos^2 u \sin(u+v)}{\sin^2(u+v)},$$

de unde ținând cont de faptul că $\frac{EF^2}{x^2} = \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \alpha}$ obținem (*).

Remarca 1. Verificați (*) rezolvând problema Langley, adică $u = 20^\circ$ și $v = 30^\circ$.

Remarca 2. Alte generalizări ale problemei Langley sunt prezentate în [1].

Bibliografie

1. M. Drăgan and N. Stanciu, *Some generalizations for Langley's problem*, Romanian Mathematical Magazine (RMM), <http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2024/04/SOME-GENERALIZATIONS-FOR-LANGLEYS-PROBLEM.pdf>

O nouă generalizare a dublei inegalității a lui Nicolae Ciorănescu

de Gheorghe Ghiță, Buzău

Articolul prezintă o nouă generalizare (vezi [4]) pentru dubla inegalitate a lui Nicolae Ciorănescu - i.e. problema 4993/GM 1937, nr.12, pag. 671:

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC , atunci:

$$\frac{15}{4} \leq \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}, \text{ unde } p \text{ este semiperimetrul triunghiului.}$$

Propoziție. În orice triunghi ABC pentru $k \geq 1$ avem inegalitățile:

$$\frac{6k+9}{4} \leq \frac{(15k+21)R - (6k+6)r}{9R-2r} \leq \sum \frac{p+ka}{b+c} \leq \frac{(8k+10)R + (2k+7)r}{4(R+r)}.$$

Demonstrație. Lema 1. În orice triunghi avem egalitatea:

$$\sum \frac{p+ka}{b+c} = \frac{(4k+5)p^2 - (4k-1)r^2 - (4k-4)Rr}{2(p^2 + r^2 + 2Rr)}, \text{ care rezultă din } \sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr: } \sum \frac{p+ka}{b+c} &= \sum \frac{a+b+c+2ka}{2(b+c)} = \frac{3}{2} + \frac{2k+1}{2} \sum \frac{a}{b+c} = \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr} = \\ &= \frac{(4k+5)p^2 - (4k-1)r^2 - (4k-4)Rr}{2(p^2 + r^2 + 2Rr)}. \end{aligned}$$

$$\text{Lema 2. } \frac{15R-6r}{2(9R-2r)} \leq \frac{p^2 - r^2 - Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \leq \frac{4Rr+r}{4(R+r)}.$$

$$\text{Într-adevăr: } \frac{15R-6r}{2(9R-2r)} \leq \frac{p^2 - r^2 - Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \Leftrightarrow (3R+2r)p^2 \leq 48R^2r + 17Rr^2 - 10r^3, \text{ adevărată}$$

$$\text{(Gerretsen: } p^2 \geq 16Rr - 5r^2) \text{ și } \frac{p^2 - r^2 - Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \leq \frac{4Rr+r}{4(R+r)} \Leftrightarrow 3rp^2 \leq 12R^2r + 14Rr^2 + 5r^3,$$

adevărată deoarece $3rp^2 \leq 12R^2r + 12Rr^2 + 9r^3$ (Gerretsen: $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$) și

$$12R^2r + 14Rr^2 + 5r^3 \leq 12R^2r + 12Rr^2 + 9r^3 \Leftrightarrow R \geq 2r \text{ (Euler).}$$

Aplicând cele două leme rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)(15R-6r)}{2(9R-2r)} &= \frac{(15k+21)R - (6k+6)r}{9R-2r} \leq \sum \frac{p+ka}{b+c} \leq \\ &\leq \frac{3}{2} + \frac{(2k+1)(4R+r)}{4(R+r)} = \frac{(8k+10)R + (2k+7)r}{4(R+r)}. \end{aligned}$$

$$\frac{6k+9}{4} \leq \frac{(15k+21)R - (6k+6)r}{9R-2r} \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$\text{Notă. Pentru } k=1 \text{ se obțin inegalitățile din [1]: } \frac{15}{4} \leq \frac{36R-12r}{9R-2r} \leq \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}.$$

Bibliografie

M. Drăgan, N. Stanciu, *Asupra unei inegalități duble a lui Nicolae Ciorănescu*, Sclipirea Minții, Nr.32/2023, pg. 14.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu, *About Nicolae Ciorănescu's double inequality*, Octogon Mathematical Magazine, No. 2, October 2019, pp. 832-840.

M. Drăgan, N. Stanciu, *Asupra unei probleme din Gazeta Matematică*, Gazeta Matematică Didactica (GMD), Anul XII, Nr. 2, 2022, 51-54.

Ghe. Ghiță, N. Stanciu, *O generalizare a dublei inegalității a lui Nicolae Ciorănescu*, Revista Electronică de Matematică MateInfo.ro (REMI), Septembrie, 2024.

Noi inegalități de tip Finsler- Hadwiger

D.M. Bătinețu – Giurgiu, București, Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Considerăm $x > 0$, $y > 0$ și un triunghi ABC și laturile de lungimi $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Este cunoscută inegalitatea Ionescu- Weitzenböck: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$, stabilită mai întâi de profesorul inginer Ion Ionescu (în 1897), unul dintre fondatorii Gazetei Matematice în 1895 și matematicianul austriac Ronald Weitzenböck (în 1919).

O inegalitate mai tare decât inegalitatea Ionescu- Weitzenböck este inegalitatea lui Finsler- Hadwiger: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, stabilită în 1937 de către matematicianul german și elvețian Paul Finsler și în 1939 de matematicianul elvețian Hugo Hadwiger.

Stabilim alte două **inegalități de tip Finsler- Hadwiger**:

$$1. (x^2 + y^2)(a^4 + b^4 + c^4) \geq 32xyS^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2.$$

Avem trei demonstrații, unde ne vom folosi de alte inegalități importante cunoscute:

Inegalitatea algebrică a lui **Bergström**:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}, \quad x_k, y_k > 0, \quad k = \overline{1; n}.$$

Inegalitatea geometrică a lui V.O. Gordon (1966): $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3} \cdot S$;

Inegalitatea geometrică a lui Leonard Carlitz (matematician american, 1907- 1999):

$$3 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 4\sqrt{3} \cdot S;$$

Inegalitățile geometrice ale lui Goldner (1949): $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 16S^2 /$

Demonstrația 1.

$$\sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 = (x^2 + y^2)(a^4 + b^4 + c^4) - 2xy(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2)(a^4 + b^4 + c^4) = 2xy(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq}$$

Din (1) rezultă

$$2xy \cdot \frac{(ab + bc + ca)^2}{3} + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \stackrel{\text{Gordon}}{\geq} \frac{2}{3}xy(4S\sqrt{3})^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \Rightarrow$$

$$(x^2 + y^2)(a^4 + b^4 + c^4) \geq 32xyS^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2.$$

Demonstrația 2.

$$\text{Cu inegalitatea mediilor avem: } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(a^4 + b^4 + c^4) &\stackrel{(1)}{=} 2xy(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \stackrel{(2)}{\geq} 2xy \cdot 3\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^2 + \\ &+ \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 = \frac{2}{3}xy\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \stackrel{\text{Carlitz}}{\geq} \frac{2}{3}xy \cdot (4S\sqrt{3})^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 = \\ &32xy + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \text{ și rezultă } \mathbf{inegalitatea 1.} \end{aligned}$$

Demonstrația 3. Din identitatea (1) obținem:

$$(x^2 + y^2)(a^4 + b^4 + c^4) = 2xy(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 \stackrel{\text{Goldner}}{\geq}$$

$$2xy \cdot 16S^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2 = 32xyS^2 + \sum_{cyc} (xa^2 - yb^2)^2, \text{ deci rezultă } \mathbf{inegalitatea 1.}$$

$$2. a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2 + \frac{1}{2}[(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2)]$$

Această inegalitate se obține din inegalitatea 1, pentru $x=y=0$.

$$2x^2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 32x^2S^2 + \sum_{cyc}(xa^2 - yb^2)^2;$$

$$2x^2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2x^2 \left[16S^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc}(a^2 - b^2)^2 \right], \text{ de unde rezultă inegalitatea 2.}$$

Bibliografie

1. Batinetu-Giurgiu D.M., Stanciu N.-Inegalități de tip Ionescu-Weizenbock , Gazeta Matematica nr.1/2013
2. Rusu C.-Asupra inegalităților de tip Ionescu-Weizenbock , Sclipirea Mintii , mai 2018
3. Wikipedia

O nouă demonstrație a inegalității Finsler – Hadwiger

de D.M. Băținețu-Giurgiu, Daniel Sitaru și Neculai Stanciu

În orice triunghi ABC cu notațiile uzuale are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + \frac{1}{2} \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2), (F-H).$$

Vom da o altă demonstrație pentru inegalitatea de mai sus.

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right)^2 &= 2 \sum \frac{1}{h_a^2} - 2 \sum \frac{1}{h_a h_b} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{h_a^2} = \sum \frac{1}{h_a h_b} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4S^2} \sum ab + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right)^2 \stackrel{Gordon}{\geq} \frac{1}{4S^2} 4\sqrt{3}S + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right)^2 = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{S} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2 h_a^2} + \frac{b^2}{b^2 h_b^2} + \frac{c^2}{c^2 h_c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{S} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{a}{ah_a} - \frac{b}{bh_b} \right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4S^2} (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{\sqrt{3}}{S} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{a-b}{2S} \right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4S^2} (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{\sqrt{3}}{S} + \frac{1}{8S^2} \sum (a-b)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + \frac{1}{2} \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

ȘTIATI CĂ...?

La 15 septembrie 1830, în Anglia s-a deschis prima cale ferată din lume , între orașele Liverpool și Manchester. Matematicianul **Petrache Poenaru** a fost primul român care a călătorit cu trenul la 27 octombrie 1831, el spunând: „Am făcut această călătorie cu un nou mijloc de transport, care este una din minunile secolului Douăzeci de trăsuri legate unele cu alta încărcate cu 240 de persoane sunt trase deodată de o singură mașină cu abur”.

O identitate legată de o inegalitate cunoscută

de Neculai Stanciu și Titu Zvonaru

Pornind de la inegalitatea cunoscută într-un triunghi:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3, (1),$$

în [1] este demonstrată următoarea rafinare:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq \frac{4R+r}{3r}, (2).$$

Iată cum, fără a utiliza inegalitatea lui Cebâșev și expresiile pentru razele cercurilor exînscrise, putem obține o altă demonstrație pentru (2).

Folosind formule obișnuite într-un triunghi, obținem:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{a}{2(p-a)} + \frac{b}{2(p-b)} + \frac{c}{2(p-c)} = \\ & = \frac{a(p-b)(p-c) + b(p-c)(p-a) + c(p-a)(p-b)}{2(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ & = \frac{p^2(a+b+c) - 2p(ab+bc+ca) + 3abc}{2(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2p^3 - 2p(p^2 + r^2 + 4Rr) + 12pRr}{2(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ & = \frac{p^2r(2R-r)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2r(2R-r)}{p^2r^2} = \frac{2R-r}{r}, (3). \end{aligned}$$

Inegalitatea dorită rezultă imediat:

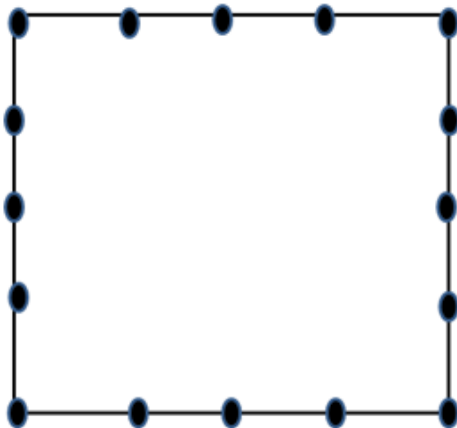
$$\frac{2R-r}{r} \geq \frac{4R+r}{3r} \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Folosind identitatea obținem următoarea inegalitate dublă

$$\frac{4R+r}{3r} \leq \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \leq \frac{3R-3r}{r}, (*).$$

1. Dumitru Crăciun, O rafinare a unei inegalități cunoscute, G.M.-B nr. 2/2024

JOC LINII ȘI PUNCTE



Doi jucători fiecare folosind creioane colorate diferit

trasează linii unind punctele de pe laturile pătratului. De fiecare dată când linia trasată de un jucător intersectează o linie anterioară, punctul respectiv de intersecție este colorat în culoarea folosită de respectivul jucător. Intersecția dintre două linii proprii este marcată cu două puncte în timp ce intersecția dintre o linie proprie și o linie a adversarului se marchează cu un punct. Câștigă jucătorul care acumulează cele mai multe puncte.

Ecuții exponențiale și logaritmice nonstandard

Radu Diaconu, Sibiu

Vom numi problemă nonstandard o problemă a cărei rezolvare nu se bazează pe un algoritm cunoscut de rezolvare. Tehnicile utilizate apelează la studiul monotoniei, studiul convexității unor funcții sau a unor inegalități clasice, etc.

Să se rezolve ecuațiile:

1. $7^x + 8^x + 9^x = 11^x + 13^x$.

Rezolvare: Împărțim ambii membrii cu 11^x atunci, ecuația devine:

$$\left(\frac{7}{11}\right)^x + \left(\frac{8}{11}\right)^x + \left(\frac{9}{11}\right)^x = 1 + \left(\frac{13}{11}\right)^x. \text{ Funcția } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{7}{11}\right)^x + \left(\frac{8}{11}\right)^x + \left(\frac{9}{11}\right)^x \text{ este strict}$$

descrescătoare, iar funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 + \left(\frac{13}{11}\right)^x$ este strict crescătoare. Atunci, ecuația

$f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție. Cum $x=1$ verifică ecuația, deducem că aceasta este unică.

2. $2 \cos^2 \frac{x^2 - 3x}{8} = 2^x + 2^{-x}$.

Rezolvare: Avem inegalitățile $2 \cos^2 \frac{x^2 - 3x}{8} \leq 2$; $2^x + 2^{-x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vom avea egalitate dacă $\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2 \\ \cos^2 \frac{x^2 - 3x}{8} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$ soluție unică.

3. $2^x + 8^x + 9^x = 19^x + x - 1$.

Rezolvare: Împărțind cu 19^x , ecuația devine $\left(\frac{2}{19}\right)^x + \left(\frac{8}{19}\right)^x + \left(\frac{9}{19}\right)^x = 1 + \frac{x-1}{19^x}$. Se verifică faptul că $x = 1$ este soluție unică.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \left(\frac{2}{19}\right)^x + \left(\frac{8}{19}\right)^x + \left(\frac{9}{19}\right)^x$ este strict descrescătoare, Fie

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 + \frac{x-1}{19^x}.$$

Pentru $x < 1 \Rightarrow g(x) < 1, f(x) > 1$, ecuație imposibilă;

Pentru $x > 1 \Rightarrow g(x) > 1, f(x) < 1$, ecuație imposibilă.

4. Aflați numerele reale și x și y care verifică ecuația $16^{x^2-y} + 16^{y^2-x} = 1$.

Rezolvare: Cu inegalitatea mediilor avem:

$$16^{x^2-y} + 16^{y^2-x} \geq 2\sqrt{16^{x^2-y} \cdot 16^{y^2-x}} = 2 \cdot 4^{x^2-y} \cdot 4^{y^2-x} = 2 \cdot 4^{x^2-x} \cdot 4^{y^2-y} \geq 2 \cdot 4^{\frac{-1}{4}} \cdot 4^{\frac{-1}{4}} = 1. \text{ Deci, } x = y = \frac{1}{2}.$$

5. Rezolvați ecuația: $9^x + 9^{\frac{1}{x}} = 84$.

Rezolvare: Pentru $x < 0$ ecuația nu are soluții deoarece $9^x + 9^{\frac{1}{x}} < 1$.

Pentru $x > 0$ considerăm funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 9^x + 9^{\frac{1}{x}}$ care este strict convexă.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 9^{\frac{x+y}{2}} + 9^{\frac{2}{x+y}} \leq 9^{\frac{x+y}{2}} + 9^{\frac{x+y}{2xy}} = \sqrt{9^x \cdot 9^y} + \sqrt{9^{\frac{1}{x}} \cdot 9^{\frac{1}{y}}} \left(\frac{9^x + 9^y}{2} + \frac{9^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{y}}}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2} \right),$$

$$\forall x, y \in (0; \infty), x \neq y$$

Deci, ecuația are cel mult două soluții. Acestea sunt: $2, \frac{1}{2}$.

6. Rezolvați în numere reale ecuația: $4^{x^4-10x^2+8} = \frac{x}{x^2+3}$.

Rezolvare: Deoarece $4^{x^4-10x^2+8} > 0 \Rightarrow x > 0$. Logaritmând, obținem

$$x^4 - 10x^2 + 8 = \log_4 x - \log_4(x^2 + 3) \Leftrightarrow \log_4(x^2 + 3) + (x^2 + 3)^2 = \log_4(4x) + (4x)^2.$$

Funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_4 x + x^2$ este strict crescătoare, deci injectivă. Rezultă că

$$f(x^2 + 3) = f(4x) \Rightarrow x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x \in \{1; 3\}.$$

7. Rezolvați sistemul
$$\begin{cases} \log_9 x \leq 2(\sqrt{\log_3 y} - 1) \\ \log_9 y \leq 2(\sqrt{\log_3 z} - 1) \\ \log_9 z \leq 2(\sqrt{\log_3 x} - 1) \end{cases}$$

Rezolvare: Notăm $\sqrt{\log_3 x} = u$, $\sqrt{\log_3 y} = v$, $\sqrt{\log_3 z} = t$. Sistemul se transcrie:

$$\begin{cases} \frac{\log_3 x}{2} \leq 2(v-1) \\ \frac{\log_3 y}{2} \leq 2(t-1) \Rightarrow u^2 + v^2 + t^2 \leq 4(u+v+t-3) \Leftrightarrow \\ \frac{\log_3 z}{2} \leq 2(u-1) \end{cases}$$

$$(u-2)^2 + (v-2)^2 + (t-2)^2 \leq 0 \Rightarrow u = v = t = 2 \Rightarrow x = y = z = 81.$$

8. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\begin{cases} a \cdot b \geq 7 \\ 2^{a^2} + 2^{b^2} \leq 256 \end{cases}$$

Rezolvare: Din $256 \geq 2^{a^2} + 2^{b^2} \geq 2\sqrt{2^{a^2} \cdot 2^{b^2}} = 2\sqrt{2^{a^2+b^2}} \geq 2\sqrt{2^{2ab}} \geq 2\sqrt{2^{2 \cdot 7}} = 2^8 = 256$. Având egalitate, înseamnă că $2^{a^2} = 2^{b^2} \Rightarrow a^2 = b^2$.

Se obțin soluțiile: $(a; b) \in \{(\sqrt{7}; \sqrt{7}), (-\sqrt{7}; -\sqrt{7})\}$.

Bibliografie:

1. Nicolae Musuroaia și colab. Matematica de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, clasa a X-a, Ed. Paralela 45, Pitești, 2016.
2. Andrei Gh. Și colab. Probleme de algebră pentru concursuri școlare, clasa a X-a, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1999.
3. Andronache și colab. Olimpiada de matematică 2006-2010. Etapele județene și naționale, Ed. Sigma, 2010

ȘTIATI CĂ...?

..... matematicianul român **Mihail Ghermănescu** a dat dovadă de o activitate multilaterală în mai multe domenii, pe lângă matematică fiind absolvent de canto și de operă la Conservatorul de muzică din București. În 1928, debuta la Opera Română în opera „Rigoletto”, și apoi a avut rolul marelui preot din opera „Aida”.

Două soluții ale unei probleme

Dorina Goiceanu , Craiova
Sebastian Ilinca , Pârșcoveni, Olt

În cele ce urmează vom prezenta două demonstrații ale unei inegalități apărute în GM 6-7-8/2024. Prima demonstrație se bazează pe inegalitatea mediilor iar a doua soluție pe considerații geometrice .

Enunțul este următorul :

E16950 Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz(x + y + z) \geq 4$. **Demonstrați că** $(x + y)(y + z)(z + x) > 8$.

Liliana Niculescu , Tg. Mureș

Soluția 1 : Folosim inegalitatea mediilor

$$(x + y)(x + z) = x(x + y + z) + yz \geq \frac{4}{yz} + yz \geq 2\sqrt{\frac{4}{yz} \cdot yz} \geq 4.$$

Analog avem $(x + y)(y + z) \geq 4$ și $(x + z)(y + z) \geq 4$.

Prin înmulțire se obține $(x + y)^2(x + z)^2(y + z)^2 \geq 64$ de unde $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8$.

Egalitatea ar putea avea loc dacă $xy = 2, xz = 2, yz = 2$ care duce la $x = y = z = \sqrt{2}$ și atunci

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} > 8.$$

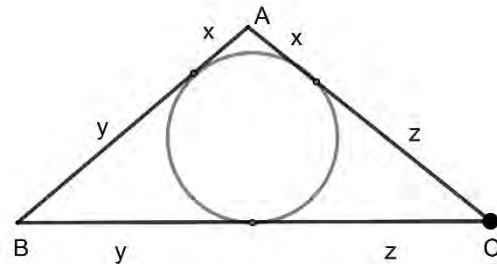
Inegalitatea este așadar strictă.

Soluția 2 (geometrică):

Din $x + y = c, y + z = a, z + x = b$

$$p = \frac{a + b + c}{2}, \text{ rezultă } x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = p,$$

$$x = p - a = \frac{-a + b + c}{2}, y = p - b, z = p - c$$



Inegalitatea din enunț devine $p(p - a)(p - b)(p - c) \geq 4$ și din Heron $S^2 \geq 4 \Rightarrow S \geq 2$ sau

$$\frac{abc}{4R} \geq 2 \Rightarrow abc \geq 8R$$

Avem de arătat că $abc > 8$. Vom arăta că $R > 1$ și de aici cerința.

Presupunem prin absurd că $R \leq 1$. Cum triunghiul ABC este înscris în cercul de rază $R \leq 1$, maximul ariei sale este când triunghiul este echilateral și atunci $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$. Cum

$$S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} < 2. S \text{ nu poate fi mai mare sau egal cu } 2 \text{ și se contrazice ipoteza .}$$

Așadar , $R > 1$ și $abc \geq 8R > 8$. În încheiere demonstrăm proprietatea folosită :

Dintre toate triunghiurile înscrise în același cer , triunghiul echilateral are aria cea mai mare.

Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O și rază R

Cazul 1 : O este în interiorul triunghiului sau pe una din laturi .

Fie $x = m(\sphericalangle AOB), y = m(\sphericalangle BOC), z = m(\sphericalangle AOC)$. $A_{ABC} = A_{AOB} + A_{BOC} + A_{AOC}$. Cu inegalitatea lui

$$\text{Jensen avem } \frac{R^2}{2}(\sin x + \sin y + \sin z) \leq \frac{R^2}{2} \cdot 3 \sin \frac{x + y + z}{3} = \frac{3R^2}{2} \sin 120^\circ = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4} \text{ cu egalitate când}$$

$x = y = z = 120^\circ$ adică pentru triunghiul echilateral.

Cazul 2 : O este în exteriorul triunghiului. Putem presupune că $AC \leq AB \leq BC$

Fie $x = m(\sphericalangle AOB)$, $y = m(\sphericalangle BOC)$.

$$A_{ABC} = A_{AOB} + A_{AOC} - A_{BOC} = \frac{R^2}{2} \sin x + \frac{R^2}{2} \cdot \sin y - \frac{R^2}{2} \cdot \sin(x+y) < R^2 \frac{\sin x + \sin y}{2} < \frac{R^2}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2} <$$

$$R^2 < \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$$

Bibliografie :

Gazeta matematică nr.6-7-8/2024

Ionuț Ivănescu , Probleme de extrem în geometrie, Ed. Grapho Bacău 2012

În legătură cu Problema L:1054 din Sclipirea Mintii Nr. 32/2023

de Marin Chirciu, Pitești

Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{y} = 2 \\ y + \sqrt[3]{z} = 2 \\ z + \sqrt[3]{x} = 2 \end{cases}$$

Matei Monica, Gigi Zaharia, Craiova

Soluție. Adunând ecuațiile obținem:

$$6 = x + y + z + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} = a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{(a+b+c)^3}{9} + a + b + c = \frac{t^3}{9} + t.$$

$$\text{Rezulta: } \frac{t^3}{9} + t \leq 6 \Leftrightarrow t^3 + 9t - 54 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 3t + 18) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} \leq 3,$$

cu egalitate pentru $x = y = z = 1$. Reciproc $x = y = z = 1$ verifica sistemul.

Deducem ca $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ este soluția unică a sistemului.

Remarca. Problema se poate dezvolta.

Fie $\lambda \geq 0$ fixat. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x + \lambda \sqrt[3]{y} = \lambda + 1 \\ y + \lambda \sqrt[3]{z} = \lambda + 1 \\ z + \lambda \sqrt[3]{x} = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{Marin Chirciu}$$

Soluție. Adunând ecuațiile obținem:

$$3\lambda + 3 = x + y + z + \lambda(\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y}) = a^3 + b^3 + c^3 + \lambda(a + b + c) \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{(a+b+c)^3}{9} + \lambda(a+b+c) = \frac{t^3}{9} + \lambda t.$$

Rezulta:

$$\frac{t^3}{9} + \lambda t \leq 3\lambda + 3 \Leftrightarrow t^3 + 9\lambda t - 3(\lambda + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 3t + 9\lambda + 3) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} \leq 3$, cu egalitate pentru $x = y = z = 1$. Reciproc $x = y = z = 1$ verifică sistemul.

Deducem ca $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ este soluția unică a sistemului.

Remarca. Problema se poate dezvolta.

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $\lambda \geq 0$ fixate. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x + \lambda \sqrt[n]{y} = \lambda + 1 \\ y + \lambda \sqrt[n]{z} = \lambda + 1 \\ z + \lambda \sqrt[n]{x} = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{Marin Chirciu}$$

Soluție.

Adunând ecuațiile obținem:

$$3\lambda + 3 = x + y + z + \lambda(\sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{z} + \sqrt[n]{x}) = a^n + b^n + c^n + \lambda(a + b + c) \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{(a + b + c)^n}{3^{n-1}} + \lambda(a + b + c) =$$

$$= \frac{t^n}{3^{n-1}} + \lambda t. \text{ Rezulta: } \frac{t^n}{3^{n-1}} + \lambda t \leq 3\lambda + 3 \Leftrightarrow t^n + 3^{n-1}\lambda t - 3^n(\lambda + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(t - 3)(t^{n-1} + 3t^{n-2} + 9t^{n-3} + \dots + 3^{n-3}t^2 + 3^{n-2}t + 3^{n-1}(\lambda + 1)) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} \leq 3, \text{ cu egalitate pentru } x = y = z = 1. \text{ Reciproc } x = y = z = 1 \text{ verifica sistemul.}$$

Deducem ca $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ este soluția unică a sistemului.

Simedianele unui triunghi

de Ion Pătrașcu, Sebastian Ilinca, Olt

În acest articol prezentăm într-o formă unitară proprietăți ale simedianelor unui triunghi. Cunoașterea acestora facilitează rezolvarea unui număr mare de probleme ce au legătură aparentă sau ascunsă cu aceste noțiuni.

Definiția 1 Se numește simediană a unui triunghi simetrica unei mediane față de bisectoarea adiacentă.

Observația 1 În figura 1 dreapta AS este simediană și AM mediană. Din definiție rezultă că $\sphericalangle BAS \equiv \sphericalangle CAM$. Se spune despre (AS) și (AM) că sunt ceviane izogonale. Deci simediană este izogonală mediane și reciproc.

Teorema 1 (E. GREBE)

Simediană a unui triunghi este locul geometric al punctelor care au distanțele la laturile adiacente proporționale cu lungimile acestor laturi.

Demonstrație Fie X un punct oarecare pe simediană AS , X_1, X_2 proiecțiile lui X pe AB , respectiv AC , M mijlocul laturii BC și M_1, M_2 proiecțiile lui M pe AB respectiv AC (vezi fig. 2). Deoarece $\Delta AXX_1 \sim \Delta AMM_2$ și $\Delta AXX_2 \sim \Delta AMM_1$ rezultă că patrulateralele AX_1XX_2 și AM_2MM_1 sunt asemenea, deci

$$\frac{XX_1}{MM_2} = \frac{XX_2}{MM_1} \quad (1). \text{ Pe de altă parte } \text{Aria}_{\Delta ABM} = \text{Aria}_{\Delta AMC}$$

$$\text{deci } AB \cdot MM_1 = AC \cdot MM_2 \quad (2). \text{ Din (1) și (2) obținem } \frac{XX_1}{AB} = \frac{XX_2}{AC} \quad (3).$$

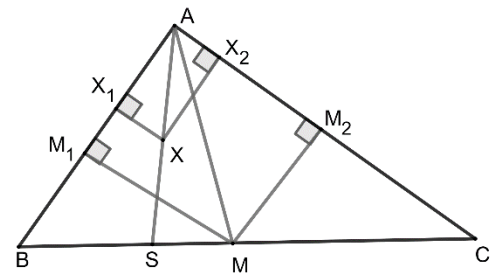
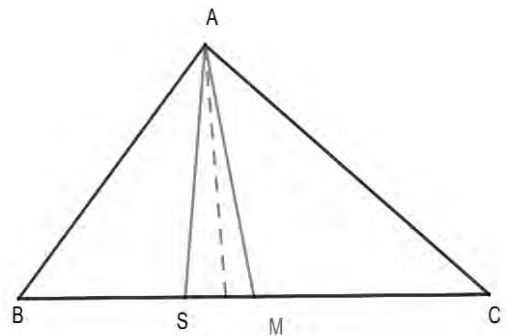


Fig.2

Reciproc . Fie X un punct din interiorul triunghiului ABC cu proprietatea exprimată de relația (3). $AX \cap BC = \{S\}$. Punctul M este mijlocul lui BC , iar MM_1, MM_2 sunt distanțele lui M la AB respectiv AC . Triunghiurile ABM și ACM fiind echivalente este adevărată relația (2).

Din relațiile (2) și (3) obținem relația (1). Această relație și faptul că patrulateralele

AX_1XX_2 și AM_2MM_1 au laturile adiacente comune și laturi opuse paralele implică

$AX_1XX_2 \sim AM_2MM_1$ deci $\Delta AX_1X \sim \Delta AM_2M$ cu consecința: $\sphericalangle X_1AX \equiv \sphericalangle M_2AM$ deci AX este izogonală medianei AM , prin urmare AS este simediană.

Consecința 1. Simedianele unui triunghi sunt concurente.

Consecința 2. O simediană a unui triunghi în parte latura opusă în segmente proporționale cu pătratele laturilor adiacente și reciproc.

Observație 2. Punctul de concurență a simedianelor se numește centrul simedian al triunghiului sau **punctul lui Lemoine**.

Definiția 2. În triunghiul ABC cu $AB \neq AC$ dreapta DE cu $D \in AB$ și $E \in AC$ se numește antiparalelă cu BC dacă $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$.

Teorema 2(S. Lhuillier). Simediană a unui triunghi este locul geometric al mijloacelor antiparalelelor la latura opusă simedianei.

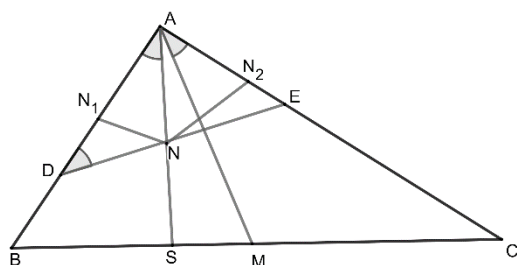


Fig.3

Demonstrație

Fie DE antiparalela la BC , AS simediană și $AS \cap DE = \{N\}$ (vezi figura 3).

Avem că $\Delta AND \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{DN}{CM} = \frac{AN}{AM}$ (1). De

asemenea $\Delta ANE \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{NE}{MB} = \frac{AN}{AM}$ (2). Din

relațiile (1) și (2) deoarece $BM = NF$ obținem

că $DN = NE$.

Reciproc. Fie N un punct de pe simediană AS și DE un segment care conține punctul N și acesta este mijlocul său ($D \in AB, E \in AC$). Notăm cu N_1 și N_2 proiecțiile lui N pe AB respectiv AC .

Avem conform Teoremei 1 că $\frac{NN_1}{AB} = \frac{NN_2}{AC}$. Pe de altă parte triunghiurile ADN și ANE sunt

echilaterale deci $AD \cdot NN_1 = AE \cdot NN_2$. Din această relație obținem că $AD \cdot AB = AE \cdot AC$, deci

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ relație ce conduce la asemănarea triunghiurilor ADE și ACB cu consecința

$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$, deci DE antiparalela la BC .

Definiția 3. Se numește simediană exterioară a unui vârf al unui triunghi locul geometric al punctelor din exteriorul triunghiului ale căror distanțe la laturile adiacente sunt proporționale cu lungimile acelor laturi.

Teorema 3. Tangenta în A la centrul cercului circumscris triunghiului ABC este simediană exterioară a vârfului A al triunghiului.

Demonstrație:

Fie M un punct pe tangenta AT la centrul cercului circumscris triunghiului $ABC, T \in (BC)$ (vezi figura 4).

Notăm cu M_1 și M_2 proiecțiile lui M la laturile AB respectiv AC . Patrulaterul MM_1AM_2 este evident inscripabil deci

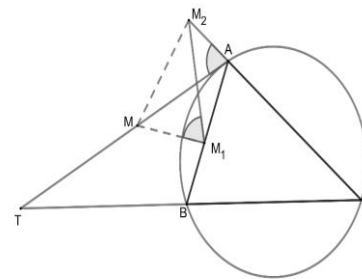


Fig.4

$$\sphericalangle MM_1M_2 \equiv \sphericalangle MAM_2 \quad (1), \quad \sphericalangle MM_2M_1 \equiv \sphericalangle MAM_1 \quad (2) \text{ Dar}$$

$$\sphericalangle MAM_2 \equiv \sphericalangle ABC \quad (3), \quad \sphericalangle MAM_1 \equiv \sphericalangle ACB \quad (4)$$

Obținem că $\sphericalangle MM_1M_2 \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle MM_2M_1 \equiv \sphericalangle ACB$.

Aceste ultime relații conduc la concluzia $\Delta MM_1M_2 \equiv \Delta ABC$ deci

$$\frac{MM_1}{AB} = \frac{MM_2}{AC} \quad (5).$$

Reciproc .

Dacă M un punct din exteriorul ΔABC pentru care are loc relația (5) ($M_1 \in (AB), M_2 \in AC$) atunci din faptul că patrulaterul MM_1AM_2 este inscripabil rezultă că $\sphericalangle M_1MM_2 \equiv \sphericalangle BAC$. Această relație și relația (5) conduc la $\Delta MM_1M_2 \sim \Delta ABC$. De aici $\sphericalangle MM_2M_1 \equiv \sphericalangle ACB$. Dar $\sphericalangle MM_2M_1 \equiv \sphericalangle MAM_1$ prin urmare $\sphericalangle MAM_1 \equiv \sphericalangle ACB$ concluzie care este echivalentă cu AM tangentă în A la cercul circumscris triunghiului ABC .

Consecința 1

Tangenta într-un vârf al triunghiului la cercul circumscris determină pe latura opusă segmente cu lungimile proporționale cu pătratele laturilor adiacente .

Consecința 2

Fasciculul de vârf A și bază T, S, B, C unde T este intersecția tangentei în A la cercul circumscris triunghiului ABC cu latura BC iar S este piciorul simedianei din A , este armonic. (Cu alte cuvinte simediana exterioară din A și cea interioară sunt raze conjugate armonic față de AB și AC)

Remarca 1 Consecința 1 și reciproca Teoremei lui Menelaos conduc la:

Teorema 4 (CARNOT)

Intersecțiile tangentelor în vârfurile triunghiului ABC cu laturile opuse sunt puncte coliniare .

Observația 3

Dreapta definită în Propoziția 1 se mai numește **dreapta lui Lemoine** și ea este polara centrului simedian .

Remarca 2

Ținând seama de Consecința 2 de mai sus și de faptul că simediana exterioară din vârful A al triunghiului ABC este antiparalelă cu BC precum și de proprietăți ale fascicului armonic (vezi [4]) se obține Teorema 2 (Lhuillier).

Teorema 5

Într-un triunghi două simedianele exterioare și simediana celuilalt unghi sunt concurente .

Demonstrație

Fie în triunghiul ABC simedianele exterioare

$BU, U \in AC, CV, V \in AB$ și simediana $AS, S \in BC$. Avem că

$$\frac{BS}{SC} = \left(\frac{c}{b}\right)^2; \frac{VC}{VA} = \left(\frac{a}{c}\right)^2; \frac{VA}{VB} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Teorema lui Ceva implică concurența dreptelor AS, BU, CV .

În figura 5 am notat cu T_A punctul de concurență a simedianelor exterioare din B și C cu simediana din A .

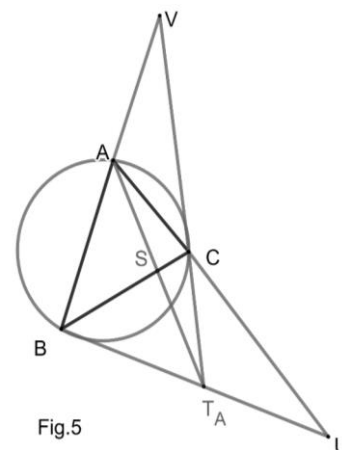


Fig.5

BIBLIOGRAFIE

1. T.Lalescu , Geometria triunghiului, Ed. Tineretului, București, 1957
2. C.Mihalescu, Geometria elementelor remarcabile, Editura Tehnica, București, 1957
3. N.N. Mihaileanu , Complemente de geometrie sintetica ,Editura Didactica si Pedagogica , București 1969
4. I.Patrascu si D. Grigorie, Aplicații ale proprietăților fasciculelor armonice, Gazeta Matematica , seria B , Anul CXXXVIII, nr.4/2023

“Inteligența nu înseamnă să nu faci greșeli.
ci să vezi repede cum poți să le îndrești.”

Bertolt Brecht
(1898- 1956)



3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1257. O grădină dreptunghiulară de mărimi 100m și 50 m este cultivată cu trei culturi reprezentând 25%, 35% , respectiv 40% din suprafața ei. Poate avea parcela mai mare 2024 m² ? În câte moduri se pot roti cele trei culturi ?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Nu, deoarece 40% din 5000 = 2000m² ≠ 2024m², unde aria grădinii este 5000m².
6 variante de rotație a culturilor.

G:1258. Un balaur are 2023 de capete. Un cavaler cu puteri demne de un joc pe calculator reușește să taie cu o lovitură a sabiei 21, 24 sau 25 de capete. În fiecare caz, balaurului îi cresc la loc 18, 27, respectiv 23 de capete. Este posibil ca balaurul să fie omorât de către cavaler (prin doborârea tuturor capetelor).

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare: Observăm că 2023 dă restul 1 la împărțirea prin 3, deci 2023 ∈ M₃ + 1.

Analizând perechile (21; 18); (24; 27) și (25; 23) deducem că după fiecare lovitură de sabie efectuată de cavaler, numărul de capete ale balaurului scade cu 3 sau crește cu 3.

Indiferent câte operațiuni ar face cavalerul, numărul de capete ale balaurului rămâne de forma M₃ + 1, deci nu poate fi omorât.

G:1259. Arătați că niciunul dintre numerele 2² + 1, 2⁴ + 1, 2⁶ + 1, ..., 2²ⁿ + 1 unde n ∈ ℕ* nu este pătrat perfect.

Alina Tigae, Cornelia Neacșu, Craiova

Rezolvare:

2^{2k} + 1 = 4^k + 1 = (3 + 1)^k + 1 = M₃ + 1 + 1 = M₃ + 2 care nu este un pătrat perfect..

G:1260. Fie n ≥ 2, n ∈ ℕ. Arătați că dacă unul din numerele 4ⁿ - 1 sau 4ⁿ + 1 este prim , celălalt este număr compus.

Olivia Bercea, Craiova

Rezolvare: Numărul 4ⁿ - 1 este divizibil cu 3, și pentru n > 1 avem 4ⁿ - 1 > 3. Rezultă că 4ⁿ - 1 este număr compus.

G:1261. Câte numere naturale \overline{abc} există știind că $\overline{abc} - \overline{ac}$ este un pătrat perfect?

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

Rezolvare: $\overline{abc} - \overline{ac} = 100a + 10b + c - 10a - c = 90a + 10b = 10(9a + b)$. Dacă rezultatul este pătrat perfect, atunci 9a + b poate nu poate fi decât 10, sau 40 sau 90.

$$9a + b = 10 \Rightarrow a = 1, b = 1; \overline{abc} = \overline{11c} \quad 9a + b = 40 \Rightarrow a = 4, b = 4; \overline{abc} = \overline{44c}$$

$$9a + b = 90 \Rightarrow a = 9, b = 9; \overline{abc} = \overline{99c}.$$

Cum cifra c poate lua 10 valori, înseamnă că există 30 de astfel de numere.

G:1262. Determinați numerele naturale \overline{xy} astfel încât $x^2 + 4x = 5y$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: $x(x+4) = 5y \Rightarrow (x; y) \in \{(1;1), (5;9)\} \Rightarrow \overline{xy} \in \{11; 59\}$.

G:1263. Determinați numărul a de forma $a = \underbrace{99\dots988}_{n} \underbrace{000\dots037}_{n}$ care are suma cifrelor 2024 ($n \geq 3$)

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Numărul a , cu $2n$ cifre $a = 10^n \cdot \underbrace{99\dots988}_n + 37$ are suma cifrelor

$S = 9(n-2) + 8 \cdot 2 + 3 + 7 = 9n + 8$. Dacă $S = 2024$ atunci $9n + 8 = 2024$ și se obține $n = 224$.

Deci numărul cerut cu 448 cifre este $a = \underbrace{99\dots988}_{222} \underbrace{000\dots037}_{222}$.

G:1264. Să se arate că:

- Numărul 50 se scrie ca suma a trei pătrate perfecte.
- Numărul 200 poate fi scris ca sumă a patru pătrate perfecte.
- Numărul 10000 se poate scrie ca suma a douăsprezece pătrate perfecte.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $50 = 25 + 25 = 9 + 16 + 16 = 3^2 + 4^2 + 5^2$;

b) $200 = 4 \cdot 50 = 2^2 \cdot (3^2 + 4^2 + 5^2) = 6^2 + 64 + 100 = 6^2 + 2^2 + 4^2 + 12^2$;

c) $1000 = 50 \cdot 200 = (3^2 + 4^2 + 5^2) \cdot (2^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2)$, după care se desfac parantezele.

■ Clasa a VI-a

G:1265. Aflați x din proporția $\frac{A}{2} = \frac{x}{45}$, unde $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{1935}$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{45} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{44}{45} \Rightarrow x = 11$.

G:1266. Se consideră două aliaje de aur și cupru. Unul are titlul 0,750 și altul are titlul 0,333. Ce cantitate din fiecare aliaj trebuie amestecată pentru a obține 1 kg de aliaj cu titlul de 0,583 ?

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Notăm cu x cantitatea de aliaj cu titlul de 0,750, atunci $1-x$ devine cantitatea de aliaj cu titlul de 0,333. Avem: $0,750x + 0,333 \cdot (1-x) = 1 \cdot 0,583 \Rightarrow x \approx 0,59952$.

G:1267. a) Să se scrie fracția $\frac{2023}{2024}$ ca sumă de cel puțin 2023 fracții distincte.

b) Să se scrie $2024 = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n}$ cu $n \geq 2024$ iar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

c) Să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots - \frac{2024}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2024 \cdot 2025} < \frac{1}{2^{2024}}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

a) Din $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$

$$b) \text{ Din a) } \frac{2024}{2025} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2024 &= \frac{2025}{1 \cdot 2} + \frac{2025}{2 \cdot 3} + \frac{2025}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2025}{2024 \cdot 2025} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} = \\ &= \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{2}{2^2 \cdot 3} + \frac{3}{3^2 \cdot 4} + \dots + \frac{2024}{2024^2 \cdot 2025} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{2024}{a_{2024}}. \end{aligned}$$

c) Notăm cu A partea stângă a inegalității.

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots - \frac{2024}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2024 \cdot 2025} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots =$$

Și așa mai departe; se va ajunge la

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024} \left(1 - \frac{2024}{2025}\right) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024 \cdot 2025} < \frac{1}{2^{2024}}, \text{ deoarece se înmulțesc}$$

$$\text{inegalitățile: } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2025} < \frac{1}{2}, \text{ adică } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024 \cdot 2025} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2024}.$$

G:1268. Determinați numerele prime p și q astfel încât ecuația $x^5 - px^4 + q = 0$ să admită rădăcina întreagă.

Simona Chiriță, Gigi Zaharia, Craiova

Rezolvare: Fie $x_0 \in \mathbb{Z}$. Atunci, $q = x_0^4(p - x_0)$. Deoarece q este prim rezultă $x_0 = 1$ sau $x_0 = -1$.

Dacă $x_0 = 1 \Rightarrow -1 - p + q = 0 \Rightarrow q = p + 1$. Deoarece singurele numere prime consecutive sunt 2 și 3, rezultă că $p = 2$ și $q = 3$. Analog pentru $x_0 = -1$.

G:1269. a) Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $n+2024$ divide $n!$.

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $n+2024$ nu divide $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, 0! = 1.$$

Mihaela Dăianu, Simona Chiriță, Craiova

Rezolvare:

a) Luăm $n = 2k, k \geq 1012$, $n + 2024 = 2(k + 1012)$. Atunci $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k + 1012) \cdot \dots \cdot (2k)$ care se divide cu $2(k + 1012) = n$.

b) Se cunoaște că există o infinitate de numere prime. Fie n număr natural astfel încât $n + 2024 = p$, p număr prim. Atunci luăm $n = p - 2024$ cu p număr prim mai mare decât 2024. Avem $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 2024)$ care nu se divide cu $n + 2024 = p$.

G:1270. Se consideră numere naturale a, b și c , unde $a = 15n + 24$, $b = 3n + 5$, $c = 12n + 19$. Să se arate că $[b, a] - [b, c]$ este un pătrat perfect. Prin $[x, y]$ am notat cel mai mic multiplu comun al lui x și y .

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

Rezolvare:

Se utilizează faptul că dacă două numere naturale sunt prime între ele, cel mai mic multiplu comun al lor este produsul acestora. Arătăm că numerele b și c , b și a sunt prime între ele.

Fie d un divizor comun al lui b și c : $d \mid (3n + 5)$ și $d \mid (12n + 19) \Rightarrow d \mid 4(3n + 5) - (12n + 19) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$.

Fie d un divizor comun al lui b și a : $d \mid (3n + 5)$ și $d \mid (15n + 24) \Rightarrow d \mid 5(3n + 5) - (15n + 24) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$.

Așadar, numerele b și c , respectiv b și a sunt prime între ele pentru orice număr natural n .

Ținând cont că $b = a - c$, iar $a - c > 0$, avem: $[b, a] - [b, c] = ba - bc = b(a - c) = b \cdot b = b^2$.

G:1271. a) Arătați că numărul $n = 7778^2 - 2223^2$ este divizibil cu 73.
b) Aflați numărul divizorilor naturali proprii ai numărului n .

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: $n = 7778^2 - 2223^2 = (7778 - 2223) \cdot (7778 + 2223) = 5555 \cdot 10001 = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 73 \cdot 137 \cdot 73$;

b) Toți factorii 5, 11, 73, 101, 137 ai numărului n sunt numere prime și atunci numărul tuturor divizorilor naturali ai lui n este $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2^5 = 32$. Cum 1 și n sunt divizorii improprii, atunci numărul divizorilor proprii este $32 - 2 = 30$.

G:1272. Știind că numărul $2024^n + 1012$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se poate scrie ca suma a 2024 numere naturale consecutive, aflați ultimul termen al sumei.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Fie $x \in \mathbb{N}^*$ primul termen al sumei, deci $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2023) = 2024^n + 1012$

$2024x = 2024(2024^{n-1} - 1011) \Rightarrow x = 2024^{n-1} - 1011$. Atunci, ultimul termen al sumei este egal cu $x + 2023 = 2024^{n-1} + 1012$.

▪ Clasa a VII-a

G:1273. Determinați numerele naturale \overline{ab} știind că $ab^2 + 4ab - 3b^2 + 4a - 12b = 48$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: $ab^2 - 3b^2 + 4ab - 12b + 4a = 36 + 12 \Leftrightarrow b^2(a-3) + 4b(a-3) + 4(a-3) = 36 \Rightarrow (a-3) \cdot (b+2)^2 = 36 \Rightarrow \overline{ab} \in \{44; 71\}$.

G:1274. Știind că $1 < y < 2$ și $x - y = 1$ să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \sqrt{x^2 - 4y} + \sqrt{y^2 - 2x - 2y + 6}.$$

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Din $x = y + 1 \Rightarrow E = \sqrt{(1+y)^2 - 4y} + \sqrt{y^2 - 2(1+y) - 2y + 6} = \sqrt{y^2 - 2y + 1} + \sqrt{y^2 - 4y + 4} = |y-1| + |y-2| =$

Cum $y > 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$ și $y < 2 \Rightarrow |y-2| = 2-y$, atunci $E = y-1 - y+2 = 1$.

G:1275. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - y^2 + \sqrt{x - y^2 - 9} \leq 9$.

Delia Popescu, Ana Dumitru, Craiova

Rezolvare: Relația din enunț se scrie $x - y^2 - 9 + \sqrt{x - y^2 - 9} \leq 0$.

Cum $x - y^2 - 9 \geq 0$ și $y^2 \geq 0$, $\sqrt{x - y^2 - 9} \geq 0 \Rightarrow x - y^2 - 9 = 0, y^2 = 0$ de unde $y = 0$ și $x = 9$.

G:1276. Demonstrați fără a extrage rădăcina pătrată, inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \dots + \frac{\sqrt{2022 \cdot 2023}}{4045} < 1011.$$

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare: Facem pentru început următoarea remarcă: pentru $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ avem (

$$\underbrace{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}_{\neq 0} = a + b - 2\sqrt{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a \cdot b}}{a + b} < \frac{1}{2}$$

(Inegalitatea mediilor)

Înlocuind $b = a + 1$ (pentru a ajunge la formele fracțiilor din problema noastră, obținem

$$\frac{\sqrt{a(a+1)}}{2a+1} < \frac{1}{2}. \quad \text{Dând pe rând lui } a \text{ valorile } 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} < \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{5} < \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{7} < \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{\sqrt{2022 \cdot 2023}}{4045} < \frac{1}{2}. \text{ Adunând inegalitățile}$$

$$S < \frac{1}{2} \cdot 2022 = 1011$$

obținem

G:1277. a) Aflați numerele reale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = n$;

b) Aflați numerele reale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n\sqrt{n}$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = n^2$;

Ioana Genoveva, Monica Matei, Craiova

Rezolvare:

$$a) (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \dots + (x_n - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1.$$

b)

$$(x_1 - \sqrt{n})^2 + (x_2 - \sqrt{n})^2 + \dots + (x_n - \sqrt{n})^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 - 2\sqrt{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n(\sqrt{n})^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \sqrt{n}.$$

G:1278. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+1011} + \sqrt{y+1011} = \sqrt{2x+2y+4044}$.

Ionel Tudor - Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: C.E: $x \geq -1011$; $y \geq -1011$; Se folosește inegalitatea dintre media aritmetică și cea

$$\text{pătratică } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \text{ pentru numerele } a = \sqrt{x+1011} \text{ și } b = \sqrt{y+1011}.$$

Obținem $\sqrt{x+1011} + \sqrt{y+1011} \leq \sqrt{2(x+1011+y+1011)} \Rightarrow$ avem egalitate pentru $a = b$ adică $\sqrt{x+1011} = \sqrt{y+1011} \Rightarrow x = y = \alpha \geq -1011$.

Mulțimea soluțiilor este $S = \{(\alpha; \alpha) | \alpha \geq -1011\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

G:1279. Se consideră în \mathbb{R} ecuația:

$$|1012x-1| + |2-1012x| + |1012x-3| + |4-1012x| + \dots + |2022-1012x| + |1012x-2023| = 2024(1012x-2024)$$

Arătați că soluția ecuației este număr natural pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Cum membrul stâng este o sumă de numere pozitive, atunci se impune condiția ca și membrul drept să fie pozitiv. Rezultă $x \geq 2$.

Avem: $x \geq 2 > \frac{2023}{1012} > \frac{2022}{1012} > \dots > \frac{2}{1012} > \frac{1}{1012}$ (*). Ținând cont de faptul că $|-a| = |a|$, pentru orice număr real a , avem următoarele:

$$|2-1012x| = |1012x-2|, \quad |4-1012x| = |1012x-4|, \quad \dots, \quad |2022-1012x| = |1012x-2022|.$$

$$\sum_{k=1}^{2023} |1012x-k| = 2024 \cdot (1012x-2024).$$

Ținând seama de inegalitățile (*), avem $|1012x-k| = 1012x-k \geq 0, \forall k \in \{1; 2; 3; \dots; 2023\}$.

După explicitarea modulelor din cei 2023 termeni ai sumei din membrul stâng ecuația devine $2023 \cdot 1012x - (1+2+\dots+2023) = 1012 \cdot 2024x - 2024^2$. Rezultă $x = 45^2 = 2025$.

G:1280. În triunghiul ABC ducem $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $NP \parallel AB$ ($P \in BC$), $PQ \parallel AC$ ($Q \in MN$), Raportul $\frac{QN}{BC} = \frac{1}{4}$. Aflați $\frac{MN}{BC}$. Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $QNCP$ paralelogram, $MNPB$ paralelogram, deci

$$QN = PC, BP = MN \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{3}{4}.$$

G:1281. Arătați că în triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ avem

$$\left(\frac{\sin B}{1 - \sin B} + \frac{1}{1 + \sin B} + \frac{1 + \sin^2 B}{1 - \sin^2 B} \right) \cdot \frac{(1 + \sin B)(1 - \sin B)}{2} - 1 + \cos^2 B = 1.$$

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

$$\frac{\sin B(1 + \sin B) + 1 - \sin B + 1 + \sin^2 B}{(1 - \sin B) \cdot (1 + \sin B)} \cdot \frac{(1 + \sin B)(1 - \sin B)}{2} - 1 + \cos^2 B = \frac{2 + 2\sin^2 B}{2} - 1 + \cos^2 B = 1$$

G:1282. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c}$.

Ovidiu Țățan, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

$$" \Rightarrow " \quad \Delta ABC \text{ este echilateral} \Rightarrow m_a = m_b = m_c \text{ și } a = b = c \Rightarrow \frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c}.$$

$$" \Leftarrow " \quad \frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c} = k \Rightarrow \frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{c^2} = k^2 \Rightarrow m_a^2 = k^2 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2 = 4 \cdot k^2 \cdot a^2 \Rightarrow 2 \cdot (b^2 + c^2) = (4 \cdot k^2 + 1) \cdot a^2 \quad \text{și analoge.}$$

Adunând membru cu membru următoarele 3 relații:

$$2 \cdot (b^2 + c^2) = (4 \cdot k^2 + 1) \cdot a^2, \quad 2 \cdot (c^2 + a^2) = (4 \cdot k^2 + 1) \cdot b^2, \quad 2 \cdot (a^2 + b^2) = (4 \cdot k^2 + 1) \cdot c^2$$

obținem

$$4 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = (4 \cdot k^2 + 1) \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow 4 \cdot k^2 + 1 = 4 \Rightarrow 2 \cdot (b^2 + c^2) = 4 \cdot a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 2 \cdot a^2$$

și analoge.

Din $b^2 + c^2 = 2 \cdot a^2$ și $a^2 + b^2 = 2 \cdot c^2$ rezultă $a = c$ și apoi $b = a$, adică $a = b = c$ și deci triunghiul ABC este echilateral.

G:1283. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , apoi se construiesc pătratele $ABGF$ și $BCDE$ în exteriorul triunghiului. Știind că perimetrul triunghiului ABE este egal cu perimetrul triunghiului GBE , să se afle $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB)$. Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădalina Buliga, București

Rezolvare: Cum cele două triunghiuri au perimetre egale și au și câte două laturi congruente (laturi ale celor două pătrate), atunci avem și $AE = GE$, deci triunghiurile sunt congruente (LLL). În acest caz, $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle GBE)$. Dar $m(\sphericalangle ABE) = 90^\circ + m(\sphericalangle B)$, iar $m(\sphericalangle GBE) = 360^\circ - 180^\circ - m(\sphericalangle B)$. După calcule se găsește $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$. Atunci, $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

▪ Clasa a VIII-a

G:1284. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $22 \cdot \sqrt{x+121} + 198 \cdot \sqrt{81-x} + 10x = 2024$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: $2 \cdot \sqrt{11^2(x+121)} + 2 \cdot 11 \sqrt{9^2(81-x)} + 10x = 2024 \Rightarrow$

$$2 \cdot \sqrt{11^2(x+121)} + 2 \cdot 11 \sqrt{9^2(81-x)} + 10x \leq 2 \cdot \frac{121+x+121}{2} + 2 \cdot 11 \cdot \frac{81+81-x}{2} + 10x =$$

$$242 + x + 11 \cdot 162 - 11x + 10x = 2024.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă $x+11=11$, și $81=81-x$ adică $x=0$.

$$\begin{cases} xy = 2x - y + 2 \\ yz = 2y - z + 2 \\ zx = 2z - x + 2 \end{cases}$$

G:1285. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul

Lavinia Trincu, Craiova

Rezolvare: Din prima ecuație $y(x+1) = 2(x+1) \Rightarrow (x+1)(y-2) = 0$.

Din a doua ecuație obținem $(y+1)(z-2) = 0$. Din a treia ecuație obținem $(z+1)(x-2) = 0$.

Dacă $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ și $z=-1, y=-1$. Dacă $y=2$ și $z=2, x=2$.

Așadar $x = y = z \in \{-1, 2\}$

G:1286. Să se determine distanța de la graficul funcției liniare care trece prin punctele $A(-2;-3)$ și $B(1;-2)$ la originea axelor de coordonate.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare:

Se determină funcția $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$, deci catetele au lungimile $\frac{7}{3}$ și 7 iar lungimea ipotezei triunghiului dreptunghic este $\frac{7}{3}\sqrt{10}$. Atunci, distanța de la O la ipotenuză este $\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

G:1287. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[x-20] + |x-20| + (x-20) = 15$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Dacă $x < 20 \Rightarrow [x-20] = 15 \Rightarrow 15 \leq x-20 < 16 \Rightarrow x \in [35; 36)$ și nu corespunde.

Dacă $x \geq 20 \Rightarrow [x-20] = 55 - 2x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{-k+55}{2} \Rightarrow$

$x-20 = \frac{-k+15}{2} \Rightarrow k \leq \frac{-k+15}{2} < k+1 \Rightarrow k \in \left(\frac{13}{3}; 5\right] \Rightarrow k = 5$. Obținem $x=25$.

G:1288. Arătați că produsul rădăcinilor reale ale ecuației $\sqrt{3x^4 - 5x^2 + 3} - \sqrt{5}x = 0$, este număr natural.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: C. E. $3x^4 - 5x^2 + 3 \geq 0$ și $x > 0$. $3x^4 - 5x^2 + 3 = (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3})^2 + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

După rezolvarea ecuației $\sqrt{3x^4 - 5x^2 + 3} = \sqrt{5}x \mid (0)^2 \Rightarrow 3x^4 - 5x^2 + 3 = 5x^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Rightarrow$

$y \in \left\{3; \frac{1}{3}\right\}$. Se obțin soluțiile: $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right\}$.

G:1289. Se consideră ecuația $x^3 + x^2 - x - 2 = 0$. Arătați că: Dacă $a \in \mathbb{R}$ este soluție atunci $1 < a < 2$.

Ecuația are o singură soluție reală.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Fie $a \in \mathbb{R}$ soluție a ecuației. Rezultă $a^3 + a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)^2 = 1$.

Dacă $a \leq 1 \Rightarrow (a-1)(a+1)^2 < 0$ iar dacă $a \geq 2 \Rightarrow (a-1)(a+1)^2 > 10$. Așadar, $1 < a < 2$.

Demonstrăm că ecuația are soluție unică presupunând prin absurd că există două soluții a, b cu $1 < a < b < 2$. Atunci, $a^3 + a^2 - a - 2 = 0$ și $b^3 + b^2 - b - 2 = 0$ și prin scăderea celor două relații obținem că $a^2 + ab + b^2 + a + b - 1 = 0$. Dar dacă $a, b) 1 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 + a + b - 1 > 0$, deci nu pot fi două soluții reale. Soluția reală aproximativă este $a \cong 1,2$

G:1290. Se consideră paralelipipedul dreptunghic având dimensiunile a, b și c . Știind că suma ariilor a trei fețe distincte se exprimă prin același număr ca și pătratul diagonalei sale, să se arate că paralelipipedul este cub.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

Rezolvare:

Avem $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; apoi, $d^2 = ab + ac + bc$, deci $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ (1). Înmulțind cu 2 egalitatea (1) și trecând toți termenii în membrul stâng, se obține $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$, sau $a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$. Grupând convenabil termenii, găsim $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$.

Dar, dacă o sumă de mai mulți termeni nenegativi este egală cu zero, atunci fiecare termen al sumei este egal cu zero. Așadar, $a = b = c$, de unde rezultă cerința.

G:1291. Dimensiunile a, b, c ale unui paralelipiped dreptunghic verifică egalitatea

$$\frac{a+b+c}{ac} + \frac{a-b+c}{ab} + \frac{a-b-c}{bc} = \frac{714}{2024}$$

. Dacă volumul paralelipipedului este egal cu $V = 2024 \text{ cm}^3$, calculați diagonala paralelipipedului.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

$$\text{Se folosește următoarea identitate } \left(\frac{a+b+c}{ac} + \frac{a-b+c}{ab} + \frac{a-b-c}{bc} \right)^{-1} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = abc. (*)$$

Demonstrație: Se aduce la același numitor obținându-se $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \right)^{-1} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = abc = V$ -

volumul paralelipipedului. După înlocuire în (*) obținem

$$\left(\frac{714}{2024} \right)^{-1} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 2024 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 714 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{714}.$$

■ Clasa a IX-a

L:1080. Să se rezolve în $[0; \infty)$ ecuația $\left[\sqrt{x} \right] = \frac{x^2 - 48}{2024}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: $\left[\sqrt{x} \right] = k \in \mathbb{Z}_+$, deoarece $\sqrt{x} \geq 0$, atunci, $k \leq \sqrt{x} < k+1$ (*)

$$\text{Din } \frac{x^2 - 48}{2024} = k \Leftrightarrow x^2 = 2024k + 48 \Rightarrow x = \sqrt{2024k + 48}.$$

Din (*) rezultă $k^2 \leq \sqrt{2024k + 48} < (k+1)^2 \Rightarrow k^4 \leq 2024k + 48 < (k+1)^4$, $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Se obține } k = 12 \text{ de unde rezultă că } x = \sqrt{24336} = \sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2} = 156.$$

L:1081. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele reale strict pozitive a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = n. \text{ Arătați că } S = \frac{1}{\sqrt{a_1^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2^3+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n^3+1}} \leq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

elevi, **Bianca Negreț, Horia Mușat**, Craiova

Rezolvare: Din inegalitatea **Cauchy – Buniakowski- Schwarz**, avem:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i^3+1}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i+1} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2-a_i+1} \right). \text{ Cum } \frac{1}{x^2-x+1} \leq \frac{1}{x}, \forall x > 0 \text{ cu egalitate pentru } x = 1 \text{ și}$$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{\frac{1}{x}+1}{4} \text{ deoarece } (x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right) \geq 4 \text{ cu egalitate pentru } x = 1. \text{ Avem,}$$

$$S^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i^3+1}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i+1} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2-a_i+1} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = \frac{n+n}{4} \cdot n = \frac{n^2}{2} \Rightarrow$$

$$S^2 \leq \frac{n^2}{2} \text{ adică } S \leq \frac{n}{\sqrt{2}} \text{ cu egalitate pentru } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1.$$

L:1082. a) Arătați că nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x)f(y) + f(xy) + xy = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x)f(y) + f(xy) + x + y = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Mihaela Stăncele, Monica Stanca, Craiova

Rezolvare: a) Pentru $x = y = 1 \Rightarrow f^2(1) + f(1) + 1 = 0 \Rightarrow f(1) \notin \mathbb{R}$;

b) Pentru $x = y = 1 \Rightarrow f^2(1) + f(1) + 2 = 0 \Rightarrow f(1) \notin \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că nu există funcții cu proprietatea respectivă.

L:1083. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|15a - 20a^3| = 4$ și $a^2 + b^2 = 1$. Calculați $|15b - 20b^3|$.

Alina Tigae, Eugenia Turcu, Craiova

Rezolvare: Fie $a = \sin \alpha, b = \cos \alpha \Rightarrow |15a - 20a^3| = 5 \cdot |3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha| = 5 |\sin 3\alpha| = 4 \Rightarrow$

$$|\sin 3\alpha| = \frac{4}{5} \Rightarrow |\cos 3\alpha| = \frac{3}{5} \Rightarrow |15b - 20b^3| = 5 \cdot |3b - 4b^3| = 5 \cdot |4b^3 - 3b| = 5 \cdot |4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha| = 5 |\cos 3\alpha| = 3$$

L:1084. Rezolvați ecuația $\sqrt{2-x} + \frac{4}{3+\sqrt{2-x}} = 2$.

Alina Tigae, Craiova

Rezolvare: Fie $x \leq 2$. Notăm $y = \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow y + \frac{4}{3+y} = 2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$. Din $y = 1 \Rightarrow x = 3$.

L:1085. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și se consideră numărul real $a \geq 2$. Să se demonstreze că există $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ astfel încât $|f^{2n-1}(x) - f^{2n-1}(y)| \neq a, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare:

Presupunem prin absurd că $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ avem $|f^{2n-1}(x_1) - f^{2n-1}(x_2)| = a$ (*). Rezultă în particular $|f^{2n-1}(0) - f^{2n-1}(x_2)| = a \Rightarrow f^{2n-1}(x_2) = f^{2n-1}(0) \pm a$ deci $f^{2n-1}(1) = f^{2n-1}(0) \pm a$ și $f^{2n-1}(2) = f^{2n-1}(0) \pm a$. Ar rezulta că $f^{2n-1}(1) - f^{2n-1}(2) \in \{2a; 0; -2a\}$ în contradicție cu (*).

L:1086. Dacă $a>0, b>0, c>0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, rezolvați în $(0; \infty)$ sistemul de

$$\text{ecuații: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \\ x^4 + y^4 + z^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4) \\ x^2 y^2 z^2 = \frac{1}{64} [3a^2 b^2 c^2 + 6(a^4 b^2 + b^4 c^2 + c^4 a^2 + a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4) - 4(a^6 + b^6 + c^6)] \end{cases}$$

Aplicație: Determinați x, y, z în cazul $a=2, b=3, c=4$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Pentru un triunghi cu laturile a, b, c se cunosc relațiile între laturile și medianele triunghiului:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \quad m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4), \quad (\text{Relația lui Cesaro}).$$

Efectuând calculele pentru $x = m_a, y = m_b, z = m_c$ constatăm că se verifică ecuațiile sistemului.

Deoarece sistemul este simetric, toate soluțiile sunt cele șase permutări ale tripletului $(m_a; m_b; m_c)$.

$$\text{Pentru aplicație, dacă } a = 2, b = 3, c = 4 \Rightarrow x = m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}, y = m_b = \frac{\sqrt{31}}{2}, z = m_c = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

L:1087. Să se rezolve în \mathbb{R} , ecuația: $\sqrt[3]{\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - x - 3}} = \frac{1+x}{1-x}$. **Ionel Tudor-** Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: C.E: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; 1; \frac{3}{2}\right\}$. Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - x - 3} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \Rightarrow$

$$4x(x^4 - 5) = 0 \Rightarrow S = \{-\sqrt[4]{5}; 0; \sqrt[4]{5}\}.$$

L:1088. Să se determine soluțiile sistemului:
$$\begin{cases} \sqrt{8x+5} + \sqrt{9y+6} = \sqrt{8x+9y+20} \\ \sqrt{12x+19} - \sqrt{3y+15} = \sqrt{12x+9y-6} \end{cases}$$

Bela Kovacs, Satu Mare

Rezolvare: Punem condițiile de existență: Expresiile de sub radicali să fi pozitive, ambii membri ale ecuațiilor să fie deasemea pozitive. Prin ridicări consecutive la pătrat obținem sistemul următor:

$$\begin{cases} (8x+5)(9y+6) = 81 \\ (12x+19)(3y+15) = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24xy + 16x + 15y = 17 \cdot (-3) \\ 36xy + 180x + 57y = 115 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{179 - 312x}{69}. \text{ Obținem:}$$

$$104x^2 - 10x - 21 = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{-21}{52}; \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow y \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{305}{69}\right\}. \text{ Convine doar soluția } (x; y) \in \left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

L:1089. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $\left[\sqrt{2n+1}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] = n+1$

Ovidiu Țățan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Folosind inegalitatea $[a] \leq a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, obținem:

$$\left[\sqrt{2n+1}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] \leq \sqrt{2n+1} + \frac{n+2}{3} \Rightarrow n+1 \leq \sqrt{2n+1} + \frac{n+2}{3} \Rightarrow$$

$$3n+3 \leq \sqrt{2n+1} + n+2 \Rightarrow 2n+1 \leq 3\sqrt{2n+1} \Rightarrow (2n+1)^2 \leq 9 \cdot (2n+1)$$

Cum $2n+1 > 0$ pentru $n \in \mathbb{N}$ se obține $2n+1 \leq 9 \Rightarrow n \leq 4 \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Prin înlocuire în ecuația inițială, verifică doar $0, 1, 2, 4$.

L:1090. Dacă $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci să se arate că

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n a_k^2 - a_{k+1}^2 < \frac{1}{4}; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k+1)^2(k+2)^2} - \frac{2}{(k+2)^2} \right] \cdot \frac{1}{a_k^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2} \right]$$

Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena, Fălticeni

Rezolvare: $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ și

$$\sum_{k=1}^n (a_k^2 - a_{k+1}^2) = a_1^2 - a_{n+1}^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 < \frac{1}{4}.$$

$$\frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k^2} = 1 - \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^2 = 1 - 1 - \frac{1}{k(k+2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k+1)^2(k+2)^2} - \frac{2}{(k+2)^2} \right] \cdot \frac{1}{a_k^2} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k^2} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) =$$

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2} \right).$$

L:1091. Dacă $x, y, z > 0$ și $n \in \mathbf{N}$ atunci $\sum \frac{x^{n+1} + n}{n+x+y+z^{n+1}} \geq 3 \cdot \frac{n+1}{n+3}$.

Marin Chirciu, Pitești

Din inegalitatea mediilor avem $x^{n+1} + n \geq (n+1)x \Leftrightarrow x \leq \frac{x^{n+1} + n}{n+1}$, cu egalitate pentru $x = 1$.

$$\text{Obținem: } \frac{x^{n+1} + n}{n+x+y+z^{n+1}} \geq \frac{x^{n+1} + n}{\frac{x^{n+1} + n}{n+1} + \frac{y^{n+1} + n}{n+1} + (z^{n+1} + n)} = \frac{a}{\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+1} + c} = \frac{(n+1)a}{a+b+(n+1)c},$$

unde $(a, b, c) = (x^{n+1} + n, y^{n+1} + n, z^{n+1} + n)$.

Rămâne să arătăm că:

$$\sum \frac{(n+1)a}{a+b+(n+1)c} \geq 3 \cdot \frac{n+1}{n+3} \Leftrightarrow \sum \frac{a}{a+b+(n+1)c} \geq \frac{3}{n+3}, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Bergstrom:

$$\sum \frac{a}{a+b+(n+1)c} = \sum \frac{a^2}{a^2+ab+(n+1)ac} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum (a^2+ab+(n+1)ac)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + (n+2)\sum bc} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{n+3}$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + (n+2)\sum bc} \geq \frac{3}{n+3} \Leftrightarrow n\sum a^2 \geq n\sum bc$, inegalitate cunoscută.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

L:1092. Pe segmentul (AB) se consideră punctul M , astfel încât: $\frac{AM}{MB} = \frac{k}{k+1}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Dacă $k = 3$, atunci demonstrați că:

$$\text{a) } \frac{AM}{AB} = \frac{3}{7} \quad \text{b) } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{c) } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA} \quad \text{d) } \overrightarrow{OM} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{OA} \quad \text{e).}$$

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{k}{2k+1} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{k+1}{2k+1} \cdot \overrightarrow{r_A}.$$

Demonstrați că:

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

Rezolvare:

a. Dacă $k=3$ atunci: $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{3+1} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{3}{3+4} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$.

b. Dacă $k=3$ atunci: $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$.

$$\Delta AOM: \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AM} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB}$$

c. Dacă $k=3$ atunci: $\frac{BM}{AB} = \frac{4}{7}$. $\Delta BOM: \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{BM} = \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA}$.

d. Din relațiile obținute la punctele b),c) se obține egalitatea cerută.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot \overrightarrow{OM} = 4 \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{AB} \\ 3 \cdot \overrightarrow{OM} = 3 \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{BA} \end{array} \right\} + \Rightarrow 7 \cdot \overrightarrow{OM} = 4 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB}$$

Împărțind relația obținută cu 7 și obținem cerința: $\overrightarrow{OM} = \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{OB}$.

În triunghiul ΔAOM , avem relația: $\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_A + \frac{k}{2k+1} \cdot \overrightarrow{AB}$.

În triunghiul ΔBOM , avem relația: $\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_B + \frac{k+1}{2k+1} \cdot \overrightarrow{BA}$.

$$\left. \begin{array}{l} (k+1) \cdot \overrightarrow{r}_M = (k+1) \cdot \overrightarrow{r}_A + \frac{k \cdot (k+1)}{2k+1} \cdot \overrightarrow{AB} \\ k \cdot \overrightarrow{r}_M = k \cdot \overrightarrow{r}_B + \frac{k(k+1)}{2k+1} \cdot \overrightarrow{BA} \end{array} \right\} + \Rightarrow \text{relația: } (2k+1) \cdot \overrightarrow{r}_M = (k+1) \cdot \overrightarrow{r}_A + k \cdot \overrightarrow{r}_B$$

$$\overrightarrow{r}_M = \frac{k}{2k+1} \cdot \overrightarrow{r}_B + \frac{k+1}{2k+1} \cdot \overrightarrow{r}_A$$

L:1093. În patrulaterul inscriptibil ABCD cu

$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f, R$ – raza cercului circumscris patrulaterului,

avem: $(4 - 2\sqrt{2})\pi R \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} \right) < \frac{\pi - A}{\sin A} + \frac{\pi - b}{\sin b} + \frac{\pi - c}{\sin c} < 2\sqrt{2}\pi R \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} \right)$.

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Conform inegalității lui Jordan ($x \leq \frac{\pi}{2} \sin x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$) obținem

$\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \leq \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{A}{2}$, atunci $\frac{\pi - A}{\sin A} < \pi \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin A}$. Trecând la sumă relația de mai sus obținem:

$$\sum \frac{\pi - A}{\sin A} < \pi \left(\sum \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin A} \right) = 2\pi R \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{f} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{e} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{f} + \frac{\cos \frac{D}{2}}{e} \right). \text{ Cum}$$

$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \leq \sqrt{2}, \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{D}{2} = \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \leq \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\sum \frac{\pi - A}{\sin A} < 2\pi R \left(\frac{\sqrt{2}}{e} + \frac{\sqrt{2}}{f} \right) = 2\sqrt{2}\pi R \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} \right).$$

Pentru cealaltă inegalitate folosim inegalitatea lui Kaber: $x \geq \frac{\pi}{2}(1 - \cos x) = \pi \sin^2 \frac{x}{2}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

L:1094. Dacă $a, b, c > 0$ și $\lambda, n \geq 0$ atunci $\sum \frac{a^3 + \lambda b^3}{na + b} \geq \frac{\lambda + 1}{n + 1}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Se folosește următoarea Lemei:

Dacă $a, b, c > 0$ și $\lambda, n \geq 0$ atunci

$$\frac{a^3 + \lambda b^3}{na + b} \geq \frac{(2n - n\lambda + 3)a^2 + (3n\lambda + 2\lambda - 1)b^2}{2(n+1)^2}. \quad (\text{Marin Chirciu, Pitești})$$

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{a^3 + \lambda b^3}{na + b} \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \sum \frac{(2n - n\lambda + 3)a^2 + (3n\lambda + 2\lambda - 1)b^2}{2(n+1)^2} = \frac{2(n+1)(\lambda+1) \sum a^2}{2(n+1)^2} = \\ &= \frac{\lambda+1}{n+1} \sum a^2 = RHS. \quad \text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } a = b = c. \end{aligned}$$

Nota. Pentru $\lambda = 3, n = 5$ se obține Problema propusă în MathTime 1/2024.

Dacă $a, b, c > 0$ atunci $\sum \frac{a^3 + 3b^3}{5a + b} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. Nikolaos Kallos.

L:1095. Dacă $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ și $-2 \leq \lambda \leq 10$ atunci $\sum \left(\frac{a^4 + \lambda a^2 + 1}{a^2 + a + 1} \right)^2 \geq \frac{(\lambda + 2)^2}{3} abc$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Folosim următoarea Lemă:

$$\text{Dacă } a > 0 \text{ și } -2 \leq \lambda \leq 10 \text{ atunci } \frac{a^4 + \lambda a^2 + 1}{a^2 + a + 1} \geq \left(\frac{\lambda + 2}{3} \right) a.$$

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \left(\frac{a^4 + \lambda a^2 + 1}{a^2 + a + 1} \right)^2 \stackrel{\text{Lema}}{\geq} \sum \left(\left(\frac{\lambda + 2}{3} \right) a \right)^2 = \left(\frac{\lambda + 2}{3} \right)^2 \sum a^2 \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \left(\frac{\lambda + 2}{3} \right)^2 \frac{(\sum a)^2}{3} = \\ &= \left(\frac{\lambda + 2}{3} \right)^2 \cdot \frac{3^2}{3} = \frac{(\lambda + 2)^2}{3} abc \stackrel{abc \leq 1}{\geq} \frac{(\lambda + 2)^2}{3} abc = RHS, \quad \text{unde } abc \leq 1 \text{ rezultă din} \end{aligned}$$

$3 = a + b + c \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{abc}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Nota. Pentru $\lambda = 1$ se obține Problema propusă de George Apostolopoulos în

Mathematical Inequalities 2/2024. : If $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ then $\sum \left(\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1} \right)^2 \geq 3abc$.

L:1096. Fie $\triangle ABC$ și punctele $M \in (BC), N \in (AC), P \in (AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$.

Să se arate că $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow M, N, P$ sunt mijloacele laturilor $\triangle ABC$.

Ovidiu Țățan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: " \Rightarrow " Dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor $\triangle ABC$,

$$\text{atunci: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}), \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (AC^2 - AB^2 + BA^2 - BC^2 + BC^2 - CA^2) = 0 \end{aligned}$$

" \Leftarrow " Notăm $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ și $BC = a, AC = b, AB = c$.

$$\text{Atunci: } \overline{AM} = \frac{\overline{AB} - k \cdot \overline{AC}}{1-k}, \overline{BN} = \frac{\overline{BC} - k \cdot \overline{BA}}{1-k}, \overline{CP} = \frac{\overline{CA} - k \cdot \overline{CB}}{1-k} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BN} \cdot \overline{CA} + \overline{CP} \cdot \overline{AB} &= \frac{\overline{AB} - k \cdot \overline{AC}}{1-k} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) + \frac{\overline{BC} - k \cdot \overline{BA}}{1-k} \cdot (\overline{BA} - \overline{BC}) + \frac{\overline{CA} - k \cdot \overline{CB}}{1-k} \cdot (\overline{CB} - \overline{CA}) = \\ &= \frac{1}{1-k} \cdot (\overline{AB} \cdot \overline{AC} - AB^2 - k \cdot AC^2 + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} - BC^2 - k \cdot BA^2 + k \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} - CA^2 - k \cdot CB^2 + k \cdot \overline{CB} \cdot \overline{CA}) = \\ &= \frac{1}{1-k} \cdot \left(-(k+1) \cdot (AB^2 + AC^2 + BC^2) + (1+k) \cdot (\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}) \right) = \frac{k+1}{k-1} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + \\ &+ \frac{k+1}{1-k} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{2} \cdot (c^2 + a^2 - b^2) + \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 - c^2) \right) = \frac{k+1}{k-1} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{k+1}{2 \cdot (1-k)} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{k+1}{2 \cdot (k-1)} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Cum $\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BN} \cdot \overline{CA} + \overline{CP} \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow M, N, P$ sunt mijloacele laturilor $\triangle ABC$.

L:1097. Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c . Notăm cu m_a mediana aferentă laturii a , etc.

Demonstrați că: $\frac{a}{b+c} + \frac{m_a}{m_b+m_c} \geq 1$

Vasile Jigla, Arad

Rezolvare: Deoarece $2(b^2 + c^2) \geq (b+c)^2$, $2(m_b^2 + m_c^2) \geq (m_b + m_c)^2$ e suficient să arătăm că

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{m_a}{\sqrt{m_b^2 + m_c^2}} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{m_a^2}{m_b^2 + m_c^2} + 2 \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{m_a}{\sqrt{m_b^2 + m_c^2}} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{m_a}{\sqrt{m_b^2 + m_c^2}} \geq 2 - \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{m_a^2}{m_b^2 + m_c^2} = 2 - \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{m_a}{\sqrt{m_b^2 + m_c^2}} \geq \frac{4a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)(4a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{4a^2 m_a^2}{(b^2 + c^2)(m_b^2 + m_c^2)} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{m_b^2 + m_c^2} \geq 2am_a \Leftrightarrow (b^2 + c^2)(4a^2 + b^2 + c^2) \geq 4a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) \Leftrightarrow (2a^2 - b^2 - c^2)^2 \geq 2$$

■ Clasa a X-a

L:1098. Există numerele raționale a, b, c, d, e, f astfel încât

$$(a + b\sqrt{5})^2 + (c + d\sqrt{5})^2 + (e + f\sqrt{5})^2 = 2024 + 1012\sqrt{5} \quad ? \quad \text{Monica Stanca, Carmen Vlad, Craiova}$$

Rezolvare: Dacă presupunem că există atunci s-ar obține și relația

$$(a - b\sqrt{5})^2 + (c - d\sqrt{5})^2 + (e - f\sqrt{5})^2 = 2024 - 1012\sqrt{5} = 1012(2 - \sqrt{5}) < 0 \text{ ceea ce este fals, deci nu există.}$$

L:1099. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația: $(z+2)^4 + 3z^4 - 24z - 12 = 0$.

Sorin Pirlea, Craiova

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu

$z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 2z + 1 = 0$; $z^2 \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$. Notăm $z + \frac{1}{z} = w$ și obținem ecuația

$w^2 + 2w + 4 = 0$ cu soluțiile $w_{1,2} = -1 \pm 2i\sqrt{3}$. Din $z + \frac{1}{z} = -1 \pm 2i\sqrt{3}$ se obțin soluțiile $z_{1,2,3,4}$.

L:1100. Fie $a, b \in \mathbb{C}^*$ astfel încât numărul $z = \frac{a^2 + 4b^2}{ab}$ este real și $z \in (-4; 4)$. Arătați că $|a| = 2|b|$.

Mirea Mihaela, Mihaela Dăianu, Craiova

Rezolvare: Cum $z = \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} = 4c$ și $c \in (-1; 1)$ notând $x = \frac{a}{b}$ rezultă $x^2 + \frac{4}{x} - 4c = 0$ adică

$x^2 - 4cx + 4 = 0$ are ca rădăcini $x_{1,2} = 2c \pm 2i\sqrt{1-c^2}$ de unde $\left|\frac{a}{b}\right| = 2\left|c \pm i\sqrt{1-c^2}\right| = 2\sqrt{c^2 + 1 - c^2} = 2$ și

de aici $|a| = 2|b|$.

L:1101. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^{2024} = 1$. Calculați valoarea sumei $S = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^2} + \dots + \frac{1}{1+z^{2024}}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Din $z^{2024} = 1$ rezultă $z^i = \frac{1}{z^{2024-i}} \Rightarrow S = \frac{1}{1+\frac{1}{z^{2023}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{z^{2022}}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{1}{z^1}} + \frac{1}{1+1} \Rightarrow$

$$2S = 1 + \sum_{k=1}^{2023} \left(\frac{1}{1+z^k} + \frac{1}{1+\frac{1}{z^k}} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{2023} \frac{z^k + 1}{z^k + 1} = 1 + 2023 = 2024 \Rightarrow S = \frac{2024}{2} = 1012.$$

L:1102. Dacă $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ și $\lambda \geq 0$ atunci $\frac{1}{\sqrt[3]{a+\lambda}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+\lambda}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+\lambda}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{3\lambda+1}}$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Folosim Lema: dacă $x, y, z > 0$ atunci $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{x+y+z}}$.

Demonstratie

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{z}}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{3}{x+y+z}}, \text{ cu egalitate pentru } x = y = z.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind Lema pentru $(x, y, z) = (a + \lambda, b + \lambda, c + \lambda)$ obținem:

$$LHS = \frac{1}{\sqrt[3]{a+\lambda}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+\lambda}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+\lambda}} \stackrel{Lema}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{3}{a+b+c+3\lambda}} \stackrel{a+b+c=1}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{3}{3\lambda+1}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

L:1103. În triunghiul $\triangle ABC$ are loc relația $\sum \frac{r_a^4}{1+r_a^2 r_b} \geq \frac{1944r^4}{8+27R^3}$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Folosim Lema. Dacă $x, y, z > 0$ atunci $\sum \frac{x^4}{1+x^2 y} \geq \frac{xyz(x+y+z)}{1+xyz}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind Lema pentru $(x, y, z) = (r_a, r_b, r_c)$ obținem:

$$\sum \frac{r_a}{1+r_a^2 r_b} \stackrel{\text{Lema } r_a r_b r_c (r_a+r_b+r_c)}{\geq} \frac{r_a r_b r_c (r_a+r_b+r_c)}{1+r_a r_b r_c} = \frac{rp^2(4R+r)}{1+rp^2} \stackrel{\text{Mitrinovic}}{\geq} \frac{r \cdot 27r^2(4R+r)}{1+r \cdot \frac{27R^2}{4}} \stackrel{\text{Euler}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Euler}}{\geq} \frac{r \cdot 27r^2(4 \cdot 2r+r)}{1+\frac{R}{2} \cdot \frac{27R^2}{4}} = \frac{1944r^4}{8+27R^3}. \text{ Egalitatea are loc dac\u0103 \u0219i numai dac\u0103 triunghiul este echilateral.}$$

L:1104. Fie $a, b, c > 0$ astfel \u00eenc\u0103t $\frac{a}{1+2a} + \frac{b}{1+2b} + \frac{c}{1+2c} = 1$. Ar\u0103ta\u021bi c\u0103

$(1+2a)(1+2b)(1+2c) \geq 27$. \u00cnc\u0103 ce caz avem egalitate? **Mihai C\u0103lug\u0103ru, Sorin P\u0103rlea, Craiova**

Rezolvare: $\frac{a}{1+2a} - \frac{1}{2} + \frac{b}{1+2b} - \frac{1}{2} + \frac{c}{1+2c} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} = 1$.

Aplic\u0103nd inegalitatea dintre media aritmetic\u0103 \u0219i cea geometric\u0103 avem

$$1 = \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{1+2a} \cdot \frac{1}{1+2b} \cdot \frac{1}{1+2c}} \Rightarrow (1+2a)(1+2b)(1+2c) \geq 27 \text{ cu egalitate}$$

pentru $\frac{1}{1+2a} = \frac{1}{1+2b} = \frac{1}{1+2c} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = b = c = 1$

L:1105. Rezolva\u021bi ecua\u021bia $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$.

eleve **Caterina Maria Zetu, Carina Maria Viesescu, Bucure\u0219ti**

Rezolvare: $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + \cos 2x - \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1$.

$$S = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L:1106. Rezolva\u021bi ecua\u021bia $\sin x + \sin^2 x + \cos x = 0$. (enun\u0219 modificat)

elevi **Bianca Negre\u0219, Horia Mu\u0219at, Craiova**

Rezolvare: $0 = \sin x + \sin^2 x + \cos x \geq \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = \sin x + 1$, deoarece

$\cos x \geq \cos^2 x$, $\cos x \in [-1; 1]$. Atunci, $\sin x \leq -1 \Rightarrow \sin x = -1$ (1) \u0219i \u00eenc\u0103locuind \u00een ecua\u021bie ob\u021binem

$\cos x = 0$ (2). Din (1) \u0219i (2) ob\u021binem $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

L:1107. Rezolva\u021bi ecua\u021bia $\sqrt{37-48tgx} = 8tgx - 5$.

Dorina Goiceanu, Iulia Sanda, Craiova

Rezolvare: Evident $\frac{5}{8} \leq tgx \leq \frac{37}{48}$. Not\u0103m $tg x = t$. Ecua\u021bia dat\u0103 devine

$$\sqrt{37-48t} = 8t-5 \mid ()^2 \Rightarrow 16t^2 - 8t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4}, t_2 = -1. \text{ Convine doar}$$

$$t = \frac{3}{4} \Rightarrow tg x = \frac{3}{4} \Rightarrow x \in \left\{ \arctg \frac{3}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L:1108. Ar\u0103ta\u021bi c\u0103 num\u0103rul $a = \cos^2 3^0 + \cos^2 33^0 - \sqrt{3} \cos 3^0 \cos 33^0$ este ra\u021bional.

Ionel Tudor- C\u0103lug\u0103reni, Giurgiu

Rezolvare: Not\u0103m $x = \cos 3^0$ atunci, $a = x^2 + \cos^2(30^0 + 3^0) - \sqrt{3} \cdot x \cdot \cos(30^0 + 3^0) =$

$$= x^2 + (\cos 30^0 \cos 3^0 - \sin 30^0 \sin 3^0)^2 - \sqrt{3} \cdot x \cdot (\cos 30^0 \cos 3^0 - \sin 30^0 \sin 3^0) = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}.$$

L:1109. a) Determinați mulțimea punctelor $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pentru care $x^3 + 2^x = y^3 + 2^y$.

b) Rezolvați în numere reale ecuația $x^3 + 2^x = 2024$. Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Notăm $f(x; y) = x^3 - y^3 + 2^x - 2^y = (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2^y(2^{x-y} - 1)$.

Dacă $x > y \Rightarrow f(x; y) > 0$; Dacă $x < y \Rightarrow f(x; y) < 0$. Rămâne doar situația $x=y$. Mulțimea soluțiilor este $\{(x; x) | x \in \mathbb{R}\}$ adică locul geometric al punctelor de pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

b) $2024 = 1000 + 1024 = 10^3 + 2^{10} \Rightarrow$ ecuația se scrie $x^3 + 2^x = 10^3 + 2^{10}$. Se obține soluția $x = 10$.

L:1110. Se consideră ecuația: $(1 + iz)^{2n} = i \cdot (1 + z^2)^n$, unde $n \geq 1$ număr natural și $i^2 = -1$.

a) Arătați că numărul complex i este o soluție a ecuației pentru orice $n \geq 1$.

b) Rezolvați ecuația în cazul $n = 1$ și într-unul din cazurile $n = 2$ sau $n = 3$.

c) Determinați soluțiile ecuației în cazul general $n \in \mathbb{N}^*$. Adalbert Kovács Béla, Satu Mare

Rezolvare: 1.a.) Prin înlocuire se verifica $z = i$ este o soluție a ecuației.

1.b.) Cazul $n = 1$: Avem ecuația: $(1 + iz)^2 = i \cdot (1 + z^2)$, cu rădăcinile i și $-i$.

Cazul $n = 2$. Folosind descompunerea: $(1 + z^2) = (1 + iz) \cdot (1 - iz)$ ecuația data devine:

$$(1 + iz)^4 = i(1 + iz)^2 \cdot (1 - iz)^2 \Leftrightarrow (1 + iz)^2 \cdot [(1 + iz)^2 - i(1 - iz)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 + iz)^2 = 0 \text{ sau } (1 + iz)^2 - i(1 - iz)^2 = 0$$

Prima ecuație are rădăcina dublă: i

$$\text{A doua ecuație: } 1 + 2iz - z^2 - i - 2z + iz^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - i)z^2 + 2(1 - i)z - (1 - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2z - 1 = 0, \text{ cu rădăcinile: } -1 + \sqrt{2} \text{ și } -1 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Cazul } n = 3: \text{ Avem ecuația: } (1 + iz)^6 = i \cdot (1 + z^2)^3 \Leftrightarrow (1 + iz)^6 = i(1 + iz)^3 \cdot (1 - iz)^3$$

$$\Leftrightarrow (1 + iz)^3 \cdot [(1 + iz)^3 - i(1 - iz)^3] = 0 \Leftrightarrow (1 + iz)^3 = 0 \text{ sau } (1 + iz)^3 - i(1 - iz)^3 = 0$$

Prima ecuație are soluția triplă: $z = i$.

$$\text{A doua ecuație: } (1 + iz)^3 + i^3(1 - iz)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 + iz + i(1 - iz))(1 + iz)^2 - i(1 + iz)(1 - iz) + i^2(1 - iz)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + i + z(1 + i) = 0 \text{ sau } 1 + 2iz - z^2 - i - iz^2 - 1 + 2iz + z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z + 1 = 0 \text{ sau } z^2 - 4z + 1 = 0, \text{ cu rădăcinile: } -1 \text{ respectiv: } 2 + \sqrt{3} \text{ și } 2 - \sqrt{3}$$

Deci soluțiile ecuației date sunt numerele reale: -1 , $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ și numărul complex: i .

1.c.) Cazul general: Avem ecuația: $(1 + iz)^{2n} = i \cdot (1 + z^2)^n \Leftrightarrow$

$$(1 + iz)^{2n} = i(1 + iz)^n \cdot (1 - iz)^n \Leftrightarrow (1 + iz)^n \cdot [(1 + iz)^n - i(1 - iz)^n] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 + iz)^n = 0 \text{ sau } (1 + iz)^n - i(1 - iz)^n = 0.$$

Din prima ecuație rezulta soluția $z = i$, care este o soluție multiplă de ordinul n . A doua ecuație se

scrie sub forma: $\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = i$ care se rezolvă trigonometric.

■ Clasa a XI-a

L:1111. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, cu $(A+B) \cdot A^* \cdot (A-B) = (A-B) \cdot B^* \cdot (A+B)$ (*), atunci avem :
 $(\det A) \cdot A + (\det B) \cdot B = AB^*A + BA^*B$, unde A^* respectiv B^* sunt adjuncta matricei A , respectiv B .

Diaconu Radu, Sibiu

Rezolvare: Din $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \Rightarrow (\det A) \cdot I_n = A \cdot A^*$.

$$(A+B) \cdot A^* \cdot (A-B) = (A \cdot A^* + B \cdot A^*) \cdot (A-B) = (\det A \cdot I_n + B \cdot A^*) \cdot (A-B) = (\det A) \cdot A - B \cdot A^* \cdot B$$

$$(1). \text{ Analog, } (A-B) \cdot B^* \cdot (A+B) = (A \cdot B^* - B \cdot B^*) \cdot (A+B) = (AB^* - \det B \cdot I_n)(A+B) =$$

$$= A \cdot B^* \cdot A + A \cdot B^* \cdot B - (\det B) \cdot A - (\det B) \cdot B = A \cdot B^* \cdot A + A \cdot \det B \cdot I_n - (\det B) \cdot A - (\det B) \cdot B =$$

$$= A \cdot B^* \cdot A - (\det B) \cdot B. \text{ Din (*) rezultă } (\det A) \cdot A - B \cdot A^* \cdot B = A \cdot B^* \cdot A - (\det B) \cdot B, \text{ c.c.t.d.}$$

L:1112. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^n} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}} + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}}} \right).$$

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare: Fie șirurile $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}}}$ și

$$b_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}}. \text{ Avem } n \langle a_n \langle b_n.$$

Din relația $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$, $a, b > 0$ șirul b_n devine

$$b_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n(2n+5)}{2n+4}. \text{ Atunci,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{2n+5}{2n+4} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ și cum limitele laterale sunt egale cu e deducem că

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, deci limita din enunț este egală cu e .

L:1113. Se consideră în \mathbb{R} ecuația $48x + 16\sin^4 x - 4\pi + 4\sqrt{3} - 7 = 0$. Arătați că există o soluție

$x_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Rezolvați ecuația în \mathbb{R} .

Ionel Tudor - Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 48x + 16\sin^4 x - 4\pi + 4\sqrt{3} - 7$ continuă.

Se arată că $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, deci, conform proprietății lui Darboux există $x_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ cu

$$f(x_1) = 0.$$

Funcția f este derivabilă și se arată că $f'(x) = 16(3 + 2\sin^2 x \sin 2x) \geq 1 > 0$, deci f este strict crescătoare iar ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică, $x_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Ecuația dată se mai scrie $48x + 16\sin^4 x - 48 \cdot \frac{\pi}{12} + 4\sqrt{3} - 7 = 0$.

Cum $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\sin^4 \frac{\pi}{12} + 4\sqrt{3} - 7 = 0$ rezultă că ecuația dată are soluția $x_1 = \frac{\pi}{12} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

■ Clasa a XII-a

L:1114. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{nk-1}}{1-x^k + x^{2k}} dx$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare:

Cu substituția $u = x^{nk} \Rightarrow du = nkx^{nk-1} dx \Rightarrow \sqrt[nk]{u} = x \Rightarrow x^k = u^{\frac{k}{nk}} = u^{\frac{1}{n}}$ și $x^{2k} = u^{\frac{2}{n}}$. Mai departe avem notând cu I_n integrala, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{du}{1-u^{\frac{1}{n}} + u^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-1+1} = \frac{1}{2k}$.

L:1115. Să se arate că $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației

$4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$, arătați că $\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1-x_4}$ este număr rațional.

Rezolvare:

Ionel Tudor - Călugăreni, Giurgiu

$4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = x^2(4x^2 + 3x + 1) + (x^2 + x + 1) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ deoarece trinoamele

$4x^2 + 3x + 1 > 0$; $x^2 + x + 1 > 0$, având discriminanții negativi. Așadar, ecuația nu are nici soluții

reale. Cum toți coeficienții ecuației sunt reali, atunci toate rădăcinile sunt complexe nereale și

conjugate două câte două. Deci $x_k \neq 1$, $\forall k = 1, 2, 3, 4$, $x_3 = \overline{x_1}$, $x_4 = \overline{x_2}$. Facem transformarea

$y = \frac{1}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y-1}{y}$, atunci ecuația dată devine $11y^4 - 30y^3 + 35y^2 - 19y + 4 = 0$. Din prima dintre

relațiile lui Viete obținem:

$$\sum_{k=1}^4 x_k = \frac{30}{11} = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{1-x_k} \in \mathbb{Q}.$$

L:1116. Să se demonstreze inegalitatea: $\int_{\frac{1}{2024}}^3 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx < 2 + \ln 3$.

Adalbert Kovács, Satu Mare

Rezolvare:

Descompunem într-o sumă de două integrale: $\int_{\frac{1}{2024}}^1 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx + \int_1^3 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx = I_1 + I_2$

La prima integrală folosim inegalitatea: $\sin x \leq x$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2024}}^1 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx < \int_{\frac{1}{2024}}^1 \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int_{\frac{1}{2024}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{2024}}^1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{506}} < 2$$

La a doua integrală folosim: $\sin x \leq 1$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx < \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3. \quad \text{Prin adunare obținem: } I_1 + I_2 < 2 + \ln 3.$$

Observație: Folosind calculatorul avem: $\int_{\frac{1}{2024}}^3 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx \cong 2.905395388$

iar $2 + \ln 3 \cong 3.098612288$, care este o aproximare bună.

L:1117. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{3x + \sin x}}{x}$. Arătați, că este integrabilă și

demonstrați inegalitatea: $\int_{\varepsilon}^8 f(x) dx < 10 + \ln 2$, unde $1 > \varepsilon > 0$ și $\varepsilon \rightarrow 0$.

Adalbert Kovács, Satu Mare

Rezolvare: Funcția dată este continuă, deci integrabilă

Descompunem într-o sumă de două integrale: $\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx + \int_1^8 f(x) dx = I_1 + I_2$

La prima integrală folosim inegalitatea: $\sin x \leq x$

$$I_1 = \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{3x + \sin x}}{x} dx < \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{4x}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 4 - 4\sqrt{\varepsilon} < 4$$

La a doua integrală aplicăm: $\sin x \leq 1$ și folosim substituția: $\sqrt{3x+1} = t > 0 \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{3}$

$$I_2 = \int_1^8 \frac{\sqrt{3x + \sin x}}{x} dx < \int_1^8 \frac{\sqrt{3x+1}}{x} dx = \int_2^5 \frac{t}{\frac{t^2-1}{3}} \cdot \frac{2t}{3} dt = \int_2^5 \frac{2t^2}{t^2-1} dt = \int_2^5 \left(2 + \frac{2}{t^2-1} \right) dt =$$

$$\left(2t + \ln \frac{t-1}{t+1} \right) \Big|_2^5 = 10 + \ln \frac{4}{6} - 4 - \ln \frac{1}{3} = 6 + \ln 2. \quad \text{Prin adunare obținem: } I_1 + I_2 < 10 + \ln 2.$$

Observație:

Folosind calculatorul, găsim valorile aproximative: $\int_0^3 \frac{\sqrt{3x + \sin x}}{x} dx \cong 10.47101219$

și $10 + \ln 2 \cong 10.69314718$.

L:1118. Să se calculeze integrala: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{e^x + 1} dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare: Notăm: $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{e^x + 1} dx$. Utilizăm integrarea prin părți: $\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$

Avem: $u = \cos 2x$; $dv = \frac{1}{e^x + 1} dx$; $du = -2 \sin 2x dx$; $v = x - \ln(e^x + 1)$

$$\text{Deci: } I = \left(\cos 2x (x - \ln(e^x + 1)) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x (x - \ln(e^x + 1)) dx$$

$$I = 0 + 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx - 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(e^x + 1) dx$$

$$\text{Notăm: } A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx; \quad B = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(e^x + 1) dx.$$

Integrala A se calculează prin părți. Luăm: $u = x$; $dv = \sin 2x dx$ și obținem $A = \frac{1}{2}$.

Pentru integrala B facem schimbarea de variabilă: $x = -t$

$$\text{Obținem: } B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 2t \ln(e^{-t} + 1) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 2t \ln \frac{1+e^t}{e^t} dt$$

$$B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 2t (\ln(1+e^t) - \ln e^t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 2t (\ln e^t - \ln(1+e^t)) dt \quad B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} t \sin 2t dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 2t \ln(1+e^t) dt$$

$$\text{Deci: } B = A - B, \quad B = \frac{1}{2} A = \frac{1}{4} \quad \text{Putem scrie: } I = 2A - 2B = \frac{1}{2}. \quad \text{Așadar, } I = \frac{1}{2}.$$

ȘTIATI CĂ...?

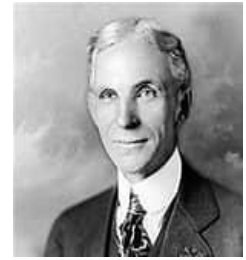
.... **cifra 8** a suscitat atenția matematicienilor, filozofilor și tuturor oamenilor de știință careia i-au asociat diverse proprietăți, chinezii considerând că cifra 8 reprezintă cifra perfecțiunii.

- se știe că 8 este un cub perfect, iar cubul, hexaedrul regulat au câte 8 vârfuri;
- octaedrul este un corp platonice cu 8 fețe;
- pătratul oricărui număr natural impar are forma $8k + 1$ cu k natural;
- discipolii școlii lui Pitagora, pitagoreicii au făcut din 8 un simbol al iubirii și amicitiei;
- de la cifra opt, în muzică avem octava- un interval dintre două sunete alcătuite din 8 trepte, în calendarul roman vechi celei de a opta lună i se dăduse denumirea de octombrie, în tehnologia informației, octetul este unitatea de informație formată din 8 biți iar în chimie există așa numita regulă a octetului privitoare la felul cum evoluează atomii pe orbita lor externă.
- în natură petalele unor flori sunt în număr de 8 ca și picioarele păianjenilor și scorpionilor;
- Farul din Alexandria, una din minunile lumii antice, avea partea din mijloc sub forma unei prisme octogonale, iar cupola era sprijinită pe opt piloni;
- unul din cele opt simboluri tibetane este lotusul, simbolul purității, iar în religia asiatică lotusul mistic avea opt petale.

din cartea „1,2,3...SHOW...”, de **Eduard și Ioan Dăncilă**

“ Gânditul este una dintre cele mai dificile slujbe.
Poate din acest motiv foarte puțini se angajează la el”.

Henry Ford
(1863- 1947)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1292. Există x, y, z, t cifre astfel încât $\overline{xyzt} + \overline{xyz} + \overline{xy} + x = 2024$?

Cornelia Neacșu, Elena Alexie, Craiova

G:1293. Determinați numărul \overline{abc} pentru care $\overline{abc} + \overline{abc} + \overline{bc} = 3b + 2c = 2024$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1294. În câte zerouri se poate termina numărul $19^n + 9, n \in \mathbb{N}$?

Simona Marinela Șerban, Dăbuleni, Dolj, Gilena Dobrică, Bechet, Dolj

G:1295. Arătați că numărul $a = \left[(2^7 : 64 + 4^2) : 3^2 \right] \cdot 2^{2023} : (2^{253})^8$ este mai mic decât 2.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1296. Aflați $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^2 + y^2 = 2025$.

eleva **Prisnel Sara, Afrem Sara, Craiova**

G:1297. Comparați numerele 5^{867} și 2^{2024}

Elena Alexie, Elena Grigore, Craiova

G:1298. Există $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $P = (x + y)(y + z)(z + x)$ să fie egal cu:

a) 2025^{2024} ; b) 2024^{2025} .?

Grigorie Dan, Craiova, Sebastian Ilinca, Pârșcoven, Olt

G:1299. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul 2024^n să aibă exact 576 divizori naturali .

Camelia Dană, Iulia Sanda, Craiova

G:1299. Se consideră numărul natural $n = \overline{abc}$. Dacă se elimină una din cifrele sale, se obține un număr de 6 ori mai mic decât n . Să se afle n .

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

G:1300. Stabiliți dacă fracția $\frac{3^{2025}}{2^{3025}}$ este subunitară sau supraunitară.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

G:1301. Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $A = 41 \overbrace{aa \dots a}^{2k \text{ de } a} 61$ unde

$a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ și $k \in \mathbb{N}$.

Roxana Vasile, Craiova, Ilinca Sebastian, Pârșcoveni, Olt

G:1302. Arătați că numărul $4^{99} + 6^{100} + 3^{200}$ este pătrat perfect

elevă **Panduru Mădălina, Bălcești, Vâlcea**

G:1303. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, cu p impar, astfel încât $(p + 1)a = 2pd = pb + 4pc$ să se arate că $2p$ divide ab .

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1304. Arătați că fracția $\frac{89 + 8^{2024}}{89 + 9^{2024}}$ este reductibilă.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

G:1305. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $A = \frac{1+2^n+3^n}{1+2^{n-1}+3^{n-1}}$ să fie număr natural.

Loredana Surcel, Otopeni, Cristian Cosmin Alexandru, Brădești, Dolj

▪ Clasa a VI-a

G:1306. Să se afle suma tuturor numerelor naturale de forma \overline{abc} , știind că numerele \overline{ab} , \overline{bc} și \overline{ca} sunt direct proporționale cu numerele c , a , respectiv b .

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

G:1307. Determinați produsul $(b+2c)(c-a)(2a+b)$ știind că $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a+b+c=44$ și că $2a+3b+4c=133$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1308. Arătați că numerele $10017, 100117, 1001117, \dots, 100 \overbrace{11 \dots 1}^{k \text{ ori}} 17, \dots, k \in \mathbb{N}^*$ se divide la 53

Grigorie Dan, Constantina Prunaru, Craiova

G:1309. Aflați forma ireductibilă a fracției $F = \frac{2(|1-2+3-4\dots+2024|+|-1+2-3+\dots+2024|)}{3(|2-4+6-\dots+2024|+|-2+4-6+\dots-2024|)}$.

Ion Stănescu, Smeni, Buzău

G:1310. Determinați numerele prime p astfel încât $p^2 + 2000$ să fie pătratul unui număr natural.

Grigorie Dan, Craiova, Cristian Cosmin Alexandru, Brădești, Dolj

G:1311. a). Descompuneți în factori numărul $n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3$.

b) Arătați că numărul 2024^{2023} se poate scrie ca suma a șase cuburi perfecte.

Ionel Tudor - Călugăreni, Giurgiu

G:1312. Fie $ABCD$ un trapez și E mijlocul bazei AD . Dacă $BD \cap CE = \{F\}$ și $BC = CF$ arătați că $AF \perp BD$.

Grigorie Dan, Zaharia Gigi, Craiova

G:1313. Doi muncitori, la fel de harnici, culeg strugurii dintr-o vie. Primul muncitor lucrează 5 zile iar al doilea lucrează 3 zile. Pentru munca lor primesc împreună 960 lei.

a) Ce procent din suprafața viei culege primul muncitor ?

b) Aflați ce sumă i se cuvine fiecărui muncitor.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a VII-a

G:1314. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{c} = \frac{c^2}{a}$. Arătați că $a = b = c$.

elevă Panduru Mădălina Nicoleta, Bălcești, Vâlcea

G:1315. Rezolvați ecuația $x^2 = \frac{3^{2025} + 1}{2} \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2024})$.

Ion Stănescu, Smeni, Buzău

G:1316. Aflați numerele naturale \overline{ab} , unde cifra b este impară, știind că

$$1+3+5+7+\dots+\overline{ab} = (2a+3b)^2.$$

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

G:1317. Determinați numărul \overline{abc} cu $b = 2a$ și cifre distincte, pentru care $\sqrt{abc} = a \cdot b + c$.
Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1318. Fie $a, b > 0$. Arătați că $\frac{a}{5a+b} + \frac{b}{5b+a} \leq \frac{1}{3}$. În ce caz avem egalitate?
Sebastian Ilinca, Pârșcoveni, Olt, Cristian Catană, Băilești

G:1319. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A = |x^3 - 6x + 4|$ este număr prim.
Gigi Zaharia, Constantina Pruneanu, Craiova

G:1320. Aflați câți termeni are suma $S_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$, știind că are partea întregă egală cu 13.
Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

G:1321. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z = 3$. Aflați maximul expresiei
 $E(x, y, z) = x + y + 2xy + xz + yz$.
Mihaela Stăncele, Craiova

G:1322. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și x_1, x_2, \dots, x_n numere reale astfel încât $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n-1}{2}$.
 Determinați cea mai mică valoare a expresiei $E_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.
Lucian Tuțescu, Craiova, Neculai Stanciu, Buzău

G:1323. Determinați laturile a, b, c ale triunghiului ABC știind că:
 $\sqrt{a^2 - 10a + 50} + \sqrt{b^2 - 24b + 288} + \sqrt{c^2 - 26c + 338} \leq 30$. Ce fel de triunghi este ABC?
Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1324. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c = \alpha$, $(a+b)c + (a+c)b + (b+c)a = \beta$. Arătați că dacă $6 + \beta < 4\alpha$ atunci cel puțin unul din numerele a, b, c este mai mic ca 1 și cel puțin unul este mai mare ca 1.
Mihai Călugăru, Eugenia Turcu, Craiova

G:1325. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 + 8x + 3$ să fie pătratul unui număr întreg.
Gigi Zaharia, Luiza Cremeneanu, Craiova

G:1326. Dacă $a, b, c > 0$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, atunci: $\frac{a}{ab+2bc+ca} + \frac{b}{bc+2ca+ab} + \frac{c}{ca+2ab+bc} \leq \frac{3}{4}$.
Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1327. Într-un paralelogram ABCD, se cunosc $AB=7$ cm, $BC=4$ cm și $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$.
 În exterior se construiesc triunghiurile dreptunghic isoscele ABM și ADN, cu bazele $[BM]$, respectiv $[DN]$. Calculați perimetrul și aria triunghiului AMN.
Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

G:1328. Fie triunghiul ABC înscris în cerc și A_1, B_1 , respectiv C_1 , punctele diametral opuse în cerc ale lui A, B respectiv C. Dacă A_2, B_2 , respectiv C_2 sunt mijloacele laturilor BC, AC, și respectiv AB, arătați că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.
Alina Călugăru, Eugenia Turcu, Craiova

▪ Clasa a VIII-a

G:1329. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $p = 2^{2^n} + 1$ să fie prim. Arătați că p nu se poate scrie ca diferența cuburilor a două numere naturale nenule.
 eleve **Militaru Cismaru Gabriela**, Craiova, **Panduru Mădălina**, Bălcești, Vâlcea

- G:1330.** Fie $x \geq 1$ și $y \geq 1$. Arătați că $x^2y^2 + 16(x+y) \geq 16xy + 16$. În ce caz avem egalitate?
Lucian Tuțescu, Craiova, **Sorin Botea**, Tg.Jiu
- G:1331.** Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2(y+z) = y^2(x+z) = 2024$ și $x \neq y$. Calculați $z^2(x+y)$.
Alecu Orlando, Craiova
- G:1332.** Fie $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b = x+y \neq 0$ și $a^3 + b^3 = x^3 + y^3$. Arătați că
 $a^n + b^n = x^n + y^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$.
Alina Tigaie, Craiova
- G:1333.** Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A = n^{11} + n + 1$ să fie număr prim.
Mihaela Stăncele, Monica Stanca, Craiova
- G:1334.** Arătați că ecuația $4x^3 - 507x + 253 = 0$ are trei rădăcini reale care au suma număr natural.
Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu
- G:1335.** Rezolvați ecuația $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{x^5 + 1 - x^2 - x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = 4048, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
Nicolae Ivășchescu, Canada
- G:1336.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația irațională $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.
Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu
- G:1337.** Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că: $\frac{a}{4a+b+c} + \frac{b}{a+4b+c} + \frac{c}{a+b+4c} \leq \frac{1}{2}$.
Gheorghe Ghiță, Buzău
- G:1338.** Să se determine $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ din ecuația $\sqrt{x-10} + \sqrt{y-10} = \frac{x+y+30}{10}$.
Adrian Stan, Buzău
- G:1339.** Un paralelipiped dreptunghic are toate muchiile exprimate prin numere naturale. Știind că diagonalele a trei fețe distincte ca arii au lungimile 10 cm, $2\sqrt{34}$ cm, respectiv $2\sqrt{41}$ cm, să se afle lungimea diagonalei paralelipipedului și volumul acestuia.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București
- G:1340.** Într-un cub secțiunea diagonală are aria A_1 . O secțiune paralelă cu aceasta are aria A_2 și $A_1 = \sqrt{2} \cdot A_2$. a) Ce formă are secțiunea a 2-a? b) Cât este distanța dintre aceste secțiuni?
Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

■ Clasa a IX-a

- L:1119.** Găsiți toate numerele naturale n astfel încât $\sqrt{n+1} + \sqrt{4n-3}$ să fie număr natural
 elevă **Militaru Cismaru Gabriela**, Craiova
- L:1120.** Demonstrați că:

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} + \frac{1}{5 \cdot \sqrt{10}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1} \cdot \sqrt{n^2+2n+2}} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
 unde $[x]$ este partea întregă a lui x .
Elena și Constantin Ciobică, Fălticeni
- L:1121.** Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}, z \geq \frac{1}{2}$. Arătați că
 $x^2y^2z^2 + 4(xy + yz + zx) + 1 \geq 8xyz + 2(x + y + z)$. În ce caz avem egalitate?
Simona Marinela Șerban, Dăbuleni, Dolj

L:1122. Aflați soluțiile reale ale ecuației $(x^2 + x - 1)^3 + (3x^2 + x - 8)^3 = (4x^2 + 2x - 9)^3$.

Iulia și Ionuț Șchiopu, Craiova

L:1123. Fie $a > 1$ fixat. Rezolvați în mulțimea numerelor reale:

$$(a^{2x} + a^x - a^2 - a)^3 = (a^{2x} - a)^3 + (a^x - a^2)^3.$$

Marin Chirciu, Pitești

L:1124. Fie $x, y > 0$ astfel încât $x^2 + xy + y^2 = 3$. Arătați că $\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3xy + 2} + \sqrt{3y^2 + 3} \leq 3\sqrt{5}$.

Felicia Ozunu, Craiova

L:1125. Determinați numerele reale x și y astfel încât: $(xy + 9)^2 + (y^2 + xy)^2 = 18y^2$.

Grigorie Dan, Lavinia Trincu, Craiova

L:1126. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Să se demonstreze că

$$27 \leq 8 \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + 15 \leq \frac{1}{abc}.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1127. Dacă $x, y > 0$, $x + y = 2$ atunci în triunghiul ABC cu semiperimetrul $s = \frac{a+b+c}{2}$,

are loc inegalitatea: $\frac{3}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} + \frac{4}{b(ax+cy)} + \frac{4}{c(bx+ay)} + \frac{4}{a(cx+by)} \geq \frac{16}{s^2}$

D.M.Băținețu-Giurgiu, București, **Ionel Tudor**- Călugăreni, Giurgiu

L:1128. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 - 3} + \sqrt{x_2^2 - 4x_2 + 3} - \sqrt{(x_3 - 2)^3} &= \sqrt{x_2 - 3} + \sqrt{x_3^2 - 4x_3 + 3} - \sqrt{(x_4 - 2)^3} = \dots \\ &= \sqrt{x_n - 3} + \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 3} - \sqrt{(x_2 - 2)^3} = 0. \end{aligned}$$

Mihaly Bencze, Brașov

L:1129. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 + ax - 1 = 0$ are rădăcinile reale x_1 și x_2 . Aflați cea mai mică valoare a expresiei $E(x_1; x_2) = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)$.

Alecu Orlando, Roșioridevede, Teleorman

L:1130. a) Să se arate că există triunghiuri cu lungimile laturilor $a, b, c > 2025$ astfel încât $[a] + [b] < [c]$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă a lui x .

b) Există triunghiuri cu lungimile laturilor $a, b, c > 2025$ astfel încât $\{a\} + \{b\} < \{c\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x ?

c) Să se arate că nu există triunghiuri cu lungimile laturilor $a, b, c > 2025$ astfel încât $[a] + [b] < [c]$ și $\{a\} + \{b\} < \{c\}$.

Ioana Genoveva. Luiza Cremeneanu, Craiova

L:1131. Fie $a, b \in \mathbb{Q}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{Z}$ considerăm mulțimea ecuațiilor de forma

$E_n: (n+1)x^2 - 2(n+a)x + b + n + 1 = 0$. Arătați că dacă 1, a, b+1 sunt în progresie aritmetică, atunci ecuațiile E_n au o rădăcină comună.

Adrian Stan, Buzău

L:1132. a) Determinați $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $xf(y)f(x+y) = yf(x)(f(x) + f(y)) \quad (\forall) x, y \in (0, \infty)$.

b) Determinați $f: (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0)$ astfel încât $xf(y)f(x+y) = yf(x)(f(x) + f(y)) \quad (\forall) x, y \in (-\infty, 0)$.

Lucian Tuțescu, Craiova, **Neculai Stanciu**, Buzău

L:1133. Demonstrați că $\frac{\cos 10^\circ}{1 - \sin 10^\circ} = \tan 50^\circ$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1134. Fie $\alpha, \beta > 0$ și $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că

$$\sqrt{\frac{2\alpha a + (\alpha + \beta)b + 2\beta c}{2\beta a + (\alpha + \beta)b + 2\alpha c}} + \sqrt{\frac{2ab + (\alpha + \beta)c + 2\beta a}{2\beta b + (\alpha + \beta)c + 2\alpha a}} + \sqrt{\frac{2\alpha c + (\alpha + \beta)a + 2\beta b}{2\alpha b + (\alpha + \beta)a + 2\beta c}} \geq 3.$$

În ce caz avem egalitate ?

Lucian Tuțescu , Olivia Bercea , Craiova

L:1135. În triunghiul ABC obtuzunghic avem $4\sin A + 5\cos B = 6$ și $5\sin B + 4\cos A = 5$. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle C$.

Dan Mitricoiu, Plătarești, Călărași

L:1136. Să se arate că în orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc relația:

$$\frac{1 + \cos(A - B)}{\cos A + \cos B} + \frac{1 + \cos(B - C)}{\cos B + \cos C} + \frac{1 + \cos(C - A)}{1 + \cos C + \cos A} \geq 6.$$

Florin Rotaru, Focșani

L:1137. În triunghiul oarecare ABC se consideră punctul $D \in (BC)$. Să se arate că dacă [AD este

bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ atunci: $a^2 \leq \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{\sin C} \cdot BD^2 + \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{\sin B} \cdot DC^2$ notațiile fiind cele obișnuite

într-un triunghi.

Emil C. Popa, Sibiu

▪ Clasa a X-a

L:1138. Comparați numerele $A = 2^{\sqrt{\log_2 2024}}$ și $B = 2024^{\sqrt{\log_2 2024^2}}$

Ionuț Ivănescu, Mihaela Mirea, Craiova

L:1139. Arătați că ecuația $[3^x] + [5^x] = 15^x + 1$ nu are soluții nenule, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

clev **Ciurea Andrei, Buzău**

L:1140. Fie $a, b, c > 1, c > a > b$. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $a^x \cdot b^{x^2} \cdot c^{x^3} = a \cdot b \cdot c$.

clev **Stancu Cosmin , Craiova**

L:1141. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $x^2 y^4 + 7x^2 y^2 + x^2 + 9y^2 \geq 6xy(y^2 - 1)$.

Carmen Vlad , Iacob Meda, Craiova

L:1142. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1)$.

Cezar Ozunu , Tica Gabriel, Craiova

L:1143. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $x^2 - 2x + 3 \geq \sqrt{4 - x^2}$.

Alecu Orlando, RoșiorideVede, Teleorman

L:1144. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2\lambda} + 2^{(x+\lambda)^2} + 2^{-x} = 2^{\lambda+1} + 1$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1145. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația: $(x^2 - 7x + 11)^{x^3 - 14x^2 + 55x - 42} = 1$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

L:1146. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $p = 2^{2^n} + 1$ să fie prim . Arătați că p nu se poate scrie ca diferența puterilor q a două numere naturale nenule , q este număr prim $q \geq 3$.

Lucian Tuțescu , Ramona Nălbaru, Craiova

L:1147. Fie $a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ astfel încât $\log_a 2023 + \log_c 2023 = 2 \log_b 2023$. Arătați că

$$\log_a 2024 + \log_c 2024 = 2 \log_b 2024.$$

Delia și Cristian Schreider, Craiova

L:1148. Găsiți o funcție bijectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(f(x)) - f(x) = 56x + 2024, \forall x \in \mathbb{R}$.

Eugenia Turcu, Mihai Călugăru, Craiova

L:1149. Există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^{2025} = (z+1)^{2025} = 1$.

Florin Șendroi, Tg. Cărbunești, Sorin Botea, Tg. Jiu

L:1150. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\sqrt[5]{x^3 + 2023} + \sqrt[7]{x^3 + 2024} + \sqrt[9]{x^3 + 2025} = 0$.

Ileana Stanciu, Mihai Călugăru, Craiova

L:1151. Pentru a și b cifre nenule, determinați numerele \overline{ab} , care verifică egalitatea:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{b} + \sqrt{ab}} - \sqrt[3]{a\sqrt{b} - \sqrt{ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{ab}}.$$

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

L:1152. Să se rezolve ecuația $\frac{1}{2^{-x} + 3^{-x}} + \frac{1}{3^{-x} + 5^{-x}} + \frac{1}{5^{-x} + 2^{-x}} = 2^{x-1} + \frac{1}{2}(3^x + 5^x)$.

Adrian Stan, Buzău

L:1153. Rezolvați în R_+ sistemul
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = (2x + y)\sqrt[3]{xz^2} \\ y^2 + yz + z^2 = (2y + z)\sqrt[3]{yx^2} \\ z^2 + zx + x^2 = (2z + x)\sqrt[3]{zy^2} \end{cases}$$

Mihaly Bencze, Brașov

L:1154. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC, cu notațiile cunoscute, să se arate că

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c}} + \sqrt[7]{\frac{c}{a}} > \frac{4r}{R}.$$

Florin Rotaru, Focșani

L:1155. Arătați că dacă $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt triunghiuri de arii S_1, S_2 și laturi a_1, b_1, c_1 respectiv a_2, b_2, c_2 iar $x, y, z \in R_+^*$ cu $xyz \geq 1$, atunci $xa_1a_2 + yb_1b_2 + zc_1c_2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{S_1S_2}$

(O generalizare a inegalității lui G.Tsintsifas)

Dumitru M. Băținețu-Giurgiu; Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

■ Clasa a XI-a

L:1156. Dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$, să se arate că $\det(A^4 + A^2 + I_2) \leq (t^2 + d^2 - d + 1)^2$, unde $t = \text{Tr}(A)$ și $d = \det(A)$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1157. a) Aflați termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $5x_{n+1} = x_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 = 1$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Cezar Ozunu, Dolj, Ilinca Sebastian, Pârșcoveni, Olt

L:1158. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + 2}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Florin Rotaru, Focșani

L:1159. Fie $a_1 > 3$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{9}{a_n} - 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați

limita sa.

Ionuț Ivănescu, Craiova

L:1160. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \sin \frac{2n}{4n^2 - 1} \right) \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2)$.

Adrian Stan, Buzău

L:1161. Fie $a, b > 0$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir cu termeni pozitivi astfel încât $\sum_{k=1}^n x_k^a + b \ln x_{n+1} = 0, \forall n \geq 1$.

Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ est eonvergent și calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n^b$.

Mihaly Bencze, Brașov

L:1162. a) Rezolvați în mulțimea $(1, \infty)$ ecuația $\log_{x+1} x + \log_{x+2}(x+1) = \log_3 2 + \log_4 3$

b) Rezolvați în mulțimea $(0, 1)$ ecuația $\log_{x+1} x + \log_{x+2}(x+1) = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{2}$

Grigorie Dan Lucian, Mihai Călugăru, Craiova

L:1163. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{9^x - 1}{9^x + 1} - x$. Stabiliți paritatea și tabelul de variație al funcției f și rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

Ionel Tudor - Călugăreni, Giurgiu

■ Clasa a XII-a

L:1164. Să se calculeze: $I = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos x}{x^2} dx$.

Diaconu Radu, Sibiu

L:1165. Determinați funcțiile continue $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^1 f(x)(2x^2 - f(x)) dx = \frac{1}{5}$.

Florin Rotaru, Focșani

L:1166. Fie $f: [0; 1] \rightarrow [0; \infty)$ o funcție derivabilă știind că $f(1) = 0$ și f' continuă. Să se arate că

$$144 \left(\int_0^1 x^3 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Florin Rotaru, Focșani

L:1167. Calculați: a) $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 + 1}} dx$; b) $\int \sqrt[n]{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 + 1}} dx$; $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Preda Oana, Craiova

L:1168. Fie $f(x) = e^x + 4x^3 + 1$. Calculați $\int_2^{e+5} f^{-1}(x) dx$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1169. Fie $\lambda \geq 0, n > 0$. Calculați $\int \frac{e^{nx} - \lambda}{e^{nx} + \lambda} dx, x \in \mathbb{R}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1170. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \sin^3 x + 2(1 - \sqrt{2}) \cos^3 x + 3\sqrt{2} \cos x} dx$.

Emil C. Popa, Sibiu

L:1171. Să se calculeze pe $(0, \infty)$ integrala: $\int \frac{x^{\ln a} (b \ln a \ln x + c)}{x(a^{\ln x} + b \ln a \ln x + b + c)} dx$, unde $a > 0, a \neq 1, b, c \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1172. Calculați următoarea limită de funcție: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{1}{1 + \sin t \cos t} dt$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

L:1173. Să se rezolve în \mathbb{C} , ecuația: $2024x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

L:1174. a) Rezolvați în \mathbb{R} , ecuația $t^3 - 5t^2 + 53t - 196 = 0$.

b) Arătați că ecuația $3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 20x - 16 = 0$ nu are toate rădăcinile reale și apoi rezolvați ecuația

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

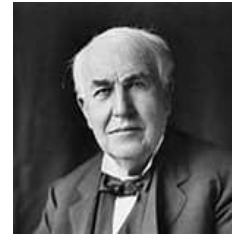
L:1175. Fie $f \in \mathbb{R}[X], f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d, a > 0$ și rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Arătați că

$$f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) \geq 0. \text{ În ce caz avem egalitate?}$$

Sorin Pîrlea, Meda Iacob, Craiova

„Many of lifes failures are people who did not realize how close they were to succes when they gave up. ”

Thomas Edison
(1847- 1931)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submitted solutions should arrive before February 01, 2025.

PROPOSALS – QUICKIES

Q107. Proposed by D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - \sqrt[n]{n!} \sqrt{(2n-1)!!} \sin \frac{\pi}{\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n]{n!}}$.

Q108. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania. If $a_k > 0, k = \overline{1,6}$, such that $\sum_{k=1}^6 a_k = 3$, then

prove that $\prod_{k=1}^6 a_k (a_k + a_{k+1})(a_k + a_{k+1} + a_{k+2}) < 1$, where $a_{6+k} = a_k, k = \overline{1,2}$.

Q109. Proposed by Laura Molea and Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania. If $a, b, c \in R$, then

prove that $\sum \frac{a^3 + a}{a^4 + a^2 + 1} \leq 2$.

Q110. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania. If $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$, then prove that

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{4} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2 - 1}}{a_2 + a_3} + \frac{\sqrt{a_2 a_3 - 1}}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{\sqrt{a_n a_1 - 1}}{a_1 + a_2}.$$

Q111. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. If $a, b, c > 0$, then prove that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{6\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 5.$$

SOLUTIONS - QUICKIES

Q99. Proposed by Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania. If $a, b > 0$, then prove that

$$\frac{(a^4 + b^6)(5b^6 + 3)}{a^3 b^3} > \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Solution 1 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{(a^4 + b^6)(5b^6 + 3)}{a^3 b^3} = \frac{a^4 + b^6}{a^3} \cdot \frac{5b^6 + 3}{b^3} = \left(a + \frac{b^6}{a^3}\right) \left(5b^3 + \frac{3}{b^3}\right) \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{b^6}{27}} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{5}{b^6}} = \\ &= 16\sqrt[4]{\frac{5}{27}} \stackrel{(1)}{>} \frac{8\sqrt{5}}{3} = RHS. \end{aligned}$$

We used above: $\left(a + \frac{b^6}{a^3}\right)\left(5b^3 + \frac{3}{b^3}\right) \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{b^6}{27}} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{5}{b^6}}$, which yields by:

$$a + \frac{b^6}{a^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{b^6}{27}} \text{ si } 5b^3 + \frac{3}{b^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{b^6}} :$$

$$\text{i) } a + \frac{b^6}{a^3} = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{b^6}{a^3} \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b^6}{a^3}} = 4\sqrt[4]{\frac{b^6}{27}}, \text{ with equality iff } \frac{a}{3} = \frac{b^6}{a^3}.$$

$$\text{ii) } 5b^3 + \frac{3}{b^3} = 5b^3 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{b^3} \geq 4\sqrt[4]{5b^3 \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{b^3}} = 4\sqrt[4]{\frac{5}{b^6}}, \text{ with equality iff } 5b^3 = \frac{1}{b^3}.$$

$$(1): 16\sqrt[4]{\frac{5}{27}} > \frac{8\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{\frac{5}{27}} > \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow 16 \cdot \frac{5}{27} > \frac{25}{81} \Leftrightarrow 16 > \frac{5}{3}.$$

The inequality is strictly. The solution is complete.

$$\text{Solution 2 by author. } a^4 + b^6 = \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{6} + b^6 > 4\sqrt[4]{\frac{a^{12}b^6}{36}};$$

$$b^6 + \frac{3}{5} = b^6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} > 4\sqrt[4]{b^6 \cdot \frac{1}{900}};$$

$$(a^4 + b^6)(5b^6 + 3) > 5 \cdot 16 \cdot 4\sqrt[4]{\frac{a^{12}b^{12}}{36 \cdot 900}} = \frac{80a^3b^3}{6\sqrt{5}} = \frac{8a^3b^3\sqrt{5}}{3}; \frac{(a^4 + b^6)(5b^6 + 3)}{a^3b^3} > \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Q100. Proposed by Gheorghe Molea, Curtea de Argeş, Romania. If $a, b, c, k > 0$, such that $a^2 + b^2 + c^2 = 3k$, then prove that $2k^2(ab + bc + ca) - abc(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3k^3$.

$$\text{Solution by author. } (3k)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = \left(a^2 a^{\frac{1}{2}} + b^2 b^{\frac{1}{2}} + c^2 c^{\frac{1}{2}}\right)^2 \stackrel{C-B-S}{\leq}$$

$$\stackrel{C-B-S}{\leq} \left[\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(b^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(c^{\frac{3}{2}}\right)^2\right] \left[\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(c^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] = (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c);$$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{9k^2} \geq \frac{1}{a + b + c}; \frac{9abc(a^3 + b^3 + c^3)}{9k^2} \geq \frac{9abc}{a + b + c};$$

$$3k^3 + abc(a^3 + b^3 + c^3) \geq 2k^2(ab + bc + ca); 2k^2(ab + bc + ca) - abc(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3k^3.$$

Equality occurs iff $a = b = c = \sqrt{k}$.

Q101. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania. If $m, n, p, x, y, z > 0$, such that $mx + ny + pz = xyz$, then prove that $(x + y + z)^2 \geq (\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3$.

Solution 1 by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

$$LHS = (x + y + z)^2 \stackrel{SOS}{\geq} 3(xy + yz + zx) \stackrel{Holder}{\geq} \left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}\right)^3 = RHS.$$

We used above: $mx + ny + pz = xyz \Leftrightarrow \frac{m}{yz} + \frac{n}{zx} + \frac{p}{xy} = 1;$

$$1 = \frac{m}{yz \cdot 1} + \frac{n}{zx \cdot 1} + \frac{p}{xy \cdot 1} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}\right)^3}{(yz + zx + xy)(1 + 1 + 1)} = \frac{\left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}\right)^3}{3(yz + zx + xy)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{\left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}\right)^3}{3(yz + zx + xy)} \Leftrightarrow 3(yz + zx + xy) \geq \left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}\right)^3.$$

Solution 2 by Marin Chirciu, Piteşti, Romania and by Gheorghe Molea, Curtea de Argeş, Romania, solved independently.

$$mx + ny + pz = xyz \Leftrightarrow \frac{m}{yz} + \frac{n}{zx} + \frac{p}{xy} = 1.$$

$$1 = \frac{(\sqrt[3]{m})^3}{y \cdot z} + \frac{(\sqrt[3]{n})^3}{z \cdot x} + \frac{(\sqrt[3]{p})^3}{x \cdot y} \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \frac{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3}{(y+z+x)(z+x+y)} = \frac{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3}{(x+y+z)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3}{(x+y+z)^2} \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq (\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3.$$

Solution 3 by author. From $mx + ny + pz = xyz$, AM-GM and Radon's inequality we have

$$1 = \frac{m}{yz} + \frac{n}{zx} + \frac{p}{xy} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{m}{\left(\frac{y+z}{2}\right)^2} + \frac{n}{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2} + \frac{p}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{m})^3}{\left(\frac{y+z}{2}\right)^2} + \frac{(\sqrt[3]{n})^3}{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2} + \frac{(\sqrt[3]{p})^3}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \stackrel{\text{Radon}}{\geq} \frac{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3}{\left(\frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} + \frac{x+y}{2}\right)^2} = \frac{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3}{(x+y+z)^2}.$$

Equality is obtained in the case of applying the AM-GM inequality when $x = y = z = \alpha$, and in the case of applying Radon inequality, when $\frac{m}{\left(\frac{y+z}{2}\right)} = \frac{n}{\left(\frac{z+x}{2}\right)} = \frac{p}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}$, so $m = n = p$, yields, $3m\alpha = \alpha^3$.

Hence equality occurs when $(x, y, z) = (\alpha, \alpha, \alpha)$ and $(m, n, p) = (\alpha^2/3, \alpha^2/3, \alpha^2/3)$

Remark. Gheorghe Molea, given the following generalization:

If $m, n, p, x, y, z > 0$, such that $mx + ny + pz = xyz$, then $3^{k-3}(x+y+z)^2 \geq (\sqrt[k]{m} + \sqrt[k]{n} + \sqrt[k]{p})^k$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$. For $k = 3$, we obtain the problem Q101.

Q102. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. If $a, b, c, d > 0$, then

prove that:
$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)}} + \sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+a)(c+a)(d+a)}} + \sqrt[3]{\frac{cda}{(c+b)(d+b)(a+b)}} + \sqrt[3]{\frac{dab}{(d+c)(a+c)(b+c)}} \leq 2.$$

Solution 1 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

From AM-GM Inequality we have:

$$LHS = \sum \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)}} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{3} \sum \left(\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{a}{a+d} + \frac{d}{a+d} \right) + \left(\frac{b}{b+d} + \frac{d}{b+d} \right) + \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (1+1+1+1+1+1) = 2 = RHS. \text{ Equality occurs if and only if } a = b = c = d.$$

Solution 2 by author. By adding the following inequalities

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} \right); \quad \sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+a)(c+a)(d+a)}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{d}{d+a} \right);$$

$$\sqrt[3]{\frac{cda}{(c+b)(d+b)(a+b)}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{d}{d+b} + \frac{a}{a+b} \right); \quad \sqrt[3]{\frac{dab}{(d+c)(a+c)(b+c)}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{d}{d+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) \text{ yields that}$$

$$\sum_3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)}} \leq \frac{1}{3}(1+1+1+1+1+1) = 2, \text{ q.e.d. Equality occurs iff } a = b = c = d.$$

Also solved by Daniel Văcaru, Pitești, Romania, Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania and Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Q103. Proposed by Florin Roțaru, Focșani, Romania.

Compute $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right] - \left[\sqrt{n^2 + 2n} \right]}{\sqrt[n]{n!}}$, where $[*] = \text{GIF}$.

Solution 1 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Since $n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < (n+1)^3$ and $n^2 < n^2 + 2n < (n+1)^2$, and by the Stirling approximation for $n!$, it follows

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right] - \left[\sqrt{n^2 + 2n} \right]}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n e^{-1}} = e$$

Solution 2 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

We have:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \text{ and analogously } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt[n]{n!}} = e \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0. \end{aligned}$$

Using $x-1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbf{R}$ we have:

$$\frac{2 \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2n} - 2}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{2 \left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right] - \left[\sqrt{n^2 + 2n} \right]}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{2 \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2n} - 1}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$\text{So, by squeeze theorem we obtain that } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right] - \left[\sqrt{n^2 + 2n} \right]}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Solution 3 by author. Since $n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} < n+1$, we deduce that $\left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right] = n$ and since $n < \sqrt{n^2 + 2n} < n+1$, we obtain that $\left[\sqrt{n^2 + 2n} \right] = n$.

$$\text{Hence, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right] - \left[\sqrt{n^2 + 2n} \right]}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Also solved by Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania.

Q104. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania. If $(a_n)_{n \geq 1}$ is a real positive sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = e$, then compute $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$.

Solution 1 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

Lemma. If $(a_n)_{n \geq 1}$ is a real positive sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lambda > 0$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (a_{n+1} - a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{\frac{a_{n+1}}{n}} + \sqrt{\frac{a_n}{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a_{n+1}}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}} =$$

$$= \frac{e}{\sqrt{e} + \sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2}, \text{ which results from: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1 - n} = e$$

$$\text{and } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = e \cdot 1 = e. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Remark. The generalization of the problem:

If $(a_n)_{n \geq 1}$ is a real positive sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lambda > 0$, then compute

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}).$$

Solution of generalization. Lemma. If $(a_n)_{n \geq 1}$ is a real positive sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lambda > 0$,

then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (a_{n+1} - a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{\frac{a_{n+1}}{n}} + \sqrt{\frac{a_n}{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a_{n+1}}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}} =$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}, \text{ which results from: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \stackrel{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1 - n} = \lambda$$

$$\text{and } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

$$\text{We deduce } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Solution 2 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

By the condition $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = e$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Then,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (a_{n+1} - a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{e}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{a_{n+1}}},$$

$$\text{and by the Stolz-Cezaro lemma, we obtain } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{a_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{a_{n+1} - a_n}} = \sqrt{\frac{1}{e}}.$$

$$\text{Therefore, the proposed limit results } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\text{Solution 3 by author. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \stackrel{C-S}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = e; \text{ let } x_n = \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \sqrt{n} \cdot \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} =$$

$$(a_{n+1} - a_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a_{n+1}}{n+1}} + \sqrt{\frac{a_n}{n}}}; \text{ so } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \cdot \frac{1}{\sqrt{e} \cdot 1 + \sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Also solved by Gheorghe Molea, Curtea de Argeş, Romania.

Q105. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

$$\text{If } a, b, c > 0, abc = 1, \text{ then prove that } \sum \frac{(a+b)^8 - a^8 - b^8}{(a+b)^6 - a^6 - b^6} \geq \frac{381}{31}.$$

Solution by author. Lemma. If $a, b > 0$ then

$$\frac{(a+b)^8 - a^8 - b^8}{(a+b)^6 - a^6 - b^6} = \frac{2(4a^6 + 14a^5b + 28a^4b^2 + 35a^3b^3 + 28a^2b^4 + 14ab^5 + 4b^6)}{(6a^4 + 15a^3b + 20a^2b^2 + 15ab^3 + 6b^4)}.$$

$$\text{Proof. } \frac{(a+b)^8 - a^8 - b^8}{(a+b)^6 - a^6 - b^6} = \frac{2ab(4a^6 + 14a^5b + 28a^4b^2 + 35a^3b^3 + 28a^2b^4 + 14ab^5 + 4b^6)}{ab(6a^4 + 15a^3b + 20a^2b^2 + 15ab^3 + 6b^4)}.$$

$$LHS = \sum \frac{(a+b)^8 - a^8 - b^8}{(a+b)^6 - a^6 - b^6} = 2 \sum \frac{4a^6 + 14a^5b + 28a^4b^2 + 35a^3b^3 + 28a^2b^4 + 14ab^5 + 4b^6}{6a^4 + 15a^3b + 20a^2b^2 + 15ab^3 + 6b^4} \stackrel{SOS}{\geq}$$

$$\stackrel{SOS}{\geq} 2 \sum \frac{127}{62} ab = \frac{127}{31} \sum ab \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{127}{31} \cdot 3 = \frac{381}{31} = RHS,$$

$$(SOS) \Leftrightarrow \frac{4a^6 + 14a^5b + 28a^4b^2 + 35a^3b^3 + 28a^2b^4 + 14ab^5 + 4b^6}{6a^4 + 15a^3b + 20a^2b^2 + 15ab^3 + 6b^4} \geq \frac{127}{62} ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 248a^6 + 106a^5b - 169a^4b^2 - 370a^3b^3 - 169a^2b^4 + 106ab^5 + 248b^6 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 (248a^4 + 602a^3b + 787a^2b^2 + 602ab^3 + 248b^4) \geq 0, \text{ equality iff } a = b.$$

$$(AM-GM) \Leftrightarrow \sum ab \geq 3, \text{ since } \sum ab \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \stackrel{abc=1}{=} 3. \text{ Equality iff } a = b = c = 1.$$

Also solved by **Gheorghe Molea, Curtea de Argeş, Romania.**

Q106. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

$$\text{In } \triangle ABC \text{ prove that } \sum \frac{\tan^3 \frac{A}{2}}{3 \tan^2 \frac{B}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{C}{2} + 1} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Solution 1 by author. Lemma. If $x, y, z > 0, xy + yz + zx = 3$ then $\sum \frac{x^3}{y^2 + z + 1} \geq 1.$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3, x + y + z \geq 3, x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 3 \text{ and}$$

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3 \cdot 3 = 9.$$

If $x, y, z > 0$ then $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \geq 3(xy^2 + yz^2 + zx^2)$. Indeed:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \geq 3(xy^2 + yz^2 + zx^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x \geq 2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + z^2x - 2zx^2) + (y^3 + x^2y - 2xy^2) + (z^3 + y^2z - 2yz^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + z^2 - 2zx) + y(y^2 + x^2 - 2xy) + z(z^2 + y^2 - 2yz) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-z)^2 + y(y-x)^2 + z(z-y)^2 \geq 0, \text{ equality iff } x = y = z.$$

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{x^3}{y^2 + z + 1} = \sum \frac{x^4}{xy^2 + xz + x} \stackrel{CS}{\geq} \frac{(\sum x^2)^2}{\sum (xy^2 + xz + x)} = \frac{(\sum x^2)^2}{\sum xy^2 + \sum xz + \sum x} \stackrel{Lema}{\geq} \\ &\stackrel{Lema}{\geq} \frac{(\sum x^2)^2}{\frac{1}{3} \sum x^2 \sum x + 3 + \sum x} = \frac{3(\sum x^2)^2}{\sum x^2 \sum x + 9 + 3 \sum x} \geq \frac{3(\sum x^2)^2}{\sum x^2 \sum x + \sum x^2 \sum x + 3 \sum x^2} = \\ &= \frac{3 \sum x^2}{\sum x + \sum x + 3} = \frac{3 \sum x^2}{2 \sum x + 3} \geq \frac{(\sum x)^2}{2 \sum x + 3} = \frac{p^2}{2p + 3} \stackrel{(1)}{\geq} 1 = RHS, \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{p^2}{2p + 3} \geq 1 \Leftrightarrow p^2 \geq 2p + 3 \Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (p - 3)(p + 1) \geq 0, \text{ since}$$

$p \geq 3, p = x + y + z \geq 3$. Equality iff $x = y = z = 1$.

Solution. $\sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sum \sqrt{3} \tan \frac{B}{2} \cdot \sqrt{3} \tan \frac{C}{2} = 3.$

Using **Lemma** for $(x, y, z) = \left(\sqrt{3} \tan \frac{A}{2}, \sqrt{3} \tan \frac{B}{2}, \sqrt{3} \tan \frac{C}{2}\right)$ we obtain:

$$\sum \frac{\left(\sqrt{3} \tan \frac{A}{2}\right)^3}{\left(\sqrt{3} \tan \frac{B}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \tan \frac{C}{2} + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3\sqrt{3} \tan^3 \frac{A}{2}}{3 \tan^2 \frac{B}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{C}{2} + 1} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{\tan^3 \frac{A}{2}}{3 \tan^2 \frac{B}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{C}{2} + 1} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}. \text{ Equality if the triangle is equilateral.}$$

Solution 2 by Gheorghe Molea, Curtea de Argeş, Romania.

Lemma 1. $\sum tg \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p} \geq \sqrt{3}$; **Lemma 2.** $\sum tg^2 \frac{A}{2} = \left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 - 2.$

Let $E = \sum \frac{tg^3 \frac{A}{2}}{3tg^2 \frac{A}{2} + \sqrt{3}tg \frac{C}{2} + 1} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Using the inequality $\sum \frac{x^3}{a} \geq \frac{(\sum x)^3}{3\sum a}$, for

$x = tg \frac{A}{2}, y = tg \frac{B}{2}, z = tg \frac{C}{2}, a = 3tg^2 \frac{B}{2} + \sqrt{3}tg \frac{C}{2} + 1, b = 3tg^2 \frac{C}{2} + \sqrt{3}tg \frac{A}{2} + 1,$
 $c = 3tg^2 \frac{A}{2} + \sqrt{3}tg \frac{B}{2} + 1,$ and the above lemmas we obtain:

$$E \geq \frac{\left(\frac{4R+r}{p}\right)^3}{3\left[3\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 - 6 + \sqrt{3}\left(\frac{4R+r}{p}\right) + 3\right]} = \frac{k^3}{3(3k^2 - 6 + k\sqrt{3} + 3)}, \text{ where } k = \frac{4R+r}{p} \geq \sqrt{3}.$$

It remains to prove that $\frac{k^3}{3(3k^2 - 6 + k\sqrt{3} + 3)} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow (k\sqrt{3} - 3)(k - 1)(k + 1) \geq 0$, which is true in conditions from above.

„Potențialul uman este același pentru toată lumea. Sentimentul tău „Nu valorez nimic”, este greșit. Total greșit. Te minți singur. Cu toții avem puterea gândului- deci, ce îți lipsește ? Dacă ai voință, atunci poți schimba orice. Se spune că ești propriul tău maestru ”

Dalai Lama

„Nu vreau să fiu un geniu, am destule probleme încercând să fiu om.”

Albert Camus
(1913- 1960)



6. Caleidoscop matematic

2024 AN BISECT

DOUĂMII DOUĂZECI ȘI PATRU

- II -

de Béla Kovács, Satu Ma

Scrierea cu combinări: $2024 = C_{23}^2 + C_{23}^3$ $2024 = C_5^3 + C_{25}^3 - C_{13}^3$

$$2024 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \dots + C_{23}^2 = C_{24}^3$$

În ultima relație 2024 apare ca o sumă de numere triunghiulare consecutive, respectiv este un număr tetraedral.

Nu este număr pătratic, nu este număr pentagonal, nici hexagonal și așa mai departe, îl vom întâlni printre numere 74-polygonale. 2024 este al 8 - lea termen al șirului $b_n = 36n^2 - 35n$.
1, 74, 219, 436, 725, 1086, 1519, **2024**, 2601, 3250,

Tot așa 2025 este al 9-lea număr 58-polygonal, ca termen al șirului $c_n = 28n^2 - 27n$.
1, 58, 171, 340, 565, 846, 1183, 1576, **2025**, 2530, , , , ,

În fine: 2023 este al 7-lea număr 98-polygonal, fiint un termen al șirului $a_n = 48n^2 - 47n$.
1, 98, 291, 580, 965, 1446, **2023**, 2696, 3465, 4330,

Se poate exprima folosind o singură cifră: $2024 = 7 \cdot (7 \cdot 7 - 7) \cdot 7 - 7 \cdot 7 + 7 + 7 + 7 : 7$
 $2024 = 88 \cdot (8 + 8 + 8) - 88$
 $2024 = (333 + 3 + 3 : 3)(3 + 3) + (3 + 3) : 3$

Scrierea lui 2024 într-o altă bază de numerație:

$$\begin{array}{lll} 2024_{10} = 11111101000_2 & 2024_{10} = 2202222_3 & 2024_{10} = 133220_4 \\ 2024_{10} = 31044_5 & 2024_{10} = 13212_6 & 2024_{10} = 5621_7 \\ 2024_{10} = 3750_8 & 2024_{10} = 2688_9 & 2024_{10} = 1580_{11} \\ 2024_{10} = 1208_{12} & & \end{array}$$

Se poate exprima cu tremenii șirului Fibonacci:

$$2024 = F(2) + F(3) + F(7) + F(9) + F(14) + f(17) = 1 + 2 + 13 + 34 + 377 + 1597$$

Ecuția de tip Pell $x^2 - 2023y^2 = 1$ are o soluție: $x = 2024$ și $y = 45$

Ecuția de tip Pell $x^2 - 2024y^2 = 1$ are o soluție: $x = 45$ și $y = 1$

și o altă soluție: $x = 4049$ și $y = 90$

Se poate scrie folosind toate cifrele o singură dată, crescător, respectiv descrescător:

$$2024 = 12 \cdot 34 \cdot 5 - 6 + 7 - 8 - 9$$

$$2024 = 1234 - 5 + 6 + 789$$

$$2024 = 9 + 8 \cdot 7 + 654 \cdot 3 - 2 - 1$$

$$2024 = (9 \cdot 8 \cdot 7 + 6 - 5) \cdot 4 + 3 + 2 - 1$$

Apare în inegalități:

$$1936 = 44^2 < 2024 < 45^2 = 2025$$

$$\sum_{k=1}^{63} k < 2024 < \sum_{k=1}^{64} k$$

$$\sum_{k=1}^8 k^3 < 2024 < \sum_{k=1}^9 k^3$$

$$\sum_{k=1}^{403} \ln k < 2024 < \sum_{k=1}^{404} \ln k \approx 2024.49$$

$$2.7176 < \left(1 + \frac{1}{2024}\right)^{2024} < 2.718 < e$$

$$1.1^{79} < 2024 < 1.1^{80}$$

$$\sum_{k=1}^{17} k^2 < 2024 < \sum_{k=1}^{18} k^2$$

$$\sum_{k=1}^{209} \sqrt{k} < 2024 < \sum_{k=1}^{210} \sqrt{k}$$

$$\sum_{k=1}^{816} \lg k < 2024 < \sum_{k=1}^{817} \lg k \approx 23.4$$

Scrierea numerelor cu cifrele lui 2024 în această ordine:

$$1 = (2 + 0 + 2) : 4$$

$$3 = 2^0 - 2 + 4$$

$$5 = (2 + 0) : 2 + 4$$

$$7 = 2 - 0! + 2 + 4$$

$$9 = 2 + 0! + 2 + 4$$

$$11 = 2 + 0! + 2 \cdot 4$$

$$2 = 2 + 0 \cdot 2 \cdot 4$$

$$4 = 2 + 0 - 2 + 4$$

$$6 = 2 \cdot 0 + 2 + 4$$

$$8 = 2 + 0 + 2 + 4$$

$$10 = 2 + 0 + 2 \cdot 4$$

$$12 = 20 - 2 \cdot 4$$

2024 = (exprimat cu numerele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14 legate cu operații elementare):

$$2024 = 14 + \frac{2 \cdot 4}{3 - \frac{2 \cdot 4}{3}} + \frac{3 \cdot 5}{4 - \frac{3 \cdot 5}{4}} + \frac{5 \cdot 7}{6 - \frac{5 \cdot 7}{6}} + \frac{11 \cdot 13}{12 - \frac{11 \cdot 13}{12}}$$

2024 cu cifrele romane: MMXXIV = MXII + MXII

Anul 2024 are 366 zile, 8784 ore, 527040 minute și 31.622.400 secunde.

2024! (factorial) este un număr uriaș având ultimele 503 cifre de zero. Este cu mult mai mare decât googol.

2^{2024} de asemenea este un număr foarte mare în care scriere apare grupa de cifre 666. Un astfel de număr se numește apocalipt.

Numărul **2024** apare în acest articol de 172 ori.

Bibliografie: www.numbersaplenty.com

profesor: *Béla Kovács, Satu Mare*

Curiozități cu numere

$$110 = 5^2 + 6^2 + 7^2$$

$$1001^5 = 15^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + 12^5 + 13^5$$

$$1729 = 9^3 + 10^3$$

$$1989 = 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

$$2025 = 45^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

$$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$$

$$110110 = 18^2 + 19^2 + 20^2 + \dots + 68^2 + 69^2$$

$$510510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$$

$$204^2 = 23^3 + 24^3 + 25^3$$

$$1300 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5$$

$$1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$$

$$1676 = 1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4$$

$$2592 = 2^5 \cdot 9^2$$

$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$

$$323323 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

$$548834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$$

din cartea „1,2,3...SHOW...”, de Eduard și Ioan Dăncilă

ORDINEA ... LOGICĂ

Găsiți care este ordinea logică din fiecare dintre cele patru rânduri și adăugați animalul lipsă din ultimul rând.



Din cartea “Marea carte a jocurilor minții”, de Ivan Moscovich

Animalul lipsă este măgarul deoarece dacă fiecarei animal i se pune în corespondență câte un număr avem următoarea serie: 12345623456345645656 această înseamnă că atunci când se repetă fiecare secvență, primul animal din serie se omite.

ORDINEA .. logică Răspuns:

Răspuns:

Care este cel mai mare număr scris cu trei cifre de 5 și cu trei cifre de 7 ?

de Florin Rotaru

$$75^{75^{75}}$$

O soluție ar fi aceasta:

$$75^{75^{75}}$$

Una și mai bună ar fi aceasta:

$$57^{57^{57}}$$

Și mai mare este acesta:

DEMONSTRAȚII FĂRĂ CUVINTE

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

trimisă de prof. Dumitru Preoteasa, Giurgiu



„În viață nu este nevoie să dai explicații.
Prietenii n-au nevoie de ele, dușmanii nu le cred, idioții nu le înțeleg.”

7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 34** al revistei de matematică „**SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăți calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e-mail: **adv_stan2005@yahoo.com**, fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul **mathtype (salvate în Word 2003-2007)**. **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste.** Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 35** al revistei „**SCLIPIREA MINTII**” va fi **01 MARTIE 2025**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

Țlevi rezolvitori

Economic „Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:

Clasa a VIII-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof. **Grigorie Dan Lucian**

Clasa a XI-a: Maria- Amina Tanasi; Prof. **Daniel Văcaru.**

Liceul Teoretic „Alexandru Marghiloman”, Buzău

Clasa a IX-a: Toma Ariana, Avram Alexandru, Turcu Alexandru, Bratosin Andrei, Marcu Gabriela, Șerban Mario; **Clasa a X-a:** Băbău Andrei, Tudor Octavian, Petcu Petru, Lupu Marian, Jig aTeodora, Dragu Florin;

Clasa a XI-a: Zaharia Darius Andrei, , Cazacu Rareș Ștefan, Radu Cătălina, Isăcilă Ema, Prof. **Stan Adrian Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova**

Clasa a XII-a: Alexie Mihnea, Turcu Stiolica Alexandru, Boiangiu Vlad; Prof. **Tutescu Lucian.**

Clasa a XI-a: Mușat Horia, Negret Bianca, Cîrstea Ștefan, Cernaianu Alex, Colan Mara, Oroviceanu Vlad, Prof. **Moanță Cristian. Clasa a XII-a:** Moanță Ștefan. Prof. **Goiceanu Dorina**

Liceul Energetic Craiova

Clasa a VIII-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof. **Grigorie Dan Lucian**

Scoala Gimnazială Mircea Eliade, Craiova:

Clasa a VI-a: Afrem Sara, Drăgan Raul, Pascu Ștefan, Geană Rebeca, Prisnel Sara. Prof. **Grigorie Dan Lucian.**

Scoala Preuniversitară de Măsură Smeeni, Buzău

Clasa a V-a: Nicula Andrei, Pacl Bogdan, Pipoi Antonia; **Clasa a VI-a:** Dobre Andrei, Stan Maria; **Clasa a VII-a:** Bunea Eliza, Neagu Delia, Manolache Andreea; Prof. **Ion Stănescu.**



Inspectoratul Școlar Județean Buzău
Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Buzău

Liceul Teoretic de Informatică "Alexandru Marghiloman" Buzău

organizează

Concursul Județean de Matematică

SCLIPAREA MINTII

Ediția a XVII-a, clasele IX-XII

12 APRILIE 2025



REVISTA SCLIPAREA MINTII

NR. 34 ANUL XVII - NOIEMBRIE 2024

Cuprins

1. Istoria matematicii	1
Aniversări ale unor matematicieni români	
Ionel Tudor, Adrian Stan	1
2. Articole și note matematice	5
Noi inegalități în triunghi de prof. dr. Mihaly Bencze	5
O generalizare a problemei lui Langley de Marius Drăgan	8
O nouă generalizare a dublei inegalități a lui Nicolae Ciorănescu de Gheorghe Ghiță	9
Noi inegalități de tip Finsler – Hadwiger de D.M. Bătinețu Giurgiu, Ionel Tudor- Călugăreni	10
O nouă demonstrație a inegalității Finsler – Hadwiger de D.M. Bătinețu – Giurgiu, Daniel Sitaru, Neculai Stanciu	11
O identitate legată de o inegalitate cunoscută de Titu Zvonaru, Neculai Stanciu	12
Ecuatii exponențiale și logaritmice nonstandard de Radu Diaconu	13
Două soluții ale unei probleme de Dorina Goiceanu, Sebastian Ilinca	15
În legătură cu problema L:1054 din Sclipirea Minții, nr. 32/2023 de Marin Chirciu	16
3. Probleme rezolvate	20
4. Probleme propuse	41
5. Quickies	49
6. Caleidoscop matematic	59
7. Poșta redacției	60



LEI 15 RON

editgraph
 editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 – 6601